arXiv:2602.09853v1 [math.FA] 10 Feb 2026

Brouwer-Schauder-Tychonoff不动点定理的推广与改进

程立新[1], Chulei Liu[1] 和 Wen Zhang*[1]

[1]厦门大学数学科学学院，中国厦门，*361005*

摘要

本文将局部凸空间上的 Brouwer-Schauder-Tychonoff不动点定理推广并改进如下：设 S 是关于 $p \in S$ 的紧星形子集，其凸性指标为 $\alpha_p > 0$。那么，每个连续自映射 $f: S \to S$都具有以下两种性质之一：

(a) 点 p是 f的不动点，即 $f(p) = p$；(b) f 有不可数多个不同的特征值和特征向量；也就是说，存在一个单射映射 $\lambda \mapsto x_\lambda$，从 $(0,1]$ 到 S，使得

$$f(x_\lambda) = p + \frac{1}{\lambda \alpha_p}(x_\lambda - p).$$

注意，局部凸空间中的闭有界星形集是凸的当且仅当 $\alpha = 1$，并且我们以更简洁的方式将巴拿赫空间中紧星形集上的布劳威尔型不动点定理推广到局部凸空间，从而这是吉洪诺夫不动点定理到紧星形集的一种简化和改进。

1 引言

众所周知，布劳威尔不动点定理 [3] 指出，在 $\mathbb{R}^n$ 中，任意非空紧凸集上的连续自映射都有一个不动点，并推动了许多数学领域的发展（例如，参见 [4]）。1930年，绍德尔 [15]将布劳威尔定理优雅地推广到了任意巴拿赫空间中的紧凸子集。此后，季霍诺夫 [16]又将其推广到了局部凸空间中的紧凸子集。1955年，克利 [11]给出了季霍诺夫定理的一个部分逆命题，即具有不动点性质的局部凸空间中的任意凸子集必然是紧的。因此，在讨论不动点性质时，紧性成为一个基本假设。这

*通讯作者：Wen Zhang。电子邮箱：lxcheng@xmu.edu.cn（L. Cheng），chuleiliu@stu.xmu.edu.cn（C. Liu），wenzhang@xmu.edu.cn（W. Zhang）。由国家自然科学基金（编号12271453）和福建省自然科学基金（编号2024J01026）资助。

促使许多学者开始研究非凸紧集。例如，参见[10], [13] 和 [14]。

作为一类重要的非凸集，星形集自然引起了人们的关注。许多学者研究了非扩张映射在这类集合上的不动点存在性。（例如，参见 [6], [7], [8] 以及 [9]中的第19.5节。）紧星形集上的任意连续自映射是否存在不动点？答案是否定的。Bing [2] 给出了Knill 锥 [12]上的一个没有不动点的连续自映射。这促使人们进一步关注某些更强的星形集类。

[5]提出了巴拿赫空间中星形子集的凸性指标 α ，使得一个闭有界星形子集是凸集当且仅当 $\alpha = 1$；此外还指出，在豪斯多夫距离意义下，所有具有正凸性指数的紧星形子集的集合，在所有紧星形子集的集合中是稠密的。通过使用巴拿赫空间中的铺砌、度量投影和重新赋范等工具， [5] 提出了以下关于巴拿赫空间中紧星形集的布劳威尔型不动点定理。

定理 1.1 ([5])。 设 X 是一个巴拿赫空间。若 S 是关于 $p \in S$ 的紧星形子集，且其凸性指标为 $\alpha_p > 0$，则每个连续自映射 $f\colon S \to S$ 都具有以下两种性质之一：

(a) 点 p 是 f的不动点，即 $f(p) = p$;

(b) f 有不可数多个不同的特征值和特征向量；也就是说，存在一个从$(0, 1]$ 到 S 的单射映射 $\lambda \to x_\lambda$ ，使得

$$f(x_\lambda) = p + \frac{1}{\lambda\alpha_p}(x_\lambda - p).$$

需要注意的是，星形集的凸性指标是一个独立于范数的代数概念。这促使我们将上述考察范围扩展到局部凸空间。本文简洁地实现了这一目标，并给出所需结果。

2 星形集的凸性指标

本节介绍局部凸空间中星形子集的凸性指标，并简要讨论其性质。本文假设所有拓扑空间都是豪斯多夫空间。

回顾一下，线性拓扑空间 X 的子集 S 称为关于 $p \in S$ 星形的，如果对于所有 $x \in S$，线段 $[p, x] \equiv \{\lambda x + (1 - \lambda)p\colon \lambda \in [0, 1]\} \subset S$。我们用 $\mathfrak{C}(S)$ 表示所有满足 S 关于 p星形的点 $p \in S$ 的集合。此外，如果 S 在 X中是闭的，那么我们可以定义如下扩展实值函数 $\rho_{S,p}$

$$\rho_{S,p}(x) = \inf\{r > 0 : x - p \in r(S - p)\}, \qquad x \in X$$

在这种情况下，我们称$\rho_{S,p}$ 为由 $S - p$. 生成的函数。容易验证，$\rho_{S,\rho}$ 是一个取扩展实数值的非负正齐次函数。

定义 2.1 （凸性指标）。 设 S 是线性拓扑空间 X中的非空星形集， C 是 S的闭凸包，即C =co(S)。那么

$$\alpha_p(S) = \inf_{x\in C} \frac{\rho_{C,p}(x)}{\rho_{S,p}(x)}$$

称为 S 关于 $p \in \mathfrak{C}(S)$的凸性指标，且

$$\alpha(S) = \sup_{p\in\mathfrak{C}(S)} \alpha_p$$

称为 S的凸性指标。

在不致引起混淆的情况下，我们通常分别将 α_p(S)和 α(S)简记为 α_p 和 α。

星形集的凸性指标具有如下几何表示。

{Prop2.2}

命题 2.2. 设 S 是局部凸空间中的一个星形子集，且 $p \in \mathfrak{C}(S)$。则 $\alpha_p = \sup\{r \in [0,1] : r(\mathrm{co}(S) - p) \subset S - p\}$.

证明。 令 $C = \overline{\mathrm{co}}(S)$。注意，对每个 $x \in C$， $\alpha_p\rho_{S,p}(x) \le \rho_{C,p}(x)$。由此可得 $\alpha_p(C-p) \subset S - p$。反过来， $r \in [0,1]$ with $r(C-p) \subset S-p$ 意味着

$$\frac{\rho_{C,p}(x)}{\rho_{S,p}(x)} \ge r, \qquad \forall x \in C$$

因此， $\alpha_p \ge r$。 □

设 X 是一个局部凸空间。用 $\mathfrak{S}(X)$表示 X 的所有非空有界星形子集所成的集合。假设 $\mathcal{U} = \{U_\iota\}_{\iota\in I}$ 是由凸零邻域构成的局部基。对于每个 $\iota \in I$，记相对于 U_ι 的闵可夫斯基泛函为 ρ_ι。注意， ρ_ι 是 X上的半范数。取定 $\iota \in I$，并定义 $d_\iota : \mathfrak{S}(X) \times \mathfrak{S}(X) \to [0,\infty)$如下：

$$d_\iota(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\rho_\iota(a-b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\rho_\iota(a-b)\right\}, \qquad A,B \in \mathfrak{S}(X).$$

容易看出， d_ι 是 $\mathfrak{S}(X)$上的一个伪度量。将由 $\{d_\iota\}_{\iota\in I}$诱导的 $\mathfrak{S}(X)$上的拓扑记为 τ_H。下文将证明，从 τ_H-拓扑意义上看，具有正凸性指数的有界星形子集非常丰富。

{Prop2.3}

命题 2.3. 所有非空且具有正凸性指数的有界星形子集构成的集合在$(\mathfrak{S}(X)\ \tau_H)$中稠密。

证明。令 $S \in \mathfrak{S}(X)$，并设C =co(S)。取 $p \in \mathfrak{C}(S)$，并固定一个有限子集 $I_0 \subset I$。由于 C 有界，对于任意有限集 $\{\varepsilon_\iota\}_{\iota\in I_0} \subset (0,\infty)$，存在 $t > 0$使得 $2t(C-p) \subset \bigcap_{\iota\in I_0}\varepsilon_\iota U_\iota$。令 $S' = S \cup (t(C-p) + p)$。显然， $S' \in \mathfrak{S}(X)$ 且 co(S') $- p \subset (1+t)\cdot(C-p)$，进而由命题 2.2 可得 $\alpha(S') \ge \alpha_p(S') > 0$。注意

$$d_\iota(S,S') = \sup_{s'\in p\cup(S'\setminus S)}\inf_{s\in S}\rho_\iota(s'-s) \le \sup_{s'\in p\cup(S'\setminus S)}\rho_\iota(s'-p)$$

$$\leq \sup_{s' \in t(C-p)+p} \rho_\iota(s'-p) \leq \sup_{c \in t(C-p)} \rho_\iota(c) < \varepsilon_\iota,$$

对 $\iota \in I_0$。证明完毕。 □

3 主要结果

以下定理是本文的主要结果。

{Theo3.1}

定理3.1. 设 S 是局部凸空间 X 中关于 $p \in S$ 的紧星形子集，其凸性指标为 $\alpha_p > 0$，则每个连续自映射 $f : S \to S$ 都具有以下两种性质之一：

(a) 点 p 是 f的不动点，即 $f(p) = p$;

(b) f 有不可数多个不同的特征值和特征向量；也就是说，存在一个从$(0, 1]$ 到 S 的单射映射 $\lambda \mapsto x_\lambda$，使得

$$f(x_\lambda) = p + \frac{1}{\lambda \alpha_p}(x_\lambda - p).$$

证明。令 $C = \overline{\text{co}}(S)$。由命题 2.2， $\alpha_p(C-p) \subset S-p \subset C-p$。给定$\lambda \in (0, 1],$，考虑连续自映射 g_λ： $\lambda\alpha_p(C-p) \to \lambda\alpha_p(C-p)$定义如下：

$$g(x) = \lambda\alpha_p(f(x+p)-p).$$

根据Tychonoff不动点定理，存在一个$z_\lambda \in \lambda\alpha_p(C-p)$，满足 $g(z_\lambda) = z_\lambda$。令 $x_\lambda = z_\lambda + p$。注意到 $\lambda\alpha_p(f(x_\lambda) - p) = x_\lambda - p$，并且

$$f(x_\lambda) = p + \frac{1}{\lambda\alpha_p}(x_\lambda - p).$$

若 $f(p) \neq p$，我们断言 $x_\lambda = x_{\lambda'}$ 蕴含 $\lambda = \lambda'$。否则，假设$x_\lambda = x_{\lambda'}$ 其中 $0 < \lambda < \lambda' \leq 1$。注意到

$$x_\lambda = f(x_\lambda) = p + \frac{1}{\lambda\alpha_p}(x_\lambda - p) = p + \frac{1}{\lambda'\alpha_p}(x_{\lambda'} - p) = f(x_{\lambda'}) = x_{\lambda'}.$$

于是 $(\lambda - \lambda')(x_\lambda - p) = 0$，进而 $x_\lambda = p$。因此， $f(p) = p$，这与假设矛盾。由此，我们证明了映射 $\lambda \mapsto x_\lambda$ 是单射。

□

以下结果是定理 3.1 的推论。

{Theo1.1}

定理 3.2。设 K 是局部凸空间 X中的非空紧凸集，且 f： $K \to K$ 是连续映射。若 f 不是恒等映射，则存在一点 $p \in K$，使得 f 有不可数多个不同的特征值和特征向量；也就是说，存在一个单射映射 $\lambda \mapsto x_\lambda$，从 $(0, 1]$ 到S，满足

$$f(x_\lambda) = p + \frac{1}{\lambda}(x_\lambda - p).$$

参考文献

[1] S. Akashi、W. Takahashi，希尔伯特空间中星形集上的非扩张映射的强收敛定理。《应用数学与计算》219(4)，2035-2040 (2012)。[2] R.H. Bing，难以捉摸的不动点性质。《美国数学月刊》76(2)，119-132 (1969)。[3] L. E. J. Brouwer，关于流形的映射。《数学年刊》71(1)，97-115 (1911)。[4] J. Casti，《五条黄金法则》，*20*世纪数学伟大理论——以及它们为何重要？Wiley (1997)。[5] L. Cheng、C. Liu、Z. Liu、W. Zhang，紧星形集上的布劳威尔型不动点定理。《数学年刊》394，19 (2026)。https://doi.org/10.1007/s00208-026-03315-w。[6] W.G. Dotson, JR，巴拿赫空间星形子集上非扩张映射的不动点定理。《伦敦数学会杂志》4(2)，408-410 (1972)。[7] L. Habiniak，不动点定理与不变逼近，《逼近理论杂志》56(3)，241-244 (1989)。[8] G. Hansen、I. Herburt、H. Martini、M. Moszyńska，星形集。《数学方程》94(6)，1001-1092 (2020)。[9] R. Haydon、E. Odell、Y. Sternfeld，关于一类星形集的不动点定理，适用于 c_0。《以色列数学杂志》38(1-2)，75-81 (1981)。[10] F. Jafari、V.M. Sehgal，非凸空间中的一些不动点定理。《国际数学与数学科学杂志》21(1)，133-137 (1998)。[11] V. Klee，凸集的一些拓扑性质。《美国数学会汇刊》78，30-45 (1955)。[12] R.J. Knill，锥、乘积与不动点。《数学基础》60，35–46 (1967)。[13] J.P. Penot，无凸性条件的不动点定理。法国数学会回忆录，60，129-152 (1979)。[14] M. Radhakrishnan、S. Rajesh、S. Agrawal，非凸集上的一些不动点定理。《应用与一般拓扑学》18(2)，377-390 (2017)。[15] J. Schauder，函数空间中的不动点定理。《数学研究》2(1)，171-180 (1930)。[16] A. Tychonoff，一个不动点定理。《数学年刊》111，767-776 (1935)。