arXiv:2602.09897v1 [math.GT] 10 Feb 2026

H精细曲线复形与精细弧复形的同伦类型

RYAN DICKMANN、ZACHARY HIMES、ALEXANDER NOLTE 和 ROBERTA SHAPIRO

Abstract. 曲面的精细曲线复形是一个单纯复形，其顶点为本质简单闭曲线，而 k-单形由 $k+1$ 互不相交的曲线组成。我们证明，精细曲线复形与曲线复形同伦等价。我们还证明，精细弧复形是可缩的。

1. Introduction

紧曲面$S_{g,\,b}$ 亏格为 g 且有 b个边界分支的曲面，记作 $\mathcal{C}^\dagger(S_{g,\,b})$，其精细曲线复形是一个单纯复形，顶点为$S_{g,\,b}$中的本质非周边简单闭曲线，而 k-单形由 $k+1$ 互不相交的曲线组成。精细曲线图最早由 Bowden–Hensel–Webb [2], 在文献中引入，它是精细曲线复形的 1-骨架。Bowden–Hensel–Webb 研究了精细曲线复形，并利用由光滑曲线生成的精细曲线图的全子图，证明 $\mathrm{Diff}_0(S_{g,\,b})$ 存在无界拟同态。这一结果与关于闭光滑流形 M（其中 $\dim(M) \neq 2,\ 4$）的 $\mathrm{Diff}_0(M)$ 的相关结果形成对照（参见 Burago、Ivanov 和 Polterovich [3] 以及 Tsuboi [19, 20]）。研究精细曲线图的一个主要目标，是运用几何群论工具研究经典的同胚群，正如 Bowden–Hensel–Webb 的这一结果所示。

精细曲线复形不同于研究得更为充分的单纯复形，称为曲线复形，记作 $\mathcal{C}(S_{g,\,b})$（例如参见 Ivanov [12] 以及 Masur 和 Minsky [13]），其区别在于，后者将同痕类 本质简单闭曲线作为顶点，而 k-单形是由一组 $k+1$ 同痕类组成的集合，并且这些同痕类存在两两不相交的代表元。$S_{g,\,b}$ 的曲线复形是一个维数为 $3g+b-3$ 的单纯复形，而精细曲线复形则是一个无限维单纯复形。

Harer [7,定理 3.5] 和 Ivanov [11, 引理 6.5 及定理 6.6]表明，如果 $b \neq 0$，则 $\mathcal{C}(S_{g,\,b})$ 的几何实现同伦等价于一个 $(2g+b-3)$-球面的楔和；如果 $b=0$，则同伦等价于一个 $(2g-2)$-球面的楔和。曲线复形的同伦类型在利用曲线复形研究曲面的映射类群时发挥着核心作用（例如参见 Harer [6] 以及 Harer [7]）。

在定理 1.1 中，我们将精细曲线复形的同伦类型与曲线复形的同伦类型联系起来。

定理 1.1。设 $S_{g,\,b}$ 是一个可定向曲面，具有 $g \geq 1$ 或 $b \geq 4$。将一条曲线映射到其同伦变形类的映射 $f\colon \mathcal{C}^\dagger(S_{g,\,b}) \to \mathcal{C}(S_{g,\,b})$ 是一个同伦等价。

特别地，当 $(g,\ b) \neq (0,\ b)$ 且 $b \leq 3$，$\mathcal{C}^\dagger(S_{g,\,b})$ 同伦等价于一个由 $(2g+b-3)$ 个球面组成的楔和时，如果 $b \neq 0$；而当 $b=0$. 时，它同伦等价于一个由 $(2g-2)$ 个球面组成的楔和

我们要求 $g \geq 1$ 或 $b \geq 4$，因为当 $g=0$ 且 $b \leq 3$时，在这些情形下，$\mathcal{C}^\dagger(S_{g,\,b})$ 和 $\mathcal{C}(S_{g,\,b})$ 都为空，因此该定理显然成立。我们注意到，$(g,\ b) = (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 4)$ 是特殊情形，因为某些版本的（精细）曲线复形允许相交于一点的曲线（前两种情形）或相交于两点的曲线（最后一种情形）构成单形。在本文中，我们只考虑由不相交性定义的单形。关于 3-流形情形下的类似结果，参见 Nariman[16,命题 2.3]。

与精细曲线复形并列，我们有精细弧复形。一条本质弧是（其像为）一个真嵌入$[0,1] \hookrightarrow S_{g,\,b}$ 使得该像不与$\partial S_{g,\,b}$. 共同围成一个圆盘。曲面$S_{g,\,b}$的精细弧复形，记作 $\mathcal{A}^\dagger(S_{g,\,b})$，是一个单纯复形，其 k-单形是由 $k+1$ 条互不相交的本质弧组成的集合。弧复形是一个单纯复形，其 k-单形

是由 $k+1$ 个真嵌入的本质弧的同痕类的同痕类组成的集合。Harer [6]与Hatcher [8] 此前证明，弧复形对大多数无穿孔的可定向曲面是可缩的。在本文中，我们对精细弧复形证明了一个类似的结果。

定理 1.2。 设 $S_{g,b}$ 是一个可定向曲面，具有 $b \geq 1$ 和 $(g,b) \neq (0、1)、(0、2)、(0、3)、(0、4)、(1、1)$。那么，精细弧复形 $\mathcal{A}^\dagger(S_{g,b})$ 是可缩的。

曲线、弧和有限曲线复形的同伦类型。 Harer [6] 利用曲线复形的高连通性，证明曲面的映射类群的同调会稳定下来。Hatcher 在 [8] 中的更一般定理，使得 Harer 的结果能够推广到更多类型的顶点集和更大的复形。

最近，第四位署名作者证明，有限曲线复形——其顶点与精细曲线复形的顶点相同，而 k-单形是由两两相交于有限多个点的 $k+1$ 曲线组成的集合——是可缩的（见 Shapiro [18]）。

论文大纲。 在第 2 节中，我们介绍与精细曲线图相关的一些术语，并证明一个关键命题。在第 3 节中，我们证明定理 1.1。在此过程中，我们证明定理 3.2，该定理指出，定理 1.1 中映射 f 在单形上的纤维是可缩的。最后，我们在第 4 节中证明精细弧复形是可缩的（定理 1.2）。

致谢。 RS 感谢 Dan Margalit、Daniel Minahan 和 Mladen Bestvina 的多次讨论。ZH 感谢 Jeremy Miller、Sam Nariman、Peter Patzt 和 Jennifer Wilson 的有益交流。AN 得到美国国家科学基金会项目编号 1842494、2502952 和 2005551 的资助。作者还感谢 Jes´us Hern´andez Hern´andez 和 Yusen Long 对初稿提出的意见。

2. Key definitions and a critical proposition

本节的主要目标是证明命题 2.1。该命题指出，给定任意有限的曲线或弧的集合，都存在一条任意接近给定曲线（分别为弧）的曲线（分别为弧），且它与集合中的每个元素仅在交叉相交处相交有限次（定义见下文）。曲面拓扑学中的经典重要结果在研究精细曲线复形时发挥着重要作用，而本文正是在此处运用这些结果。命题 2.1 汇总了 Shapiro [18] 中引理 4.1 和推论 4.2 的结果。为求完整，我们给出一个简要证明，并指出 [18] 中相应的结果和引理。

全文约定所有曲线和弧都是简单的，即没有自交点。每当提到弧时，我们都默认指本质弧。同样，每当提到曲面中的曲线时，我们都默认该曲线是本质的（即不是零伦的）且非周边的（即不同伦于曲面的边界分支）。

我们首先为 $u \cap v$ 中不是集合 $u \cap v$ 的聚点的点引入一些术语。

如果在 $c \in u \cap v$ 点处，两条曲线 u 和 v 在 c 的任意小邻域 N 内都可以经过同痕变形而彼此不相交，则称它们在该点相切 u；否则，u 和 v 在 c. 处交叉。这类交点的例子分别见图 1 的右侧和左侧。

命题 2.1. 设 $S = S_{g,b}$ 是一个可定向曲面，$\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 是 S. 中的曲线或弧的集合。设 y 是 S. 中的一条曲线（分别为一条弧）。那么存在 S 中的一条曲线（分别为一条弧）γ，使得：

(1) 对所有 i，$|\gamma \cap \gamma_i| < \infty$；*(2)* 对所有 i，所有交点 $\gamma \cap \gamma_i$ 都是交叉；*(3)* γ 包含于 y 的某个任意预先选定的开邻域中。

证明的思路是，我们将通过从 $S_{g,b}$中移除由 $\gamma_i \cap \gamma_j$ 的某些“问题”交点组成的紧且全不连通集 $\mathcal{E} \subset S_{g,b}$ 来构造 γ。我们将证明



FIGURE 1. 左：交叉的交点。右：相切的交点。

$\mathcal{E}$ 是全不连通的，这将借助维数论中的一个结果。下面我们先介绍一些背景信息（关于维数论的更多细节，可参见 Hurewicz 和 Wallman [10]或 Engelking [4]）。

如果空间 X 有由既闭又开的集合构成的基，则称其为零维。如果 X 是零维的，那么它全不连通；反之，若 X 局部紧且为豪斯多夫空间，则结论也成立（例如，参见 Arhangel'skii 和 Tkachenko [1, 命题3.17]）。不含任何区间的 $\mathbb{R}$ 的任意非空子空间，都是零维空间的一个例子（更多细节参见 Engelking [4, 1.2.5 Examples]）。在引理 2.3 的证明中，我们将需要以下关于零维空间之并的定理。

引理 2.2 (例如，Hurewicz 和 Wallman [10, 定理 II 2])。 可数个闭零维子空间的并本身是零维的。

现在，我们定义有限个曲线或弧之间的"问题"交点集合。给定曲面 $S_{g,\ b}$，上的一组互不相同的曲线或弧 γ_1、……、γ_n，我们按如下方式定义 $\mathcal{E}(\gamma_1$、……、$\gamma_k) \subset S_{g,\ b}$。我们将稍微滥用记号，把 γ_i 既视为从 $S^1 = I/(\{0\} \sim \{1\})$ 或 I 到 Σ 的单射，也视为这类映射的像；具体含义由上下文决定。

设 $E = \{p \in S_{g,b} \mid p \in \gamma_i \cap \gamma_j$，其中某个 $i,\ j\}$；这些就是弧与曲线之间的所有交点。两条曲线或弧在某个开区间上重合的交点不会造成问题，因此我们希望将其排除。为此，令 $P_i = \partial(\gamma_i^{-1}($ $E)) \subset I$；注意，若 γ_i 与其他所有 γ_j 不相交，则 P_i 为空。为了将这些点映回曲面，令 $\mathcal{E}(\gamma_1$、…… $\ldots$、$\gamma_k) = \bigcup_i \gamma_i(P_i)$。我们常简化记号，将 $\mathcal{E}(\gamma_1$、……、$\gamma_k)$ 记为 $\mathcal{E}$。

引理 2.3。 空间 $\mathcal{E}$ 是紧的且全不连通。

证明。 空间 $\mathcal{E}$ 是紧的，因为它是有限个紧空间的并集。

要证明 $\mathcal{E}$ 是全不连通的，只需证明它是零维的。首先，我们证明 $\gamma_i(P_i)$ 是零维的。由于 P_i 是子空间 I 的边界（因此也是$\mathbb{R}$），它不可能包含一个区间，所以它是零维的。此外，由于 γ_i 是一个嵌入，P_i 与 $\gamma_i(P_i)$ 同胚。同胚保持维数不变，因此 $\gamma_i(P_i)$ 是零维的。由于 $\mathcal{E} = \bigcup_i \gamma_i(P_i)$ 是有限个闭零维空间的并集，根据引理 2.2，$\mathcal{E}$ 本身是零维的。我们得出结论：$\mathcal{E}$ 是全不连通的。 □

命题 2.1 的证明部分涉及在 $S_{g,b}$ 中处理给定的曲线或弧 y 的正则邻域。如果 y 是一条曲线，则正则邻域同胚于一个环带。如果 y 是一条弧，则这样的邻域是 $S_{g,b}$中的一个带状区域。更正式地说，$S_{g,b}$ 中的一个带状区域 是$I \times I$的一个嵌入副本，其中 $\{0\} \times I, \{1\} \times I \subseteq \partial S_{g,b}$. 我们将假设 $I \times \{0\}$ 不与 $\partial S_{g,b}$一起围成一个圆盘。在命题 2.1 的证明中，我们还需要下面的引理。

引理 2.4。 设 $S = S_{g,b}$和 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 是 $S_{g,b}$. 中的一族曲线或弧。设 A 是 $S_{g,b}$ 中的一个闭环带（分别为带状区域），使得对所有 $i \neq j$，交集 $\mathrm{Int}(A) \cap \gamma_i \cap \gamma_j$ 都是 $\gamma_i \cap \mathrm{Int}(A)$ 的若干连通分支之并。那么，存在一条曲线（分别为一条弧） $\gamma \subset A$，使得对所有 i，$|\gamma_i \cap \gamma| < \infty$ 或 $|\gamma_i \cap \alpha| < \infty$，且所有此类交点都是交叉。

证明。 尽管曲线族中包含更多曲线，本引理的证明与 Shapiro 的引理 3.3 [18] 完全相同。关键在于 $\mathbb{R}^2$ 中弧的良性（例如参见 Moise [14, 第10]章）。□

我们还需要以下结果来证明命题 2.1。

引理 2.5 (Newman [17, 第五章，定理 14。3])。 设 $X = \mathbb{R}^2$ 为闭圆盘 $\bar{D}^2$，且 V是 X的闭子空间。假设 X 中的两点 x、y 位于 $X \setminus V$的不同连通分支中。那么，存在 V的一个连通分支 C，使得 x 和 y 位于 $X \setminus C$的不同连通分支中。

命题 *2.1* 的证明。 设 N 是 y 的一个正则邻域，它在 $S_{g,\ b}$中是闭的。我们将以一种使 γ 包含于 N中的方式来构造 γ。空间 N 同胚于一个环带或带状区域，具体取决于 y是曲线还是弧。设 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_n)$，并设 $N^* = N \setminus \mathcal{E}$。由于根据引理 2.3， $\mathcal{E}$ 是全不连通的， $\mathcal{E}$ 的每个连通分支都是一个点。因此，由引理 2.5 可知， N^*是连通的。由于 N是局部道路连通的，且 N^*是 N的连通开子空间，所以空间 N^*是道路连通的。

假设 N是一个带状区域。则存在一条弧 a，它位于 N^*中，并连接 ∂S_g的各个分支，$_b$位于 N中。我们可以取 a 的一个正则邻域，从而得到 N^*中的一个带状区域 A。现在可以应用引理 2.4，找到一条弧 γ，它位于 N 中，并且与所有 γ_i 相交的次数有限。

假设 N是一个环带。∂N 的每个分支中都存在一个不在 $\mathcal{E}$. 中的点。将这两个点视为 N^*中的点，并用一条弧 α将它们连接起来，该弧位于 N^*中。令 $x \in \alpha$，然后沿着 α 切开N^*，形成一个带状区域（其中有 α的两个副本）。由于该带状区域也是一个连通曲面，因此存在一条弧 c 连接 x. 的两个副本。将该带状区域重新粘合成 N^*； c 的端点粘合后形成一条曲线 γ'。令 A 为 N^*内 γ' 的一个正则邻域。由于 A 是一个环带，我们可以应用引理 2.4，找到一条曲线 γ，它位于 N 中，并且与每个 γ_i 相交的次数有限。□

3. Homotopy type of the fine curve complex

本节的目标是证明定理 1.1。为此，我们首先证明，在映射 $f\colon \mathcal{C}^\dagger(S_{g,\ b}) \to \mathcal{C}(S_{g,\ b})$ 下，单形 $\sigma \in \mathcal{C}(S_{g,\ b})$ 上的纤维是可缩的（第 3.2 节），然后完成定理 1.1 的证明（第 3.3 节）。我们在第 3.1 节开始，回顾一些背景信息，并确定关于单纯复形的一些约定。关于单纯复形的更多内容，可参见例如 Munkres [15, 第 1.1–1.3] 节。

3.1. **单纯复形**。给定一个单纯复形 X 和一个单形 $\sigma \in X$，我们用 $\dim(\sigma)$ 表示 σ 的维数。我们分别用 $\mathrm{link}(\sigma)$ 和 $\mathrm{star}(\sigma)$ 表示 σ 的环和（闭）星形。我们用 $X^{(k)}$ 表示 X 的 k-骨架。

我们将 X 的几何实现记作 $|X|$。当我们说单纯复形 X 具有某种拓扑性质时，我们指的是 $|X|$ 具有该性质。

点 $x \in |X|$ 用重心坐标表示为形式和 $\sum_{v \in X^{(0)}} t_v v$，其中 $t_v \in [0,1]$，除有限多个 t_v 外，其余均为零（这些 v 中满足 t_v 非零的元素构成 X 中的一个单形），且 $\sum_{v \in X^{(0)}} t_v = 1$。

设 X 和 Y 为单纯复形。空间间的映射 $g\colon |X| \to |Y|$ 若由单纯复形之间的单纯映射 $X \to Y$ 诱导，则称为单纯的。此时，我们也会滥用记号，用 g 表示诱导出 $g\colon |X| \to |Y|$ 的底层单纯映射 $X \to Y$。

对于 $k \geq 0$，组合 *k*-流形 M 是一个满足以下归纳性质的非空单纯复形。如果 $\sigma \in M$，则 $\dim(\sigma) \leq k$。此外，如果 $k - \dim(\sigma) - 1 \geq 0$，那么 $\mathrm{link}(\sigma)$ 是一个与某个（k–$\dim(\sigma)-1$）-球面或闭（$k - \dim(\sigma) - 1$）-球同胚的组合（k–$\dim(\sigma)-1$）-流形。与 k-球面同胚的组合 k-流形称为组合 *k*-球面。我们通常将组合 k–球面记作 $\mathbb{S}^k$。

根据单纯逼近定理（例如，参见 Munkres [15, 定理 16.1]）， $\pi_k(|X|)$ 的每个元素都可由一个单纯映射 $|\mathbb{S}^k| \to |X|$ 表示。因此，在本文余下部分中，

每当我们处理映射 $g\colon S^k \to |X|$ 时，都将默认把 S^k 视为组合k-球面 $\mathbb{S}^k$，并假设 $g\colon |\mathbb{S}^k| \to |X|$ 是单纯映射。

在定理 1.1 的证明中，我们需要以下命题，它给出了何时两个单纯复形之间的单纯映射是同伦等价的条件。

命题3.1 (例如 Hatcher 和 Vogtmann [9, 推论 2。7])。 设 $g\colon X \to Y$ 是单纯复形之间的单纯映射。若对所有单形 $\sigma \in Y$，子复形 $g^{-1}(\sigma)$ 都是可缩的，则g 是同伦等价。

3.2. **单形的原像是可缩的**。 本节的目标是证明定理 3.2，该定理指出， $\mathcal{C}(S_{g,\ b})$ 中一个单形的原像是可缩的。

给定 A in $\mathcal{C}(S_{g,b})$ 中的一个单形，令 $\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})$ 表示 $\mathcal{C}^\dagger(S_{g,b})$ 中的子复形 $f^{-1}(A)$。若对所有 i，$f(v_i)$ 都是 A 中的一个顶点，则单形$\{v_0, \dots, v_q\} \in \mathcal{C}^\dagger(S_{g,b})$ 属于 $\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})$。

定理 3.2。 设 $S_{g,b}$ 是一个具有 $g \geq 1$ 或 $b \geq 4$ 的可定向曲面，并设 A 是$\mathcal{C}(S_{g,b})$中的一个单形。那么 $\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})$ 是可缩的。

我们的主要工具是命题 2.1 和怀特海德定理。为此，我们先证明任意映射 $S^k \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})|$ 都同伦于一个映射，其像包含在由具有理想交点性质的曲线张成的单形中（引理 3.4）。然后，我们证明任意映射 $S^k \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})|$ 都可以进一步同伦变形为一个映射，其像包含在单个顶点的星中（引理 3.5）。

引理 3.3。 设 $S_{g,\ b}$ 是一个可定向曲面， $\Gamma = \{v_1, \dots, v_n\}$ 是其中的一个曲线族，$_b$. 那么存在一个曲线族 $v_1', \dots, v_n'$，使得对所有 i 和 j，

(1) $v_i \cap v_i' = \emptyset$ 或 $v_i = v_i'$，*(2)* 若 $v_i \cap v_j = \emptyset$，则：

(a) $v_i' \cap v_j' = \emptyset$ 且 *(b)* $v_i' \cap v_j = \emptyset$，以及 *(3)*

$|v_i' \cap v_j'| < \infty$，且所有交点都是交叉。

证明。 设 $v_1' = v_1$，并设 $\Gamma_1 = \Gamma = \Gamma \cup \{v_1'\}$.。考虑 v_2.。我们可以选取 v_2 的一个开正则邻域 T，使得若 v_j 不与 v_2 相交，则 v_j 也不与 T 相交。取一条位于 $T \setminus v_2$ 中的曲线 y。根据命题 2.1，存在一条包含在 y 的邻域 $T \setminus v_2$ 中的曲线 v_2'，使得：

(1) $v_2' \cap v_2 = \emptyset$，(2) 若 $v_j \cap v_2 = \emptyset$，则 $v_j \cap v_2' = \emptyset$，并且若 v_j' 已定义，则 $v_j' \cap v_2' = \emptyset$；

(3) 对于 $i < 2$，我们有 $|v_2' \cap v_i'| < \infty$，且 v_2' 与 v_i' 的所有交点均为交叉。

条件 (1) 源于 v_2' 属于 $T \setminus v_2$这一事实，条件 (2) 源于我们对 T的选择，条件 (3) 则由命题 2.1 得出。

现在我们考虑曲线集合 $\Gamma_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{v_1', v_2'\} = \Gamma_1 \cup \{v_2'\}$，并再次执行上述算法，这次使用 v_3 构造 v_3'，并令 $\Gamma_3 = \Gamma_2 \cup \{v_3'\}$.

我们以类似的方式继续，利用 $v_i \in \Gamma_{i-1}$ 构造 v_i'，并令 $\Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{v_i'\}$.

通过这种方式，我们构造了一个满足引理陈述中条件的曲线族 $\Gamma' = \{v_1', \dots, v_n'\}$。□

我们有引理 3.3 的如下推论。

引理 3.4. 任意映射 $\phi\colon S^k \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})|$ 同伦于一个单纯映射 $\phi'\colon S^k \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})|$，其像位于由一组曲线 $c_1, \dots, c_n$ 张成的全子复形中，使得对所有 i、j 均有 $|c_i \cap c_j| < \infty$，且任意两条曲线之间的所有交点均为交叉。

证明。 证明思路是将 $\phi(S^k)$流入由曲线 c_i张成的单形中。回想一下，不失一般性，我们可以假设 $\phi\colon S^k \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,\ b})|$ 由单纯映射 $\mathbb{S}^k \to \mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,\ b})$诱导。

由于 S^k 是紧的且 ϕ 连续， ϕ的像包含在由有限个顶点 b_1、……、b_n张成的单形内部。根据引理 3.3，存在曲线 $c_1 \ldots$、c_n，使得对于所有 i 和 j，或者 $c_i \cap b_i = \emptyset$，或者 $c_i = b_i$；若 $b_i \cap b_j = \emptyset$，则 $c_i \cap c_j = \emptyset$ 且 $c_i \cap b_j = \emptyset$；并且 $|c_i \cap c_j| < \infty$ 及所有交点都是交叉的。对于每个顶点 $v \in (\mathbb{S}^k)^{(0)}$，令 b_v 表示 $\phi(v)$，并令 c_v 为 c_1、……、c_n 中对应的曲线（即，若 $\phi(v) = b_i$，则 $c_v := c_i$）。映射 $\phi' \colon \mathbb{S}^k \to \mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})$将 v映至 c_v，它是单纯映射，因为 $\phi \colon \mathbb{S}^k \to \mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})$是单纯映射。

我们现在证明， $\phi \colon |\mathbb{S}^k| \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})|$ 与单纯映射 $\phi' \colon |\mathbb{S}^k| \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})|$同伦。考虑映射

$$H \colon |\mathbb{S}^k| \times I \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})|$$
$$\left(\sum_{v \in (\mathbb{S}^k)^0} t_v v, s \right) \mapsto (1-s) \sum_{v \in (\mathbb{S}^k)^0} t_v b_v + s \sum_{v \in (\mathbb{S}^k)^0} t_v c_v.$$

形式和$(1-s)\sum_{v\in(\mathbb{S}^k)^0} t_v b_v + s\sum_{v\in(\mathbb{S}^k)_0} t_v c_v$是 $|\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})|$ 中的一个点，且映射 H是连续的，因为若 $\{b_{v_0}, \ldots, b_{v_p}\}$是 $\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})$中的一个单形，则 $\{b_{v_0}, c_{v_0}, \ldots, b_{v_p}, c_{v_p}\}$ 也是一个单形。由于 $H(-,0) = \phi$，且映射 $H(-,1) = \phi'$的像包含在由 $c_1, \ldots, c_n$张成的全子复形中，结论随之成立。□

既然映射 $|\mathbb{S}^k| \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,\ b})|$ 可以经过同伦变形，使其像由两两相交次数有限的曲线张成，我们现在就可以消去剩余的交点了。曲面 S 中的一个双边形 是一个恰好由两条弧围成的圆盘，每条弧分别属于不同的曲线。关于双边形的更多细节，请参见 Farb 和 Margalit [5] 的第 1.2.4 节。

如果曲面 S 中的两条曲线 c_1 和 c_2 只存在交叉相交，且交点数量有限，并且它们的同痕类 $[c_1]$ 和 $[c_2]$ 在 $\mathcal{C}(S)$中构成一条边，那么 c_1 同伦于一条与 c_2不相交的曲线 c_1'。此外，可以通过移除 c_1 和 c_2 之间的所有双边形，从 c_1构造出 c_1'（更多细节请参见 Farb 和 Margalit [5] 中命题 1.7 的第一个证明）。这将是以下引理证明的主要思路。

引理 3.5. 设 $\phi \colon S^k \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})|$ 是一个映射。那么 ϕ 同伦于一个单纯映射 $\phi' \colon S^k \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})|$，其像包含在某个顶点的星形中。

证明。 由引理 3.4，可假设张成 $\phi(S^k)$ 的所有顶点都只有交叉交点（且交点数有限）；将这些曲线记为 $c_1, \ldots, c_n$。我们将证明， ϕ同伦于一个单纯映射，其像包含在 star(c_n) 中。

我们描述一种算法，通过逐个移除双边形来减少与 c_k 的总交数。取曲线 $c_1, \ldots, c_{n-1}$与 c_n.所形成的一个最内层双边形。这样的双边形可能不止一个，有些双边形之间可能无法比较，但这无关紧要。不失一般性，设这个双边形由 c_1 和 c_n. 形成。在 c_1 位于双边形内部的一侧，复制一条 c_1，使该复制曲线与所有其他曲线具有和 c_1相同的交叉模式；将这条曲线记为 c_1'.。这是可行的，因为曲线之间的所有交点都是交叉。注意，由于我们考虑的双边形是最内层双边形，任何与 c_1 不相交的曲线 c_i 也与该双边形不相交。（若某条曲线与该双边形相交但不与 c_1 相交，那么它会与 c_n 形成一个包含在原双边形内的双边形，这与原双边形是最内层双边形相矛盾。）现在沿 c_n 对 c_1' 做手术，使其不再形成所讨论的双边形。图 2 展示了这一过程。通过使用与引理 3.4 证明中类似的同伦，我们得到 $\phi \colon S^k \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})|$ 同伦于一个单纯映射 $\phi' \colon S^k \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})|$，其像包含在由 $c_1', c_2, \ldots, c_n$张成的全子复形中。

现在我们注意到以下几点：由于 $|c_1' \cap c_n| = |c_1 \cap c_n| - 2$，与 c_n 的总交数已经减少；与 c_n 的总交数有限；根据 A 的定义，所有顶点与 c_n 之间的最小交数为 0（这必然可以通过消去双边形来实现）。

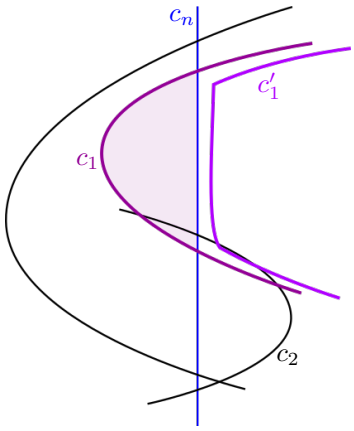

FIGURE 2. 我们的算法涉及寻找一个带有 c_n 的最内层双边形，例如图中由 c_1 形成的阴影部分，并在其上进行同伦变形。另一个最内层双边形是由 c_2. 形成的那个

通过反复应用上述双边形消去，我们将消去所有与 c_n.的交点。因此，c_1'、.....、$c_{n-1}' \in$ 星形(c_n)（其中 c_i' 可能需要经过多轮手术和替换）。

Ther因此， ϕ: $S^k \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,b})|$ 同伦于一个像包含在星形(c_n)中的单纯映射。 □

现在我们准备好证明定理 3.2。

定理 *3.2* 的证明。 我们将使用怀特海德定理来证明该定理。设 ϕ: $S^k \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,\ b})|$是一个连续映射。根据引理3.4和3.5， ϕ 同伦于一个单纯映射 ϕ': $S^k \to |\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,\ b})|$，其像包含在某个顶点的星形中。由于单纯复形中单形的星形是可缩的， ϕ' 是零伦的，因此 $\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,\ b})$是弱可缩的。根据怀特海德定理，由于 $\mathcal{C}_A^\dagger(S_{g,\ b})$是弱可缩的，它是可缩的。□

3.3. **定理 1.1 的证明**。 现在我们证明塌缩映射 $f : \mathcal{C}^\dagger(S_{g,\ b}) \to \mathcal{C}(S_{g,\ b})$是一个同伦等价。

定理 *1.1* 的证明。 注意，将曲线映射到其同痕类的映射 f: $\mathcal{C}^\dagger(S_{g,\ b}) \to \mathcal{C}(S_{g,\ b})$是一个单纯映射。设 σ 是 $\mathcal{C}(S_{g,\ b})$中的一个单形。 那么，根据定理 3.2， $f^{-1}(\sigma)$是可缩的。因此，根据命题 3.1 f 是一个同伦等价。□

4. HOMOTOPY TYPE OF THE FINE ARC COMPLEX

本节将证明精细弧复形是可缩的（定理 1.2）。尽管可以借助定理 1.1 证明中的思路来证明这一结论，我们仍将给出另一种证明，其灵感来自 Hatcher [8] 中的 Hatcher 流。

为此，我们使用怀特海德定理。首先，我们证明任意映射 $S^k \to |\mathcal{A}^\dagger(S_{g,\ b})|$ 都同伦于一个单纯映射，且其像包含在某个顶点的星中。我们遵循 [8] 中 Hatcher 的证明思路，但作了关键修改。

定理 *1.2* 的证明。我们将利用 Hatcher 流证明任意映射 ϕ: $S^k \to |\mathcal{A}^\dagger(S_{g,\ b})|$ 都是零伦的。然后，我们将应用怀特海德定理，得出 $\mathcal{A}^\dagger(S_{g,\ b})$ 是可缩的。

由于 S^k 是紧的， ϕ 的像包含在由有限个弧 $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ 张成的 $\mathcal{A}^\dagger(S_{g,\ b})$ 的全子复形的几何实现中。设 $\beta \in \mathcal{A}^\dagger(S_{g,\ b})^{(0)}$ 是一条弧，它

与每个 $\gamma_i \in \Gamma$ 都相交于有限多个点，且满足：1) 每个交点都是交叉；2) i 的所有 i 均满足 $\partial\beta \cap \gamma_i = \emptyset$ 。根据命题 2.1，保证存在这样一条弧。

回想一下，β的星形由 $\mathcal{A}^\dagger(S_{g,\ b})$ 中的单形 $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_p\}$ 组成，其中每个 α_i 都与 β 不相交，或等于 β。以下论述直接受到 Hatcher 在 [8]中的证明启发。我们将始终指出我们的情形与 Hatcher 的情形之间的差异。

替换弧的良定义性。在 Hatcher 流中，弧会被替换为其他弧，以此减少与 β 的相交数。我们必须考虑到，在我们的情形中，无法灵活地对弧进行同伦变形。因此，我们将预先确定在 Hatcher 流中如何替换弧。

我们先给 β.定向。由于 β 与 $\cup\gamma_i$ 之间的交点数有限，我们可以从 β 的首端开始，朝尾端方向依次为交点编号。现在我们将描述一种算法，根据上述编号的交点来替换弧。

第一个交点。假设第一个交点由 $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ 产生（如果 $l \neq 1,$，我们称之为多重交点）。选取一个邻域 N，使其位于 β 的交点与边界分支之间，并且 N 与所有其他 γ_i 不相交，同时包含 $\partial S_{g,b}$ 的相关部分；此外，在 β 的第一个交点处相交的弧（或多条弧）位于 N的边界上，如图 3 左图所示。然后，我们用 ∂N对每个 $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ 进行手术，如图 3 右图所示。

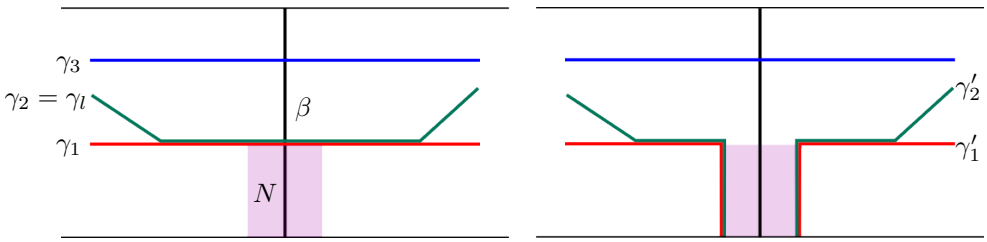

FIGURE 3. 左图：β 以黑色竖直显示，有几条 γ_i 与其相交。N 是 β 位于 $\partial S_{g,b}$ 与第一个交点之间部分的一个邻域，以粉色阴影标出。右图：通过与 ∂N.进行手术消解第一个交点

因此，经过手术后，每条弧 $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ 都会变成两条弧。至少有一条必须是本质的，因为如果两条都非本质，那么原来的 γ_i 本身就必定是非本质的。我们声称，对于每个 $\gamma_i \in \gamma_1, \ldots, \gamma_l,$，都存在一种本质的选择，选取手术后得到的弧 γ_i'，使得：1) $\gamma_i \cap \gamma_i' = \emptyset,$ 2) 如果 $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$，那么 $\gamma_i' \cap \gamma_j = \emptyset$ 对于 $\gamma_j \in \Gamma$成立；3) $|\gamma_i' \cap \beta| \leq |\gamma_i \cap \beta| - 1,$ 并且 4) γ_i' 包含在 ∂N 和 γ_i的一个小邻域中。

（1）和（2）可以得到保证，因为存在一条弧 γ_i'，它任意接近 γ_i，同时与 γ_i 以及任何与 γ_i 不相交的曲线都不相交。（3）利用了 γ_i与 β 之间的所有交点都是交叉。（4）可以实现，因为可以在 γ_i' 自身的任意小邻域内对其进行同痕。

现在，我们将集合 Γ 替换为 Γ'，其中通过上述构造，将集合 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$ 中的每条曲线 γ_i 替换为一条弧 γ_i'。我们注意到，与β 的交点总数减少了。此外，Γ' 中的曲线与 β 之间的交点可以再次编号。（注意，编号可能与先前的枚举不一致，具体取决于选取哪个代表。不过，所有同痕都可以在足够小的邻域内进行，因此交点编号的唯一差异只会出现在与 β 的多重交点分裂时。）

越过第一个交点。 现在，我们针对 Γ' 与β. 之间新的第一个交点重复上述步骤。我们继续这样做，直到手术弧与 β. 之间不再有交点。由于每次迭代算法都会严格减少交点数量，因此这一过程必然终止。

关键在于，这一算法预先执行一次，而手术弧和同痕变形弧的选取在证明余下部分中固定不变。因此，充分迭代这一算法后，我们可以构造一组弧 $\Gamma'' = \{\gamma_1'', \dots, \gamma_n\}$，满足：每个 γ_i''都属于β的星形；每个 γ_i''都是通过对 γ_i 与 β进行某种手术得到的；并且对于所有$i,\ j = 1,$ ……， n，若 $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$，则 $\gamma_i'' \cap \gamma_j'' = \emptyset$。

正在进行 Hatcher 流。我们通过考虑重心坐标，将像 ϕ中的一点 P 解释为曲线 $\{\gamma_i\}_I$ 的加权和。我们将通过假设像位于高维单形中并在各面之间流动，来定义像 ϕ 的流。

考虑由手术产生的弧，其中弧形成第一个交点，如“替换弧时的良定义性：第一个交点”一节所述。设 $P = \sum_{i=0}^{m} a_i\gamma_i \in \phi(S^k)$ 是由 $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ 张成的单形中的一点，以其重心坐标表示。无妨设 γ_1 是与 β. 形成第一个交点的弧之一。于是我们注意到，弧 $\gamma_1, \dots, \gamma_m, \gamma_1'$ 也张成一个单形，并线性地定义一个从包含 P 的面的流，至包含 γ_1'（但不包含 γ_1）的面： $H(P,t) = \sum_{i=2}^{m} a_i\gamma_i + (1-t)a_1\gamma_1 + ta_1'\gamma_1'$。我们可以通过设定 $x = \sum_{i=1}^{n} a_i\gamma_i$（再次使用重心坐标，且系数中可能有许多0）并定义……，将此流扩展到所有点 $x \in \phi(S^k)$

$$H(x,t) = \sum_{i=2}^{n} a_i\gamma_i + (1-t)a_1\gamma_1 + ta_1'\gamma_1'.$$

注意，任何不包含在由 γ_1 部分张成的单形内部的点都不会移动。

接着，我们对首次交点处其余属于这些弧的部分进行类似的流操作。（另请注意，所有对应于首次交点的流操作都可以同时进行，因为 $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ 中任意两个都不能张成同一个单形。）

完成上述流操作后， ϕ的像包含在由一组新的弧 $\Gamma' = \gamma_1', \dots, \gamma_l', \gamma_{l+1}, \dots, \gamma_n$张成的单形中；这些弧与$\beta$ 的总交数已经减少。然后，我们反复进行流操作，以减少与 β 的相交数，直到 ϕ 的像包含在 β的星形中, 为止。

既然连续映射下每个球面的像都同伦于一个包含在单个顶点的星中的球面，因此是零伦的，我们便应用怀特海德定理，得出对于所指定的曲面， $\mathcal{A}^\dagger(S_{g,b})$ 是可缩的。□

与 *Hatcher* 的证明的区别。我们的设定有所不同，因此需要对 Hatcher 在 [8], 中的论证做一些修改。为方便专家读者，我们在此简要说明。

我们的证明与 Hatcher 的证明有一处区别：每次进行手术时，我们都有不可数多个选择。证明中的“替换弧时的良定义性”一节处理了这一点。

另一处区别是，Hatcher 要求任意一对弧之间都不存在双边形。Hatcher 需要这一要求，因为他的证明是在同伦变形意义下进行的；而我们通过确保所有交点都是交叉，并且所有弧经手术后仍至少产生一条本质弧，免去了这一要求。

我们还在此明确指出，尽管“替换弧时的良定义性”一节中出现了同时进行手术的情况，但这种现象实际上不会在流的过程中发生。

我们的证明与 Hatcher 的证明之间最明显的区别之一是，Hatcher 为其弧指定了一组特定的端点 $V \subset \partial S_{g,\ b}$，并要求 V 中任意两个元素都不属于边界的同一个连通分支。Hatcher 将 V 中的点视为不可通过同痕变形越过的穿孔，因此一条本质弧可能与 $S_{g,\ b}$· 中标记的边界围成一个圆盘。如果是这种情况，那么通过流论证进行手术可能会导致不存在本质弧。然而，在我们的情形中不允许这样的弧，因为我们不将$\partial S_{g,\ b}$ 视为具有标记点。因此，我们不对构成精细弧图顶点的弧施加任何额外限制。

References

[1] 亚历山大·阿尔汉格尔斯基和米哈伊尔·特卡琴科。《拓扑群及相关结构》。英文。第 1 卷。《亚特兰蒂斯数学研究》丛书。新泽西州哈肯萨克：世界科学出版社；巴黎：亚特兰蒂斯出版社，2008 年。 ISBN：978-90-78677-06-2。[2] 乔纳森·鲍登、塞巴斯蒂安·沃尔夫冈·亨塞尔和理查德·韦布。“曲面微分同胚群上的拟态”。载于：《美国数学会杂志》35.1（2021），第 211–231 页。 DOI：10.1090/jams/981。[3] Dmitri Burago、谢尔盖·伊万诺夫和列昂尼德·波尔特罗维奇。“几何起源群上的共轭不变范数”。载于：《微分同胚群》。第 52 卷。《纯数学高级研究》丛书。日本数学会，东京，2008 年，第 221–250 页。[4] 雷沙德·恩格尔金。《维数论》。阿姆斯特丹；牛津；纽约；华沙：北荷兰出版公司；波兰科学出版社，1978 年，第 x + 314 页。 ISBN：0-444-85176-3。[5] 本森·法布和 Dan Margalit。《映射类群入门》。第 49 卷。普林斯顿数学丛书。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2012 年，第 xiv+472 页。 ISBN：978-0- 691-14794-9。[6] 约翰·L·哈勒。“可定向曲面映射类群的同调稳定性”。载于：《数学年刊》（第 2 辑）121.2（1985），第 215–249 页。 ISSN：0003-486X,1939-8980。 DOI：10.2307/1971172。 URL：https://doi.org/10.2307/1971172。[7] 约翰·L·哈勒。“可定向曲面映射类群的虚上同调维数”。载于：《数学发明》84.1（1986），第 157–176 页。 ISSN：0020-9910,1432-1297。 DOI：10.1007/BF01388737。 URL：https://doi.org/10.1007/BF01388737。[8] 艾伦·哈彻。“曲面的三角剖分”。载于：《拓扑学应用》40.2（1991），第 189–194 页。ISSN：0166-8641,1879-3207。 DOI：10.1016/0166-8641(91)90050-V。 URL：https://doi.org/ 10.1016/0166-8641(91)90050-V。[9] 艾伦·哈彻和凯伦·福格特曼。“曲面的系绳与同调稳定性”。载于：《代数与几何拓扑》17.3（2017），第 1871–1916 页。[10] 维托尔德·胡雷维奇和亨利·沃尔曼。《维数论》。英文。1948 年。[11] N. V. Ivanov。“曲线复形与 Teichm¨uller 模群”。载于：《数学科学进展》42.3(255)（1987），第 49–91 页，255。 ISSN：0042-1316。[12] 尼古拉·V·伊万诺夫。“曲线复形及 Teichm¨uller 空间的自同构”。载于：《国际数学研究通知》14（1997），第 651–666 页。 ISSN：1073-7928。 DOI：10.1155/S1073792897000433

URL: https://doi.org/10.1155/S1073792897000433.[13] Howard A. Masur 和 Yair N. Minsky。《曲线复形的几何 I：双曲性》。载于：《数学发明》138.1（1999），第 103–149 页。 ISSN: 0020-9910,1432-1297. DOI: 10.1007/ s002220050343. URL: https://doi.org/10.1007/s002220050343.[14] Edwin E. Moise。二维和三维几何拓扑。第 47 卷。数学研究生教材。施普林格出版社，纽约-海德堡，1977 年，第 x+262 页。[15] James R. Munkres。《代数拓扑基础》。艾迪生-韦斯利出版公司，门洛帕克，加利福尼亚州，1984 年，第 ix+454 页。 ISBN: 0-201-04586-9.[16] Sam Nariman。“关于可约三维流形微分同胚分类空间的有限性”。载于：《数学论坛·西格玛》13（2025），论文编号 e82，共 21 页。 ISSN: 2050-5094. DOI: 10.1017/fms.2025.38. URL: https://doi-org.proxy.lib.umich.edu/10.1017/fms.2025.38.[17] M. H. A. Newman。《平面点集拓扑学基础》。第 2 版。剑桥大学出版社，1951 年，第 vii+214 页。[18] Roberta Shapiro。《精细曲线图及其变体的双曲性、拓扑与组合学》。2025 年。 URL：https://www.arxiv.org/abs/2501.18705.[19] Takashi Tsuboi。“关于微分同胚群的一致完美性”。载于：微分同胚群。第 52 卷。《纯数学高级研究》。日本数学会，东京，2008 年，第 505–524 页。[20] TakashiTsuboi。“关于偶数维流形微分同胚群的一致完美性”。载于：《瑞士数学评论》87.1（2012），第 141–185 页。