arXiv:2602.09923v1 [math.GT] 10 Feb 2026

每种链环类型的 Reidemeister 变换次数的多项式上界

MARC LACKENBY

Abstract. 对于三维球面中的每种链环类型 K，我们证明存在一个多项式 p_K，使得任意两个具有 c_1 和 c_2 个交叉点的 K 图示之间，至多相差 $p_K(c_1) + p_K(c_2)$ 次 Reidemeister 变换。因此，判断给定的链环图是否表示 K 这一问题属于 NP 复杂度类，因而可以用确定性算法在指数时间内完成。对于各种链环类，我们明确计算出这个多项式 p_K。

Contents

1. 引言 2 2. 正规曲面 6 3. 层次结构 27 4. 把手结构 37 5. 弧表示的基本理论 40 6. 可容许的部分层次结构 47 7. 扩展部分层次结构 59 8. 分支曲面 62 9. 对容许曲面的修改 65 10. 平行性与包络 70 11. 欧几里得子曲面 85 12. 曲面的薄部分 103 13. 欧拉示性数论证 107 14. 断裂截面情形下的修改 109 15. 以多项式有界绑定权实现层次结构 113 16. 通过把手结构对链环作同痕 117 17. 从同痕到 Reidemeister 变换 120 18. 显式多项式 126 19. 八字结 130 20. 环面结 134 参考文献 135

作者部分获得了英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号为 EP/Y004256/1。为实现开放获取，作者已对本次投稿产生的任何作者接受稿件适用知识共享署名许可公共版权许可。

1. 引言

Haken、Hemion 和 Matveev 证明了纽结与链环的等价问题是可解的 [9, 12, 18]。但该问题的复杂度类还远未被充分理解。特别是，尚不清楚是否存在一种高效算法来判定两个链环是否相同。处理该问题最简单且吸引人的方法之一，是为在一个链环的两个图示之间转换所需的 Reidemeister 变换次数找到一个上界，且该上界是每个图示中交叉点数目的可计算函数。在 [5]，中，Coward 与作者给出了这样一个上界，从而提供了一种概念上简单的算法来解决链环等价问题。然而，该上界极为巨大：一个高度为指数级的指数塔。在本文中，我们证明，若固定链环类型，实际上可以找到一个作为交叉点数目的多项式函数的上界。

定理 1.1. 对于三维球面中的每种链环类型 K，存在一个多项式 p_K 具有以下性质。若 D_1 和 D_2 是 K 的两个链环图，分别有 c_1 个和 c_2 个交叉点，则它们可通过至多 $p_K(c_1)+p_K(c_2)$ 次 *Reidemeister* 变换相互转换。

这带来以下算法推论。对于链环类型 K， K-识别问题 是指判断给定的链环图是否表示 K。

定理 1.2. 对于每个链环类型 K， K-识别问题属于 *NP*。

根据定义，一个问题属于 NP 复杂度类，是指每当该问题的某个实例具有肯定答案时，就存在一份可在多项式时间内检验、并据此给出该肯定结论的证书。对于 K- 识别问题，该证书具有特别简单的形式。它由 K 的一个固定图，以及将给定输入图变为该固定图的一列 Reidemeister 变换组成。我们注意到，NP 问题可以通过检验所有长度受多项式界限制的可能证书，以确定性方式在指数时间内求解。

推论 1.3. 对于每个链环类型 K， K-识别问题可以关于给定链环图中交叉点的数目，以确定性方式在指数时间内求解。

定理 1.1 断言多项式 p_K 的存在性。下述结果表明，它是可算法计算的。

定理 1.4. 存在一种算法，以链环的图K 为输入，并输出多项式 p_K。

当 K 为八字结时，我们实现这一过程，并得到以下结果。

定理 1.5. 对于 K 八字结，我们可以令 $p_K(c) = (10^{108}c)^{15460896}$。

在论文末尾，我们将研究环面链环，并得到以下显式多项式。

定理 1.6. 当 K 为环面结时，我们可以令 $p_K(c) = (10^{11}c)^{299666}$。

此外，这一结果还有以下算法推论，该推论最近由 Baldwin 和 Sivek [1] 使用其他方法证明。

定理 1.7。 判定一个图是否表示一个环面结属于 *NP*。

证明。 给定一个具有 c个交叉点的链环图 D K 。我们需要证明，当 K 是环面结时，存在一份能够证实这一点的证书。设 K 是（p, q）环面结，其中 $0 < |p| \leq q$。注意， K 有一个标准图 D'，具有 $c' = q$（$|p| - 1$）个交叉点；根据 Murasugi 的一个定理，这实现了K的交叉数 [19]。我们的证书是一系列 Reidemeister 变换，其长度由 c的多项式函数所界定，并将 D 变为 D'。根据定理 1.7，将 D 变为 D' 所需的 Reidemeister 变换次数至多为（$10^{11}c$）^{299666} + （$10^{11}c'$）^{299666}。由于 $c' \leq c$，我们推得 Reidemeister 变换次数至多为 2（$10^{11}c$）^{299666}。□

一般而言， p_K 的度相当容易计算。不失一般性，$p_K(c) = (ac)^d$，其中 a 和 d 为常数。当 K 是非分裂链环时，度 d 完全取决于链环 K外部某类层次结构的长度。但系数 a 则与该层次结构的更精细细节以及链环有关。

是否存在一个适用于每个链环 K的通用 多项式 p，仍然是一个非常有趣的问题。如果这样的多项式存在，那么这将意味着链环等价问题属于 NP。这将显著改善我们对这一重要问题已知的计算复杂性。（关于其计算复杂性的最佳已知上界，见 [15] 。）

1.1. 证明概要。 本文可视为论文 [17] 的续篇。该文为平凡结的 Reidemeister 变换给出了一个明确的多项式上界。文中使用了多种技巧：Dynnikov 关于平凡结弧表示的工作 [8], 、正规曲面理论，以及对欧几里得分支曲面所承载曲面的详细分析。该文的论证概要如下。给定平凡结的一个图 D ，将其转换为矩形图。这确定了平凡结的一个弧表示，具体来说：固定三维球面的一个开书分解，其绑定圆是一个平凡结，页为开圆盘。若一个链环与绑定圆相交于有限多个点，并且在其他位置与每个开页的交集要么为空集，要么是真嵌入弧，则称其为弧表示。（有关矩形图和弧表示的术语，参见 [6], [8], 或第 5 节）。

平凡结围成一个生成圆盘，该圆盘可以摆放成一种与弧表示相适应的形式，称为容许形式。衡量圆盘复杂度的一种有效方法，是计算它与绑定圆相交的次数，我们称之为绑定权重。由链环的弧表示自然得到其外部的一种多面体结构。利用 Hass 和 Lagarias [10],关于此类多面体结构中正规曲面复杂度的著名估计，我们可以得到圆盘绑定权重的指数上界。在 [8], 中，Dynnikov 描述了一组变换，可用于降低生成圆盘的绑定权重，同时不增加该表示的弧指标。利用这一点，很容易得到 Reidemeister 变换次数的指数界。但通过更深入地运用正规曲面理论，可以将其改进为多项式界。如果生成圆盘的绑定权重很高，就能找到曲面中许多正规平行的部分。基于这一观察， [17]证明，只需一次变换，就能将生成圆盘的绑定权重降低一个确定的因子。由此便得到 Reidemeister 变换次数的多项式界。

其中许多思路可以推广到一般的非分裂链环情形。主要缺少的是生成圆盘。取而代之，我们使用链环外部的整个层次结构。我们证明，对弧表示进行多项式次变换后，可以使该层次结构中的所有曲面都具有多项式有界的绑定权重。该层次结构确定了 K外部的一种把手结构。将 K 的一个正则邻域以简单的把手结构重新粘接后，我们得到三维球面上的把手结构，并且很容易安排 K 的每个连通分支都穿过一个0-柄和一个1-柄。我们为 K选取一个固定图D' 。目标是用受控数量的 Reidemeister 变换将 D 变为 D' 。我们选取一份绘制在指定0-柄上的 D' 固定副本。这确定了纽结在该0-柄内的一种实现 K' 。论证的下一步是在此把手结构内选取一个固定的环境同痕，将 K 变为 K'。这可以通过一系列变换实现，例如将纽结的一部分滑过一个2-柄。每个2-柄都以扭曲的方式嵌入 S^3 中，但这种扭曲是可控的。因此，当纽结滑过这个2-柄时，可以对投影到水平平面所得图示中的 Reidemeister 变换数给出上界。这样，我们就得到了从给定图 D 变到固定图 D' 所需 Reidemeister 变换次数的上界。该上界是一个多项式函数 $p_K(c(D))$，其中 $c(D)$是 D的交叉数。因此，若给定 K的两个图 D_1 和 D_2 ，其交叉数分别为 c_1 和 c_2 ，那么通过 D' 将一个图变为另一个图所需的变换次数至多为 $p_K(c_1) + p_K(c_2)$。

1.2. **论文结构**。 在第 2 节中，我们介绍正规曲面理论的若干方面，并证明一些新结果。其中或许最重要的是定理 2.11，它断言，在边界不可压缩的紧致可定向不可约三维流形中，JSJ 曲面总能实现为基本正规曲面。本节的主要目标是证明，层次结构中的许多曲面都是指数受控的。这意味着，对于含有 t 个四面体的流形的任意三角剖分，都可以安排该曲面与 1-骨架至多相交 ab^t 次，其中 a 和 b是仅取决于三维流形和曲面的常数，而与三角剖分无关。接着，我们将在第 3 节中运用第 2 节的结果，证明除平凡结外，每个非分裂链环的外部都存在指数受控分层。这意味着，对于分层结构中具有其继承边界模式的每个流形，分层中的下一个曲面都是指数受控的。因此，对于给定的链环 K，我们固定这样一个分层结构 H 。尽管第 2 节和第 3 节侧重于三角剖分，使用把手结构也很方便。因此，我们在第 4 节中简要介绍把手结构。

第 5 节介绍了我们的另外两种主要工具：弧表示和矩形图。本节主要是说明性的，但也包含一些新结果。我们主要讨论曲面的容许形式，以及此类曲面所继承的奇异叶状结构。在第 6 节中，我们考察链环外部的一个部分层次结构，其中每个曲面都具有容许形式。我们为这一部分层次结构的外部定义多面体分解、把手结构和三角剖分。在第 7 节中，我们考察层次结构中的下一个曲面 S 。可以将其安排为正规曲面，并使其权重具有指数上界；进一步的修改则可使其成为容许形式。

在第 8 节中，我们介绍分支曲面。我们证明，容许曲面 S 自然地由分支曲面 B 承载。 B 的每个片都来自 S 的平行瓦片。

第9节主要讨论对容许曲面 S 所作的修改。这些修改由 Dynnikov [8], 提出，并借鉴了 Bennequin [2] 和 Birman-Menasco [3]的工作。在这里，我们考察 S 上的奇异叶状结构。奇点主要有三种类型：内部顶点（曲面的内部与绑定圆横截相交之处）、内部鞍点（相对于绑定圆补集上的圆值函数，曲面的内部呈鞍点状之处）以及极点（相对于该高度函数，曲面局部达到最大值或最小值之处）。然而， ∂S上还有另外两种奇点：边界顶点和边界鞍点。每个鞍点处都有四片叶子从中延伸出来。这些叶子称为分离曲线。它们通常终止于边界顶点或内部顶点。顶点的价 是从该顶点发出的分离曲线的数量。当存在价不超过 3 的内部顶点或价为 1 的边界顶点时，就会出现 Dynnikov 讨论的变换。他证明，当 K 是弧表示中的平凡结时，任意容许生成圆盘总是具有这样的顶点。随后，这些变换会修改链环和生成圆盘，从而降低圆盘的绑定权重。在第9节中，我们回顾这些变换，并另外引入一种修改。在存在价为 1 的边界顶点时，Dynnikov 能够将与该顶点关联的 K 两条弧滑过圆盘的一部分，从而降低 K的弧指标。在我们的语境中，这种变换并不适用。我们的曲面 S 的边界穿过层次结构中先前的曲面，因此不能简单地将 ∂S 移过 S 的一部分，同时保持其正常嵌入。我们转而引入一种称为楔形插入的替代变换。

上述每个变换至多只能使 S 的绑定权重减少 1 或 2。正如 [17], 所述，我们论证中的一个关键部分是执行这类变换，但使绑定权重大幅降低。当存在一组 S的顶点，且每个顶点的价都较低并具有平行星形时，这是可能的。在这里，顶点的星形是从该顶点发出的奇异叶状结构的叶子的并集。我们根据分支曲面 B来定义平行性。因此，在第 10 节中，我们将在许多具有低价和平行星形的顶点的背景下，重新考察第9节中的变换。这些修改会改变曲面以及分支曲面 B。重要的是，它们不会使 B 变得更加复杂。因此，我们为 B 定义复杂度的概念，并证明该复杂度不会增加。事实上，为了控制楔形插入过程中发生的情况，我们必须引入第二个分支曲面 B'。我们将 B 和 B'连同容许曲面一起，封装在一种称为容许包络的结构中。

上述论证适用于存在“许多”价较低且具有平行星形的顶点的情况。这里，对于内部顶点，“低”意为“至多为 3”。边界顶点“低价”的定义稍微复杂一些。我们的任务是证明存在许多这样的顶点，除非 S 的绑定权重是多项式有界的。第13节给出了一个相当简单的欧拉示性数论证，证明存在这些顶点；否则， S的双重 S_+ 中会有许多价为 4 的顶点。如果 S_+中存在这样的 4 价顶点，那么它们关联的瓦片会拼接在一起，形成 S_+ 的一个子曲面，并带有自然的

欧几里得度量。在第11节中，我们考察这个子曲面。在 [17], 中也曾考察过这个子曲面。当时可以证明，如果欧几里得子曲面足够大，那么其中就包含一个较大的矩形或环带，并且该矩形或环带的相对两边互相平行。随后论证表明，可以将这个矩形或环带拼接起来，形成一个正规环面，它是生成圆盘（某个倍数）的一个正规直和项。这与一个初始假设相矛盾，即该曲面没有这样的直和项。在这里，我们需要作出类似的论证，但技术上要复杂一些。在 [17], 中，可以假设生成圆盘作为正规曲面具有特别好的性质，而在我们的情形中，我们所能确定的只有 S 是指数受控的。因此，我们需要给出 [17]中论证的一个技术性更强的变体。不过，结论相同： S_+ 的欧几里得子曲面不能太大，因此实际上必定存在许多具有平行星形且价较低的 S 顶点。

我们在第 15 节将论证的这些不同部分拼接起来。给定 D 的一个图 K ，其交叉数为 c。对 D 作同痕，可将其变为弧指标至多为（$81/20$）c的矩形图 n 。随后，它确定了 K的一个弧表示 H 。我们为 K的外部构造了一个指数受控分层。在定理 15.1 中，我们证明存在一个多项式 q ，使得H 可以安排为绑定权重至多为 q（n）；实现这一点至多需要 n^2q（n）次交换移动以及对 K进行循环置换。具体做法是依次安排分层中的每个曲面，使其绑定权重均为多项式有界。

这个分层 H 在 K的外部诱导出一个把手结构。接着，我们附加 K的一个正则邻域，从而在三维球面上得到一个把手结构。我们已安排所有 2-柄都是容许曲面的纤细正则邻域，并且这些曲面的绑定权重均为多项式有界。在第 16、17 和 18 节中，我们使链环 K 同痕地穿过这个把手结构，直到它位于一个 0-柄内；同时还使其在 $\mathbb{R}^3$ 中的水平平面上的投影成为 K的某个固定图 D' 。考察 K 在该平面上的投影，只需多项式数量的 Reidemeister 变换，就能将给定的图 D 变为D'。至此，定理 1.1 得证。

在第 19 节中，我们详细介绍了这一构造在八字结上的应用。我们找到了一个显式的层次结构 H ，它受指数控制；据此，计算上文给出的多项式 q 相当直接。我们还给出了在把手结构中对 K 进行同痕时所需 Reidemeister 变换的数量上界。这便引出了定理 1.5 的证明，其中给出了 Reidemeister 变换的一个显式多项式上界。第 20 节针对环面结也进行了类似的分析。

1.3. **记号**。 如果 M 是一个紧流形，且 X 是 M的一个闭子集，那么沿着 X 切割得到的流形 $M\backslash\backslash X$ M X 是$M-X$的如下紧化。我们为 M赋予某个黎曼度量，然后 $M\backslash\backslash X$就是相对于其路径度量的 $M-X$ 的完备化。包含映射 $M-X\to M$ 诱导出一个映射 $M\backslash\backslash X\to M$。

2. Normal Surfaces

2.1. **定义**。 设 $\mathcal{T}$ 是紧致三维流形 M 的一个三角剖分。若曲面 S 正常嵌入于 M 中，并且与 $\mathcal{T}$ 的每个

四面体相交形成由三角形和方形组成的集合，如图 1 所示。三角形和方形被称为基本正规圆盘。

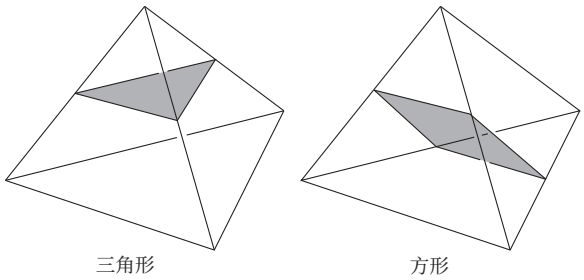

FIGURE 1. 四面体中的基本正规圆盘

正规曲面 S 可以用一组非负整数按如下方式编码。只需统计每个四面体中各类三角形和方形的数目。每个四面体中有 7 种三角形和方形。因此，若 $\mathcal{T}$ 包含 t 个四面体，则我们得到一个由 $7t$ 个非负整数组成的列表。每个整数是 S 的一个坐标，而完整列表称为 S 的正规曲面向量，并记为 (S)。

2.2. **曲面的权重**。设 M 是带有三角剖分 $\mathcal{T}$ 的紧致三维流形。设 S 是一个正常嵌入曲面，它与 $\mathcal{T}$ 的顶点不相交，并且横截地与各边相交。S 的权重 $w(S)$ 是它与各边的交点个数。

2.3. **边界图案**。我们将需要在存在边界图案的情形下开展正规曲面理论。因此，在本小节中，我们回顾一些与边界图案相关的术语。

紧致可定向三维流形 M 的边界模式 P 是嵌入于 ∂M 中的一组（可能为空的）互不相交的简单闭曲线与三价图。

嵌入于 M 中的曲面若与 P 不相交，则称为干净的。

我们称 (M, P) 是边界不可约的，如果对任意正常嵌入于 M 中的干净圆盘 D，都存在 ∂M 中的干净圆盘 D' 使得 $\partial D' = \partial D$。这等价于要求 $\partial M - P$ 是不可压缩的。

设 S 是 M 中与 P 横向相交的正常嵌入曲面。对于 S（相对于图案 P）而言，边界压缩圆盘是嵌入于 M 中的干净圆盘 D，满足

(1) $D \cap S$ 是 ∂D 中的一条弧 α；(2) $\partial D \backslash\backslash \alpha = D \cap \partial M$；(3) α 不会从 $S \backslash\backslash \alpha$ 中分离出一个干净圆盘连通分支。

若曲面 S（相对于图案）存在边界压缩圆盘，则称其为边界可压缩；否则称其为边界不可压缩。

我们称 S 在 M 中一个正常嵌入曲面的图案同痕，是指一种在整个过程中保持边界模式不变的环境同痕。若两个曲面相差这样一种同痕，则称它们是模式同痕的。

若存在 M 的一个同胚，其在 ∂M 上的限制与恒等映射模式同痕，并将一个曲面映到另一个曲面，则称嵌入于 M 中的两个曲面强等价。

2.4. **边界图案与正规曲面**。 众所周知，在相当宽松的假设下，不可压缩且边界不可压缩的曲面可以置于正规形式。以下这一结果版本（即 [18],中的推论 3.3.25）在存在边界模式的情况下实现了这一点。

命题 2.1. 设(M, P) 是一个带有边界模式的紧致可定向不可约边界不可压缩三维流形。设 $\mathcal{T}$ 是 M 的一个三角剖分，其中 P 是单纯的。设 S 是正常嵌入于(M, P)中的不可压缩、边界不可压缩曲面；它既不是2-球面，也不是与 P 相交于零个或两个点的边界平行圆盘。那么 S 模式同痕于一个相对于 $\mathcal{T}$为正规的曲面 S' 。此外，我们可以确保 S' 的权重不超过 S的权重。

2.5. **中的环带和环面**。 我们给出 [18]中的一些定义。

设 M 是一个带有边界模式 P的紧致可定向三维流形。

如果环带 A 与 P 的交集是 A内部中由若干条互不相交的核心曲线组成的集合（可以为空），则称其为几乎干净的。

A 中的环带 ∂M 称为项链环带，如果 P 与 ∂A 不相交，且将 ∂A 的连通分支分隔开，并且 A 中存在一条弧，连接 ∂A的两个连通分支，使得 $A \cap P$是一个单点。

正常嵌入 M 的干净环带，如果不可压缩且相对于图案边界不可压缩，并且不与 ∂M中的几乎干净环带平行，则称为本质的。注意，当$(M,\ P)$不可约且边界不可约时，干净环带是本质的，当且仅当它不可压缩且不与 ∂M中的几乎干净环带平行。

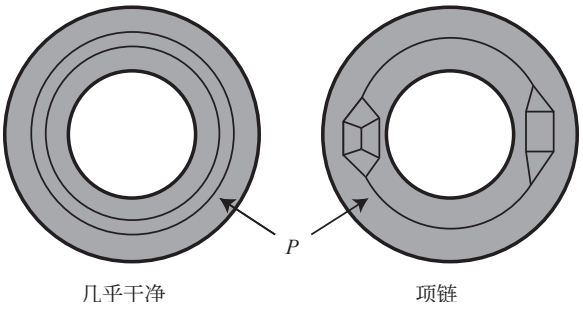

FIGURE 2. ∂M中的几乎干净环带和项链环带

正常嵌入$(M,\ P)$的环面 T，如果不可压缩且不与 ∂M中的环面平行，则称为本质的。（在此定义中， ∂M 中的这个环面是否干净无关紧要。）

我们称 $(M,\ P)$ 是简单的，如果它是不可约且边界不可约的，并且不包含任何正常嵌入的本质环面和任何正常嵌入的本质干净环带。

2.6. **正规曲面求和与基本曲面**。 设 M 是带有三角剖分 $\mathcal{T}$ 的紧致可定向三维流形。

我们称适当嵌入的正规曲面 S 是两个适当嵌入的正规曲面 S_1 和 S_2 的和，若它们的正规曲面向量满足 $(S) = (S_1) + (S_2)$。我们记作 $S = S_1 + S_2$。

若正规曲面 S 不能写成两个非空正规曲面的和，则称其为基本曲面。

以下结论由 Hass 和 Lagarias 在 [10]中证明。

命题 2.2。 设 M 是一个紧致三维流形， $\mathcal{T}$ 是M 的一个三角剖分，含有 t个四面体。那么，对于任意基本正规曲面 S， S 的每个坐标都不超过 $t2^{7t+2}$。

我们指出以下直接推论。

推论 2.3。 设 M、 $\mathcal{T}$ 和 t 如上所述。那么，对于任意基本正规曲面 S， $w(S) \leq t^2 2^{7t+6}$。

2.7. **正规曲面求和的拓扑解释**。 正规曲面求和有一种拓扑上的理解方式，如下所述。

设 S 是一个适当嵌入的正规曲面，它是正规曲面 S_1 与 S_2的和。我们可以对 S_1作一次小的图案同痕，并使其始终保持正规，从而使 S_1 与 S_2 随后横截相交于一组适当嵌入的简单闭曲线和弧。然后，从$S_1 \cup S_2$ 中移除 $S_1 \cap S_2$的一个正则邻域，再附加环带、莫比乌斯带和圆盘，将 S_1 与 S_2 在这个正则邻域中连接起来，即可得到 S 。沿着 $S_1 \cap S_2$的每条曲线和弧，都有两种可能的平滑方式，但只有一种能正确地得到正规曲面 S。这称为正规交换。如果采用另一种方式进行平滑，则称为非正规交换。在 $S_1 \cap S_2$每个连通分支的正则邻域中，都有一个沿该连通分支的 I-丛，它正常嵌入于 $M \backslash\backslash S$ 中，称为迹曲面。它是一个环带、圆盘或莫比乌斯带。片 是$(S_1 \cup S_2) \backslash\backslash (S_1 \cap S_2)$的一个连通分支。

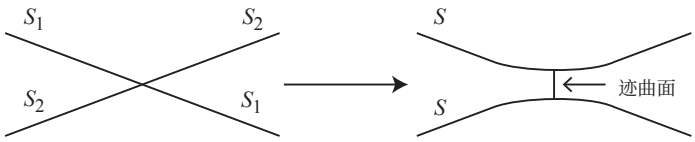

FIGURE 3. 正规曲面求和

若正规和 $S = S_1 + S_2$ 不能写成一个和 $S_1' + S_2'$，其中每个 S_i' 都与 S_i 模式同痕，且 $S_1' \cap S_2'$ 的连通分支少于 $S_1 \cap S_2$，则称其为约化形式。

正规曲面求和已有一套成熟的理论，我们记录其中一些主要结果，以供日后参考。这些结果基本上已在 [18] 的 4.1.8、4.1.36、6.3.20 和 6.3.21 中得到证明。

定理 2.4. 设 (M, P) 为一个带边界模式的紧致可定向不可约边界不可约三维流形。设 $\mathcal{T}$ 为 M 的一个三角剖分，其中 P 是单纯的。设 S 为一个正常嵌入的、不可压缩的、边界不可压缩的正规曲面，它在所有如下的正规曲面中具有最小可能权，这些正规曲面是

与之模式同痕。假设要么 S 是连通的，要么 S的任何连通分支都不是球面、干净圆盘、射影平面、边界平行环面或干净本质圆环。设 S 可以表示为正规和 $S_1 + S_2$，其中 S_1 与S_2 处于一般位置且非空，并且该求和为约化形式。则下列结论成立。

(1) 没有任何片是与 ∂M 不相交的圆盘，也没有任何圆盘与 ∂M 相交于一条干净的弧。*(2)* 每个片都是不可压缩且边界不可压缩的（相对于图案 P）。*(3)* 迹曲面在 $M\backslash\backslash S$中不可压缩。*(4)* S_1 和 S_2 都是不可压缩且边界不可压缩的（相对于图案 P）。*(5)* S_1 或 S_2 的任何连通分支都不是球面、干净圆盘或射影平面。*(6)* 如果 S 可定向，那么 S_1 或 S_2 的任何连通分支都不是与 ∂M中的几乎干净环带平行的干净环带。*(7)* 如果 S 可定向，且在强等价下具有最小权重，那么 S_1 或 S_2 的任何连通分支都不能与 ∂M 的环面分支 T 平行，使得 $|S \cap T| \leq 1$。*(8)* 如果 S 可定向，那么 S_1 或 S_2 的任何连通分支都不能与 ∂M 中和 P不相交的环面分支 T 平行。

请注意，[18] 中并未明确陈述 (3)，但它是 (1) 和 (2) 的直接推论。这是因为迹曲面的压缩圆盘必定平行于该曲面的边界，因此可用来构造一个压缩圆盘，使其对应于一个关联的片。根据 (2)，这个片是一个与 ∂M 不相交的圆盘，这与 (1) 矛盾。

[18]，中的命题 4.1.36 给出了 (4) 和 (5)，其假设是 S 连通。然而，这个假设仅用于排除 S 有一个球面、干净圆盘或射影平面连通分支的可能性。因此，我们在上述定理中采用这一替代假设。同样，[18]，中给出 (6) 和 (7) 的命题 6.3.20 和 6.3.21 也假设 S 连通。然而，作出这一假设是为了应用 [18] 中的命题 4.1.36，并排除 S_1 或 S_2 的一个连通分支是 S 的边界平行环面分支，或是 S 的干净本质圆环连通分支的可能性。不过，我们假设 S 没有这样的连通分支。

另请注意，(8) 与 [18] 中的命题 6.3.21 略有不同。该命题假设 $|T \cap S| \leq 1$，目的是证明 S_1 或S_2 的任何连通分支都不能与 ∂M 的环面分支 T 平行。该命题还假设 S 在强等价意义下具有最小权重。不过，我们注意到，当 T 与 P 不相交时，[18] 中命题 6.3.21 的论证表明，存在一种图案同痕，可以降低 S的权重。论证可归结为如下情形：S_1 和 S_2 如图 4 所示，排列在 T 附近；其中 S_2' 是S_2 的一个连通分支，与 T平行，并且沿 $S_1 \cap S_2'$的每条曲线，求和都朝同一方向进行。因此，存在一种同痕，将 S 变为 $S_1 +$（$S_2 - S_2'$），从而降低其权重。这种同痕可能会移动曲线 $S \cap T$，但由于 T 与 P不相交，它仍然是一种图案同痕。

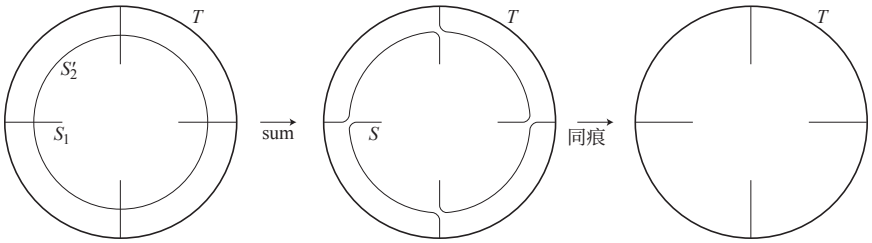

FIGURE 4. S 的同痕，其中一个直和项含有边界平行环面分量 S_2'

2.8. **最小权曲面的连通分支**。

定理 2.5。 设(M, P) 是一个紧致、可定向、不可约且边界不可压缩的带边界模式的三维流形。设 $\mathcal{T}$ 是 M 的一个三角剖分，其中 P 是单纯的。设 S 是正常嵌入于(M, P)中的一个不可压缩、边界不可压缩、可定向的正规曲面。当且仅当 S 的每个连通分支都在其模式同痕类中具有最小权重时， S才在其模式同痕类中具有最小权重。

证明。假设 S 与一个权重更小的正规曲面 S' 模式同痕。那么， S' 的某个连通分支的权重小于 S中对应连通分支的权重。因此，我们推断 S 的这个连通分支并非最小权重。

现在假设 S 具有最小权重。假设 S 的某个连通分支 S_1 不具有最小权重。令 S的其余连通分支为 S_2 。令 S_1' 和 S_2' 为正规曲面，它们在与 S_1 和S_2模式同痕的曲面中具有最小权重。因此， $w(S_1') < w(S_1)$，且 $w(S_2') \leq w(S_2)$。现在，根据 [13],中的命题 3.7，我们可以构造正规和 $S' = S_1' + S_2'$ ，且该曲面 S' 与 S模式同痕。但是， $w(S') = w(S_1') + w(S_2') < w(S_1) + w(S_2) = w(S)$，这与 S 具有最小权重的假设矛盾。

请注意， [13] 中的命题 3.7 并非针对带有边界模式的3维流形陈述的。然而，单纯边界模式 P 的存在不会影响其中的论证，因此 [13] 中的命题 3.7 仍然适用。□

2.9. **指数受控曲面与弱基本曲面**。我们需要考虑两类约束比基本曲面更少的正规曲面，称为弱基本曲面和指数受控曲面。这类曲面将在本文中发挥重要作用。

设 M 是带有边界模式 P的紧致可定向三维流形。设 $\mathcal{T}$是 M 的一个三角剖分，其中 P 是单纯的。若正规曲面 S满足以下条件，我们称其为弱基本曲面：

(1) S 的任何连通分支都不能表示为两个非空正规曲面 S_1 和 S_2之和，其中 S_2 与 P 不相交，且 S_2 是球面、射影平面、圆盘、环面或环带；(2) S 的任何连通分支都不能表示为非空正规曲面 $S_1 + S_2 + S_3$ 之和，其中 S_2 和 S_3 是彼此不相交的莫比乌斯带，且与 P不相交。

命题 2.6。 设 M 是一个带有边界模式 P 的紧致可定向三维流形。设 $\mathcal{T}$ 是 M 的一个三角剖分，其中 P 是单纯的，并设 t 是 $\mathcal{T}$ 中四面体的数量。那么，对于任意弱基本正规曲面 S

且不含 *2*-球面分支，

$$w(S) \leq t^2 2^{7t+6}(-\chi(S) + 2|S \cap P| + 2|S|).$$

证明。 令 $\{S_i\}$ 为基本正规曲面的集合。将 S 写成其各连通分支之和，然后将每个连通分支写成基本正规曲面之和。由此得到一个表达式

$$S = \sum_i n_i S_i$$

其中每个直和项都对应于 S某个连通分支的一个直和项。忽略那些未出现在此和中的曲面 S_i 后，我们可以假设，对于所有 i，都有$n_i > 0$ 。权重、欧拉示性数以及与P 的交点数在正规曲面求和下均具有可加性，因此

$$w(S) = \sum_i n_i w(S_i),$$

$$-\chi(S) = -\sum_i n_i \chi(S_i),$$

$$|S \cap P| = \sum_i n_i |S_i \cap P|.$$

因此，

$$-\chi(S) + 2|S \cap P| = \sum_i n_i(-\chi(S_i) + 2|S_i \cap P|).$$

由于 S 是弱基本的，对 S的每个连通分支，除至多两个例外外，每个 i 都满足 $-\chi(S_i) + 2|S_i \cap P| \geq 1$。例外出现在 S_i 为与 P 不相交的环面、射影平面、圆盘或环带时（此时至多一个 S_i 可以是这种形式，并且它是 S的该连通分支的唯一直和项），或者为一条M¨obius带时（此时对于 S的该连通分支，至多两个 S_i 可以是这种形式）。我们由此推出

$$\sum_i n_i \leq -\chi(S) + 2|S \cap P| + 2|S|.$$

推论 2.3 给出了每个基本正规曲面的权重的一个界。因此，

$$w(S) \leq t^2 2^{7t+6}(-\chi(S) + 2|S \cap P| + 2|S|),$$

即为所求。 □

设 M 是带有边界模式 P的紧致可定向三维流形。对于常数 c 和 k，我们称正常嵌入于 M 中的曲面 S 是(c, k)-指数受控的，如果对 M 的任意三角剖分 $\mathcal{T}$，其中 P是单纯的且具有 t 个四面体， S 都强等价于满足 $w(S') \leq ck^t$的某个曲面 S' 。如果一个曲面对某些 c 和 k是(c, k)-指数受控的，我们就称它是指数受控的。

命题 2.6 的一个直接推论如下。

推论 2.7. 设(M, P) 是带有边界模式的紧致可定向三维流形。设 S 是正常嵌入于 M 中的紧曲面。假设对于 M 的任意三角剖分 $\mathcal{T}$，只要 P 是单纯的， S 就与一个弱基本正规曲面强等价。那么 S 是(c, k)-指数受控的，其中$c = -\chi(S)$ $+ 2|S \cap P| + 2|S|$ 且 $k = 2^{15}$。

2.10. **构造弱基本曲面**。 如下结果表明，许多在拓扑上重要的曲面都可以化为这种形式。

定理2.8。 设(M, P) 是带有边界模式的紧致可定向不可约边界不可约三维流形。设 $\mathcal{T}$ 是 M 的一个三角剖分，其中 P 是单纯的。假设 M 不含正常嵌入的本质环面或本质干净环带。设 S 是正常嵌入于(M, P)中的不可压缩、边界不可压缩、可定向曲面。假设 ∂M 的每个不可压缩环面连通分支都与 P 不相交。还假设 S 的任何连通分支都不是球面、干净圆盘、干净环带，或与 P 相交两次的边界平行圆盘。那么 S 模式同痕于一个弱基本正规曲面。

证明。 根据命题 2.1， S 模式同痕于一个正规曲面。我们可以假设 S 在图案同痕意义下具有最小权重。根据定理 2.5， S 的每个连通分支在其模式同痕类中都具有最小权重。我们将证明 S 的每个连通分支 S' 都是弱基本的，从而证明该定理。

假设 S' 不是弱基本的。首先假设它可以表示为 $S_1 + S_2$，其中 S_2 与 P不相交，且是球面、射影平面、圆盘、环面或环带。我们可以假设这个求和处于约化形式。然而，根据定理 2.4， S_2 不可能是球面、射影平面、干净圆盘、干净环带或环面。例如，假设 S_2 是环面。根据定理 2.4 (4)，它不可压缩。根据假设，它必须平行于一个与 P不相交的环面边界分支。但定理 2.4 (8)排除了这种情况。

假设 S' 可以表示为可以表示为 $S_1 + S_2 + S_3$ ，其中 S_2 和 S_3 是与 P不相交的莫比乌斯带。根据定理 2.4 (4)， S_2 和 S_3不可压缩。每个莫比乌斯带的可定向双重覆盖都是正常嵌入的干净不可压缩环带，因此必定平行于 ∂M中的一个几乎干净环带。因此， M 是一个实心环面，而 P 是本质非经向曲线的一个（可能为空的）集合。我们可以在 M 上赋予一种塞弗特纤维化，使得 P 是纤维的并集。现在， $[S_2]$ 和 $[S_3]$ 都是 $H_2(M, \partial M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的非平凡元素，因此它们的和是同调平凡的。根据定理 2.4 (4)，和 $S_2 + S_3$ 不可压缩且边界不可压缩。它也是可定向的，因为它是同调平凡的。因此，它与一个垂直或水平曲面（可能再加上一些边界平行的连通分支）模式同痕。如果任何连通分支是垂直的，那么它就是一个干净环带，而该环带是非本质的，这与定理 2.4 (6)矛盾。如果任何连通分支边界平行，那么它是一个与图案相交两次的圆盘，因为任何其他连通的边界平行曲面要么是干净圆盘，要么是边界可压缩的，这与定理 2.4 (5)或(4)矛盾。如果任何连通分支是水平的，那么它就是一个子午圆盘。因此， S_2+S_3的每个连通分支都是圆盘。这不可能，因为 $S_2 + S_3$ 的欧拉示性数为零。□

2.11. **JSJ 曲面**。设 (M, P) 是一个带有边界模式的紧致可定向、边界不可约不可约三维流形。

设 F 是正常嵌入于 (M, P) 中的不可压缩环面，或不可压缩且边界不可压缩的干净环带。则若 M 中的任意不可压缩环面以及任意干净的不可压缩且边界不可压缩的环带都与某个和 F 不相交的曲面模式同痕，则 F是粗糙的。这是 [18] 的定义 6.4.12。

正常嵌入于 M 中的曲面 F 是*JSJ* 的，如果它要么是不平行于 ∂M 中某个干净环面的粗糙环面，要么是不平行于 ∂M 中某个几乎干净环带的粗糙干净环带。这是 [18] 的定义 6.4.29。

可以证明，任意一组 JSJ 曲面都可以通过图案同痕变形成两两不相交。因此，*JSJ* 曲面 的构造方法是：对每个 JSJ 曲面（按图案同痕等价）各取一个代表，并将它们排布成彼此不相交。当 (M, P) 不可约且边界不可约时，所得曲面在图案同痕意义下是良定义的。（参见 [18] 中的定理 6.4.31。）

令 F为 (M, P) 的 JSJ 曲面。赋予 $M\backslash\backslash F$由 ∂F 与 $(M\backslash\backslash F) \cap P$ 的并组成的边界模式。则 $M\backslash\backslash F$在此边界模式下的每个连通分支都是一个 *JSJ* 块。（Matveev [18] 称它们为*JSJ* 腔室。）

我们现在介绍两类正常嵌入的干净本质环带。正常嵌入于 M 中的干净本质环带 A，如果任意其他干净本质环带 A' 都可以通过模式同位，使得 $\partial A \cap \partial A' = \emptyset$，则称其为纵向。否则， A 称为横向。这是 [18]中的定义 6.4.13。注意，任何 JSJ 环带始终是纵向的，绝不是横向的。

我们现在回顾 [18],中的定理 6.4.42、引理 6.4.32、命题 6.4.35 和命题 6.4.41，它们结合起来得出以下结果。

定理 2.9。 设(M, P) 为一个带有边界模式的紧致可定向不可约边界不可约三维流形。则其 *JSJ* 块属于以下类型：

(1) 带有模式的简单三维流形；*(2)* 带有由纤维组成的模式的塞弗特纤维化流形；*(3)* I-丛，其模式与水平边界不相交，并且与每个垂直边界分支相交于其核心曲线的非空平行副本集合。

此外，如果一个 *JSJ* 块包含本质环面或干净本质纵向环带，则它属于第二类。如果一个 *JSJ* 块包含干净本质横向环带，则它属于第三类。

注 2.10。 注意，JSJ 环带或环面可以通过图案同痕避开任何正常嵌入的干净 M¨obius 带或克莱因瓶 F，理由如下。˜可定向双重覆盖 F 是一个正常嵌入的干净环带或环面。我们断言它不可压缩。否则，它会压缩成两个干净圆盘或一个 2-球面。若为两个圆盘的情形，(M, P) 的边界不可约性意味着，这两个圆盘各自的边界都将在 ∂M 中围成一个干净圆盘。∂M 中的一个圆盘可以延伸，使其边界为 ∂F。但这样一来，该圆盘与 F 的并就是一个射影平面。 M 的不可约性意味着它是 $\mathbb{RP}^3$的一个副本，这与 M 有非空边界相矛盾。当˜F 压缩成球面时，该球面围成 M 中的一个球，且该球不包含克莱因瓶。因此，再一次有 M 是闭的，这就产生了矛盾。由此证明了这一断言。˜因此，任何 JSJ 环带或环面都可以通过图案同痕避开 F。所以它与正则邻域 $N(F)$ 不相交，或者位于该邻域内。后一种情形下，它也可以通过图案同痕避开 F。因为我们可以赋予 $N(F)$ 一个以 M¨obius 带为底空间的I-丛或圆丛结构，其中 F 是纤维的并。于是，JSJ 环面或环带也可以变成纤维的并，因此是一个环带˜或与 F平行的环面。

2.12. **连通的 JSJ 曲面是基本的**。 许多在拓扑上有重要意义的曲面都可以变为基本曲面。特别是，JSJ 环带和环面也具有这一性质，具体如下。

定理 2.11. 设 (M, P) 是一个带边界模式的紧致可定向不可约边界不可约三维流形。设 $\mathcal{T}$ 是 M 的一个三角剖分，其中 P 是单纯的。那么，每个在其模式同痕类中具有最小权重的连通 *JSJ* 曲面都是基本的。

我们的证明将用到以下概念。若正常嵌入于 M 中的两个曲面 S_1 和 S_2满足: $S_1 \cap S_2$ 是 S_1 和 S_2的紧致子曲面，则称它们部分重合。若$S_1 \cap S_2$ 或 $(S_1 \cup S_2)\backslash\backslash(S_1 \cap S_2)$的任何连通分支都不是一个与 ∂M 不相交的圆盘，也不是一个与 ∂M相交于单条弧的圆盘，则称它们具有本质交。

当 S_1 和 S_2 中至少一个是环面，且它们具有本质交时， $S_1 \cap S_2$ 由环带组成，也可能是一个环面。当 S_1 和 S_2 都是干净环带且它们具有本质交时，要么 $S_1 \cap S_2$ 的每个连通分支都是一个与 S_1 和 S_2 的核心曲线平行的环带，要么 $S_1 \cap S_2$的每个连通分支都是一个方形，即一个由 ∂S_i中的一条弧、正常嵌入于 S_i中的一条本质弧、 ∂S_i 中的另一条弧，以及正常嵌入于 S_i中的另一条本质弧组成的圆盘。

一个广义乘积区域是一个连通的三维流形，其形式为 $(F \times [-1,1])/\sim$，其中 $\sim$ 是一个等价关系，其每个等价类要么是单点，要么是形如 $x \times [-1,1]$ 的区间，区间中的点为 $x \in J$；其中 J 是 ∂F中的有限个闭区间和圆的并。水平边界分支是 $F \times \{1\}$ 或 $F \times \{-1\}$的像。垂直边界分支是 $(\partial F - J) \times [-1,1]$的一个连通分支的像的闭包。压缩轨迹是 $J \times [-1,1]$的像。

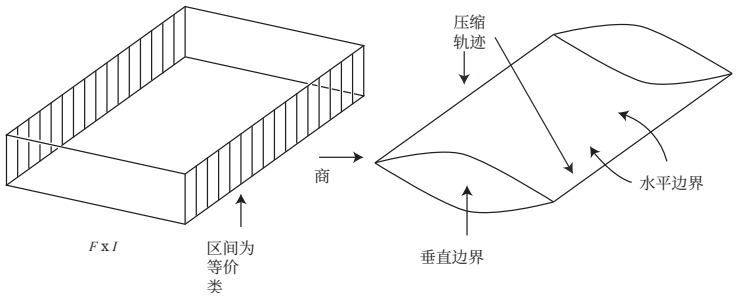

FIGURE 5. 广义乘积区域是通过压缩乘积边界上的某些弧得到的

引理 2.12。设 S_1 和 S_2 是紧致可定向三维流形 M 中正常嵌入的曲面，其边界模式为 P，其中每个 S_i 都是不可压缩且边界不可压缩的环面或干净环带。假设它们部分重合但不相等，且具有本质交，并且存在一个图案同痕将 S_1 移离 S_2。那么 $M\backslash\backslash$的一个连通分支 X $(S_1 \cup S_2)$是一个广义乘积区域 X，并具有以下性质:

(1) 每个水平边界分支都位于 S_1 或 S_2 中;

(2) 每个垂直边界分支都位于 ∂M 中，且与 P 不相交；*(3)* 压缩轨迹是 $S_1 \cap S_2 \cap X$ 的若干连通分支的并。

$S_1 \cap S_2$ 的其他连通分支可能位于水平边界中。此外，乘积区域到 M 的包含映射也可能不是单射，因为乘积区域边界上的 $S_1 \cap S_2$ 连通分支可能会被识别。

证明。 注意， $S_1 \cap S_2$ 的每个 F 连通分支都是一个方形或环带。若 ∂F 处关联的 $S_1 - S_2$ 的两个连通分支从 S_2 的同一侧延伸出来（等价地，若 ∂F处关联的 $S_2 - S_1$ 的两个连通分支从 S_1的同一侧延伸出来），则称F为可移除的 。否则，称 F 为不可移除的。（见图 6。）

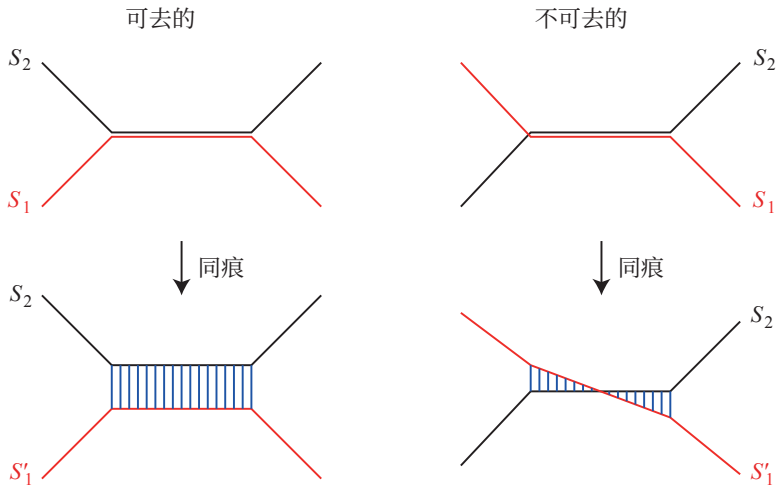

FIGURE 6. 将部分重合的曲面 S_1 和 S_2 同痕，使它们横向相交

现在，我们对 S_1 进行一个小的同痕，使所得曲面 S_1' 与S_2 横向相交；在 $S_1 \cap S_2$的每个不可移除分支中，这个交集都由一条弧或一条曲线组成。注意，通过如下方式塌缩一些乘积区域，我们可以得到原来的S_1 和 S_2 排列。对于 $S_1 \cap S_2$ 的每个可移除分支 F，我们在 M中有一个 $F \times [-1,1]$ 的副本，其中 $(F \times [-1,1]) \cap (S_1' \cup S_2) = F \times \{-1,1\}$。如果将每个区间 $\{*\} \times [-1,1]$ 塌缩为一个点，就得到 S_1 和 S_2原来的排列。同样，对于 $S_1 \cap S_2$的每个不可移除分支 F，我们有一个 $(F - (S_1' \cap S_2)) \times [-1,1]$ 嵌入在M 中的副本；将 $[-1,1]$ 的副本塌缩为点后，我们再次回到 S_1 和 S_2原来的排列。

我们现在应用 Waldhausen [22] （在曲面为闭曲面的情形）或 Johannson [14]（在曲面具有边界的情形）的一个定理。该定理指出，存在一个广义乘积区域，它作为$M \backslash\backslash (S_1' \cup S_2)$的一个连通分支出现，其中一个水平边界分支位于 S_1'中，另一个水平边界分支位于 S_2中，任何垂直边界位于 ∂M 中且与 P不相交，而束缚轨迹由 $S_1' \cap S_2$ 的连通分支组成。

我们现在进行上述塌缩。该广义乘积区域塌缩为 S_1 和 S_2的一组广义乘积区域，并附有 $S_1 \cap S_2$ 的连通分支。这些新的广义乘积区域中的任意一个

给出 $M\backslash\backslash(S_1 \cup S_2)$的所需连通分支。注意，这些塌缩可能在广义乘积区域的边界上产生自等同。□

引理 2.13. 设(M, P) 是一个带有边界模式的紧致可定向不可约边界不可约三维流形。设 $\mathcal{T}$ 是 M 的一个三角剖分，其中 P是单纯的。设 F 是一个干净真嵌入曲面，在其模式同痕类中具有最小权重，且它是不可压缩和边界不可压缩的。假设 $F = F_1 + F_2$ 处于约化形式。

(1) 若 A 是迹环带或圆盘，则 A 在流形 $M\backslash\backslash F$ 中不可压缩且边界不可压缩，该流形的边界模式由P 和 ∂F的副本组成。*(2)* 假设 A 是迹环带。另假设，对于任何其他求和 $F = F_1' + F_2'$，都有 $|F_1' \cap F_2'| \geq |F_1 \cap F_2|$。那么 A在$M\backslash\backslash F$ 中是本质的。*(3)* 若 F 是 *JSJ* 环带，且 A 是迹圆盘，则包含 A 的 M的 *JSJ* 块是一个 I-丛腔室，其中 F 是一个垂直边界连通分支。

证明。 (1) 根据定理 2.4，每个迹环带和迹圆盘都是不可压缩的。假设 A 边界可压缩，因此与 F 中的某个环带或圆盘平行。如果我们沿着 A 进行非正规交换，而沿着所有其他迹圆盘、环带和莫比乌斯带进行正规交换，结果将包含一个 F 的副本，以及一个可压缩环带或环面。进行非正规交换后，总存在一种同痕，能严格减小曲面的权重。因此我们推断， F 在其模式同痕类中并非具有最小权重，这与假设矛盾。

(2) 首先注意， F 是连通的；否则就存在一个和 $F =F_1'+F_2'$，其中 $F_1'\cap F_2' = \emptyset$，这与我们的极小性假设矛盾。假设 A 是一个非本质的迹环带，因此根据 (1)，它与 $M\backslash\backslash F$ 中的一个几乎干净环带平行。因此， A 从 $M\backslash\backslash F$ 中隔出一个实心环面 V，其中的图案是一组非空的不相交经向曲线。 V 中可能还有其他迹环带，但根据 (1)，它们都是不可压缩且边界不可压缩的。因此， V 中存在一个在 V 中最外层的迹环带。改为考察这个迹环带，我们可以假设 V 的内部不含迹环带。令 F_1' 为 $(F_1\backslash\backslash V) \cup (F_2 \cap V)$，并类似地定义 F_2'。于是 $F = F_1' + F_2'$ 和 $|F_1' \cap F_2'| < |F_1 \cap F_2|$，与假设矛盾。

(3) 由于 A 是迹圆盘， F 被 $F \cap A$ 分成两个方形。每个方形都具有乘积结构，形如 $I \times I$，其中 $(I \times I) \cap \partial M = I \times \partial I$。同样， A 也具有这样的结构。因此， $F \cup A$ 的一个正则邻域是一个以曲面 S 为底空间的 I-丛。注意， A 并未连接到 F 的两侧；否则就会存在一个本质干净环带，无法将其同痕变形至避开 F，这与 F 是 JSJ 环带的假设矛盾。因此， S 是裤子曲面或带一个穿孔的 M¨ Möbius 带。先假设这个 I-丛的一个垂直边界分支是可压缩的。那么它围成一个与丛内部不相交的 $D^2 \times I$ 副本，我们可以将丛延伸到这个三维球上。如果底曲面 S 是带一个穿孔的 M¨ Möbius 带，这就意味着包含 A 的 $M\backslash\backslash F$ 连通分支是一个 I-丛腔室，正如所需。因此，假设底曲面是裤子曲面。 $D^2\times I$ 中可能还有其他迹圆盘，但其中有一个是最外层的，因此我们不妨假设

A 在 $D^2 \times I$ 中是最外层的。但这样一来，同一片就关联到 $A \cap F$ 的两个连通分支，这不可能，因为一个位于 F_1 中，另一个位于 F_2 中。因此，我们归结为 I-丛的垂直边界分支均不可压缩的情形。如果其中任何一个是非本质的，就将 I-丛延伸到与之关联的实心环面上。最终得到一个具有本质垂直边界的 I-丛。它必定是 M 中某个 I-丛块的一部分。此外，正如所声称的， F 是该块的一个垂直边界分支。□

定理 *2.11* 的证明。令 T 为一个连通的 JSJ 曲面。选取 T的一个最小权重正规代表，视同图案同痕。若 T 不是基本的，则我们可以写成 $T = T_1 + T_2$ ，其中 T_1 是连通的。我们可以假设 $|T_1 \cap T_2|$ 在所有此类求和中是最小的，特别是该和处于约化形式。根据定理 2.4，没有 T_i 具有正欧拉示性数。因此，$\chi(T_1) = \chi(T_2) = 0$。此外， T_1 和 T_2 是不可压缩且边界不可压缩的。因此， T_1 是一个干净环带、环面、克莱因瓶或莫比乌斯带。因此，由于 T 是粗糙的，存在一个图案同痕，将 T_1 移离 T。当 T_1 是莫比乌斯带或克莱因瓶时，这正是注 2.10 的内容。

正规曲面求和将 $T = T_1 + T_2$ 放置为与 T 和 T_1 部分重合。具体而言， T_1 中的每个片都成为 $T \cap T_1$的一个连通分支。每个迹环带、圆盘或 M¨obius 带都成为 $T_1 \backslash\backslash T$ 的一个连通分支。 T_2 中的每个片都成为 $T \backslash\backslash T_1$的一个连通分支。注意，对于 $T_1 \backslash\backslash T$ 中的每个迹环带或圆盘， $T \backslash\backslash T_1$ 中关联的连通分支从迹圆盘或环带的相对两侧延伸出来。这是正规曲面求和的结果。

我们断言，迹环带和圆盘只与 T的一侧关联。根据引理 2.13 (1)，任何迹圆盘或环带在 $M \backslash\backslash T$ 中都是不可压缩且边界不可压缩的。若存在迹环带 A，则根据引理 2.13 (2)，它在 $M \backslash\backslash T$中是本质的。因此，根据定理 2.9，包含 A 的 M 的 JSJ 块要么是 Seifert纤维化的，要么是 I 丛腔室；但在后一种情况下，水平边界是 T的一份或两份副本。因此，两种情况下，包含 A 的 M的 JSJ 块都是塞弗特纤维化的，并且 A 是纤维的并。若 T的一侧有迹圆盘，则引理 2.13 (3)表明它位于 $M \backslash\backslash T$的一个 I 丛腔室中，而该腔室必为实心环面。同样，包含 A的 M的 JSJ 块是塞弗特纤维化的。注意，迹环带和迹圆盘不可能同时存在，因为迹圆盘会将环带 T 切成圆盘。因此，若 T的两侧都有迹圆盘或环带，我们便可推出 T 的两侧都是塞弗特纤维空间。此外，由于迹环带两两不相交，我们可推出这些塞弗特纤维空间具有同痕的正则纤维。无论哪种情况，我们都可推出 T 不是 JSJ，这与假设矛盾，从而证明了该断言。

由于存在一个可容许同痕将 T 与 T_1 分开，引理 2.12 给出了一个广义乘积区域 V。由于其边界可定向，它不可能包含迹莫比乌斯带连通分支。首先考虑位于 T_1 中的 V 的水平边界分支 F_1。我们声称其中恰好包含 $T \cap T_1$ 的一个可移除分支。若这类分支不止一个，那么它们之间会有 $T_1 \backslash\backslash T$ 的一个连通分支，它将是迹环带或圆盘，且与之关联的 $T \backslash\backslash T_1$ 的两个连通分支会从同一侧延伸出来，这是不可能的。若 F_1 中没有 $T \cap T_1$ 的可移除分支，那么 F_1 将是一个完整的迹圆盘或环带；但这样一来，位于 ∂V 中的 $T \backslash\backslash T_1$ 的两个关联连通分支又会从 F_1 的同一侧延伸出来。

现在考虑位于 T 中的 V 的水平边界分支 F。我们声称其中不包含 $T \cap T_1$ 的可移除连通分支。因为若存在这样的连通分支，那么与 ∂F 关联的 $T \backslash\backslash T_1$ 的每个连通分支都会有 $T_1 \backslash\backslash T$ 的连通分支从两侧延伸出来。因此， T 的两侧都会有迹环带或圆盘与之关联。但如上所示，这种情况不会发生。

因此，我们证明了乘积区域 V 的边界中恰好有两个 $T_1 \backslash\backslash T$ 的连通分支，换言之，恰好有两个迹环带或两个迹圆盘。

注意，映射 $V \to M$ 是单射。它不是单射的唯一可能情形是：V 的两个水平边界分支包含了被识别的 $T_1 \cap T$ 的连通分支。但我们已经证明， F不包含此类连通分支。因此， V的两个水平边界分支除了沿着它们的边界之外互不相交。考虑由 T_1 和 T_2 通过交换 V的两个水平边界分支而得到的曲面 T_1'和 T_2'。换言之，$T_1' = (T_1 \backslash\backslash F_1) \cup F$，而 T_2'是从 T_2中移除$F \cap T_2$并附上 ∂V的剩余部分得到的。于是， T_1'和 T_2'是正规曲面，并且$T = T_1' + T_2'$，但 $|T_1' \cap T_2'| < |T_1 \cap T_2|$。这与求和 $T_1 + T_2$ 处于约化形式这一假设矛盾。□

定理 2.14. 设(M, P) 是一个带边界模式的紧致可定向不可约边界不可约三维流形。设 $\mathcal{T}$ 是 M 的一个三角剖分，其中 P 是单纯的。那么，*JSJ* 曲面可以实现为基本曲面的不相交并。

证明. 选取 JSJ 曲面的一个正规代表，使其在所属的模式同痕类中具有最小权重。根据定理 2.5，每个连通分支在其模式同痕类中都具有最小权重。因此，根据定理 2.11，每个连通分支都是基本曲面。□

2.13. **塞弗特纤维空间中的正规环带**。 我们将考察三维球面中非分裂链环外部的 JSJ 环面。这些环面的某些补区域可能是塞弗特纤维空间。对此需要采用与其他类型的三维流形相当不同的技术。因此，本节将回顾并发展所需的工具。

我们先回顾可能出现的塞弗特纤维空间。根据 [4, 命题 3.2]，这类塞弗特纤维空间属于以下类型之一：

(1) 实心环面，其底空间是至多带一个锥点的圆盘；(2) 平面曲面与圆的积；它没有例外纤维；例如，它可以是图7 (i) 所示链环的外部；(3) 环面链环的外部，其中相关实心环面的一个、两个或两个都不取其核心曲线，如图7 (ii) 所示；其底空间是带孔的 2-球面，至多有两个锥点；此外，若该空间有两个例外纤维，则它们的阶互素。

我们将研究正常嵌入这类塞弗特纤维空间中的环带。

引理 2.15. 设 M 是一个边界非空且嵌入于三维球面的塞弗特纤维空间，它既不是实心环面，也不是 $S^1 \times S^1 \times I$。

(1) 如果 ∂M 是单个环面，那么存在一个本质环带 A 正常嵌入于 M 中，使得 A 的外部是两个实心环面。

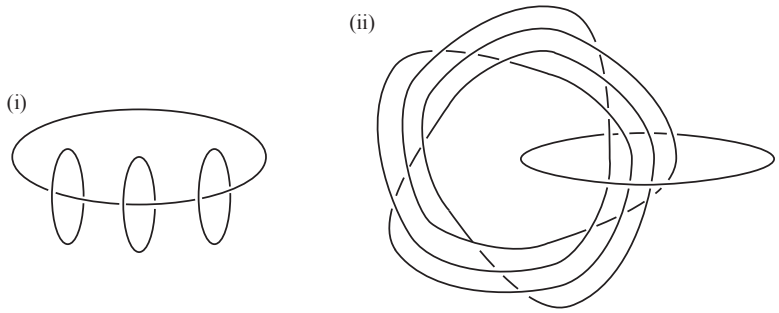

FIGURE 7. 一些具有 Seifert 纤维化外部的链环

(2) 如果 ∂M 包含多个环面，令 T_1 和 T_2 为不同的边界分支。那么存在一个本质环带 A 正常嵌入于 M 中，其一个边界分支位于 T_1 上，另一个边界分支位于 T_2 上。

在这两种情况下， A 都是唯一的，除去 M 上同痕于 ∂M上恒等映射的一个同胚。

证明。 我们先描述 A，然后解释它为何唯一。当∂M 是单个环面时，塞弗特纤维空间的底空间是一个带有两个锥点的圆盘。我们选取圆盘中一条将两个锥点分隔开的真嵌入弧。当 ∂M 包含多个环面时，我们选取底空间中一条连接对应于 T_1 和 T_2的边界分支的真嵌入弧。在这两种情况下，该弧在 M 中的逆像就是所需的环带 A。

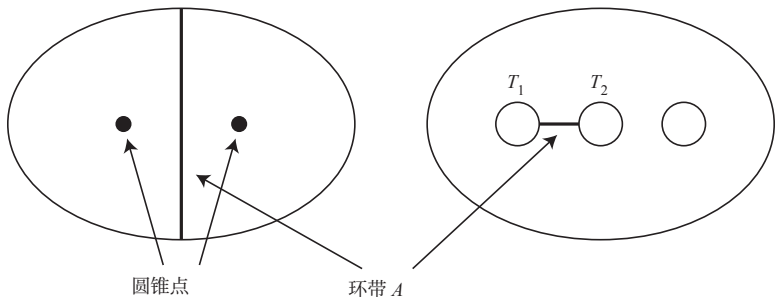

FIGURE 8. M 的一些可能底空间，其中包含 A的投影

现在我们证明， A 是唯一的，差别至多为一个在 ∂M上同痕于恒等映射的 M 的同胚。假设 M 嵌入三维球面、边界非空，且既不是实心环面也不是 $S^1 \times S^1 \times I$，这意味着它的塞弗特纤维化在同痕意义下唯一 [20, 21]。塞弗特纤维空间中的任意正常嵌入的可定向本质曲面都同痕于一个水平或垂直曲面。若环带是水平的，则基底轨形的欧拉示性数必为零；但我们关于 M 嵌入三维球面且不是$S^1 \times S^1 \times I$的假设排除了这种情况。因此，我们可以假设 A 是垂直的。于是它投影到底空间中的一条弧，且该弧避开圆锥点。容易看出，在保向同胚意义下，这样的弧是唯一的；该同胚保持每个边界分支和每个圆锥点不变

该同胚保持每个边界分支和每个圆锥点不变。这意味着 A是唯一的，差别至多为一个在 ∂M上同痕于恒等映射的 M 的同胚。□

命题 2.16. 设 M 和 A 如引理 *2.15* 所述。设 P 为一个边界模式，使得对于 ∂M 的每个连通分支 T，以下条件之一成立：

(1) T 与 P 不相交；*(2)* $T \cap P$ 是本质简单闭曲线的不相交并；*(3)* $T \backslash\backslash P$ 是圆盘。

假设引理 *2.15* 中的环带里，A 与 P 的交点数尽可能少。当 A 与 P 不相交且 ∂M 连通时，我们还要求 ∂A 的两个连通分支位于 $\partial M \backslash\backslash P$ 的同一个连通分支中。选取 M 的一个三角剖分，使得 P 是单纯的。则 A 与一个弱基本曲面强等价。

证明。由于 A 是本质的，它可以经同痕变形成为一个正规曲面。我们选取一个 A 的代表元，使其在强等价意义下具有最小权重。假设 A 不是弱基本的。

首先，假设 A 可表示为若干正规曲面之和 $S_1 + S_2$，其中 S_2 是球面、射影平面、环面、干净圆盘或干净环带。我们可以假设这个和处于约化形式。根据定理 2.4，这些曲面都是不可压缩的，而且都没有球面、射影平面、干净圆盘或干净本质圆环连通分支。因此，$\chi(S_1) = \chi(S_2) = 0$。

先考虑 S_2 是环面的情形。于是，$\partial A = \partial S_1$。所以，要么 S_1 的某个连通分支是环带，要么 S_1 的两个连通分支是默比乌斯带。但后一种情形不可能发生，因为每个默比乌斯带都必须是垂直的，因此会包含一个阶为 2 的奇异纤维，而 M 至多包含两个奇异纤维，且它们的阶互素。因此，S_1 有一个本质环带连通分支。根据我们对 P 的假设，它不可能是边界平行的。由于它与 A 有相同的边界，因此它与 A 强等价。但 S_1 的权重小于 A，这就产生了矛盾。因此，我们可以假设 A 没有环面直和项。

现在假设 S_2 是一个干净本质环带，并且 S_1 有一个环带分支。先考虑 M 的底空间是一个圆盘且有两个例外纤维的情形。根据我们关于 $|A \cap P|$ 的极小性假设，A 必须与 P 不相交。因此，根据假设，∂A 的两个连通分支都位于 $\partial M \backslash\backslash P$ 的同一个连通分支中。于是，∂S_1 和 ∂S_2 也位于该连通分支中。因此，S_2 与 A 强等价。但它的权重小于 A 的权重，这就产生了矛盾。因此，假设 M 有不止一个边界分支。于是根据假设，∂A 的各连通分支分别位于不同的环面 T_1 和 T_2 上。现在，$\partial S_1 \cup \partial S_2$ 与 ∂A 位于相同的边界分支上。由于 S_2 是干净的，包含 ∂S_2 的环面 T 具有一个干净纤维。根据我们对 $|A \cap P|$ 的极小性假设，$A \cap T$ 与 P 不相交。因此，$A \cap T$ 与 $S_1 \cap T$ 和 $S_2 \cap T$ 一起位于 $T \backslash\backslash P$ 的同一个连通分支中。如果 S_2 在 T_1 上有一个边界分支，并在 T_2 上有一个边界分支，那么我们可以用这个曲面替换 A。因此，假设 S_2 的两个边界分支都位于 ∂M 的某个边界分支 T 上，于是 $\partial S_1 \cap (\partial M - T) = \partial A \cap (\partial M - T)$，它是一条单独的曲线。这条曲线不可能是 S_1 的一个莫比乌斯带连通分支的边界，因为这样一来，S_1 的每个其他连通分支都是环面，或者是两个边界曲线都位于 T 上的环带，这意味着 $[A \cap T] = [S_1 \cap T] + [S_2 \cap T] = 0 \in H_1(T; \mathbb{Z}_2)$，但事实并非如此。因此，我们可以

用包含 $\partial A \cap$（$\partial M - T$）的 S_1 的环带分支替换 A，并减小其权重，这就产生了矛盾。

现在假设 S_2 是一个干净本质环带，并且 S_1 没有环带或环面连通分支。那么 S_1 是一组莫比乌斯带。但 M 不可能容纳两个或更多互不相交的莫比乌斯带。因此 S_1 是一个莫比乌斯带。若M 只有一个边界分支，则如上所述， S_2 与 A 强等价，且权重更小，这就产生了矛盾。因此，假设 M 有多个边界分支，并且 ∂A 的一个连通分支位于 T_1上，另一个位于 T_2上。那么 ∂S_1 是某个连通分支（比如T_1）上的一条正则纤维。曲线 ∂S_2同痕于 ∂M上的正则纤维。若 ∂S_2的两条曲线都位于 T_2上，则 $[A \cap T_2] = [S_2 \cap T_2] = 0 \in H_1$（$\partial M$； $\mathbb{Z}_2$），但事实并非如此。若 ∂S_2 的一条曲线位于 T_1 上，另一条位于 T_2上，则$[A \cap T_1] = [\partial S_1 \cap T_1] + [\partial S_2 \cap T_1] = 0 \in H_1$（$\partial M$; $\mathbb{Z}_2$），这同样不成立。最后，若 ∂S_2 的两条曲线都位于 T_1上，则 A 与 T_2不相交，但事实并非如此。所有情况都会导致矛盾。

现在假设 $A = S_1 + S_2 + S_3$，其中 S_2 和 S_3 是干净的 M¨obius 带。还假设 M 只有一个边界分支。那么 S_2 （例如）是一个垂直曲面，它在底空间上的投影是一条弧，从底空间的边界延伸到一个 2 阶奇异点。因此， $2S_2$ 是一个干净本质环带。根据假设， A 因而是干净的，且其两个边界分支都位于 $\partial M \backslash\backslash P$ 的同一个连通分支中。因此，环带 $2S_2$ 和 $2S_3$ 的边界也位于这个连通分支中，故与 A 强等价。现在， w（$S_2 + S_3$）是 w（$2S_2$）与 w（$2S_3$）的平均值。因此， w（$2S_2$）和 w（$2S_3$）中至少有一个不大于 w（$S_2 + S_3$）；例如前者。但这样一来, w（$2S_2$） $\leq w$（$S_2 + S_3$） $< w$（A），这与 A 具有最小权重的假设矛盾。

现在假设 $A = S_1 + S_2 + S_3$，其中 S_2 和 S_3 是干净的 M¨obius 带，并且 M 至少有两个边界分支。现在 $[\partial S_2]$ 表示 T_1 或 T_2 的纤维的同调类。 $[\partial S_3]$ 也同样如此。因此， $S_2 + S_3$ 不可能由一个 M¨obius 带和若干环面组成。它也不可能有多个 M¨obius 带连通分支，因为 M 不支持两个不相交的 M¨obius 带。因此， $S_2 + S_3$ 包含一个干净环带连通分支。于是可以写作 $A = S_1' + S_2'$，其中 S_2' 是一个干净环带，而上述情形已经处理完毕。

□

命题 2.17。设 M 与 $T^2 \times [0, 1]$ 同胚，具有边界模式 P，使得 (M, P) 是边界不可约的。假设 M 不含干净的本质环带。设 $\mathcal{T}$ 是 M 的一个三角剖分，其中 P 是单纯的。那么，任何正常嵌入于 M 中、相对于 P 处于一般位置且连接 ∂M 的两个连通分支的不可压缩、边界不可压缩环带 A，都与一个弱基本正规曲面强等价。

证明。 根据命题 2.1， A与一个正规曲面模式同痕。我们可以假设，在强等价意义下， A 具有最小权重。根据定理 2.4 (5)， A 的直和项中没有球面、干净圆盘或射影平面。根据定理 2.4 (4) 和 (7)，没有直和项是环面。根据定理 2.4 (4) 和 (6)，没有直和项是干净非本质环带。我们假设 M 不含干净本质环带。流形 $T^2 \times I$ 不含正常嵌入的 M¨obius 带。因此， A 是弱基本的。□

命题 2.18。 设 M 与 $T^2 \times [0,1]$同胚，且其非空边界图案为 P，使得(M, P) 是边界不可约的。设 $\mathcal{T}$ 为 M 的一个三角剖分，其中 P 是单纯的。设 A 为任意一个与图案不相交、连接两个边界分支的本质环带。则 A 与一个基本曲面强等价。

证明。 不妨假设，在强等价意义下， A具有最小权重。假设 A 不是基本的，因此它是一个正规和 $S_1 + S_2$。不妨假设这个求和处于约化形式。因此，根据定理 2.4，S_1 不可压缩、边界不可压缩，且欧拉示性数为零。现在 $T^2 \times [0,1]$不含正常嵌入的 M¨obius 带。因此， S_1 和 S_2 是干净环带或环面的并。对于至少一个 i，$[S_i \cap \partial M]$ 在 $H_1(\partial M;\ \mathbb{Z}_2)$中是非平凡的。不妨设这对 S_1成立。于是 S_1 包含一个干净环带，它连接 ∂M的两个连通分支。它所相交的 $\partial M \backslash\backslash P$的连通分支，必定与 A 所相交的连通分支相同。这些 $\partial M \backslash\backslash P$ 的连通分支是环带。因此，存在一个图案同痕，将 ∂S_1 变为 ∂A。进而存在一个在∂M 上等于恒等映射的同胚，将 S_1 变为 A。这与 A 具有最小权重的假设矛盾。□

2.14. **边界平行曲面**。

引理 2.19. 设(M, P) 是一个带有边界模式的紧致可定向不可约边界不可约三维流形。设 S' 是 P的若干条边、P的若干个圆以及 $\partial M \backslash\backslash P$的若干个连通分支的并集，它们在 ∂M中不一定互不相交；设 S是一个不可压缩且边界不可压缩曲面，它由 S' 取正则邻域的边界而得到，并且不含与 P 相交零次或两次的圆盘分支。那么 S 是 (6,2)-指数受控的。

证明。 设 $\mathcal{T}$是 M 的任意一个三角剖分，其中 P 是单纯的。于是， S 的一个代表与 $\mathcal{T}$的每条边至多相交两次。边的数量至多为 $6t$ ，其中 t 是 $\mathcal{T}$的四面体数量。因此， S 的权重至多为 $12t$。它不必是正规曲面，但根据命题 2.1，可以通过同痕变形将其变为正规曲面，且不增加其权重。因此，其权重至多为 $12t \leq 6 \cdot 2^t$。所以，它是(6,2)-指数受控的。□

2.15. **圆丛的截面**。 在本小节中，我们考虑 M 是以一个边界非空的曲面为底空间的圆丛的情形。我们的目标是证明，对于 M 的任意三角剖分，都存在一个与丛的截面同痕且具有受控权重的曲面。然而，我们需要的不止这些。丛 M 将被分解为若干实心环面，每个实心环面都是圆纤维的并。并且，任意两个这样的实心环面的交集将由若干个（可能为空的）环带组成，而这些环带同样是纤维的并。我们希望确保该曲面与每个实心环面的交集都是一组子午圆盘。为此，我们需要推广本节前面的一些结果。

我们首先要做的是稍微放宽指数受控曲面的概念。给定一个带有边界模式P的紧致可定向三维流形 M ，若曲面 S正常嵌入于 M，则称其为（c, k）-近指数控制的，如果对于 M 的任意一个含有 t 个四面体且其中 P 为单纯形的三角剖分，都存在一个 M 的保向同胚，它保持 P中的每条边、每个顶点和每个圆不变，并将 S 映射为一个权重至多为 ck^t的曲面。

接下来，我们需要考虑曲面权重的一个更一般的概念。设 E_1 和 E_2 是三角剖分的边集，其中$E_1 \subset E_2$。正常嵌入曲面 S 的优先权重是三元组

$$(|S \cap E_1|, |S \cap E_2|, w(S)).$$

这样的两个三元组使用字典序进行比较。

在我们的设定中，每个实心环面在三角剖分中都是单纯的，并且 E_2 将是这些实心环面边界上的边，而 E_1 将是位于三个这样的实心环面中、或位于两个这样的实心环面以及 ∂M 中的边的集合。

我们注意到，存在如下涉及优先权重的定理 2.4 的版本。

定理 2.20. 设 M、P 和 $\mathcal{T}$ 如定理 *2.4* 中所述。设 $E_1 \subset E_2$ 是三角剖分的边的集合。设 S 是一个正常嵌入的、连通的、不可压缩的、边界不可压缩的正规曲面，并且在所有与其模式同痕的正规曲面中，它具有可能的最小优先权重。假设 S 可表示为正规和 $S_1 + S_2$，其中 S_1 和 S_2 处于一般位置且非空，并且该求和为约化形式。那么定理 *2.4* 的所有结论均成立。

在定理 2.4 的证明中使用的 [18] 结果并未涉及优先权重，而是涉及 S 的权重。然而，我们注意到，在这些证明中使用的所有论证，在 [18] 中用于优先权重也同样适用，因此定理 2.20 得证。

引理 2.21。设 M 是一个以曲面为底空间的圆丛紧致可定向三维流形。设 P 是 M 的边界模式。设 C 是 M 中纤维的不相交并，每个纤维都位于 M 的内部或 P 中，且 ∂M 的每个连通分支都至少包含 C 的一个连通分支。设 A 是 M 中一族环带，每个环带均为嵌入的、由纤维组成，且其边界位于 C 中。假设这些环带的内部彼此不相交，并且对于 C 的每个连通分支，都有 A 和 ∂M 的三层延伸进入其中。假设 M 已作三角剖分，且 P、C 和 A 都是单纯的。令 E_1 为 C 中边的集合，并令 E_2 为 $A \cup \partial M$ 中边的集合。令 S 为正常嵌入 M 的曲面，并假设存在一个 M 的同胚，该同胚保持 A 不变，并将 S 映至一个截面。假设在所有此类曲面中，S 与 P 的交点数最少。那么存在一个保持 $A \cup P$ 的同痕，将 S 变为一个正规曲面 S'，其优先权重不大于 S 的优先权重。

证明。考虑一个曲面 S'，它可通过保持 $A \cup P$不变的同痕与 S同痕，并且在所有这类曲面中具有最小的优先权重。注意，S' 与 C 的每个连通分支至少相交一次，因为它与一个截面同痕；因此，由于其优先权重已达到最小，S'恰好与 C 的每个连通分支相交一次。此外，对于 A的每个环带，S' 都与该环带相交于一条本质弧。

假设 S' 不是正规曲面。那么我们可以应用 [18]中推论 3.3.25 的证明所用的某一种正规化变换。我们声称，每一种这样的变换都对应于一个支撑在远离 $A \cup \partial M$处的同痕。例如，假设 S' 与三角剖分的某个面有一个简单闭曲线交集。由于 S' 与 A 的每个环带相交于一条本质弧，我们可以推知该面不位于 A中。同理，它也不位于 ∂M中。考虑这样一条简单

闭曲线，它在该面内是最内侧的。它在该面内围成一个圆盘 D 。由 S'的不可压缩性， ∂D 在 S'中围成一个圆盘 D' ；由 M的不可约性，$D \cup D'$ 围成一个球。我们可以令 D' 穿过这个球同痕移动，再稍微越过该面。这个过程消除了 D' 与三角剖分的 1-骨架之间的交点。不过，这不会影响 $A \cap S'$，因为如果 $A \cap S'$ 的任何连通分支被消去，所得曲面就会与某个纤维不相交，这是不可能的。

推论 3.3.25 的证明中的其他变换会在 [18] 中去掉某条边与 S'之间的两个交点。我们断言，这样的边不可能位于$A \cup \partial M$中。显然，这条边不可能位于 C中，因为 C的每个连通分支都只与S' 相交一次。此外，根据我们的假设，与 P 的交点数最少，这条边也不可能位于 P 中。另一方面，如果这条边位于$(A \cup \partial M) \backslash\backslash C$的某个环带分支 A'中，且与 P不相交，那么该同痕会将本质弧 $A' \cap S'$ 替换为一条权重更小的模式同痕弧，外加可能出现的一条简单闭曲线。这与 S' 的优先权重最小这一假设矛盾。

在所有情况下，我们都可以推断，该同痕的支撑集避开 $A \cup \partial M$。所得曲面是正规的。□

引理 2.22。设 M、 P、 C、 A、 E_1 和 E_2 如引理 *2.21* 中所述。假设 $M \backslash\backslash A$ 是实心环面的并。设 $\mathcal{T}$ 是 M 的一个三角剖分，其中 C、 P 和 A 是单纯的。设 S 是一个曲面，经过保持 A 的同胚后，它等于一个截面。设 S' 是 S 在 M 的一个同胚下的像，该同胚保持 P 的每个顶点、边和圆，且其优先权重不大于原来的权重。那么存在一个同胚，保持 P 的每个顶点、边和圆以及 A 的每个连通分支，并将 M 中的 S 映到 S'。

证明。将 S 映到 S' 的 M 的同胚保持$C \cap \partial M$ 中的每条纤维，因此同痕于一个保持纤维的同胚。曲面 S 与 C 的每个连通分支恰好相交一次。由于 S' 与 S 相差一个保持纤维的同胚和一次同痕，它与C 的每个连通分支相交的次数也是奇数。因为 S' 的优先权重不大于 C 的优先权重，我们可以推出， S' 与 C 的每个连通分支恰好相交一次。因此， S' 与 A 和 $\partial M \backslash\backslash P$ 中的每个环带恰好沿一条本质弧相交，此外还可能沿一些非本质简单闭曲线相交。然而， S' 不可能与 $\partial M \backslash\backslash P$ 的任何连通分支沿非本质简单闭曲线相交，因为 S' 同痕于一个截面。此外，如果 S' 与 A 的某个连通分支有一条非本质简单闭曲线作为交集，那么我们可以在 M 的内部进行一次支撑于该处的同痕，以降低其优先权重。因此， $S' \cap （A \cup \partial M）$同胚于 $S \cap （A \cup \partial M）$。此外，它们在 S' 和 S 中的正则邻域也分别同胚。曲面 S' 和 S 是由这些正则邻域分别附加 $S' \backslash\backslash N（A \cup \partial M）$和 $S \backslash\backslash N（A \cup \partial M）$得到的。后者是圆盘的不相交并。因此，由于 S' 和 S 的欧拉示性数相同， $S' \backslash\backslash N（A \cup \partial M）$也由圆盘组成。每个这样的圆盘都是 $M \backslash\backslash A$ 的某个实心环面连通分支的子午圆盘。因此，存在一个同胚，保持 P 的每个顶点、边和圆以及 A 的每个连通分支，并将 M 中的 S' 映到一个截面。因此，也存在这样一个同胚，将 S 映到 S'。□

命题 2.23。设 M、 P、 C、 A、 E_1 和 E_2 如引理 *2.21* 所述。假设 $M \backslash\backslash A$ 是若干实心环面的并。设 $\mathcal{T}$ 是 M 的一个三角剖分，其中 C、 P 和 A

均为单纯的。设 S 是一个正常嵌入曲面，它可通过保持 A 不变的同痕变为一个截面。假设在这类曲面中， S 与 P 的交点数尽可能少。那么，存在一个 M 的同胚，它保持 P 的每个顶点、边和圆以及 A 的每个连通分支不变，并将 S 映为一个弱基本正规曲面。

证明。 根据引理 2.21，存在保持 $A \cup P$不变的同痕，将 S变为一个正规曲面，且不增加其优先权重。现在固定 S 为这样一个具有最小优先权重的曲面，其中同胚 M保持 P的每个顶点、边和圆以及 A的每个连通分支不变。于是根据引理 2.22， S 在保持 P的每个顶点、边和圆以及 A的每个连通分支不变的 M 下，具有最小优先权重。因此，对于曲面2S而言，同样的结论也成立；它是 S的两个平行副本。

假设 S 不是弱基本的。首先假设 $S = S_1 + S_2$，其中 S_1 非空，且 S_2 是球面、射影平面、环面、干净圆盘或干净环带。曲面 $2S$ 是一个和 $S_1' + S_2'$，其中每个 S_i' 都是 S_i的（可能非连通的）可定向双重覆盖。我们可以假设该求和处于约化形式。根据定理 2.20， S_1' 和 S_2' 都是不可压缩且边界不可压缩的，并且不含有这样的连通分支：2-球面、干净圆盘，或与 ∂M中的几乎干净环带平行的干净环带。因此， S_1' 和 S_2' 必然同痕于水平或垂直的曲面。假设S_1' 和S_2' 都没有水平连通分支。那么每个连通分支都是垂直的。因此， S_1 和 S_2的每个连通分支也都是垂直的。但是这样一来， S_1 和 S_2 与每条纤维相交的次数都应为偶数，而 S 并非如此，这就产生了矛盾。因此， S_1' 和 S_2' 中有一个具有水平连通分支，于是 S_1 或 S_2的某个连通分支也具有水平连通分支。由于它与C 中的每条纤维至多相交一次，该连通分支同痕于一个截面。现在， S_2 与 P 不相交，因此不可能是一个截面。因此，S_1 同痕于一个截面。此外，除了 $\partial M \backslash\backslash P$的环带分支外，其边界等于 ∂S。因此，存在一个保持 P的每个顶点、边和圆不变的 M，将 S_1 映射到 S。它的优先权重小于 S。所以，根据引理 2.22，存在一个保持 P 的每个顶点、边和圆以及 A的每个连通分支不变的 M，将 S_1 映射到 S。但这与我们的假设矛盾： S 在所有此类曲面中具有最小优先权重。

现在假设 $S = S_1 + S_2 + S_3$，其中 S_1 非空，且 S_2 和 S_3是干净的 M¨obius 带。具有截面的紧曲面上的可定向圆丛中，含有正常嵌入的 M¨obius 带的只有实心环面和 M¨obius 带上的可定向圆丛。首先假设 M是实心环面。在这种情况下， S_2 和 S_3 都代表$H_2(M, \partial M; \mathbb{Z}_2)$中的非平凡元素。因此， $S_2 + S_3$ 是同调平凡的，所以没有 M¨obius 带连通分支。（注意，实心环面不含两个不相交的正常嵌入 M¨obius 带。）现在， $S_2 + S_3$ 的欧拉示性数为零，因此有某个连通分支是干净圆盘或干净环带。所以， S 可以写成一个非空正规曲面与一个干净圆盘或干净环带之和。我们已在上文排除了这种情况。现在假设 M 是 M¨obius 带上的可定向圆丛。那么， S_2 和 S_3 同痕于该丛的截面。然而，根据假设， ∂M 的每个连通分支都包含 C的一个连通分支，它位于P中，因此 M 不允许存在干净截面。这个矛盾完成了证明。□

与上文一样，设 M 为一个圆丛，并假设 C 是由有限多个纤维组成的并，且满足 $C \cap \partial M \subset P$；又设 A 是边界位于 C中的一族环带。假设这些环带将 M 分割成实心环面，且∂M 的每个连通分支都包含 C的至少一个连通分支。要为 M 构造一个破碎截面，可在 $[0, 2\pi)$中选取互不相同的角度，每个实心环面对应一个，然后对 S 与每个实心环面的交集进行同痕变换，使得对于该实心环面中的任意纤维，它与 S 的交集都经过相应的角度移动。

命题 2.24. 设 M、 P、 C、 A、 E_1 与 E_2 如命题 *2.23* 中所述。设 S 是一个适当嵌入曲面，它经由保持 A 的同痕与一个截面同痕。假设在所有这样的曲面中，S 与 P 的相交次数尽可能少。则 M 具有一个破碎截面，它是 $(3c, k)$-近指数控制的，其中$c = -\chi(S) + 2|S \cap P| + 2|S|$ 与 $k = 2^{15}$。

证明. 由命题 2.23，存在 M 的一个同胚，它保持 P 的每个顶点、边和圆以及 A 的每个连通分支，并将 S 映为一个弱基本正规曲面。由命题 2.6，

$$w(S) \leq t^2 2^{7t+6}(-\chi(S) + 2|S \cap P| + 2|S|).$$

我们现在将其扰动为一个破碎截面。通过选择充分接近于零的扰动角度，所得曲面仍然是正规的，并且其权重至多为原来的三倍。（ C 的边上的权重将增加为三倍，因为三个相邻的子午圆盘已被扰动为不相交。）因此，它是 $(3c, k)$-近指数控制的。□

3. Hierarchies

本节回顾层次结构理论中的一些主要概念，这些概念由 Haken [9]发展，并由 Matveev [18]阐明。

3.1. 层次结构与边界图案。 设 M 是一个带有边界图案 P的紧致可定向三维流形。M 的一个部分层次结构 是由曲面序列 $S_1, \ldots, S_n$和三维流形序列 $M = M_1, \ldots, M_{n+1}$组成的，其中每个S_i 都是 M_i中的正常嵌入的可定向不可压缩曲面，而每个 M_{i+1}都是通过沿 S_i切割 M_i 得到的。我们将其记作

$$M = M_1 \xrightarrow{S_1} M_2 \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_n} M_{n+1}.$$

如果 M_{n+1} 是由三维球组成的集合，则称部分层次结构为层次结构 。

在我们考虑的部分层次结构中，曲面的边界都处于一般位置。因此， ∂S_i 与 $P \cup \partial S_1 \cup \cdots \cup \partial S_{i-1}$ 相交于有限多个点。此外， ∂S_i 只有有限多个点不嵌入。当 S_i 穿过较早出现的曲面的两侧时，就会出现后一种情况。我们将确保在所考虑的层次结构中不会出现这种情况。

拓扑空间 $S_1 \cup \cdots \cup S_i$ 同胚于一个 2-复形，但一般而言，这种构造无法以规范的方式完成。因此，我们引入以下结构。

如果一个空间可按如下方式构造，我们就称它为广义 *2*-复形。设*1*-骨架 K^1 是有限多个圆与一个有限 1-复形的不相交并。然后通过粘接映射 $f\colon \partial F \to K^1$，将一个紧曲面 F 粘接上去。我们称 F 的每个连通分支的像为广义*2*-胞腔。

注意， $S_1 \cup \cdots \cup S_i$ 具有广义 2-复形的结构，具体如下。并集 $P \cup \partial S_1 \cup \cdots \cup \partial S_i$ 是 1-骨架。0-胞腔是某个 ∂S_i 与 P、另一个 ∂S_j 或自身相交的点。

设 Γ_i 为 $P \cup \partial S_1 \cup \cdots \cup \partial S_i$。 Γ_i 在 M_{i+1} 中的逆像是由简单闭曲线和图组成的并集， P_{i+1} 嵌入在 ∂M_{i+1}之中。这就是从部分层次结构继承而来的边界模式。

请注意，在可视化此边界模式时，将每个曲面 S_i 视为"透明"会很方便，具体来说：当后续曲面 S_j 的边界穿过与 S_i相关联的 ∂M_j 的一部分时，不仅会在 ∂M_{j+1} 的这部分上形成边界模式，也会在 S_i另一侧的 ∂M_{j+1} 部分上形成边界模式。例如，参见图 9。

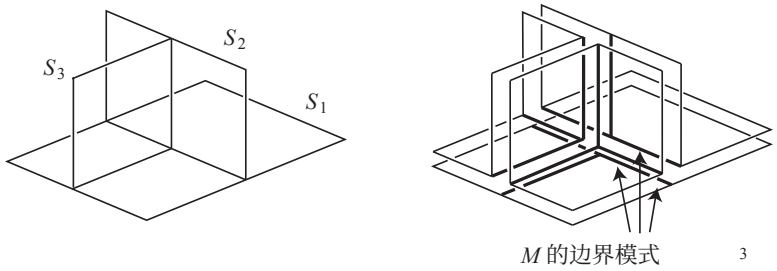

FIGURE 9. 部分层次结构及其相关的边界模式

以下这个简单事实广为人知。例如，参见 [18] 中定义 6.3.6 后的讨论。

引理 3.1. 设(M, P) 是一个带有边界模式的紧致可定向不可约边界不可约三维流形。设

$$M = M_1 \xrightarrow{S_1} M_2 \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_n} M_{n+1}$$

是一个部分层次结构，其中任一 S_i 的连通分支都不是球面或干净圆盘。对于每个 i，设 P_i 是 M_i 继承的边界模式。那么(M_i, P_i) 是不可约且边界不可约的。

在定理 1.1 的证明中，我们将归结为 K 是非平凡结以外的非分裂链环这一情形。在我们考虑的层次结构中，初始流形 M 将是 K 的外部。根据引理 3.1，这种层次结构中带有边界模式的流形都将是不可约且边界不可约的。

3.2. **指数受控层次结构**。设 M 是一个带有边界模式 P 的紧致可定向三维流形。设

$$M = M_1 \xrightarrow{S_1} M_2 \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_n} M_{n+1}$$

构成一个层次结构。我们称其为 (c, k)-指数受控，如果对于每个 $i \leq n$ 以及具有 t 个四面体的 M的每个三角剖分（其中 $P, S_1, \ldots, S_{i-1}$ 是单纯的），都存在一个 M 的同胚，该同胚在 ∂M 上同痕于恒等映射，并且对每个 $j < i$都保持 P 和 S_j不变，同时将 S_i 映到权重至多为 ck^t的曲面。

注 3.2. 显然，如果层次结构中的每个曲面都指数受控，那么整个层次结构也指数受控。然而，有一种情况我们无法确保这些曲面指数受控：流形 M_i 是由实心环面和三维球组成的并，且这些实心环面拼接在一起，在 M中形成一个嵌入的圆丛。任意两个这样的实心环面的交集都是若干个干净环带。层次结构中的下一个曲面将是一个破碎截面。圆丛中的任意两个截面未必都强等价。不过，运用第2.15节中的技巧，并利用我们构造的部分层次结构的具体性质，我们能够找到一个 M 的同胚，该同胚在 ∂M 上同痕于恒等映射，并保持部分层次结构中的所有曲面不变，同时将一个截面映到另一个截面。

以下结果至关重要。

定理 3.3。 设 M 是三维球面中一个不同于平凡结的非分裂链环的外部。对于 ∂M 的每个与某个非 $T^2 \times [0,1]$的 ***Seifert*** 纤维化 ***JSJ*** 块相关联的连通分支，假设 $P \cap \partial M$ 是一条斜率为0 或 ± 1的单一曲线，且该斜率不同于纤维斜率。另假设 P 与 ∂M的其他连通分支不相交。当 M 是 $T^2 \times [0,1]$的一个副本时，进一步假设 $\partial M \cap P$在 ∂M的每个连通分支中均由一条经线组成。则(M, P) 具有指数受控分层。

证明概述如下。假设我们已经构造了一个指数受控的部分层次结构，并令 M_i 为最终流形。假设它不是三维球的无交并。我们希望在 M_i中找到一个指数受控曲面。由于 M_i 不是三维球的无交并，它包含一个正常嵌入的（非分离的）可定向不可压缩且边界不可压缩曲面 S。如果 M_i 不包含任何正常嵌入的本质干净环带或本质环面，那么可能可以使用定理2.8使 S 成为弱基本的。另一方面，如果 M_i 包含一个本质干净环带或本质环面，那么它可能包含一个 JSJ 环面或环带。在这种情况下，可以使用定理2.14使 JSJ 环带和环面成为基本的。

当然，这里有几项复杂之处。其一，定理2.8还对边界模式与 M_i 的不可压缩边界环面的相交方式提出了假设，这会带来一些技术问题。

第二项复杂之处在于，上述过程是否会终止并不明确。幸运的是，只要谨慎选择曲面 S，就能确保沿 S 分解会降低某种复杂度，从而使层次结构最终终止。一个重要的复杂之处是， M_i 中的 JSJ 环带实际上可能是边界平行的。沿这样的曲面切割，会得到一个实心环面以及一份原流形的副本，但边界模式有所不同。为避免陷入反复循环，这里需要格外谨慎。

第三个主要难点是，流形可能包含本质干净环带或本质环面，却没有 JSJ 环面或环带。这显然会造成问题，因为定理2.8和定理2.14都无法使用。但根据定理 2.9，这种情况只会在两种非常特殊的情形下出现：当 M_i 的一个连通分支是 Seifert纤维化的，且其图案由纤维组成；以及当 M_i 的一个连通分支是以曲面为底的 I-丛，且图案P_i 是丛的垂直边界上的一组简单闭曲线。

例如，当层次结构中的第一个曲面是以圆为底的纤维化中的一个纤维时，就会出现第二种情形。Haken 最初提出层次结构理论[9], 时，这种情形是他无法处理的。幸运的是，对于三维球面中除平凡结以外的非分裂链环，现在已知可以避免这种情形，具体如下。

设 S 是紧致可定向三维流形 M 中一个真嵌入曲面。若 S 是 M 到圆的纤维化中的一个纤维，则称其为纤维曲面。这等价于 $M\backslash\backslash S$ 具有一个以 I 为纤维丛的结构，且水平边界由 S 的各个副本组成。

若曲面 S 连通且分离，并且 $M\backslash\backslash S$ 的每个连通分支都同胚于某个以不可定向曲面为底空间的 I 丛，且 S 构成该丛的水平边界，则称曲面 S 为半纤维。当 M 是三维球面中某个链环的外部时，半纤维不会作为真嵌入曲面出现。这是因为每个 I 丛的零截面都是不可定向曲面，而我们可以用边界中的环带连接这两个曲面，从而在 M 中形成一个闭的、真嵌入的不可定向曲面。然而，三维球面不容许存在这样的曲面。

以下结果归功于 Culler 和 Shalen [7]。

定理 3.4。设 M 为一个双曲链环的外部。则 M 包含一个正常嵌入的可定向、不可压缩且边界不可压缩的曲面，它既不是纤维，也不是半纤维，并且没有球面或圆盘分支。

现在，我们给出一个过程，为非平凡结以外的非分裂链环的外部 M 寻找一个指数受控的层次结构。我们为 M 指定如下边界模式。对于 ∂M 中与 M的某个 Seifert 纤维化 JSJ 块相关联、且该块不等于 $T^2 \times [0,1]$的每个连通分支，我们为其指定一个边界模式，该模式由一条斜率为 0 或 ± 1 的曲线构成，并确保其斜率不同于纤维斜率。∂M 的其余连通分支均指定为空边界模式。当 M是 $T^2 \times [0,1]$ 的一个副本时（这恰好对应于该链环为 Hopf 链的情形），我们便在每个边界分支上选取一条经线作为边界模式。

(1) 如果 M 含有任何 JSJ 环面，则沿每个环面的两份平行副本进行分解。令 X 为这些环面之间的 $T^2 \times I$ 副本的并。我们不会处理 X 的任何连通分支，直到其两个边界分支都继承了非空的边界模式。(2) 对于 $M_2 - X$的每个 Seifert 纤维化 JSJ 块，选取一条如第 2.13 节所述的正常嵌入环带。根据该环带是分离的还是非分离的，插入一份或两份其副本。重复此过程，直到 $M_2 - X$ 的每个 Seifert 纤维化连通分支都被分解为实心环面。(3) 在每个双曲补区域中，找到一个正常嵌入的、可定向的、不可压缩且边界不可压缩的曲面；该曲面不是纤维曲面的并，且不含球面或圆盘分支。根据该曲面是分离的还是非分离的，沿其一份或两份平行副本进行切割。(4) 现在我们开始进行以下一系列分解。该过程持续进行，直到出现两种情况之一。如果三维流形的每个连通分支都是球，则该过程以所需的层次结构结束。如果三维流形的每个连通分支都是三维球或带有干净经线的实心环面

，且至少有一个连通分支属于后一类型，则转到步骤（5）。分解如下：

(i) 如果三维流形的某个连通分支包含一个与边界中的某个环带平行的干净本质环带，则沿此环带切开。(ii) 如果三维流形的某个连通分支不包含 (i) 中所述的环带，但有一些 JSJ 环带，则沿所有这些环带切开。(iii) 假设三维流形的某个连通分支是 $T^2 \times [0,1]$ 的一个副本，其非空图案由本质平行曲线组成。如果它是 X 的一个连通分支，则还假设 $T^2 \times \{0,1\}$ 的两个连通分支都与该图案有非空交集。选取一个连接两个边界分支的干净本质环带，并沿它的两个副本切开。(iv) 假设三维流形的某个连通分支是 $T^2 \times [0,1]$ 的一个副本，且（相对于边界模式）是简单的。如果它是 X 的一个连通分支，则还假设 $T^2 \times \{0,1\}$ 的两个连通分支都与该图案有非空交集。选取一个连接两个边界分支的不可压缩且边界不可压缩的环带，并沿它的两个副本切开。(v) 如果三维流形的某个连通分支（相对于边界模式）是简单的，且其边界有一个压缩圆盘（与边界模式相交），但该流形不是带有干净经线的实心环面，则选取一组互不相交的此类圆盘，使其相对于边界模式边界不可压缩；若圆盘是非分离的，则取其两个平行副本；然后沿这组圆盘切开。(vi) 如果三维流形的某个连通分支是简单的且其边界不可压缩，但它不是 $T^2 \times [0,1]$ 的副本，则在此连通分支中选取一个正常嵌入的可定向不可压缩曲面，使其边界非空且没有球面或圆盘分支，并且相对于继承图案和空图案均为边界不可压缩。根据该曲面是分离的还是非分离的，沿其一个或两个平行副本切开。

(5) 到达这一阶段时，三维流形的每个连通分支都是三维球，或带有干净经线的实心环面。现在我们反复进行以下分解，直到无法再进行此类分解为止。

(i) 如果实心环面的边界中包含一个项链环带，就将该环带推入流形，使其成为正常嵌入的，然后沿其切开。这会产生一个新的实心环面。沿着这个实心环面的子午圆盘的两个副本切开，并使该圆盘与图案的交点数尽可能少。(ii) 如果两个实心环面有一个圆盘形的交分支，就沿着位于其中一个实心环面内的该圆盘的平行副本切开。

(6) 到达这一阶段时，三维流形的每个连通分支仍然都是三维球，或带有一条干净经线的实心环面。考虑这些实心环面的并集。它是一个以曲面为底的圆丛。圆丛的内部与部分层次结构中前述曲面的并集相交，交集是若干环带 A。令 S 为一个正常嵌入曲面

，它在保持 A不变的同痕下与一个截面同痕。假设在这类曲面中， S 与边界模式 P_n 的交点数最少。那么 M 有一个破碎截面，该截面是 $(3c,\ k)$-近指数控制的，其中 $c = -2\chi(S) + |S \cap P_n| + 2|S|$ 且 $k = 2^{15}$。因此，这将实心环面分解为三维球。

注 3.5. 在上述过程中，每个曲面 S_i 都位于M_i的单个连通分支中。不过，这一限制可以放宽如下：我们也可以改为要求， M_i 中包含 S_i 的任意两个连通分支，都不关联于层次结构中某个更早曲面的两侧。

定理 3.6. 该过程生成一个$(\mu,2_{15})$-指数受控的层次结构，其中 μ 是层次结构中所有曲面S_i 的 $-6\chi(S_i) + 3|S_i \cap P_i| + 6|S_i|$ 的最大值，而 P_i 是第 i个流形的边界模式。

证明. 这些曲面均为$(\mu,2_{15})$-指数受控，这一事实可由第 2 节的结果推出；但 (6) 中的破碎截面除外，我们将在下文讨论。具体而言，每个 JSJ 环面都是基本的，这正是定理2.14的内容。命题 2.16、2.17 和 2.18 表明 (2) 中的曲面是弱基本的。定理2.8意味着 (3) 中的曲面是弱基本的。同样，(4) 和 (5) 中的曲面也是指数受控的，这可由定理2.8、定理2.14、命题 2.17、命题 2.18 或引理 2.19 得出。不过，定理2.8对 ∂M_i 的环面边界分支有一些需要核查的假设。

我们声称，从步骤 (3) 开始， M_i 中不存在本质环面。反设存在一个正常嵌入的本质环面 T，位于 M_i中。注意， T 与曲面 $S_1, \dots, S_{i-1}$ 不相交，因为它位于 M_i的内部。由于 T 在 M_i中是本质的，因此它在 M_i中是 π_1-单射的。由于在部分层次结构的每个阶段，我们都是沿双侧不可压缩曲面进行分解， M_i π_1单射映入 M。因此， T在 M中是不可压缩的。它与 M中的 JSJ 曲面不相交，因为这些曲面是 (1) 中最先进行的分解。它不位于 Seifert 纤维化块中，因为这些块在 (2) 中被分解为实心环面。因此， T 在 M中边界平行，或与 M 中的某个 JSJ 环面平行。于是，在该环面与 M_2的一个边界分支之间存在 $T^2 \times [0,1]$ 的一个副本，其中 $T^2 \times \{1\} = T$。现在，部分层次结构中的每个曲面都是不可压缩的，而正常嵌入于 $T^2 \times [0,1]$ 中且与 $T^2 \times \{1\}$ 不相交的连通不可压缩曲面，唯一可能的是与 $T^2 \times \{0\}$ 的某个子曲面平行。因此，我们 deduce，在 M_i中存在 $T^2 \times [0,1]$的一个副本，其中 $T^2 \times \{0\}$ 是 ∂M_i和 $T^2 \times \{1\} = T$的一个连通分支。换言之， T在 M_i 中边界平行，因而不是本质的，证毕。

我们还声称，从步骤（3）开始， M_i 的每个不可压缩环面边界分量要么是干净的，要么位于 M_i 的一个连通分支中，而该分支是$T^2 \times [0,1]$的一个副本。考虑某个 M_i的一个不可压缩环面边界分量 T。如上所述， T 在 M 中边界平行，或平行于 M的一个 JSJ 环面。假设 M_i 中包含 T 的连通分支并非 $T^2 \times [0,1]$ 的副本。因此，T 位于 $M_2 - X$中。如果 T 是 M_2的一个边界分支，那么它必定位于 M_2 的一个双曲块中，因为在（2）中，Seifert 纤维化块被分解为实心环面。但此时 T 是干净的，因为在 T 另一侧， X 的任何连通分支都不会被分解，直到 X 中的 T 副本继承了非空图案；到了这一步， T 已不再是 ∂M_i的一个连通分支。如果 T 与 ∂M_2的一个连通分支相交，但并非完全位于 ∂M_2中，那么考虑第一个与之相交的曲面 S_j

位于 T 和 ∂M_2之间的区域。它平行于 ∂M_j 的一个干净子曲面，因此是边界可压缩的，这与我们的构造矛盾。最后，假设 T 与 ∂M_2不相交。那么它平行于M_2的一个边界分支 T' 。 T和 T'之间有一个 $T^2 \times [0,1]$的副本；如上所述，这意味着 M_i 中包含 T的连通分支是 $T^2 \times [0,1]$的一个副本，证毕。

当分解 M_i 中同胚于 $T^2 \times [0,1]$ 的一个连通分支时，我们确保在 (4)(iii) 和 (4)(iv) 中沿连接两个边界分支的环带切开。在 (4)(iii) 中，我们使用命题 2.18。在 (4)(iv) 中，我们使用命题 2.17。因此，应用定理2.8 时，其假设均成立。特别是，在步骤 (3) 和 (4) 中使用该定理时， M_i 相关连通分支中的任何不可压缩环面边界分支都是干净的。

我们需要证明该过程会终止，且最终流形由若干个球组成。为此，我们使用 Matveev 在 [18] 中发展出的理论工具，该工具基于 Haken [9] 的工作。

这里描述的过程应与 Matveev 在 [18] 中给出的过程进行比较。Matveev 过程的初始部分见 [18, 第 6.5 节。1]其内容是在以下变换可行时执行这些变换：

(E1) 如果 (M_i, P_i) 包含一个本质环面，则根据该环面是分离的还是非分离的，添加一个或两个这样的环面的平行副本。(E2) 如果 (M_i, P_i) 包含一个不与 ∂M_i 中的环带平行的干净本质纵向环带，则根据该环带是分离的还是非分离的，添加一个或两个这样的环带的平行副本。(E3) 如果 (M_i, P_i) 包含一个与边界中的环带平行的干净本质环带，则沿此环带切割。(E4) 如果 (M_i, P_i) 的一个连通分支是简单的，且其边界有一个压缩圆盘，但该流形不是带有干净经线的实心环面，则选取一个与 P_i 相交次数尽可能少的压缩圆盘，并根据其是分离的还是非分离的，沿其一个或两个平行副本切割。(E5) 如果 (M_i, P_i) 的一个连通分支是简单的且其边界不可压缩，则在此连通分支中选取一个具有非空边界的正常嵌入的连通可定向不可压缩且边界不可压缩曲面 F，该曲面既不是球面也不是圆盘，并且使 $-\chi(F) + |F \cap P_i|$ 尽可能小。然后根据其是分离的还是非分离的，沿其一个或两个平行副本切割。

Matveev 在 [18] 中的推论 6.5.7 表明，上述过程会终止，尽管最终流形不一定是三维球。随后，Matveev 使用进一步的“扩张操作”(E6)–(E10) 和“辅助操作”(E3′)、(E4′) 及 (E4′′)。

出于几个原因，我们并未严格遵循 Matveev 的方法。首先，我们要求层次结构受到指数控制，而 Matveev 对其层次结构的要求较低。其次，我们所处的情形更为特殊：初始流形是链环的外部，而他必须处理更一般的 Haken 三维流形。

我们声称，完成上述步骤 (1)-(4) 后，Matveev 的变换 (E1)-(E5) 均不再适用。因此，完成变换 (1)-(4) 后得到的带边界模式的流形具备

Matveev 在进行 (E6)-(E10) 以及 (E3′)、(E4′) 和 (E4′′) 之前所要求的全部性质。令 $(M_i,\ P_i)$ 为完成步骤 (1)-(4) 后得到的带图案流形。

现在假设 $M_i - X$ 的某个连通分支包含一个干净的本质纵向环带，但 4(i)、4(ii) 和 4(iii) 均无法应用。经过图案同痕后，该环带位于 M_i 的一个 JSJ 块中；根据定理 2.9，该块是 Seifert纤维化的，其图案由纤维组成。这不是一个实心环面，因为这样的流形不支持本质的纵向环带。 M 的 Seifert 纤维块已在 (2) 中分解。因此，包含该环带的 $M_i - X$ 连通分支是 $T^2 \times [0,1]$ 的一个副本。它可能是 M 的某个 JSJ 环面的正则邻域，也可能与 ∂M 的某个连通分支平行。其图案必定非空，因为该环带是纵向的。因此，4(iii) 可以应用于它，这与假设矛盾。

因此，我们已经证明，(E1) 和 (E2) 都不能应用于 $M_i - X$。注意，(E3) 恰好就是 4(i)。进一步注意，如果可以应用 (E4)，那么同样可以应用 4(v)。类似地，如果 (E5) 可以应用于 $M_i - X$ 的某个连通分支，那么同样可以应用 4(vi) 或 (iv)。由于 (4) 已经完成，我们推断 (E3)–(E5) 都不能应用于 $M_i - X$。

因此，根据 [18], 中的引理 6.5.10，$(M_i - X, P_i - X)$ 的每个连通分支要么是一个 3-球，要么是具有干净经线的实心环面，要么是一个 I-丛腔室。Matveev 将 I-丛腔室 定义为某个具有负欧拉示性数的紧曲面上的 I-丛，其边界模式由每个垂直边界分支中一组非空的简单闭曲线组成。他还要求，在该 I-丛的每个垂直边界分支中，其两条边界曲线都属于该图案。

我们将证明，事实上不存在 I-丛腔室。正如 Matveev 在 [18], 中命题 6.5.14 I的证明中所说明的，每个 I-丛腔室的水平边界都等于另一个 [18, -丛腔室的水平边界。因此，根据14], 命题 6.5. I，去掉垂直边界的一个小正则邻域后，-丛腔室的并由以下四类连通分支组成：

(1) $F \times I$ 的一份拷贝，其中 F 是紧致可定向曲面，且 $F \times \partial I \subset \partial N$（$K$）；(2) 一个扭曲的 I-丛 $F\tilde{\times}I$，其中 F 是紧致不可定向曲面，且 I-丛在 ∂N中的水平边界为K；(3) 以圆为底、纤维为紧致可定向曲面的纤维化；(4) 两个扭曲的 I-丛沿其水平边界粘合而成的并，称为准 *Stallings* 流形。

我们称从 I 丛腔室的并集中去掉其垂直边界的一个小正则邻域后得到的一个连通分支为腔室汇编。其垂直边界 是构成它的 I 丛的垂直边界之并。它是由环带和环面组成的集合，这些环带和环面正常嵌入在 M 中； M 是 K 的外部。

我们声称，每个腔室汇编的垂直边界在 M 中不可压缩。反设不然，则垂直边界可压缩。因此，存在一个垂直边界分支 T，它有一个压缩圆盘，且圆盘内部与垂直边界不相交。不可约三维流形 M 中的任何可压缩环面，要么位于一个三维球内，要么围成一个实心环面。任何可压缩环带都位于一个三维球内。曲面 T 与一个 I 丛腔室的至少一个水平边界分支 F 关联。∂F 的每个连通分支都代表

腔室基本群中的一个非平凡元素，因此是 $\pi_1(M)$ 中的非平凡元素。因此， T 不可能位于一个三维球内。所以它是一个围成实心环面 V 的环面。考虑层次结构中第一个与 V 相交的曲面 S_i 。接下来说明， $S_i \cap V$ 在 V 中不可压缩，理由如下。 $S_i \cap V$ 的压缩圆盘的边界必须在 S_i 中围成一个圆盘，因为 S_i 是 π_1-单射的。这个圆盘并非完全位于 V 内。然而，层次结构中每个与 V 关联但并非完全位于 V 内的曲面，都必须包含一个与 V 关联的 I 丛腔室的水平边界分支 F 。因此，我们推知 F 的某个边界分支在 M 中是同伦平凡的，而这已在上文排除。由于 $S_i \cap V$ 在实心环面 V 中不可压缩且可定向，所以它由一组不可压缩环带和圆盘组成。事实上，它不能包含任何圆盘，因为这又会意味着某个腔室的水平边界分支没有 π_1-单射地映入 M。因此， $S_i \cap V$ 中存在一个在 V 内最外层的环带 A 。它与 I 丛腔室的水平边界分支 F 和 F' 关联。位于 F 和 F' 之间的是一组 I 丛腔室，它们又构成一个 I 丛。若 $F = F'$ 围成一个扭曲的 I 丛，这种情况也是可能的。扩张这个 I 丛，使其包含 V 中位于 A 与 ∂V 之间的区域。它仍是一个 I 丛，但此时 A 是一个垂直边界分支。现在，这个 I 丛的底空间具有负欧拉示性数，因此包含一条本质真嵌入弧，其两个端点都落在对应于 ∂A 的边界分支上。这条弧上方有一个圆盘 E ，由 I 纤维组成，且 $E \cap S_i = \partial E$。根据 S_i 的不可压缩性， ∂E 在 S_i 中围成一个圆盘 E' 。 E' 与 F 的交集是 $F \backslash\backslash \partial E$ 的一个平面曲面连通分支。因此，我们推知 ∂F 的某个连通分支在 S_i 中围成一个圆盘，而我们已经证明这是不可能的。

因此，我们已经证明，每个腔室汇编的垂直边界都是不可压缩的。

腔室汇编的垂直边界不能包含任何环带连通分支，否则就会适用（1）或（2），从而丛的水平边界将位于 ∂M 中。此时它将是一个圆盘、环带或环面，而根据丛的底空间具有负欧拉示性数这一假设，这些情况都不可能发生。

因此，腔室汇编的垂直边界由不可压缩的环面组成。所以，每个环面要么边界平行，要么是 JSJ 环面，要么位于 M 的 JSJ 分解中某个塞弗特纤维块的内部。后一种情况可以如下排除。假设某个垂直边界分支位于一个塞弗特纤维块中，但它既不是 JSJ 环面，也不与边界平行。这个塞弗特纤维空间已在步骤（2）中分解为实心环面。因此，我们推断，汇编中的某个 I-丛腔室是一个三维球或实心环面，但 I-丛腔室不可能是三维球或实心环面。

因此，每个腔室汇编要么是 M 的 JSJ 分解中的一个连通分支，要么是位于 JSJ 环面的正则邻域内的 $T^2 \times I$ 的一个副本，要么是 ∂M 的一个连通分支。最后一种情况不可能发生，因为每个腔室汇编都是曲面丛或 Stallings 流形，其纤维的欧拉示性数为负。因此，我们推得每个腔室汇编都是 M 的 JSJ 分解中的一个连通分支。层次结构中的每个曲面与腔室汇编的交集，在该腔室汇编中都是水平的。然而，在步骤 (3) 中，我们沿着一个既不是纤维也不是半纤维的曲面分解了双曲 JSJ 块，并将 Seifert 纤维化块分解成实心环面。

因此，我们已经证明不存在 I-丛腔室。

因此，一旦步骤（4）完成， $M_i - X$ 的每个连通分支都是一个三维球或实心环面。事实上，我们声称 M_i 的每个连通分支都是一个三维球或实心环面。考虑 X 的任意一个连通分支。与其关联的 $M_i - X$ 的两个连通分支已被分解为实心环面和三维球。因此，它的两个边界分支都继承了非空的边界模式。于是，4(iii)和(iv)中关于分解此类 X 连通分支的限制不再适用。因此，该 X 连通分支确实已按照4(iii)或4(iv)分解为实心环面。对这些连通分支进行的任何进一步分解只会得到实心环面和三维球。这就证明了该断言。

现在我们应用（5）中的变换。这些正是 Matveev 的变换（E3′）和（E4′）。注意，Matveev 的变换（E4″）在我们的情形下是不可能的，因为它仅适用于初始流形 M_1 是闭的情形。执行这些变换后，实心环面腔室的并集就是 Matveev 所称的 忠实 （见 [18]中的定义 6.5.52）。他在引理 6.5.53 中证明，当这一条件成立时，实心环面腔室的并集是一个以曲面为底的圆丛。此外，每个实心环面腔室都是圆纤维的并集，而它们之间的每个交分支都是一个由圆纤维组成的环带。因此，在步骤（6）中，该圆丛沿着一个破碎截面进行分解。特别地，每个剩余的实心环面都沿着一个子午圆盘进行分解。因此，这一过程确实以一个层次结构结束。

我们需要证明，这个层次结构是（μ，2_{15}）-指数受控的。正如在证明开头所解释的，层次结构中除破碎截面之外的所有曲面都具有这一性质；根据命题2.24，破碎截面仅为（μ，2_{15}）-近指数控制。（近指数控制的精确定义见第2.15节。）在我们的情形中，所考虑的曲面是一个破碎截面，它由位于 M中的圆丛截面 Y得到。令 P 为 Y的边界模式。那么 $\partial Y \backslash\backslash P$由若干圆盘和环带组成。环带分量位于 ∂M 中，并且在纤维化中是垂直的。任何保持 P 的每个顶点、边和圆不变的 Y同胚，经过图案同痕后，都是关于干净的垂直环带和环面的德恩扭转的复合。关于垂直环面的德恩扭转在 ∂M 上限制为恒等映射，因此确定了M的一个强等价。考虑关于垂直环带 R的德恩扭转。我们断言，这个德恩扭转在 M上同痕于恒等映射。

现在，我们为 ∂M 中关联于 Seifert 纤维化 JSJ 块的连通分支指定了边界模式，该模式由一条不具有纤维斜率的本质曲线构成。因此，在步骤（2）中分解 Seifert 纤维化块时， ∂M 中这些关联于 JSJ 块的连通分支会继承一种将这些环面分解为圆盘的模式。由此可推知， $\partial Y \backslash\backslash P$ 的环带分支与 ∂M 的那些连通分支不相交。环带 R 在 ∂M 中具有干净的边界，因此不会与 M 的 Seifert 纤维化块相交。所以它在 M 中是非本质的。因此，沿 R 作德恩扭转得到的 M 的一个同胚同痕于恒等映射，正如所声称的那样。

因此，假设给定 M 的一个三角剖分，其中有 t 个四面体，并且其中 th e 图案以及破碎截面之前的所有曲面都是单纯的。破碎 n 截面是（μ，2_{15}）-近指数控制的，因此，正如上文所论证的，那里 e 是 M的一个同胚，在 ∂M上同痕于恒等映射，并保持层次结构中较早的 r

曲面，将破碎截面映射为权重至多为$\mu \cdot 2^{15t}$的截面，正如所要求的那样。□

3.3. **充分分离的层次结构**。设

$$M = M_1 \xrightarrow{S_1} M_2 \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_n} M_{n+1}$$

为一个层次结构。若满足以下两个条件，则称其为充分分离的：

(1) 对于每个 $i < n$， M_i 中都不存在一条与 S_i 横截相交一次的曲线；(2) 对于每个 $i < n$， S_i 都包含在 M_i的单个连通分支内。

此外，这两个条件要么对 $i = n$ 成立，要么 S_n 是一个圆丛的破碎截面。

第一个条件意味着，对于 $M_i \backslash\backslash S_i$ 的每个连通分支 Y， $M_i \backslash\backslash S_i \to M_i$ 到 Y 的限制是单射。因此，结合这两个条件，我们可以推知，没有曲面 S_j （$j < n$）会穿过 ∂M_j 中在 M 里被识别的两个部分。请注意，即使 S_n 是圆丛的一个破碎截面，这一点仍然成立。这在技术上很有用，因为 ∂S_j 会产生边界模式；如果 ∂S_j 的两个部分在 M 中被识别，就可能在边界模式中产生意料之外的顶点。

我们特别针对注 3.5 指出以下内容。

注 3.7。 定理 3.6 中构造的层次结构是充分分离的。

4. 把手结构

我们将讨论三维流形上的把手结构。它们始终具有以下性质：

约定 4.1。 设 $\mathcal{H}$ 是一个三维流形上的把手结构。那么，对于 $0 \le i \le 3$，柄 i 的并集记作 $\mathcal{H}^i$。 i-柄的指标 为 i。我们总要求把手结构 $\mathcal{H}$ 满足以下条件。

(1) 对于每个 i-柄 $D^i \times D^{3-i}$，它与低指标柄的交集为 $\partial D^i \times D^{3-i}$。(2) 对于每个 2-柄 $H_2 = D^2 \times D^1$ 和 1-柄 $H_1 = D^1 \times D^2$，交集 $H_1 \cap H_2$ 必须符合各自的乘积结构，也就是说，在 H_2 中， $H_1 \cap H_2$ 等于 $\alpha \times D^1$，其中 α 是 ∂D^2 中的一组弧；对于 ∂D^2 中的一组弧 β，在 H_1 中， $D^1 \times \beta$ 也与之相等。(3) 每个 2-柄都至少穿过一个 1-柄。

三维流形 M 的三角剖分确定了 M 的把手结构，其中每个不位于 ∂M 中的 i-单形都会产生一个 $(3-i)$-柄。

分析三维流形的把手结构时，以下曲面尤为相关。令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{H}^0 \cap (\mathcal{H}^1 \cup \mathcal{H}^2)$。这是球面 $\partial \mathcal{H}^0$的一个子曲面。它具有一种把手结构，其中记作 $\mathcal{F}^0$的 0-柄为 $\mathcal{H}^0 \cap \mathcal{H}^1$，记作 $\mathcal{F}^1$的 1-柄为 $\mathcal{H}^0 \cap \mathcal{H}^2$。注意， $\mathcal{F}^1$ 确实是一族 1-柄，因为 $\mathcal{H}$ 的每个 2-柄都穿过$\mathcal{H}$的至少一个 1-柄，因此 $\mathcal{F}^1$ 没有环带分支。

4.1. 把手结构中的正规曲面。 设 $\mathcal{H}$ 为三维流形 M的一个把手结构。若一个曲面正常嵌入于 M，则称其相对于 $\mathcal{H}$ 处于标准形式，如果

(1) 它与 3-柄不相交；(2) 它与每个 2-柄相交，交集为 $D^2 \times D^1$ 形的圆盘，其中 $D^2 \times F$是内部 D^1中的某个有限点集 F；(3) 它与每个 1-柄相交，交集为 $D^1 \times D^2$ 形的圆盘，其中 $D^1 \times \alpha$是 D^2中的一族适当嵌入弧 α；(4) 它与每个 0-柄相交，交集为一族适当嵌入圆盘。

若标准曲面 S 满足以下条件，则称其为正规：对于 $S\cap\mathcal{H}^0$的每个连通分支 D，

(1) D 与 $\mathcal{F}^1$ 的每个连通分支相交至多形成一条弧；(2) D 与 $\partial\mathcal{H}^0\backslash\backslash\mathcal{F}$ 的每个连通分支相交至多形成一条弧，且不包含任何在 $\partial\mathcal{H}^0\backslash\backslash\mathcal{F}$中围成圆盘的简单闭曲线；(3) D 与 $\partial\mathcal{F}^0\backslash\backslash\mathcal{F}^1$ 的任一连通分支相交至多一次；(4) D 不与彼此相邻的 $\partial\mathcal{H}^0\backslash\backslash\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^1$ 的连通分支相交。

这些 D $S\cap\mathcal{H}^0$ 的连通分支称为基本正规圆盘。

4.2. 边界中的曲线和图。 设 $\mathcal{H}$ 是三维流形 M的把手结构。如果 C 是 ∂M 中的一组不相交的简单闭曲线的并，我们称其为标准的，若

(1) C 与 $\mathcal{H}$的2-把手不相交；(2) C 与每个1-柄 $D^1\cap D^2$ 的交集为 $D^1\times F$，其中 F 是∂D^2的某个有限子集；(3) C 与每个0-柄的交集都是由弧组成的集合。

边界中的图 P 若满足以下条件，则称其为横截形式：
(1) P 与 $\mathcal{H}$的0-柄不相交；(2) P与每个1-柄 $D^1\cap D^2$ 的交集是 $\{*\}\times\partial D^2$ 的一个子集，其中包含某个点
$*$ 位于 D^1的内部；(3) P 的每个顶点都位于 $\mathcal{H}$的2-柄中；(4) 对于 $\mathcal{H}$的任意2-柄 $D^2\times D^1$，P与 $D^2\times\partial D^1$ 的一个连通分支之间的交集至多包含 P 的一个顶点，外加若干条弧，且每条弧都从该顶点延伸至 $D^2\times\partial D^1$的边界。

4.3. 标准曲面的权重与扩展权重。 把手结构 $\mathcal{H}$ 中标准曲面 S 的权重是$S\cap\mathcal{H}^2$的连通分支数。注意，当把手结构源自闭三维流形 $\mathcal{T}$的三角剖分时，$S\cap\mathcal{H}^2$的连通分支与 S 和 $\mathcal{T}$的1-骨架之间的交点存在双射。因此，在这种情况下，这两种权重度量相同。

我们还引入另一种复杂度度量。标准曲面 S 的扩展权重 定义为

$$|S\cap\mathcal{H}^2|+|S\cap\mathcal{H}^1|.$$

这一设定的理由是，权重作为复杂度度量并不十分完善。例如，有些曲面完全避开 2- 把手，却多次穿过 0- 柄和 1- 柄。这些曲面的权重为零，但扩展权重很大。此外，我们还有以下引理。

引理 4.2. 设 $\mathcal{H}$ 是紧致三维流形 M 的一个把手结构。设 P 是一个处于横截形式的边界模式。设 S 是一个标准的不可压缩且边界不可压缩曲面，且其任何连通分支都不是球面或圆盘，并且与 P 相交至多两次。那么 S 与某个正规曲面 S' 模式同痕，且 S' 的扩展权重不超过 S 的扩展权重。此外，对于 $\mathcal{H}$ 的每个 *2-* 把手， S' 与该 *2-*把手的相交次数至多与 S 相同。

这实际上已在 [18, 定理 3.47], 中得到证明，其中给出了正规化变换。很容易验证，这些变换不会增加扩展权重。

4.4. **边界的指定子曲面**。 当我们分析三维流形 N的把手结构时，其边界有时会包含一个指定子曲面 X。此外， ∂N 将包含一些 α 正常嵌入于$\partial N \backslash\backslash X$中的弧。这些弧满足以下条件： ∂X 是标准曲线的集合，并且 α 的每个连通分支都位于一个 0-柄中。此时，我们称 $\mathcal{H}$ 为（N， α， X）的把手结构。

处理边界上的这类额外结构时，我们将稍微改变正规曲面 S的定义。现在，如果一个适当嵌入曲面 S是标准的、其边界与 X不相交，并且对于 $S \cap \mathcal{H}^0$的每个连通分支D ，满足以下条件，则称其为正规：

(1) D 与 $\mathcal{F}^1$ 的每个连通分支至多相交于一条弧；(2) D 与 $\partial\mathcal{H}^0 \backslash\backslash (\mathcal{F} \cup \alpha \cup X)$ 的每个连通分支至多相交于一条弧，且不含在 $\partial\mathcal{H}^0 \backslash\backslash (\mathcal{F} \cup \alpha \cup X)$中界定圆盘的简单闭曲线；(3) D 与 $\partial\mathcal{F}^0 \backslash\backslash (\mathcal{F}^1 \cup \alpha \cup X)$的任一连通分支相交不超过一次；(4) D 不与彼此关联的 $\partial\mathcal{H}^0 \backslash\backslash (\mathcal{F} \cup \alpha \cup X)$和 $\mathcal{F}^1$ 的连通分支相交。

我们还称 S 为粗正规 ，如果它是标准的，其边界与X不相交，并且 $S \cap \mathcal{H}^0$ 的每个连通分支 D 满足上述(1)，以及：

(3′) $D \cap \mathcal{F}^0$ 的任何连通分支都不是一条端点位于 $\partial\mathcal{F}^0 \backslash\backslash (\mathcal{F}^1 \cup \alpha \cup X)$的同一连通分支上的弧；(4′) $D \cap \mathcal{F}^0$ 的任何连通分支都不是一条端点位于彼此关联的 $\partial\mathcal{F}^0 \backslash\backslash (\mathcal{F}^1 \cup \alpha \cup X)$与 $\partial\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{F}^1$ 的连通分支上的弧。

4.5. **平行性**。 设 $\mathcal{H}$ 是 (N, P, X) 的把手结构，且 S 是一个正规曲面。若存在 N 的一个同痕，它保持 $\mathcal{H}$ 的所有手柄以及 X 和 P 不变，将 D_0 映到 D_1，且该同痕在 D_0 上的限制是 $D_0 \times [0,1]$ 到 N 的一个嵌入，则称 $S \cap \mathcal{H}^i$ 的两个圆盘分支 D_0 和 D_1 是平行的 。此时称 D_0 和 D_1 属于同一类型。

更一般地，若存在 S 的子曲面 S'_0 和 S'_1 ，它们各自都是初等正规圆盘的并，且满足 $S'_0 \supseteq S_0$ 和 $S'_1 \supseteq S_1$，以及一个同痕H： $N \times [0,1] \to N$，该同痕保持 $\mathcal{H}$ 的所有手柄以及 X 和 P 不变，并且满足以下条件，则称 S 的两个子曲面 S_0 和 S_1 是正规平行的：

(1) H 到 $S'_0 \times [0,1]$ 的限制是一个嵌入。(2) 对于 S'_0的每个初等正规圆盘 D 以及每个 $t \in [0,1]$， $H(D,t)$是一个初等正规圆盘。(3) $H(S'_0 \times \{i\}) = S'_i$ 对于 $i = 0$ 和1。(4) $H(S_0 \times \{i\}) = S_i$ 对于 $i = 0$ 和1。

5. The basic theory of arc presentations

在本截面中，我们介绍矩形图和弧表示，它们主要由Cromwell [6] 和 Dynnikov [8]发展而来。

5.1. 矩形图。 矩形图 是平面上的一种图$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$，由若干弧组成，每条弧都是水平的（形式为 $[s_1, s_2] \times \{t\}$ for$s_1, s_2, t \in \mathbb{R}$）或垂直的（形式为 $\{s\} \times [t_1, t_2]$ for s, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$）。每个交叉点都是由一条竖直弧与一条水平弧相交形成；其中竖直弧必须是上弧。此外，任意两条弧都不能共线。（见图 10。）

水平弧与竖直弧的数量相同。这就是该矩形图的弧指标。

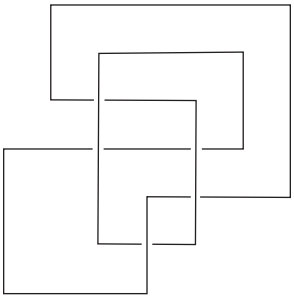

Figure 10. 一个矩形图

通过对平面作同痕，将任意链环图转换为矩形图是件简单的事。在 [17, 引理 2.1], 中已证明了以下结果，它对这一观察给出了定量描述。

引理 5.1. 设 D 是一个具有 c 个交叉点的链环图。那么， D 同痕于一个弧指标至多为 $(81/20)c$的矩形图。

5.2. 弧表示。 与之密切相关的是链环的弧表示这一概念。

固定一种将三维球面表示为两个圆的连接 $S^1 * S^1$ 的方式。因此， S^3 中的一点由三个坐标（ϕ、 τ、 θ）确定，其中 ϕ、 $\theta \in \mathbb{R}/$（$2\pi\mathbb{Z}$）且$0 \leq \tau \leq 1$。对于所有 θ和 θ'，点（ϕ，0，θ）与（ϕ，0，θ'）均视为同一点。由此得到的圆 $\{\tau = 0\}$ 记作 S^1_ϕ ，称为绑定圆。类似地，对于所有 ϕ和 ϕ'，点（ϕ，1，θ）与（ϕ'，1，θ）均视为同一点，由此得到的圆 $\{\tau = 1\}$记作 S^1_θ。对于 $t \in \mathbb{R}/$（$2\pi\mathbb{Z}$），开圆盘 $\{\theta = t, \tau > 0\}$ 称为一页，记作 $\mathcal{D}_t$。

链环 K 若其弧表示满足

(1) 它与绑定圆相交于有限个点，称为顶点；(2) 它与每一页的交集要么为空，要么是一条连接不同顶点的弧。

顶点的数量等于弧的数量，称为该弧表示的弧指标。

5.3.弧表示与矩形图之间的关系。弧表示按如下方式确定一个矩形图。设该弧表示的弧指标为 n。对于页 $\mathcal{D}_t$ 中连接顶点 s_1 和 s_2 的每条弧 $[0, 2\pi$，在平面中插入水平弧 $[s_1, s_2] \times \{t\}$。对于每个顶点 $s \in S^1_\phi$，令 t_1，t_2 为与其关联的弧在 $[0, 2\pi$ 中的 θ 值，并将一条竖直弧 $\{s\} \times [t_1, t_2]$ 插入平面。平面中的这些竖直弧和水平弧确定了一个矩形图，只需规定在每个交叉点处，上弧为竖直弧即可。

显然，这一过程可以逆转：给定一个矩形图，就可以构造出相应的弧表示。

Cromwell [6]证明了弧表示和矩形图表示的是同一个链环。

5.4. 对矩形图的修改。 在 [6], Cromwell 引入了一系列可以对矩形图进行的修改：

(1) 循环置换：这里对水平弧（或垂直弧）进行循环置换。

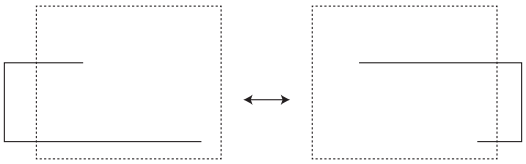

FIGURE 11. 垂直弧的循环置换

(2) 稳定化/去稳定化：这些是对图进行的局部修改，如图 12 所示，会增加或减少弧指标。

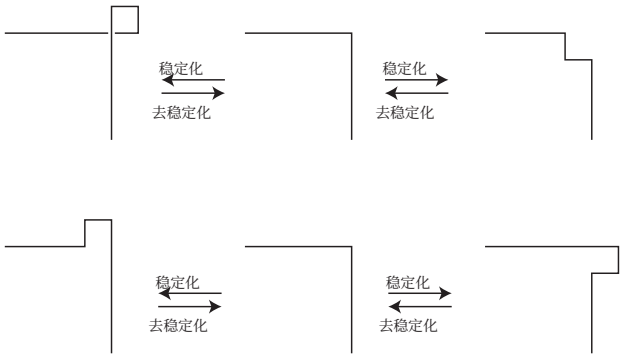

FIGURE 12. 稳定化和去稳定化

(3) 交换移动：此变换使图中的两条水平弧（或两条垂直弧）彼此越过。这些弧的垂直高度必须相邻，也就是说，没有其他弧的垂直高度介于它们之间。此外，这些弧的水平端点不能交错排列。

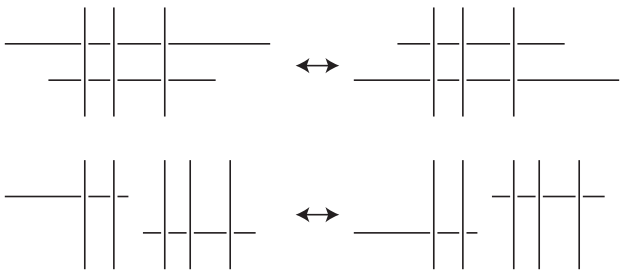

FIGURE 13. 交换移动

Cromwell 在 [6] 中证明，任意两个链环图示之间都可以通过一系列此类变换相互转换。对于链环 K 是平凡结的情况，Dynnikov [8] 证明了一个惊人的结果：将矩形图化简为弧指标为 2 的图示时，并不需要稳定化（这是唯一会增加弧指标的变换）。

5.5. **Reidemeister 变换的上界**。显然，可以通过 Reidemeister 变换实现上述对矩形图的修改，而且得出明确的上界也不足为奇。一次稳定化或去稳定化显然至多可通过一次 Reidemeister 变换实现。文献 [17], 考察了交换移动和循环置换，并确立了以下上界。

引理 5.2。设 n 为矩形图 D的弧指标。假设执行了一次交换移动，并令 D' 为所得的矩形图。则D' 与 D 之间相差至多由 n 次 ***Reidemeister*** 变换构成的序列。

引理 5.3。 设 n 为矩形图 D的弧指标。假设对垂直的（或水平）弧进行循环置换，得到矩形图 D'。则 D 和 D' 相差至多经过 $(n-1)^2$次***Reidemeister*** 变换。

5.6. **广义交换移动**。 定义如下。

设 $0 < s_1 < s_2 < s_3 < 2\pi$ 为 ϕ 中不与链环K的顶点相交的值。设 $0 \le t_1 < t_2 < 2\pi$ 为 θ 中不与 K的弧相交的值。假设对于矩形图的每条水平弧 $[s, s'] \times \{t\}$，均满足以下条件：

（1）如果 $t \in (t_1,\ t_2)$，则 $\{s, s'\}$ 不与 $\{s_2, s_3\}$交错。（2）如果 $t \in S^1_\phi - (t_1,\ t_2)$，则 $\{s, s'\}$ 不与 $\{s_1, s_2\}$交错。

然后，可以通过移动位于 s_1 与 s_2 之间所有顶点的 ϕ 值，使它们按相同顺序移至 s_2 与 s_3 之间；并移动位于 s_2 与 s_3 之间所有顶点的 ϕ 值，使它们按相同顺序移至 s_1与 s_2 之间，从而改变矩形图。这是一种广义交换移动。

图 14 展示了 $t_1 = 0$ 情况下对矩形图的影响。

以下内容是 [17]中的引理 2.4。

引理 5.4。 设 n 为 K的弧表示的弧指标。对该弧表示进行一次广义交换移动，相当于至多进行$(3/2)n^3$ 次 ***Reidemeister*** 变换。它也相当于至多进行 n次循环置换和$(3/4)n^2$ 次交换移动。

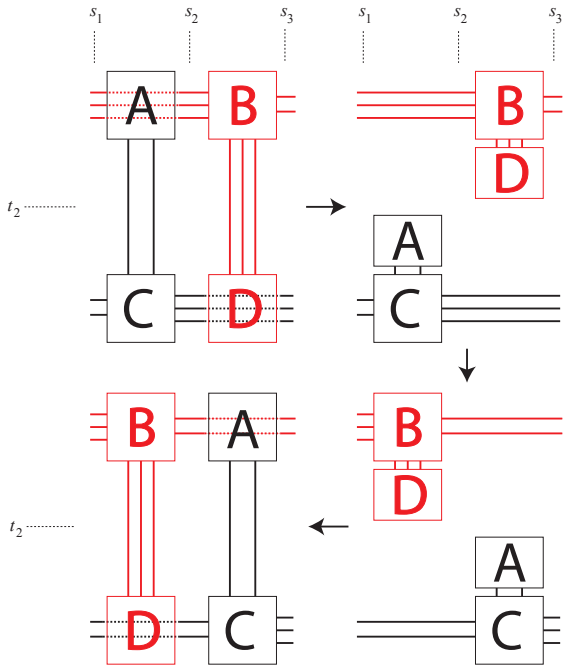

FIGURE 14. 广义交换移动

5.7. **近似容许形式**。 我们将 S^3 固定为连接 $S^1_\phi * S^1_\theta$。设 S 是嵌入于 S^3中的曲面。那么 $S - S^1_\phi$ 继承了奇异叶状结构 F，其在每个点处的切空间由 1-形式 $d\theta$的核给出。

我们称 S 处于近似容许形式，如果它满足以下条件：(1) 边界 ∂S 采用弧表示。(2) 曲面 S 是光滑嵌入的，但在 $\partial S \cap S^1_\phi$ 处除外。(3) $S - \partial S$ 与 S^1_ϕ 在有限多个点处横截相交。(4) 叶状结构 F 只有有限多个奇点，且每个奇点都是与某一页相切的切点。(5) 每个奇点都是莫尔斯型，换言之，是局部极大值、局部极小值、内部鞍点或边界鞍点。（见图 15。）注意，局部极小值和局部极大值不会出现在 ∂S 上，因为 ∂S 采用弧表示。(6) 叶状结构 F 在 S 的每个顶点附近都是径向的。(7) 每页至多包含 ∂S 的一条弧或 $F|_{S-\partial S}$ 的一个奇点，但不能两者兼有。(8) ∂S 的每条弧在其内部至多包含 F 的一个奇点（如图 15 (e) 所示，该奇点是边界鞍点）。

在 F 的奇异点或 S的顶点附近，叶状结构具有以下局部图形之一，如图 15 所示。

在 (a) 中， S 的内部与绑定圆横截相交。这是一个内部顶点。在 (b) 中，展示了一个局部极大值或极小值，称为极点。在 (c) 中，有一个内部鞍点。在 (d) 中展示了一个边界顶点，

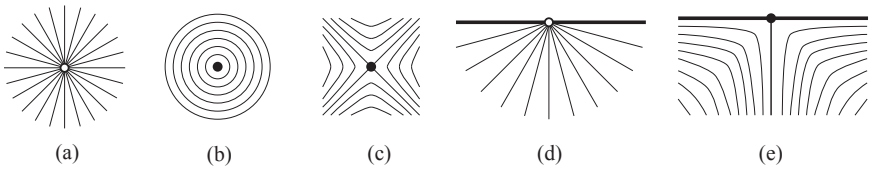

FIGURE 15. 叶状结构的奇点

即 S 的边界与绑定圆相交的位置。(e) 中给出了一个边界鞍点。当奇异点是内部鞍点或边界鞍点时，我们称之为鞍点。

通过初等一般位置论证可知，任何边界位于弧表示中的嵌入曲面，都可以在保持其边界固定的情况下，同伦变形为近似容许形式。

曲面 S 有多种与近似容许形式密切相关的排列方式。这些方式由 Dynnikov [8] 和作者[17]提出。下面简要回顾这些内容。

5.8. **容许形式与绕转顶点**。设 v 是 S的一个边界顶点。选取一条真嵌入弧 α，使其位于 v 的小正则邻域内，且端点分别位于 v的两侧。则 v 的绕转角为 $|\int_\alpha d\theta|$。如果 v 的绕转角大于 2π，则称 v 为绕行顶点。

Dynnikov [8]定义了容许形式。曲面必须近乎可容许，同时还必须满足一些额外条件，以限制 ∂S附近的行为。具体而言，绕行顶点至多有一个，边界鞍点也至多有一个。此外，如果同时存在绕行顶点和边界鞍点，则二者必须位于 ∂S的同一条弧上。

Dynnikov 在 [8]证明，如果 S 是一个嵌入曲面，且 ∂S 是连通的并处于弧表示中，那么存在一个保持 ∂S 不动的环境同痕，将 S变为容许形式。

5.9. **替代可容许形式**。如果曲面 S 近乎可容许，且不含绕转顶点，则称其为替代可容许形式。

作者在 [17] 中对其作了定义。与容许形式相比，它有一些优点，也有一些缺点。主要优点是没有可能造成问题的绕转顶点。主要缺点是，未必总能在边界保持不变的情况下，将曲面同伦变形为替代可容许形式。这是因为，无绕转顶点以及每条 ∂S 的弧上至多有一个边界鞍点这两项限制，对 ∂S 的框架施加了约束。

5.10. **广义容许形式**。考虑上述主题的另一种变体会很方便：在这种变体中，我们允许曲面具有比莫尔斯奇点更一般的奇点。

考虑具有高度函数 z 的 $\mathbb{R}^3$。如果嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面在原点附近使用柱坐标时具有以下形式，则称该曲面在原点处有一个广义内部鞍点：

$$\{(r, \alpha, z) : z = r^2 \sin(k\alpha)\}$$

其中 $k \geq 2$ 为某个整数。$k = 2$ 是 Morse鞍点的情形。

我们还考虑嵌入在半空间 $\{0 \le \alpha \le \pi\}$ 中的曲面（在笛卡尔坐标中，这就是 $\{y \ge 0\}$）。如果该曲面具有如下形式，我们就称原点处有一个 广义边界鞍点 。

$$\{(r, \alpha, z) : z = r^2 \sin(k\alpha)\} \cap \{0 \le \alpha \le \pi\}$$

对于某个整数 $k \ge 2$。因此，在广义边界鞍点处，曲面的边界相对于高度函数 z 是水平的。广义鞍点 是广义内部鞍点或广义边界鞍点。

如果曲面满足近乎可容许形式定义中的 (1)-(7)，但允许出现广义内部鞍点和广义边界鞍点，且没有绕转顶点，我们就称该曲面处于广义容许形式 。

广义内部鞍点和广义边界鞍点附近的奇异叶状结构如图16所示。

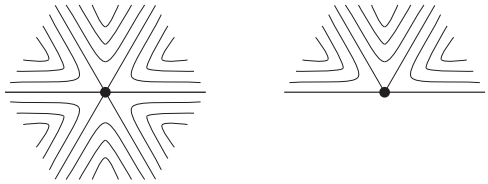

FIGURE 16. 广义内部鞍点和广义边界鞍点（情形 $k = 3$）

5.11. 近嵌入曲面。 本文中有必要考虑并非完全嵌入的曲面。若曲面 S 位于三维流形 M中，且 $S \cap \partial M = \partial S$ 和 $S - \partial S$ 是嵌入的，我们就称该曲面为近嵌入的。

因此，近嵌入曲面的边界必须位于 ∂M 中，但它在那里未必是嵌入的。不过，若移去 ∂M的一个非常薄的正则邻域，那么 S 与所得三维流形边界的交集将是一族嵌入曲线。因此，尽管 ∂S 在 ∂M中未必是嵌入的，仍可对 ∂S 在∂M 中作一个小的同伦，使其成为嵌入的。

我们将考虑处于替代可容许形式的近嵌入曲面。在这种情况下，我们要求 ∂S 是纤维的并集，因此可以将其视为处于弧表示中。然而，由于 ∂S 未必是嵌入的，其像也未必是一族互不相交的简单闭曲线。

5.12. 曲面的绑定权重。对于处于近似容许形式的嵌入曲面 S ，其绑定权重 $w_\beta(S)$ 为 $|S \cap S^1_\phi|$。然而，当 S 为近嵌入曲面时，我们采用不同的定义。近嵌入曲面由一个映射 $f\colon\ S \to S^3$给出。 S 的绑定权重 $w_\beta(S)$为 $|f^{-1}(S^1_\phi)|$。因此，当 ∂S 多次穿过一个顶点时，该顶点将按重数计数。

5.13. 分离曲线与瓦片。上述曲面的所有构型都具有各种共同特征，现将对此进行描述。

移除顶点和广义鞍点后，所得结果是 S 的一个子曲面上的叶状结构。

一条分界线 是该叶状结构中与某个广义鞍点关联的叶的一个连通分支。由于每个广义鞍点的 θ 值各不相同，分界线不会连接不同的广义鞍点。因此，它们要么从一个广义鞍点延伸至某个顶点，要么从一个广义鞍点出发并返回该鞍点自身。

若从 S中移除奇点、分离曲线和 ∂S，则所得曲面的每个连通分支称为一个瓦片。

每个瓦片都带有一个叶状结构；由于该结构无奇点且由全局函数 θ定义，因此它在瓦片上诱导出乘积结构。所以，每个瓦片都是一个开环带或开圆盘。圆盘瓦片边界上的分离曲线从广义鞍点延伸至顶点。因此，圆盘瓦片分为三种类型（见图17）：

(1) 方形 瓦片，其边界上有两个顶点（它们可能重合）和两个广义鞍点；(2) 半 瓦片，其边界上有两个顶点（它们也可能重合）和一个广义鞍点；半瓦片边界上连接这两个顶点的弧位于 ∂S中；(3) 双边形 瓦片，其边界上有两个顶点且没有广义鞍点。此时，双边形瓦片是 S的一个连通分支。

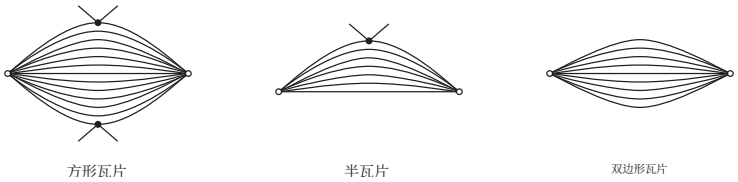

FIGURE 17. 圆盘瓦片

通常可以在不增加曲面绑定权重的情况下移除环带瓦片，或者以其他方式避开它们。因此，我们通常会假设给定的近乎可容许曲面或广义容许曲面不含环带瓦片。

5.14. **鞍点数与顶点数的关系**。

引理 5.5. 设 S 是一个不含环带瓦片的广义容许曲面。设$v^i(S)$ 表示内部顶点数，设 $v^b(S)$ 表示边界顶点数，设 $x^i(S)$ 表示广义内部鞍点数，设 $x^b(S)$ 表示广义边界鞍点数。则

$$2v^i(S) + v^b(S) - 2x^i(S) - x^b(S) \geq 2\chi(S).$$

证明。 我们首先考虑 S 为闭的情形。奇异叶状结构可用于在 S上构造胞腔结构，具体如下。0-胞腔是顶点。在每个瓦片内，我们选取一条非奇异叶，并将其视为一个1-胞腔。这个1-骨架的补集由若干圆盘组成，每个圆盘都是某个广义鞍点的开正则邻域。这里我们用到了不存在环带瓦片这一假设。设 V、 E 和 F 分别为该胞腔结构中0-胞腔、1-胞腔和2-胞腔的数量。那么 $4F \leq 2E$，因为每个2-胞腔的价数至少为4。因此，

$$\chi(S) = V - E + F \leq V - F = v^i(S) - x^i(S),$$

从而证明了此情形下的引理。

注意，如果 S 的某个连通分支含有一个双边形瓦片，那么该瓦片就是整个连通分支。在这种情况下，很容易验证所需的公式。因此，我们可以假设 S 不含双边形瓦片。

ˆ当 S 有非空边界时，我们构造它的双重 S。 S 上的奇异叶状结构 ˆ在 S 上诱导出一个奇异叶状结构。由于 ∂S 是弧表示，且 S 不含双边形瓦片 ˆ， S 上不会形成环形瓦片。因此，我们可以像在闭合情形中那样，在 ˆS 上构造一个胞腔结构。设 V、 E 和 F 分别为其中 0-胞腔、1-胞腔和 2-胞腔的数量。同样，每个 2-胞腔的价数至少为 4，因为它要么来自 S 的一个内部广义鞍点，要么来自两个融合在一起的广义边界鞍点。因此，

$$2\chi(S) = \chi(\hat{S}) = V - E + F \leq V - F = 2v^i(S) + v^b(S) - 2x^i(S) - x^b(S).$$

□

6. Admissible partial hierarchies

6.1. 定义。 给定一个以弧表示呈现的链环 K 。此弧表示对应于 K 的矩形图。

按照定理 3.3 中的描述，为 K 的外部赋予一个边界模式。在 $\partial N(K)$ 的每个连通分支上，此模式要么为空，要么是斜率为 0 或 ± 1 的单条曲线。我们对弧表示进行足够多次稳定化，使得对于 $\partial N(K)$ 中边界模式非空的每个连通分支，该边界模式的斜率都等于 K 在其矩形图中相应连通分支的缠绕数。

令 S_1、.....、 S_n 为外部 K 的一个部分层次结构。我们令 S_0 为 $\partial N(K)$。因此，尽管 S_0 并非正常嵌入环境流形 $S^3 \backslash\backslash N(K)$，我们仍可在某种意义上将其视为层次结构的第一个曲面。由于上述稳定化，初始边界模式可以实现为 $\partial N(K)$ 上奇异叶状结构中若干纤维的并。

我们称 $S_0, \ldots, S_n$ 处于容许形式，如果每个 S_i 都是没有环形瓦片和绕转顶点的嵌入的近容许曲面，并且 ∂S_i 避开了先前曲面中的所有鞍点。注意，我们要求每个 S_i 都是嵌入的，而不仅仅是近似嵌入的。这个部分层次结构的绑定权重是 $\sum_{i=0}^{n} w_\beta(S_i)$。

令 $M = M_{n+1}$ 为部分层次结构中由 $S_1, \ldots, S_n$ 得到的最终流形。它继承了边界模式 $P = P_{n+1}$，该模式采用弧表示。 $\partial M_{n+1} \backslash\backslash P_{n+1}$ 的每个连通分支都位于某个 S_i 中，因此处于近乎容许形式。

6.2. 适用于可容许部分层次结构的多面体分解。 令 H 为链环 K 的外部的、处于容许形式的部分层次结构。现在我们说明如何构造链环 K 的外部的多面体分解 Δ，使其包含 H 作为子复形。注意， M 的边界由 H 的部分组成，因此继承了 H 的奇异叶状结构。

多面体分解将把 K 的外部表示为若干多面体的并，其中某些面成对识别。我们将使用的多面体包括扩展四面体、扩展翻转体和橄榄球，定义如下。

一个二边形 是由两个0-胞腔、两个1-胞腔和一个2-胞腔组成的胞腔复形。每个1-胞腔都附着在两个0-胞腔上，因此1-骨架是一个圆。2-胞腔的边界同胚地附着到1-骨架上。

扩展四面体是一个三维球，由实心四面体将其某些边替换为双边形而得到。

三角帽是一种胞腔复形，由三个 0-胞腔、三个 1-胞腔、两个 2-胞腔和一个 3-胞腔组成。1-胞腔附着在 0-胞腔上，使得 1-骨架是一个圆。每个 2-胞腔的边界都同胚地附着在这个圆上。这样，2-骨架便是一个 2-球面，3-胞腔的边界同胚地附着其上。扩展三角帽是一个三维球，由三角帽将其某些 1-胞腔替换为双边形而得到。

阶数为 n 的橄榄球是一种胞腔复形，由两个 0-胞腔、 n 1 个 1-胞腔、n 2 个 2- 胞腔和一个 3- 胞腔组成。每个 1- 胞腔连接两个 0- 胞腔。每个 2- 胞腔都是一个双边形。2-骨架构成一个 2-球面，3-胞腔的边界同胚地附着其上。

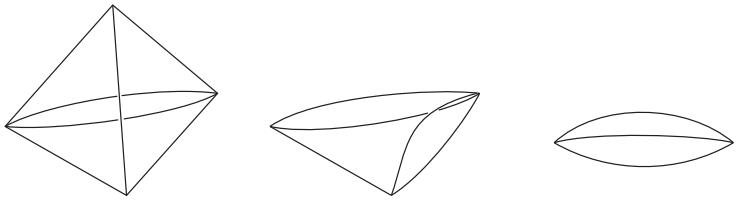

FIGURE 18. 多面体分解中使用的多面体。左：扩展四面体。中：扩展三角帽。右：三阶橄榄球。

绑定圆与 $H \cup N(K)$ 相交于有限多个点和弧。在这些点和弧处切开绑定圆，得到若干闭弧的并。我们规定这些闭弧各自是 Δ 的一个 1-胞腔。

绑定圆的补集由页 $\mathcal{D}_t$ 叶状分解，其中 $t \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$。我们称页 $\mathcal{D}_t$ 包含一个事件，如果它与部分层次结构中某个曲面的边界有非空交集，或与部分层次结构中某个曲面的某个 Morse奇点有非空交集。事件只有有限多个，并且在这些事件的补集的每个连通分支中，交集 $\mathcal{D}_t \cap H$ 随着 t 变化而同痕。在事件页之间，我们还将选取有限多个页；这些页与事件页一起称为指定页。

考虑一个事件页，其中包含 H 中某个曲面的一个内部鞍点。在该点正下方，曲面的两条弧汇合，形成内部鞍点；而在内部鞍点正上方，它们又分开成为两条不同的弧。我们选取紧邻内部鞍点下方的一页和紧邻其上方的一页，并将它们指定为指定页。这两页与H 的外部相交，得到若干圆盘。我们从每个圆盘边界上的一点向内作锥，将其三角剖分；但若圆盘是二边形，则保持不变。我们确保参与内部鞍点移动的弧都是多面体分解的边。现在，这些页被分解为三角形和孤立的双边形。尽管可能存在双边形，我们仍将其称为「三角剖分」。

现在假设事件页包含一条弧 α，它位于 H 中某个曲面的边界上 S_j。这条弧穿过层次结构中先前的一个曲面 S_i。根据

假设，这条弧 S_i 避开了其内部鞍点和边界鞍点。因此，在 α 附近， $S_i \backslash\backslash \alpha$ 的一部分恰好位于 α 上方，另一部分则位于 α 下方。对于 S_j，有两种可能的构型：要么 α 包含 S_j 的一个边界鞍点，要么不包含。

我们首先考虑 α 不含有边界鞍点S_j的情形。于是，在 α附近， S_j 完全位于 α 的上方或完全位于其下方。我们有三层 H 从这条弧发出。设其中一层位于弧的下方，另两层位于弧的上方。我们将事件页正上方和正下方的页定义为指定页。在较高页与事件页之间插入一个 3 阶橄榄球。事件页与 H 的外部相交成圆盘。通过从边界上的点作锥化，为这些圆盘选取三角剖分。这就确定了两个相邻指定页中的三角剖分。在这些三角剖分之间，我们插入扩展三角帽和扩展双边形。稍后我们将考虑 α 含有边界鞍点的情形。

当两个事件页相邻时，较高事件页正下方的指定页以及较低事件页正上方的指定页中的圆盘都已经进行了三角剖分。这些三角剖分不必一致。我们可以使用 2-2 Pachner 移动将一个三角剖分变为另一个。选取这样一列尽可能短的 2-2 Pachner 移动。我们插入新的指定页，其数量比 Pachner 变换的数量少一个。按照 Pachner 变换所指示的方式，对这些页进行三角剖分。每个变换都可以通过添加一个扩展四面体来实现。扩展四面体的两个三角形面位于一个指定页中，另外两个三角形面也同样如此。在这两组面之间，扩展四面体有四个双边形。对于未参与 2-2 Pachner 移动的每个三角形，我们插入一个扩展三角帽。

现在我们需要说明如何对内部鞍点正下方与正上方的页之间的空间进行三角剖分。这些页上的三角剖分大体相同。在相同之处，我们插入扩展三角帽。其余部分位于从内部鞍点发出的分离曲线附近。我们规定，内部鞍点是 Δ 的一个顶点，且从该点发出的四条分离曲线是 Δ 的边。内部鞍点包含在层次结构 H 的某个曲面中；在该内部鞍点附近，曲面上有一个方形，其边界由位于相邻页中的 Δ 的边构成。内部鞍点及其关联的分离曲线将这个方形分成 4 个三角形。我们规定，这些三角形各自都是 Δ 的一个面。这 4 条分离曲线位于同一页中，而该页也已被 Δ 的其他边分割。在这些边的补集中，有 4 个与分离曲线关联的三角形。我们也规定，这 4 个三角形都是 Δ 的面。我们将 Δ 的多面体附着到这 4 个面上。其中 4 个多面体是扩展四面体，另外 4 个是扩展三角帽。参见图 19。

当某个 S_j中存在边界鞍点时， Δ 的定义类似。该边界鞍点是 Δ的一个顶点。从该点出发的 S_j 中的三条分离曲线是 Δ的边。在 S_j的每一侧，我们都插入一个扩展四面体和一个扩展三角帽。

注意，根据构造， P 的外部的边界模式 H 是多面体分解的 1-骨架的一个子复形。这是因为边界模式是纤维的并集，而每个纤维都是层次结构中某个曲面的边界的一部分。因此，它位于事件页中，并成为 Δ的一条边。

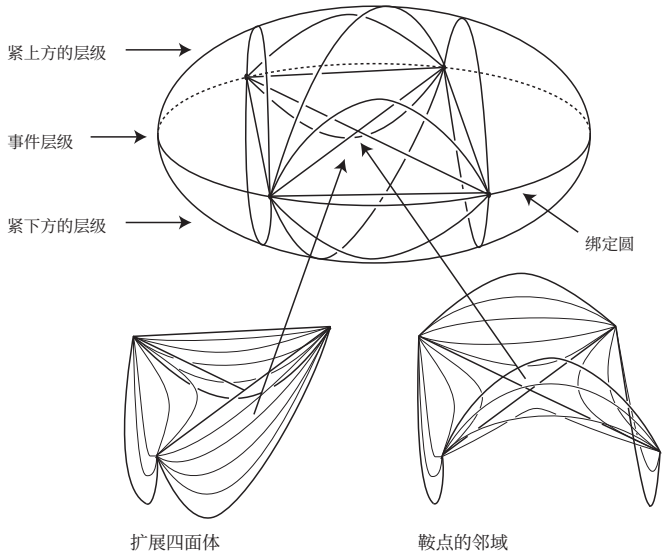

FIGURE 19. 位于内部鞍点附近的扩展四面体

层次结构 H 是 Δ的一个子复形，因此 H 的外部继承了一个多面体分解 Δ_M。

6.3. **可容许偏层次的三角剖分**。 在上一小节中，我们为链环的外部定义了一个多面体分解 Δ ，其中可容许偏层次 H 是一个子复形。本节将说明，可以将其塌缩为一个三角剖分 $\mathcal{T}$。我们将每个橄榄球塌缩为一条边，使橄榄球的每条边都同胚地映射到新边上。我们将每个扩展三角帽塌缩为一个三角形面。同样，扩展三角帽的每条边都同胚地映射到三角形的一条边上。我们将每个扩展四面体塌缩为一个四面体。由此得到链环外部的一个三角剖分 $\mathcal{T}$。

请注意，原则上，这一系列塌缩可能会产生一个并非三维流形的拓扑空间。例如，假设一系列扩展三角帽以环形方式粘合在一起，其指标取模 n的整数，并且指标为 i 的扩展三角帽沿着三角形面与指标为 $i-1$ 和 $i+1$ 的扩展三角帽粘合。那么，这些扩展三角帽塌缩后会塌缩为一个三角形，因此该三角形上的点不是三维流形点。然而，容易验证，在我们的情形下，确实可以得到链环外部的一个三角剖分。

对 Δ_M执行相同的塌缩后，我们得到 M的一个三角剖分 $\mathcal{T}_M$。

6.4. **界定四面体的数量**。

引理 6.1. </style}设 是 外部的一个可容许偏层次。设 是其绑定权重。那么，事件页的总数至多为 2($w - \sum_{i=1}^{n} \chi(S_i)$)。

证明。 当某个曲面 S_i 具有内部鞍点，或其边界在某一页中含有一条弧时，就会出现事件页。该曲面的内部鞍点数

S_i 为 $x^i(S_i)$，至多为 $2x^i(S_i) + x^b(S_i)$。由引理 5.5 可知，这至多为$2v^i(S_i)+v^b(S_i) -2\chi(S_i)$。因此，内部鞍点数与边界顶点数之和至多为 $2(v^i(S_i)+v^b(S_i)-\chi(S_i))$。对 i 求和，即得事件页数量的所需上界。□

引理 6.2。指定页的总数至多为 $4w(w - \sum_{i=1}^{n} \chi(S_i))$。

证明。考虑一个紧邻事件页下方或上方的指定页。它与 H 的外部相交于若干圆盘。其中一些是尚未进行三角剖分的双边形，另一些是三角形。其余则是边界至少有四条边的多边形。每个多边形的每条边要么是绑定圆上的一段弧，要么是页内部的一段弧。前一种弧至多有 w 条。页内部的弧至多有 $w/2$ 条，每条弧至多为多边形的边界贡献两条边。因此，这些多边形总共至多有$2w$ 条边。每个圆盘都已从其边界上的一个顶点进行锥化，从而完成三角剖分。现在，对于一个有 n 条边的多边形，其两个此类三角剖分之间至多需要 $n - 2$次 2-2 Pachner 移动。因此，连接这两个已三角剖分的指定页至多需要 $2w - 2$次 2-2 Pachner 移动。所以，两个相邻事件页之间严格位于其间的指定页至多有$2w - 1$个。加上事件页的数量，即得所需上界。□

引理 6.3. 链环外部的三角剖分 $\mathcal{T}$ 中的四面体数量至多为 $16w(w - \sum_{i=1}^{n} \chi(S_i))$。这也是 $\mathcal{T}_M$ 中四面体数量的一个上界。

证明。三角剖分 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}_M$ 中的四面体来自多面体分解 Δ 和 Δ_M 的扩展四面体。我们注意到，在两个指定页之间（两者都不是事件页），至多有一个扩展四面体。在任一事件页与其相邻的指定页之间，至多有四个扩展四面体。由引理 6.2 即得结论。□

引理 6.4. 多面体分解Δ 中的扩展三角帽数量至多为 $8w^2(w - \sum_{i=1}^{n} \chi(S_i))$。

证明。在相邻的指定页之间，至多有 $2w$ 个扩展三角帽。现在应用引理 6.2。□

引理 6.5. $\mathcal{T}$ 中的每条边在 Δ 中的原像至多由 $8w(w - \sum_{i=1}^{n} \chi(S_i))$ 条边组成。类似地，$\mathcal{T}_M$ 中的每条边在 Δ_M 中的原像至多由 $8w(w - \sum_{i=1}^{n} \chi(S_i))$ 条边组成。

证明。 $\mathcal{T}$中的边是通过塌缩 Δ中的双边形得到的。在每一页内，每条边至多与一个双边形关联。在相邻的指定页中， Δ中的边可能通过双边形连接。因此， $\mathcal{T}$中的一条边至多由 Δ 中的两倍于指定页数的边塌缩而成。现在应用引理 6.2。同样的论证也适用于 $\mathcal{T}_M$中的边。□

引理 6.6. 对于 ∂M 与绑定圆之间的每个交点，与该顶点关联的 Δ_M 的边数至多为 $4w^2(w - \sum_{i=1}^{n} \chi(S_i))$。这也是与 ∂M中某一顶点关联的 $\mathcal{T}_M$ 的边数的一个上界。

证明. 由第 6.2 节中 Δ 的构造可见，每条边都位于一个指定页中。它从 H 的一个顶点出发，或通向另一个顶点，或通向一个鞍点。因此，在任一页中，从给定顶点出发的边数至多为w，即部分层次结构的绑定权重。所以，从 H 的给定顶点发出的Δ_M 的边的总数至多为 w 乘以指定页的数目，从而由引理 6.2 可知至多为 $4w^2($ $w-\sum_{i=1}^{n}\chi(S_i))$。当 Δ_M 塌缩形成 $\mathcal{T}_M$时，若干条边可能合并为一条边，但从 ∂M 中给定顶点发出的边数不会增加。□

6.5. **部分层次结构外部的把手结构**。令 M为部分层次结构 H的外部。我们可以按如下方式在 ∂M上附加一个部分领圈。对于 ∂M中 Δ_M 的每条边，沿二边形的一条边附加一个二边形。对于 ∂M中 Δ_M 的每个三角形，附加一个扩展三角帽，其边界上有三个二边形。将这些二边形分别与 ∂M中关联于相应边的二边形识别。

令$\hat{\Delta}_M$ 为 M的这个新多面体分解，并令 $\mathcal{K}$ 为对偶的把手结构。回想一下，对于 Δ_M 中未完全位于 ∂M内的每个（$3-i$）-胞腔，它都有一个 i-柄。

例如，与图 19 所示的扩展四面体对偶的是 $\mathcal{K}$的一个 0-柄。它与 1-柄和 2-把手的交集如图 21 所示。

假设 S 是嵌入在 M 中的曲面，且相对于 $\mathcal{T}_M$ 处于一般位置。S 在 Δ_M 中的逆像是一个曲面，我们将其称为 $\hat{}S'$。这也给出了一个曲面 S，它在把手结构 $\mathcal{K}$ 中是标准的。

引理 6.7。设 S 是嵌入在 M 中的曲面，且相对于$\hat{}$ $\mathcal{T}_M$ 处于一般位置，并设 S 是由此在 $\mathcal{K}$ 中得到的曲面。那么 S 的扩展 $\hat{}$ 权重至多为 $40w(w-\sum_i\chi(S_i))w($ $S)$，其中 w 是H 的绑定权重，而 $w(S)$ 是 S 在 $\mathcal{T}_M$ 中的权重。

证明。多面体分解 Δ_M 塌缩到 $\mathcal{T}_M$。根据引理 6.5，$\mathcal{T}_M$ 的每条边在 Δ_M 中的原像至多由 $8w(w-\sum_{i=1}^{n}\chi(S_i))$ 条边组成。因此，S 在 Δ_M 中的逆像权重至多为 $8w(w-\sum_{i=1}^{n}\chi(S_i))w(S)$。$\Delta_M$ 中不位于 ∂M 内的边与 $\mathcal{K}$ 的 2-柄之间存在一一对应关系。因此，$8w(w-\sum_{i=1}^{n}\chi(S_i))w(S)$ 是 S 在 $\mathcal{K}$ 中权重 $\hat{}$ 的上界。

S 与 $\mathcal{T}_M$ 的一个面的每条交弧，其两个端点都位于 $\mathcal{T}_M$的边上。S在 Δ_M中的逆像也具有相同性质。因此，S 与 $\mathcal{K}$ 的一个 1-柄的每个交分支都与 $\mathcal{K}$的一个 2-柄关联。$\mathcal{K}$ 的每个 2-柄至多穿过 $\mathcal{K}$的四个 1-柄。因此，S 与 $\mathcal{K}$ 的 1-柄之间的交点数至多为 $\hat{}S$权重的 4 倍。因此，$\hat{}S$ 在 $\mathcal{K}$ 中的扩展权重至多为 $40w($ $w-\sum_{i=1}^{n}\chi(S_i))w(S)$，如所需。□

6.6. **使曲面与 P横向**。我们考虑一个处于容许形式的部分层次结构H 。此外，我们还假设它是间距良好的，这意味着它满足以下所有条件：

(1) H 中与 P 相邻的瓦片并集的闭包是 P的一个正则邻域 $N(P)$；

(2) 对于 H 中位于 P 上的每个顶点 s，以及 $N(P)\backslash\backslash P$中包含 s的每个环带分支 A'，在 A'中都有一个与 s关联的瓦片，其另一个顶点位于 $\partial A' - P$ 上；(3) 上述顶点包括位于 A'中的所有顶点。

第7.2节介绍了如何使层次结构的间距良好，图25和图26展示了间距良好的层次结构中的奇异叶状结构示例。

我们为链环外部定义了一个多面体分解 Δ和一个三角剖分 $\mathcal{T}$。它们分别限制为外部 M of H的多面体分解 Δ_M 和三角剖分 $\mathcal{T}_M$。假设 S 是正常嵌入 M 中的曲面，且相对于 $\mathcal{T}_M$是正规的。本小节将说明如何对 ∂S进行图案同痕，使其之后与环带 $N(P)\backslash\backslash P$相交于一组本质弧，并且每条弧都在远离 P顶点处横截地与 P 相交于一点。

令 A'为 $N(P)\backslash\backslash P$的一个连通分支，它是一个环带。根据假设，对于位于 $A'\cap P$上的 H的每个顶点 s， A'中都有一个与 s关联的瓦片，且该瓦片的另一个顶点位于 $\partial A' - P$上。这个瓦片是 $\mathcal{T}$中若干面的并。每个这样的面的角都是 H 的顶点或一个鞍点，且后一类型的角至多有一个。因此，存在一条 $\mathcal{T}$的边横穿该瓦片，从 s延伸至另一个顶点。对 $P\cap A'$上 H 的每个顶点，选取一条这样的边。我们可以在 A'上选取乘积结构 $S^1\times[0,1]$，使得这些边中的每一条都具有$\{*\}\times[0,1]$的形式，其中 $\{*\}$是 S^1上的某个点。选取 A' 中$A'\cap P$的一个非常薄的正则邻域 A''，使其也与这些边垂直相交。存在一个 ∂M的同痕，将 A''扩张至整个 A'，并且保持 A''和 A'上的乘积结构。现在考虑曲线 ∂S。我们可以假设 ∂S 与 A'' 相交于一组垂直弧。因此，当我们扩张 A'' 以填满 A'后，交集$\partial S\cap A'$ 将成为 A'中的一组垂直弧，符合要求。在同痕过程中的某些时刻， ∂S的像会经过 $\partial A' - P$上的一个顶点。这种情况发生的次数等于∂S的初始位置与从 $\partial A' - P$上的顶点延伸至 P 的边的交点数。因此，这种情况至多发生 $w(\partial S)$次。我们可以将 ∂S 的同痕实现为一个 S 的同痕，并使其支撑于 ∂M的领圈邻域内。每当 ∂S经过 ∂M上的一个顶点时， S 与 $\mathcal{T}_M$的边之间就会出现新的交点。根据引理 6.6，这些交点的总数至多为 $4w^2(w - \sum_{i=1}^{n}\chi(S_i))w(\partial S)$。

6.7. **同伦变形 S 为替代可容许形式**。与上一小节一样，假设部分层次结构 H 处于可容许形式且间距良好。同样假设 S 是正常嵌入于 M 中、相对于 $\mathcal{T}_M$ 为正规的曲面。我们还假设 S 不可压缩且

d

边界不可压缩，并且没有球面或圆盘连通分支与其相交 P

至多两次。

我们对 S 作图案同痕，使得 ∂S 与 $N(P)\backslash\backslash P$ 的每个连通分支相交于一组本质弧；每条弧都与 P 横截地相交于一点，该点远离

y

P 的顶点。这一同痕不一定使 S 在 $\mathcal{T}_M$ 中保持正规。

S 的边界不一定具有弧表示，换言之，不一定是页中适当嵌入弧的串接。我们将对 ∂S 进行同伦变形以实现这一点。设该同伦从时间 0 运行到时间 1。在区间$[0,1$内的所有时刻，曲线都保持嵌入状态。但在时间 1 时，情况不一定如此。这一

同伦因此规定了边界附近对 S 的一项修改，将 S 变为近嵌入曲面。事实上， S 将在绑定圆之外保持嵌入。

回想一下，与位于 $\mathcal{T}_M$ 中的曲面 S 相关联，存在位于 Δ_M 和 $\mathcal{K}$ 中的曲面 S' 和 $\hat{}S$。我们将对 S 施行的同伦也会诱导出到 S' 和 $\hat{}S$ 的同伦。我们首先描述到 S 的同伦。

由于层次结构 H 处于容许形式， ∂M 继承了瓦片并集的结构。边界模式 P 是纤维的并，每条纤维都在顶点之间延伸。现在我们借助一个支撑远离 P 的同伦，按如下方式对 ∂S 进行同伦变形。在 ∂M 中 $\mathcal{T}_M$ 的每个三角形内，我们在与鞍点关联的边附近对 ∂S 进行同伦变形。我们将其沿该边的交集点从鞍点处同伦变形离开，直到它们穿过该边另一端的顶点。（见图20。）

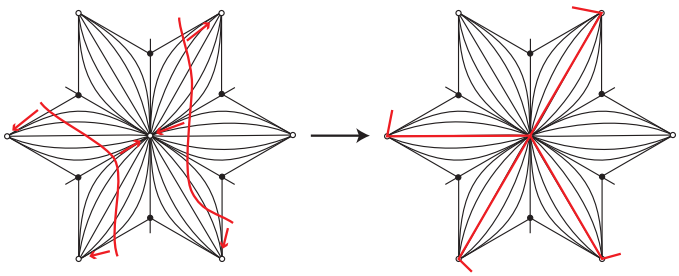

FIGURE 20. 对曲面的边界曲线进行同伦变形

我们不要求 ∂S 是嵌入的，原因如下。曲面S 是利用正规曲面理论构造的，而我们所能得到的只有其权重的指数上界。因此， ∂S可能会多次经过 $S_0 \cup \cdots \cup S_n$中的瓦片。所以，若不设法向 $S_0 \cup \cdots \cup S_n$中引入许多额外的顶点，就可能无法将 ∂S 同痕为纤维的并，同时保持其嵌入这一性质。这与我们的主要目标背道而驰：控制层次结构的绑定权重。

这一同伦在$\hat{}\,\Delta_M$ 中生成曲面 S'，并在 $\mathcal{K}$中生成曲面$\hat{}S$。后者也可以看作把手结构 $\mathcal{K}$中的一个正常嵌入曲面。此外，我们对 S 施加的$\hat{}$同伦实际上是一个同痕。这是因为在 $\mathcal{K}$中，我们移除了绑定圆上顶点的一个正则邻域，而在远离绑定圆的地方，该曲面确实是嵌入的。图 21 展示了这一同痕的一个例子。请注意，经过这一同痕后，该曲面与那些对偶于关联鞍点的边的 2-柄不相交。

该曲面容易调整为相对于 $\mathcal{K}$ 的标准形式，但不一定是正规曲面。不过，根据引理 4.2，进一步进行图案同痕即可使 S 成为相对于 $\mathcal{K}$ 的正规曲面。这不会增加该曲面的扩展权重。

还要注意，这个同痕不会增加曲面与任何 2-柄的交分支数。因此，所得曲面也与所有对偶于关联鞍点的边的 2-柄不相交。这对 ∂S 穿过 ∂M的方式施加了以下限制。考虑 Δ_M 中位于 ∂M内的一个多面体的任意面 F。这个多面体的对偶是 $\mathcal{K}$ 的一个 0-柄，而该面的对偶是一个与这个 0-柄关联的 1-柄，因为我们已将 Δ_M 扩大为 Δ_M。当 F 为三角形时，它有三个顶点，其中一个是鞍点，另外两个位于绑定圆上。 $\mathcal{K}$ 中对偶于 F 的 1-柄有三个

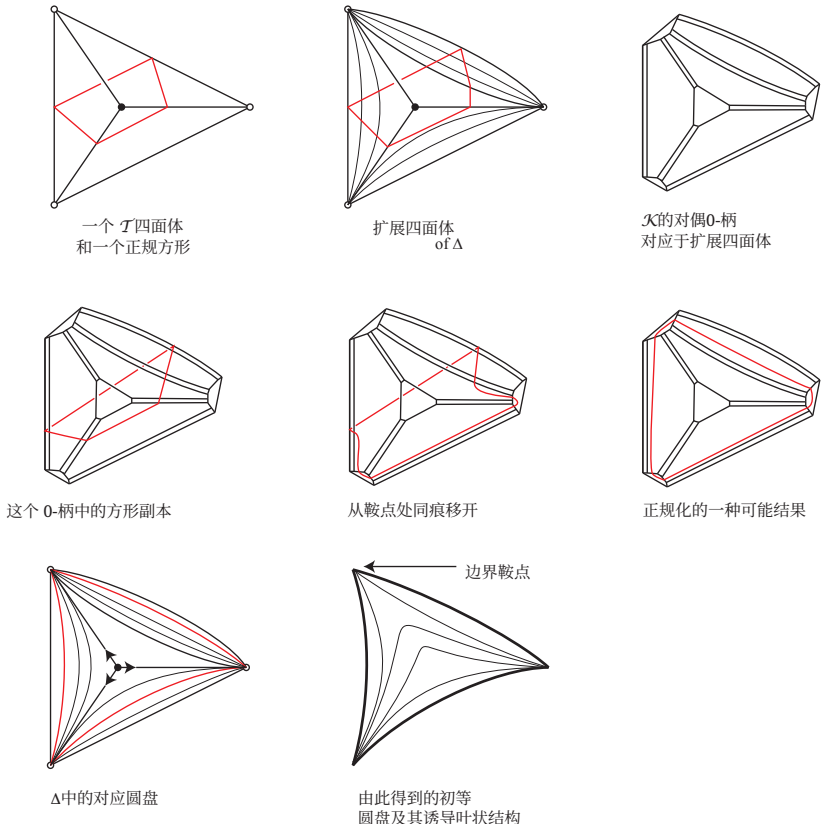

FIGURE 21. 对曲面的边界曲线进行同痕

与之关联的 2-柄。其中两个对偶于 Δ_M 中关联鞍点的边，因此 S 避开它们。因此，在保柄同伦意义下， S 与 1-柄的每个交分支都只有一种可能的构型。这对应于 F 中的一条弧，它连接绑定圆上的两个顶点。当 F 为二边形时，它的两个顶点都位于绑定圆上。同样， 对偶 1-柄与 S的每个交分支也只有一种可能的构型。

现在，我们总结一下迄今为止这一过程的结果。

引理 6.8。 设 S 是一个紧致可定向不可压缩且边界不可压缩曲面，正常嵌入于 M 中，且没有任何球面或圆盘连通分支与 P 相交超过两次。假设 S 关于 $\mathcal{T}_M$ 是正规的。那么存在一个图案同痕，将 S 变为曲面 S，使其关于 $\mathcal{K}$ 正规，且扩展权重至多为 $200w^3\left(w-\sum_{i=}^{n}\chi\left(S_i\right)^2w\left(S\right)\right.$。该曲面 $\hat{}S$ 避开 $\mathcal{K}$ 中与关联鞍点的边对偶的 2-把手。这还在 $\mathcal{T}_M$ 中诱导出一个曲面（也称为 S），该曲面几乎嵌入，边界处于可允许形式，且绑定权重至多为 $200w^3\left(w-\sum_{i=1}^{n}\chi\left(S_i\right)\right.$ $^2w\left(S\right)$。它避开 ∂M 中的鞍点以及任何与鞍点关联的边的内部。

证明。 我们从关于 $\mathcal{T}_M$ 正规的曲面 S 开始。如第 6.6 节所述，随后对 S 进行图案同痕，使其之后与 $N(P)\backslash\backslash P$ 的每个连通分支相交于一族本质弧。于是它在 $\mathcal{T}_M$ 中的权重至多为

$$w(S)+4w^2(w-\sum_{i=1}^{n}\chi(S_i))w(\partial S)\leq 5w^2(w-\sum_{i=1}^{n}\chi(S_i))w(S).$$

ˆ 根据引理 6.7， S 中相应的曲面具有至多为$200w^3(w-\sum_{i=}^{n}\chi(S_i))^2w(S)$的扩展权重。根据引理 4.2，随后我们可以将 ˆ$S$ 同痕为一个相对于 $\mathcal{K}$ 正规且不增加其扩展权重、也不引入任何新的与 2-把手的交点的曲面。 $\mathcal{K}$ 中的扩展权重界于是给出了 $\mathcal{T}_M$中该曲面的绑定权重界。□

因此，对于 Δ_M中的每个多面体，我们现在都规定了其边界与 S之间的交集。特别地， S 的边界处于弧表示中。ˆ 现在我们利用以下引理来安排 S 与多面体内部之间的交集。

我们首先考察以下直接结果对橄榄球中的初等正规圆盘进行分类。

引理 6.9. 设 D 是去掉其顶点的开正则邻域后的橄榄球中的初等正规圆盘。则 D 满足下列情形之一：

(1) D 的边界是两条弧的拼接，每条弧位于一个二边形中，并在橄榄球的顶点之间延伸。*(2)* D 的边界在每个二边形上恰好穿过一条弧，该弧在该二边形的两条边之间延伸。

证明. 我们参照第 4.1 节中正规性的定义。根据定义中的(1)，∂D 穿过橄榄球每条边的内部至多一次。根据(2)，它穿过橄榄球的每个顶点至多一次。根据(4)，它不能同时穿过一个顶点以及一条关联边的内部。根据(3)，它不能由面上一条端点位于同一顶点的弧构成。因此，仅有的可能情形如该引理所述。□

类似地，我们有以下关于扩展三角帽中正规圆盘的分类。

引理 6.10. 设 D 是一个扩展三角帽中的初等圆盘，其中已移除其顶点的开正则邻域。那么 D 满足以下条件之一：

(1) D 的边界由两条弧拼接而成，一条位于二边形内，另一条位于三角形面内，且每条弧都连接不同的顶点。*(2)* D 的边界穿过每个二边形至多一次，并恰好穿过每个三角形面一次。*(3)* D 的边界由三条弧拼接而成，每条弧都连接不同的顶点。

这些可能的圆盘示例见图 22。在这些引理的 (1) 和 (2) 中，圆盘 D 可以安排成其奇异叶状结构为没有奇点的乘积叶状结构。但在引理 6.10 的 (3) 中，它具有一个带有一个边界鞍点的奇异叶状结构（该鞍点可以放置在扩展三角帽的一个顶点处）。

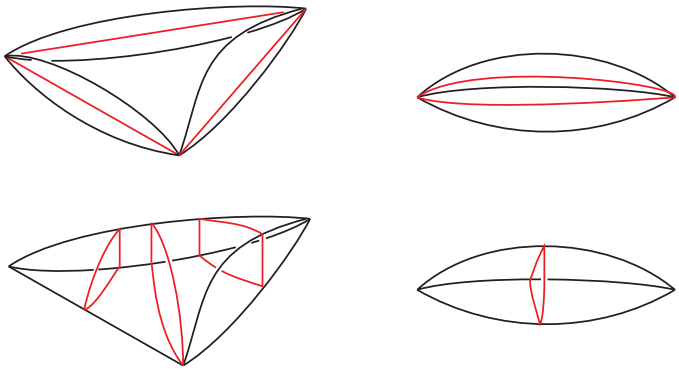

FIGURE 22. 扩展三角帽和橄榄球中的一些正规圆盘

引理 6.11。设 B 是 Δ_M 的一个扩展四面体，移除其顶点的一个开邻域后，该四面体与部分层次结构 H 的一个鞍点关联。设 D 是 B 中的一个初等正规圆盘，它避开与该鞍点关联的边所对偶的 2-把手。那么，∂D 是两条或三条弧的拼接，其中每条弧都连接扩展三角帽的不同顶点。此外，可以安排 D，使其奇异叶状结构要么是一个积，要么在扩展三角帽的某个顶点处具有一个边界鞍点。

证明。扩展四面体有四个三角形面。其中三个与鞍点关联。如上所示，当 ∂D 与这三个面之一相交时，它与该面的交是一条弧，连接其边界上不属于鞍点的两个顶点。因此，如果 D 与第四个三角形面相交，那么它也必须与该面相交于一条连接 B 的两个不同顶点的弧。否则，这条弧会穿过该三角形面的某条边的内部，但这将迫使 ∂D 与另外三个三角形面中某条边的内部相交，而我们已经排除了这种情况。因此，∂D 是若干弧的拼接，每条弧都穿过 B 的不同顶点。根据正规性，它与 B 的任一顶点至多相交一次。它也避开了作为鞍点的那个顶点。因此，它是两条或三条弧的拼接。在每种情况下，我们都可以将其奇异叶状结构安排成指定的形式。□

关于这样的正规圆盘的一个例子，请参见图 21。对一个不与部分层次结构 H 的鞍点关联的 Δ_M 的扩展四面体进行类似的逐案分析，可得到以下结果。回顾第 6.2 节，扩展四面体的每个三角形面都位于某个页中，其中两个三角形面位于同一页，另外两个位于另一页。

引理 6.12。设 B 是 Δ_M 的一个扩展四面体，已移除其顶点的一个开邻域，且它不与部分层次结构H中的任何鞍点关联。设 D 是 B中的一个正规圆盘。那么，可以对 D 作同痕变形，并保持其边界不变，使其满足以下可能情况之一：

（1）它继承了一个乘积叶状结构。其边界由位于顶部两个三角形面并集中的一条弧，以及位于底部两个三角形面并集中的一条弧组成，这两条弧可能由二边形中的弧连接。（2）它继承了一个乘积叶状结构。其边界由三角形面中的一条弧和二边形面中的一条弧组成，两者均连接不同的顶点。

（*3*）它具有一个边界鞍点。其边界由三条、四条或五条弧组成。如果有四条弧，那么其中两条位于顶部两个三角形或底部两个三角形中，并且彼此关联。如果有五条弧，那么其中两条位于顶部两个三角形中并彼此关联，另有两条弧位于底部两个三角形中并彼此关联。其余弧在不同顶点之间延伸，并位于二边形面或三角形面中。

(4) 其边界经过四个双边形，每条弧都连接双边形的一个顶点与另一个顶点。它继承了一个奇异叶状结构，在不同的顶点上有两个边界鞍点。

(5) 其边界由六条弧组成。其中两条位于顶部两个三角形内且彼此关联，另两条位于底部两个三角形内且彼此关联。其余两条弧各自位于一个双边形内，并连接不同的顶点。这个圆盘有两个边界鞍点。

(6) 其边界经过四个三角形面中的每一个，并横跨每个双边形。它与顶点不相交，且来自压缩三角剖分中的一个方形。它继承了一个奇异叶状结构，其中有一个内部鞍点，分离曲线分别延伸至四个双边形。

这些圆盘的示例见图23。

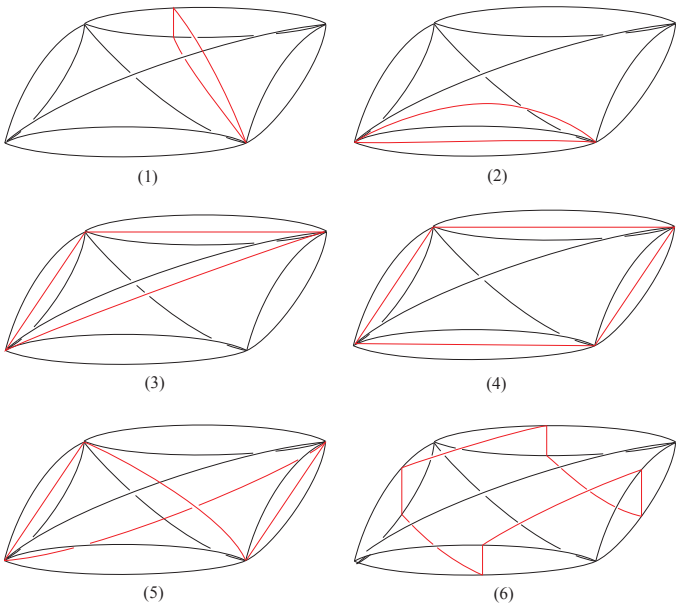

FIGURE 23. 引理 6.12 中描述的扩展四面体内初等正规圆盘的五种可能形式

引理6.13. *S 每个初等正规圆盘至多与4 条分离曲线相交，并且至多与4块瓦片相交。*

证明。 每条分界线都始于一个内部鞍点或边界鞍点。先考虑边界鞍点的情形。边界鞍点出现在初等圆盘中，如引理 6.12 的 (3)、(4) 或 (5) 所示，或如引理 6.10 的 (3) 所示，或如引理 6.11 所示。因此，

始于边界鞍点的分界线完全位于同一个初等圆盘内 y
正规圆盘。

现在考虑内部鞍点的情形。它位于引理 6.12 的 (6) 中那样的圆盘里，我们将其称为一个方形。在包含该内部鞍点的事件页上方和下方紧邻处，各有一个指定页。这两个页的三角剖分在其内部均不含三角剖分的顶点。注意， S与这些圆盘相交于正规弧。随着页的高度增加，其中一些弧会汇合，形成位于与给定方形平行的方形中的内部鞍点。从内部鞍点发出的分离曲线位于一个方形中。随后，它们延伸至扩展四面体边界上的双边形。之后，它们穿过引理 6.10 和引理 6.9 的 (2) 中那样的圆盘，直至抵达绑定圆上的一个顶点。这些后述圆盘不含任何边界鞍点。因此，它们各自至多与一条分离曲线相交，因而至多与 2 个瓦片相交。我们还可得出，位于方形中的分离曲线只有从内部鞍点发出的那些。因此，它们与 4 条分离曲线和 4 个瓦片相交。□

7. Extending the partial hierarchy

7.1. **概述**。 定理 3.3 为链环 K 的外部提供了一个指数受控的层次结构。设 S_1、.....、 S_n 为该层次结构中的前 n 个曲面。令 S_0 为 $\partial N(K)$。假设这个部分层次结构具有容许形式，并令 w 为其绑定权重。

现在我们概述如何扩展这个部分层次结构。

(1) 修改层次结构，使其间距良好，定义见第 6.7 节。(2) 按照第 6.2 节所述，为链环 K 的外部构造一个三角剖分 $\mathcal{T}$ 和一个多面体分解 Δ，其中 $S_0 \cup \cdots \cup S_n$ 是子复形。令 $\mathcal{T}_M$ 为 $\mathcal{T}$ 在 M（即 $S_0 \cup \cdots \cup S_n$ 的外部）上的限制。(3) 令 $S = S_{n+1}$ 为层次结构中的下一个曲面。由于 S 是指数受控的，我们可以假设它在 $\mathcal{T}_M$ 中具有指数有界权重。ˆ (4) 按照第 6.7 节所述，将 S 同伦变形为近嵌入的替代可容许曲面 S，使其除绑定圆外均为嵌入的；它相对于把手结构 $\mathcal{K}$ 是正规的，且绑定权重至多为 $200w^3(w - \sum_i \chi(S_i))^2 w(S)$。(5) 这个绑定权重上界对我们的目的来说太大了，因此ˆ我们修改 S，以显著降低其绑定权重。这可能需要进行交换移动，也可能需要修改层次结构中较早出现的曲面。ˆ ˆ (6) 进一步修改 S_0、.....、 S_n， S，使得 S 是嵌入的，而不只是近嵌入的。ˆ (7) 曲面 S 具有广义容许形式，但我们要求它具有替代容许形式。对曲面作一个小扰动即可达到这一点。

步骤（1）见第7.2节。步骤（2）见第6.2、6.3和6.5节。步骤（4）见第 6.7 节。步骤（5）需要大量工作，将在第9、10、11、12和13节中说明。步骤（6）见第7.3节。步骤（7）见第7.4节。

7.2. **使层次结构具有良好间距**。设我们有一个可容许的部分层次结构 $S_0, \ldots, S_n$。现在说明如何使其具有良好间距。边界模式 P 在弧表示中形成一个嵌入图。令 F 为

（$S_0 \cup \cdots \cup S_n$）$\backslash\backslash P$的一个连通分支。我们将说明如何修改 F，使其仍然近乎可容许、具有相同的边界，并使 F 中与 ∂F 关联的瓦片之并集的闭包成为 ∂F的一个正则邻域。对（$S_0 \cup \cdots \cup S_n$）$\backslash\backslash P$的每个连通分支执行此操作，将使层次结构具有良好间距。

在 F 上选取一个横向定向。我们沿着 ∂F 切开层次结构，并沿此横截方向对 F 做一个小的同痕。因此， ∂F 不再与 P 相连。接着，我们按照图24所示，在 ∂F 和 P 之间插入一个环带 A。具体而言，在 ∂F 的每条纤维与 P 的相邻纤维之间，我们在同一页中插入另一条纤维。这些新纤维的并将形成环带 A 的一条核心曲线 C，并将 A 分成两个较小的环带。其中一个环带附着于 ∂F，延伸至 F 之外，然后迅速返回 C。另一个环带从 P 发出，起初的方式与原先的 F 相同，但随后迅速返回 C。（见图24。）

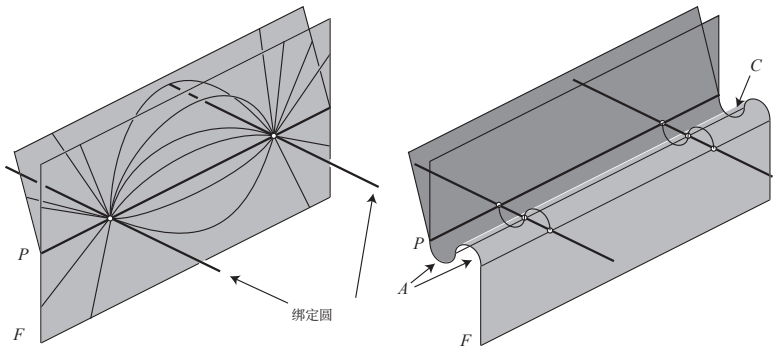

FIGURE 24. 使 F 间距良好

通过一个小的同痕，在保持 A 的边界固定的同时，使其进入几乎可容许的形式。若 F 没有边界鞍点，则 F 上的诱导叶状结构如图25所示。

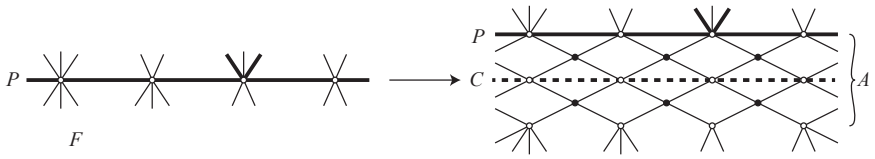

FIGURE 25. 对叶状结构的影响

当 F 有一个边界鞍点与 ∂F 中的一条弧关联时，该弧附近新奇异叶状结构的一种可能形式如图26所示。

注意， ∂F 的每个顶点都被替换成了 3 个顶点。由于部分层次结构的每个曲面 S_i 中，图 $(\partial S_0 \cup \cdots \cup \partial S_n) \cap S_i$ 的顶点度数至多为 3，因此我们推知，这至多会产生 6 个新顶点。于是，层次结构的绑定权重至多增加到原来的 7 倍。

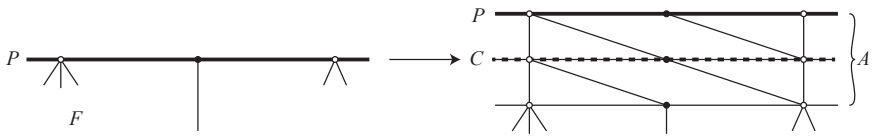

FIGURE 26. 边界鞍点附近叶状结构的变化

7.3. 使曲面成为嵌入的。本小节中，我们假设有一个处于容许形式的层次结构 $S_0, \ldots, S_n$。特别地，每个曲面都是嵌入的。我们还有下一个处于替代可容许形式的曲面 S，但它可能只是近乎嵌入的。不过，它在绑定圆之外是嵌入的。我们将说明如何修改层次结构，使所有曲面最终都成为嵌入的。

$S_0 \cup \cdots \cup S_n$ 的外部是一个三维流形 M。其边界带有奇异叶状结构。S 的边界映射到 ∂M 中的一个图 Γ，它是若干纤维的并。我们将修改曲面 $S_0, \ldots, S_n$，使得 Γ 成为一族两两不相交的简单闭曲线。然后，我们可以使 ∂S 沿这些曲线延伸，从而使其成为嵌入的。

第一阶段是沿着 Γ切开 $S_0 \cup \cdots \cup S_n$。然后将所得的（$S_0 \cup \cdots \cup S_n$）$\backslash\backslash \Gamma$ 的连通分支同痕移离 Γ，同时保持它们满足容许条件。第二阶段是将 ∂S 实现为其弧表示中的一族简单闭曲线。第三阶段是将 ∂S 加厚为一族 A容许环带，其中 ∂S 构成核心曲线。最后阶段是将 ∂A 同痕，使其沿着（$S_0 \cup \cdots \cup S_n$）$\backslash\backslash \Gamma$延伸。这样，我们用一个新的 2-复形（（$S_0 \cup \cdots \cup S_n$）$\backslash\backslash \Gamma$）$\cup A$替换（$S_0 \cup \cdots \cup S_n$）。这个 2-复形的绑定权重至多增加 $3w_\beta$（∂S），因为每个新顶点都是 A的一个顶点，而 A中每个 ∂S顶点对应三个顶点。见图27。

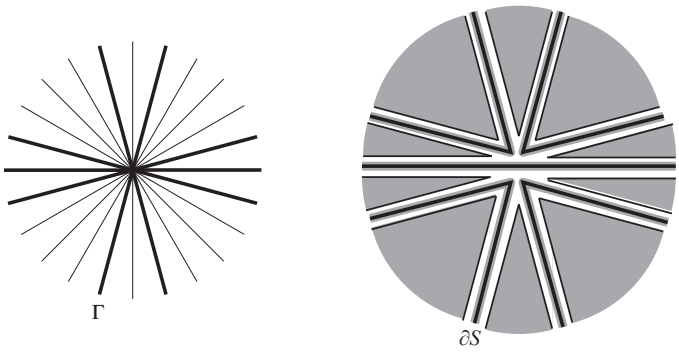

FIGURE 27. 使其 S 嵌入。左：S中一个顶点的邻域。∂S 的像是一张图 Γ。右：沿 Γ切开 S，并将 ∂S 加厚为环带。

由于 $S_0 \cup \cdots \cup S_n$ 的绑定权重至少增加 ∂S的绑定权重，因此只有当后者相对较小时，我们才执行此过程。

7.4.从广义容许形式到替代可容许形式。给定一个广义容许曲面，我们可以按如下方式对其进行微扰，使其成为替代可容许曲面。任何有 n条奇异叶从中发出的广义内部鞍点，都可以微扰为 $(n-2)/2$ 个鞍点。图 28 展示了 $n=6$的一个例子。同样，任何具有 n 条奇异叶的广义边界鞍点，都可以微扰为 $(n-2)/2$ 个鞍点（如果 n 为偶数），或者微扰为 $(n-3)/2$ 个鞍点再加一个边界鞍点（如果 n为奇数）。这不会影响曲面的绑定权重。

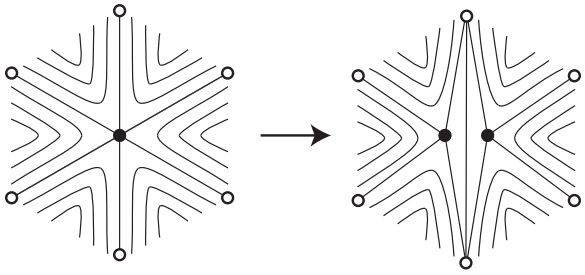

FIGURE 28. 一个小的同痕将一个广义内部鞍点替换为若干个内部鞍点

8. BRANCHED SURFACES

8.1. 定义。一个广义分支曲面是一个紧致广义 2-复形B，它光滑地嵌入三维流形 M中，并具有以下附加结构：

(1) 对于 B中的每个点 x，在 $T_x(M)$ 中指定一个切平面，记作 $T_x(B)$。要求所有包含 x 的 1-胞腔和广义 2-胞腔的切空间都位于 $T_x(B)$中。(2) 因此，对于 1- 胞腔内部的每个点 x，切平面 $T_x(B)$ 被 1- 胞腔的切空间分成两个半平面。这两个半平面就是 1-胞腔的两侧。对于每个这样的点 x，要求广义 2-胞腔位于 x 的两侧，或仅位于一侧。前一种类型的点的并集的闭包称为B的分支轨迹。后一种类型的点的并集的闭包为 ∂B，即 B的边界。

B 的广义 2-胞腔称为片。我们允许分支轨迹中的一个 1-胞腔在每一侧各有一个片。如果每个 1-胞腔要么两侧都有片，要么只与一个片关联，则称广义分支曲面为分支曲面 。后一类点的并集是 B 的边界，记作 ∂B。

我们令 $N(B)$ 为 M 中 B 的加厚。此加厚几乎是一个正则邻域，唯一的区别是要求 ∂B 位于 $\partial N(B)$ 中。（如果 $\partial B \subset \partial M$，则正则邻域会满足这一条件，但我们不会作此要求。）此加厚可分解为一族 纤维 的并，每条纤维都是一个闭区间。存在映射 $\pi\colon N(B) \to B$，将每条纤维塌缩为一个点。在 B 的 1-骨架的一个小正则邻域之外，π 是一个 I-丛的投影映射。我们选择将 $N(B)$ 分解为纤维，使其满足以下条件：

（1）对于每个 $x \in B$，要求经过 x 的纤维的切空间不包含于 $T_x(B)$ 中。
（2）每条纤维都在其端点处与 $\partial N(B)$ 相交，此外还可能与一组闭区间相交。
（3）当该纤维不与 ∂B 相交时，（2）中的这些闭区间必须位于该纤维的内部。

$N(B)$ 的边界分解为两个子曲面：
（1）水平边界 $\partial_h B$，即纤维端点并集的闭包；（2）垂直边界 $\partial_v B$，即 $\partial N(B) \backslash\backslash \partial_h B$。

$\partial_v B \backslash\backslash \pi^{-1}(\partial B)$ 的每个连通分支都是一个尖点。尖点出现在 B的分支轨迹附近。（见图29。）

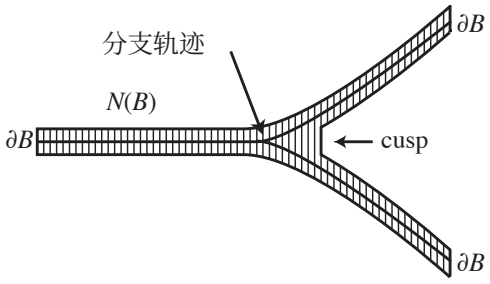

FIGURE 29. 分支曲面 B 的纤维化邻域

请注意，我们所考虑的分支曲面远非一般情形。具体而言，B的一个1-胞腔可能关联三个以上的2-胞腔。这意味着 $\partial N(B)$ 的尖点可能相当复杂。然而，[17] 中的引理 8.1 已证明以下结果。当 $B \cap \partial M = \partial B$ 和 $\pi^{-1}(\partial B) = N(B) \cap \partial M$，且在每个 $x \in \partial B$处，切平面 $T_x(B)$ 不等于 $T_x(\partial M)$ 时，每个尖点要么是一个环带，要么是一个圆盘 D，并且 $D \cap \partial M$ 是 ∂D中的两条弧。

8.2. 自然把手结构。 设 B 是一个分支曲面，其纤维化邻域为 $N(B)$。假设 B仅由圆盘片构成。那么 $N(B)$具有把手结构 $\mathcal{H}$，其中每个 i-把手都是 B的一个 i-胞腔的加厚体。我们称之为 $N(B)$的自然把手结构。

如第4节所述，在考察把手结构时，曲面 $\mathcal{F} = \partial\mathcal{H}^0 \cap (\mathcal{H}^1 \cup \mathcal{H}^2)$起着重要作用。对于自然把手结构，我们可以使该曲面成为纤维的并集。因此，可以将其视为广义火车轨道的纤维化邻域（在适当定义之后）。事实上，分支曲面结构对 $\mathcal{F}$施加了进一步的条件，如下所述。

设 v 为 B 的一个0-胞腔，并设 H_0 为 $\mathcal{H}$的相应0-柄。我们要求 H_0 是 $D^2 \times [-1,1]$的一个副本，其中纤维具有形式 $\{*\} \times [-1,1]$。顶点 v 具有一个良定义的切空间 $T_v B$，我们可以将其视为在 $\partial D^2 \times \{0\}$中与$\partial H_0$ 相交。由于 B 是光滑嵌入的，只要适当选取 H_0，它与 ∂H_0 的交集就位于 $\partial D^2 \times [-1,1]$之内。此外，$B$ 在 v 附近的切平面都接近于通过赤道的切平面。

类似地，我们要求 $\mathcal{H}$ 的每个1-柄具有形式 $[-1,1]\times[-1,1]\times I$，其中对于一点 $*\in[-1,1]\times[-1,1]$，纤维具有形式 $\{*\}\times I$。

8.3. 由分支曲面弱承载的曲面。 紧曲面 S 被广义分支曲面 B 弱承载，如果 S 在 $N(B)$中正常嵌入，且横截于 $N(B)$的纤维，并且 $\partial S = S\cap\partial N(B)$位于 B的1-胞腔的一个小正则邻域内。注意，我们允许 ∂S 与 $N(B)$的尖点和水平边界相交。

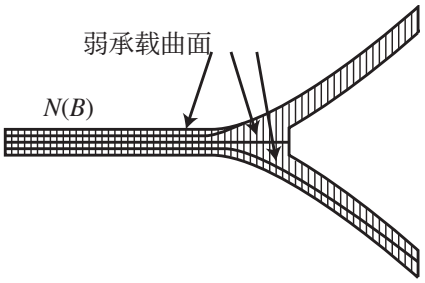

FIGURE 30. 弱承载曲面

当曲面 S 被 B弱承载时， B 的每一片都继承一个非负整数，即该片中 S 的权重 。它等于 S 与任意一条远离分支轨迹正则邻域的纤维之间的交点个数。

我们将考虑的曲面在 $N(B)$ 的自然把手结构中是标准的。此类曲面满足以下正规性条件之一。

引理 8.1. 设 B 是一个广义分支曲面，其中每个片都是圆盘。设 S 是一个被 B 弱承载、且在 $N(B)$上的自然把手结构 $\mathcal{H}$ 中为标准的曲面。那么，在 $\mathcal{H}$的每个 *0*-柄 H_0 中， $S\cap H_0$的每个圆盘 D 都满足正规性定义中的条件 *(1)*。也就是说，∂D 至多穿过$\mathcal{F}$ 的每个 *1*-柄一次。

证明。 如第 8.2 节所述，曲面 $\mathcal{F}\cap\partial H_0$位于 $\partial D^2\times[-1,1]\subset\partial H_0$内，其中 $\partial D^2\times\{0\}$ 是与分支曲面的切平面相对应的 ∂H_0 赤道。 $N(B)$ 的每条纤维 $\cap\partial H_0$ 都位于某个点 $*\in\partial D^2$处的 $\{*\}\times[-1,1]$ 内。 $\mathcal{F}$ 的每个 1-柄都带有由纤维构成的乘积叶状结构，每条纤维都平行于该 1-柄的余核。圆盘 D 的边界位于 $\partial D^2\times[-1,1]$内，并且对每个 $*\in\partial D^2$至多与 $\{*\}\times[-1,1]$ 相交一次。因此，它至多穿过 $\mathcal{F}$ 的每个 1-柄一次。□

8.4. 由分支曲面承载的曲面。 如果 S 弱承载于分支曲面 B，且还满足 $S\cap\pi^{-1}(\partial B) = \partial S$，我们就称 S 被承载于该分支曲面。因此，在图 30 中，只有下方的曲面满足此条件。

由 B 承载的曲面 S，在保纤维环境同痕意义下由其在各片中的权重确定。这些权重的集合称为 S 的向量，记作 $[S]$。

当曲面 S、 S_1 和 S_2 被 B携带时，如果 $[S]=[S_1]+[S_2]$，我们称 S 是 S_1和 S_2 的和。于是 S_1 和 S_2 是 加项。对于一个被携带的曲面 S_1 是另一个被携带的曲面的直和项这一点，有一个内在刻画

曲面 S：当且仅当在每个片中， S 的权重都至少与 S_1 的权重一样大时，这种情况才成立。

8.5. **承载替代可容许曲面的分支曲面**。假设我们有一个采用容许形式的层次结构 H 。我们赋予 H 的外部以第 6.5 节中描述的把手结构 $\mathcal{K}$ 。设 S 是 H 外部中的一个近嵌入曲面，采用替代可容许形式且不含环形瓦片。我们假设 S 在绑定圆之外是嵌入的。因此，在 $\mathcal{K}$中，该曲面实际上是嵌入的。我们还假设它相对于 $\mathcal{K}$是正规的。现在我们构造一个承载 S的分支曲面 B 。

由于 S 近乎可容许，它是若干瓦片的并。若 S 中的两个瓦片相对于把手结构 $\mathcal{K}$正规平行，我们就称它们属于同一类型。对于 S中每种类型的瓦片，取一个代表瓦片。这些瓦片将构成 B的片。两个瓦片共享一条分界线时，相应的片会沿着 B的一个 1-胞腔粘合。这可能会导致一系列的识别。例如，若片 P_1 与 P_2共享一条分界线，而 P_2 与片 P_3共享同一条分界线，那么 P_1 和 P_3 当然会沿着这条分界线粘合。

所得结果是分支曲面 B。注意， B 的每个片都是圆盘，因此 B 是一个 2-复形，而不是广义 2-复形。令B上的 N为 B的纤维化正则邻域。赋予 $N(B)$其自然把手结构 $\mathcal{H}$。对于 B的每个 i-胞腔，其正则邻域构成 $\mathcal{H}$的一个 i-手柄。

我们将利用三维流形 $N(B)$及其把手结构$\mathcal{H}$来衡量平行性。更具体地说，如果 S 的两个顶点的星形相对于 $\mathcal{H}$正规平行，那么我们称它们的星形为 $\mathcal{H}$-平行 。

注意， S 确实由 B承载，理由如下。构造 S的正则邻域 $N(S)$，使得 $N(S)$与 $\mathcal{K}$的每个手柄相交于若干基本正规圆盘的并。当 S 的两个瓦片 $\mathcal{K}$-平行时，将它们之间的空间附加到 $N(S)$上。所得结果是三维流形 $N(B)$。根据平行性的定义，两个正规平行瓦片之间的区域具有如下结构：它是圆盘 D的$D \times [0,1]$，其中 $D \times \{0,1\}$ 是这两个瓦片。因此， $D \times [0,1]$ 具有区间并的结构。这些区间组合起来形成 $N(B)$的纤维。将每条纤维塌缩为一点，就得到分支曲面 B。根据构造， S 是 $N(B)$的一个子集，且与纤维横向相交，因此它由 B弱承载。事实上， $S \cap \pi^{-1}(\partial B) = \partial S$，理由如下。注意，$\partial S = S \cap \partial N(S)$位于 $\partial_v N(S)$的内部。纤维化邻域 $N(B)$是在 $N(S)$的基础上添加而得到的。但这些添加都不会影响 $\partial_v N(S)$的内部；此外， $\pi^{-1}(\partial B)$包含 $\partial_v N(S)$。因此， $S \cap \pi^{-1}(\partial B) = \partial S$，所以 S 由 B承载。

9. Modifications to an admissible surface

当容许曲面具有一个低价顶点时，可以对曲面和弧表示进行修改，从而降低曲面的复杂度。这些修改是 Dynnikov 分析平凡结及其生成圆盘的关键。Birman 和 Menasco [3] 以及 Bennequin [2]也曾在辫子的研究中运用过类似的变换。

9.1. **二价内部顶点**。 设 S 为一个广义容许曲面。 S 中二价内部顶点 s 的星形如图 31 所示。

这个星形在三维空间中的排列如图 32 所示。

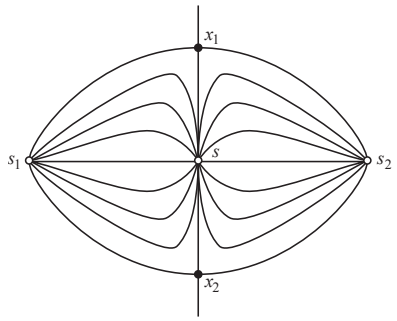

FIGURE 31. 一个二价内部顶点及其星形

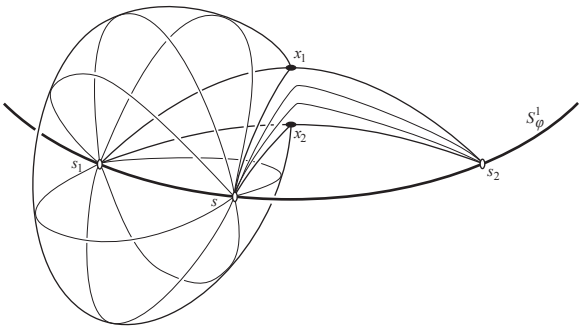

FIGURE 32. 曲面相对于弧表示的排列

有两条分离曲线从 s 发出。令 t_1 和 t_2 为它们的 θ 值，其中 $0 \le t_1 < t_2 < 2\pi$。对于每个 $t \in (t_1,\ t_2)$，在 $\mathcal{D}_t$ 中都有一条叶状结构的叶从 s 延伸至 s 的星形中的一个顶点 s_1。对于每个 $t \in S^1_\theta - (t_1,\ t_2)$，在 $\mathcal{D}_t$ 中都有一条叶状结构的叶从 s 延伸至 s 的星形中的另一个顶点 s_2。必要时重新标记后，我们可以假设顶点 $s_1,\ s,\ s_2$ 按此顺序沿着 S^1_ϕ 排列。

令 $i\colon\ S^1_\phi - \{s_1, s, s_2\} \to S^1_\phi - \{s_1, s, s_2\}$ 为如下对合。它将区间 $(s_1,\ s)$ 线性映射到区间 $(s,\ s_2)$，同时保持此顺序。类似地，它也将 $(s,\ s_2)$ 线性映射到区间 $(s_1,\ s)$，并保持此顺序。它固定 s_2 与 s_1 之间的区间。

现在我们可以应用以下过程，它将修改 S，也可能会移动链环，以及 S^3 中的任何其他曲面，包括部分层次结构中已构造的任何曲面。

(1) 从 S 中移除 s 的星形。(2) 对于叶状结构中端点位于 $\phi \in S^1_\phi \backslash \{s_1, s_2\}$ 的任何叶，或链环中端点位于 $\phi \in S^1_\phi \backslash \{s_1, s_2\}$ 的任何弧，将其替换为一条终止于 $i(\phi)$ 的叶。(3) 对于叶状结构中终止于 s_1 或 s_2、但不属于 s 的星形的叶，将其替换为一条终止于 s 的叶。

这一过程可以通过链环和曲面的同痕来实现。它对矩形图的影响是进行一次广义交换移动（见 [8]）。对 S 的影响是从 S 中移除 s 的星形，并将该星形边界上从 s_1 延伸出的叶子与从

s_2 延伸出的叶子识别起来。因此，这会使 S 的绑定权重减少 2。它不会影响 S 其余部分的奇异叶状结构，也不会影响其他曲面的奇异叶状结构。

9.2. 三价内部顶点。设 s是 S的一个三价内部顶点。设s_2、 s_3、 s_4 是其星形中的三个顶点。重新标记后，我们可以假设这些顶点绕着 S^1_φ按 s、 s_2、 s_3、 s_4 的顺序出现。于是， s 附近的奇异叶状结构如图33所示。（为简便起见，图中只画出了鞍点，但它们也可以是广义鞍点。）每个广义鞍点都有定向。这里，我们在 s附近的 S 上选取一个横向定向。如果广义鞍点处 S 上的横向定向指向 θ递增的方向，就称其为正向；否则称其为负向。 s的星形边界上有三个广义鞍点。因此，其中有两个具有相同的定向，记作 x_1 和 x_2 。如有必要，重新标记后，我们可以假设 x_1 是涉及 s、 s_2 和 s_3的广义鞍点，而 x_2 是涉及 s、 s_3 和 s_4的广义鞍点。设 $t_1 < t_2$ 为这些鞍点的 θ 值。注意，$t_1 \neq t_2$ ，因为在 s处，页 $\mathcal{D}_{t_1}$ 和页 $\mathcal{D}_{t_2}$ 彼此不同。因此， x_1 和 x_2 肯定是不同的广义鞍点。

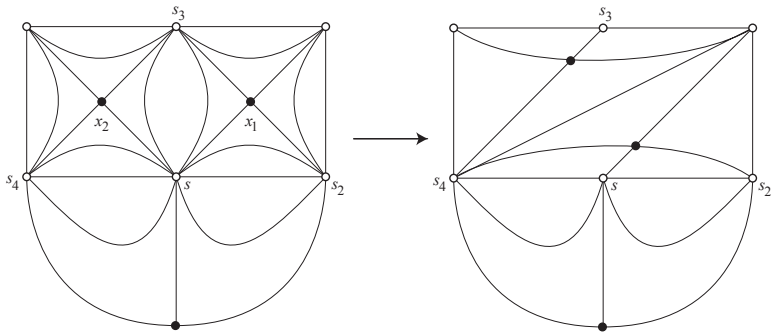

FIGURE 33. 一个三价内部顶点

以往针对这一问题的研究中， [8], 采用了以下过程。修改的第一阶段是从区间（t_1, t_2）中移除所有事件。具体做法是将区间（t_1, t_2）内、分离曲线终止于（s, s_3）的所有鞍点移向未来，并将分离曲线终止于（s_3, s）的所有鞍点移向过去。同样，将区间（t_1, t_2）内、端点位于（s, s_3）的所有边界弧移向未来，并将端点位于（s_3, s）的边界弧移向过去。然后增大 x_1 的 θ-值，直到它等于 x_2的值，再使其略大于该值。新的奇异叶状结构如图33所示。此过程对奇异叶状结构的影响是将 s变成一个二价内部顶点。随后可以执行第9.1节所述的过程来移除该顶点。

在本文中，我们将采用一种略有不同的方法。同样，我们通过将一些事件移到未来、另一些移到过去，来从区间（t_1， t_2）中移除所有事件。我们也会再次增加 x_1的 θ值，但会在x_1 和 x_2 具有相同的 θ值时停止。随后可以将它们合并为一个广义鞍点。图34展示了对 S 的奇异叶状结构所产生的影响。与之前一样，顶点 s 变成了2价顶点，可以使用第9.1节中的方法将其移除。

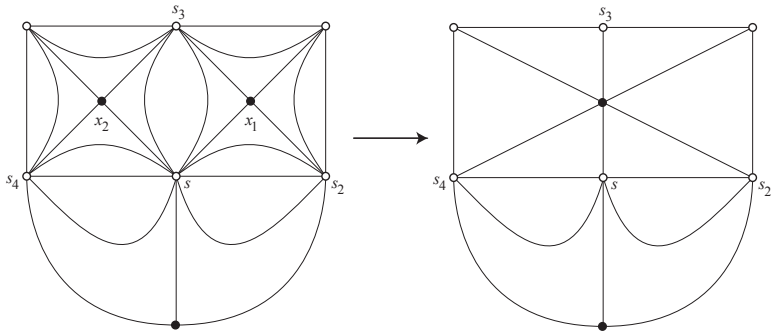

FIGURE 34. 本文所用的修改

9.3. **低价边界顶点**。对于广义容许曲面 S边界上的顶点 s，有两类与其关联的分离曲线：一类位于 ∂S中，另一类位于 S的内部。我们称边界价 $d_b(s)$等于 ∂S 中与 s 关联的分离曲线数量。内部价数 $d_i(s)$是与s关联的内部分离曲线数量。若顶点 s 位于 ∂S 上，且$2d_i(s) + d_b(s) < 4$，则称其为低价边界顶点。因此，这些顶点可分为五种类型：

(1) $d_b(s) = 0$ 和 $d_i(s) = 0$。(2) $d_b(s) = 0$ 和 $d_i(s) = 1$。(3) $d_b(s) = 1$ 和 $d_i(s) = 0$。(4) $d_b(s) = 1$ 和 $d_i(s) = 1$。(5) $d_b(s) = 2$ 和 $d_i(s) = 0$.

情形 1 不可能发生，因为除非包含该顶点的 S 分支是一个单独的二边形瓦片，否则顶点的价不可能为零。其余情形如图 35 所示。

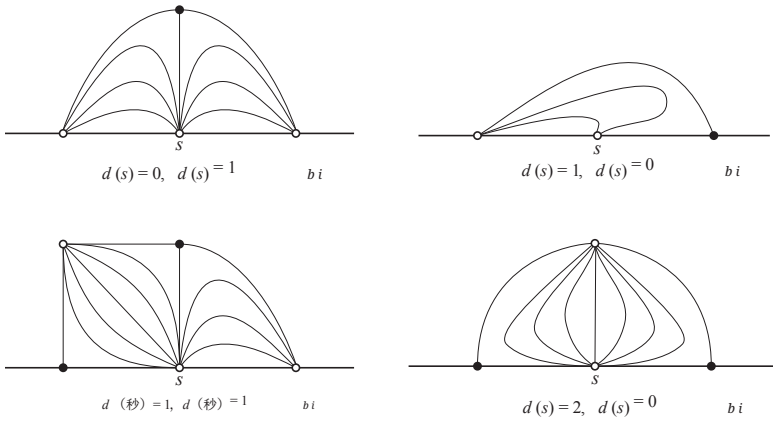

FIGURE 35. 低价边界顶点

在先前的论文中， [8, 17], 这样的排列通常指定了 ∂S的环境同痕。例如，在考虑平凡结的弧表示时，

它由生成圆盘 S所界定，上文的情形（2）会导出平凡结的同痕，从而产生一系列循环置换和交换移动，随后进行一次去稳定化。我们希望在这里采取类似的做法，但仅仅移动 ∂S似乎会带来问题。 S 的边界位于层次结构中较早出现的曲面上，这一点必须保持不变。因此，我们引入一种全新的修改，称为楔形插入。

9.4. 楔形插入。 设 M 为一个可容许偏层次结构的外部。设 P 为其边界模式。设 D 为嵌入在 M中的一个近可容许圆盘，且与 P不相交，其中 $D \cap \partial M$ 是 ∂D中的一条弧，而 ∂D的其余部分是某一页中的一条弧。那么相应的楔形 W 是 M中 D的一个正则邻域。三维流形 $M' = M \backslash\backslash W$是通过将楔形 W插入M而得到的。（见图 36。）

显然，经过一次小幅同痕后， $\partial M' \backslash\backslash P$可以置于近似容许形式。此外， $\partial M'$ 上的奇异叶状结构可以由 M和 D上的奇异叶状结构确定。我们只关注 $\partial M'$的绑定权重，可以将其安排为至多等于 ∂M的绑定权重加上 D的绑定权重的两倍。当 D 是一个低价边界顶点的星形闭包时，其绑定权重至多为 3，因此 ∂M 的绑定权重最多增加 6。

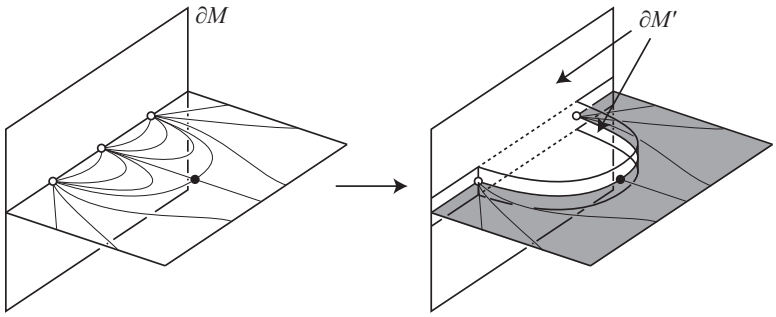

FIGURE 36. 在 M中插入一个楔形

当存在低价边界顶点时，我们将应用此方法。令 D 为该顶点的星形。这样做的效果是移除该顶点，从而降低 S的绑定权重。不过，这也会使 ∂M 变得更加复杂，因此需要谨慎且少量地应用此操作。

在我们的情形中， M 是 K的一个可容许偏层次的外部。我们假设 D 与 M 的边界模式 P 不相交，因此它只与该部分层次结构中的一个曲面 S' 相交。我们可以将插入楔形 W 视为通过对 S'进行同痕来实现。此同痕将 S' 滑过W，以 $\partial W \backslash\backslash S'$替换 $S' \cap W$。

9.5. 平行性。 上述变换确实都能简化曲面 S，也就是说，它们会降低其绑定权重。不过，这需要付出代价。对于二价和三价内部顶点的情形，这些变换需要进行广义交换移动，而这需要通过一系列 Reidemeister 变换来实现。对于低价边界顶点的情形，无需移动链环，但这种修改会使部分层次结构中较早出现的曲面变得更加复杂。因此，我们需要确保尽可能少地使用这些变换。与 [17], 中一样，关键在于

执行这些变换的一种变体；这些变体在 Reidemeister 变换代价或对层次结构前面部分的影响方面，代价相同，但能更大幅度地降低 S 的绑定权重。我们将在下一节介绍这些变换。

10. Parallelism and envelopes

在上一节中，我们描述了对广义容许曲面可以进行的若干修改。正如我们已经提到的，进行这些变换时，利用平行性将非常重要。起初，我们称 S 的两个部分平行，若它们在把手结构 $\mathcal{H}$中正规平行。回顾第8.5节， $\mathcal{H}$ 是分支曲面 B 的纤维化正则邻域 N 的把手结构，而该分支曲面承载着 S。修改S时，我们还需要修改 B、 N 和 $\mathcal{H}$。本节将描述这些修改。

10.1. 指定子曲面。 我们将追踪 ∂N中彼此不相交的指定子曲面 X 和 Y。起初，令 X 为 $\partial_h N$，并令 $Y = \emptyset$。与第4.4节一样， $\partial X \cup \partial Y$ 是 $\mathcal{H}$中标准曲线的并。

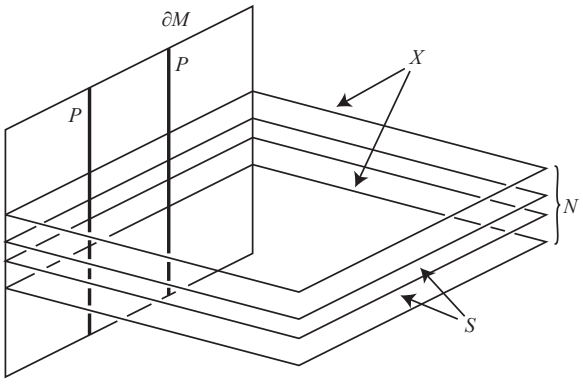

Figure 37. N、 S 和 X的排列

10.2. 容许包络。 我们在以下定义中形式化描述 S、 B、 N 和 $\mathcal{H}$ 的性质。跟踪两个不相交的指定子曲面 X 和 Y以及边界模式 P也会很有用。

我们称$(N,\ X,\ Y,\ P \cap N,\ \mathcal{H},\ S)$为容许包络，如果

(1) N 是一个广义分支曲面的纤维化正则邻域，且仅含圆盘块。(2) $\mathcal{H}$ 是 N 的自然把手结构。(3) X 和 Y 是 ∂N 中不相交的子曲面，且 $\partial X \cup \partial Y$ 在 $\mathcal{H}$中是标准的。(4) $\partial_h N$ 的每个连通分支都位于 X 或 Y 中，或与两者均不相交。(5) $P \cap N$ 是 $\partial_v N$ 中一组两两不相交、端点位于 X 且正常嵌入的弧，并且除此之外与 $X \cup Y$不相交。每条这样的弧都位于 $\mathcal{H}$的一个0-柄中，且每个0-柄至多包含一条弧。(6) S 是由 N 弱承载的曲面，且相对于 $\mathcal{H}$是标准的。(7) S 与 X不相交。

(8) S 处于广义容许形式，且没有环形瓦片。(9) $\mathcal{H}$ 的每个2-柄都是 S的一个瓦片的正则邻域，并且 S 与该2-柄之间交集的所有连通分支都继承相应的奇异叶状结构。特别地， $\mathcal{H}$ 的每个2-柄都包含 S的至少一个瓦片。(10) 对于 $\mathcal{H}$ 的每个1-柄 H_1， $H_1 \cap S$ 的每个连通分支都是某条分界线的正则邻域，或是 ∂S 中连接两个顶点且不包含广义边界鞍点的一条弧的正则邻域。(11) 对于 $\mathcal{H}$ 的每个0-柄 H_0， $H_0 \cap S$ 要么由 S的顶点的若干正则邻域组成，要么由 S 的广义鞍点的若干正则邻域组成（但不能混合这两种情况）。我们将这两类0-柄分别称为顶点 0-柄和鞍点 0-柄。

10.3. 指定子曲面的作用 X。引入指定子曲面的原因如下。考虑 M 边界上的 S 的一个顶点 v，例如图 38 所示。它位于 $\mathcal{H}$ 的一个 0- 柄 H_0 中。如第 8.2 节所述，这个 0-柄与 $D^2 \times [-1,1]$ 等同，其中 N 的纤维具有 $\{*\} \times [-1,1]$ 的形式。因此， $X \cap (D^2 \times [-1,1]) = D^2 \times \{-1,1\}$。此 0-柄上附着有 1-柄和 2-把手，它们也具有 I-丛结构，尽管这些柄的 I-纤维与 $D^2 \times [-1,1]$ 的交集是在 $\{*\} \times [-1,1]$ 中的闭区间，而不一定是整个 $\{*\} \times [-1,1]$。由于 H_0 与 ∂M 关联，因此 ∂D^2 中存在一条弧 α，使得 $H_0 \cap \partial M = \alpha \times [-1,1]$。特别地，没有手柄附着于 $(\alpha - \partial\alpha) \times [-1,1]$。

如第4节所述，曲面 $\mathcal{F} = \mathcal{H}^0 \cap (\mathcal{H}^1 \cup \mathcal{H}^2)$ 起着重要作用。它具有一种把手结构，其中 $\mathcal{F}^0 = \mathcal{H}^0 \cap \mathcal{H}^1$ 是 0-柄，$\mathcal{F}^1 = \mathcal{H}^0 \cap \mathcal{H}^2$ 则对应 1-柄。考虑与 $\partial\alpha \times [-1,1]$ 的某个连通分支关联的 $\mathcal{F}^0$ 中的 0-柄。沿着这个连通分支排列时，$\mathcal{F}^0$ 中可能有多个 0-柄。考虑 $\mathcal{F}$ 中一个位于 $\partial\alpha \times [-1,1]$ 最外层的 0-柄。S 与 $\mathcal{F}$ 中这个 0- 柄的交集由若干弧组成。注意，至少存在这样一条弧，因为 $\mathcal{H}$ 的每个手柄都与 S 有非空交集。如果我们没有指定子曲面 X，这些弧就会违反第 4.1 节正规性定义中的条件 (4)。然而，有了 X，它们便满足第 4.4 节正规性定义中的条件 (4)。由于令 S 在 $\mathcal{H}$ 中为正规状态较为方便，这便解释了为何要使用 X。

注意， P与 $\mathcal{F}$不相交，原因如下。由于 $P \cap N$位于 ∂N中， $P \cap \partial\mathcal{H}^0$ 的内部与 $\mathcal{F}$ 不相交。此外，由于 $P \cap N$ 中每条弧的端点都位于 X中，这些端点与 $\mathcal{F}$不相交。

10.4. 另一个可容许包络。如上所述，我们要追踪带有把手结构 $\mathcal{H}$的三维流形 N。事实上，我们将追踪两个三维流形 N 和 N'，它们分别带有把手结构 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$。三维流形N'将是 N的子集，并且 $\mathcal{H}'$的每个手柄都将位于 $\mathcal{H}$的一个手柄内。

最初， $N' = N$和 $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$。但是，当我们插入第一个楔形 W时，这两个流形及把手结构便变得不同。插入W后， N和 $\mathcal{H}$保持不变，但我们从 N'中移除 W。当 W是 ∂S中某个顶点的星形的正则邻域时，定义$\mathcal{H}'$有一种自然的方式。我们还将考虑曲面 $S' = S \cap N'$。因此，插入楔形时，我们认为 S' 缩小了，而 S 保持不变。

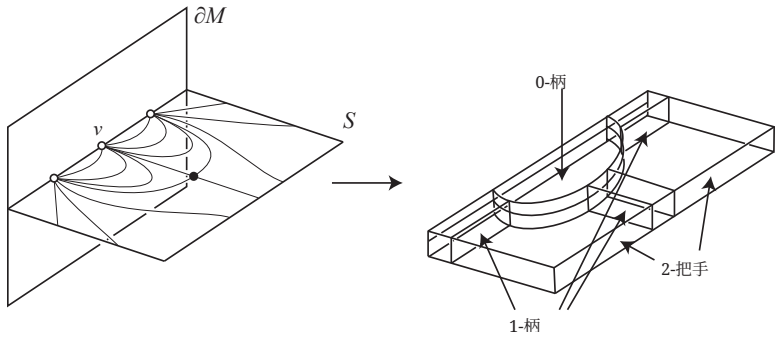

FIGURE 38. 一个顶点 v 位于 ∂S 中，且它包含在 $\mathcal{H}$ 的 0-柄中

我们称 S' 的两个顶点具有 $\mathcal{H}'$-平行 星形，若它们的星形相对于 $\mathcal{H}'$正规平行。

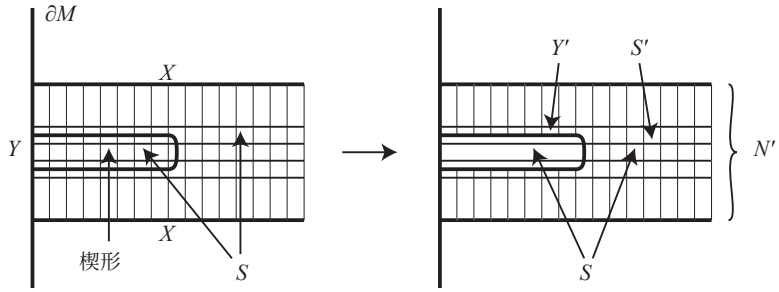

FIGURE 39. 插入一个楔形时对 N' 的影响

10.5. 嵌套可容许包络。 我们用以下定义将上述布置形式化。若两个容许包络 $(N, X, Y, P\cap N, \mathcal{H}, S)$ 和 $(N', X', Y', P\cap N', \mathcal{H}', S')$ 满足以下条件，则称它们是嵌套的：

(1) N'是 N的子集，由 N移除一系列楔形体后得到，其中每个楔形体都与 N 的纤维横向相交，且与 $\partial_h N$不相交。(2) N'的每条纤维都是 N的一条纤维的子集。(3) $X' = X = \partial_h N$和 $P' \cap N' = P \cap N$。(4) $Y = \emptyset$。(5) Y' 是正常嵌入 N 的曲面，且与 $\partial_v N$的一个子曲面平行； Y' 与 $\partial_v N$ 之间的乘积区域就是插入楔形体的位置。(6) $X' \cup Y'$ 包含 $\partial_h N'$。(7) $S \cap N' = S'$。(8) S' 由 S 经楔形插入和沿干净圆盘进行边界压缩后得到，这些干净圆盘与 $\partial N'$ 相交于位于 Y'中的弧；(9) S' 是 S的若干瓦片的并集。(10) $\mathcal{H}'$ 的每个手柄都位于 $\mathcal{H}$ 中具有相同指标的手柄内，且二者的乘积结构一致。

上文已经解释了我们为何要跟踪曲面 $X = X'$。指定曲面 Y' 的原因在于，它标示了从 N构造 N'时插入楔形体的位置。

以下结果有助于阐明 S 与 S'之间的关系。

引理 *10.1.* 设 S 是(M, P)中的一个紧致不可压缩且边界不可压缩的正常嵌入曲面。设$(N, X, Y, P \cap N, \mathcal{H}, S)$和$(N', X', Y', P \cap N', \mathcal{H}', S')$是嵌套可容许包络。设 M'为三维流形 $M \backslash\backslash (N \backslash\backslash N')$，它是从 M 中移除楔形体后得到的。则 S' 是 M中 S 的一个副本，可能再加上一些适当嵌入的干净圆盘；其含义是，存在一个同痕将 M 变为 M'，并将 S （可能再加上一些干净圆盘）变为 S'。特别地，S' 在 M'中不可压缩且边界不可压缩，并且 S' 是S中的 π_1-单射。

证明。 根据假设， S' 是通过楔形插入以及沿与 $\partial N'$ 相交于 Y'中的弧的干净圆盘进行边界压缩，从 S 得到的。在每次楔形插入中， M' 和 S' 都是通过同痕从其先前的状态得到的。当沿一个与 $\partial N'$相交于 Y'中的弧的干净圆盘进行边界压缩时，该圆盘是 S' 在 M'中的边界压缩圆盘。然而，根据归纳假设， S' 是 S 的一个副本，外加可能的一些干净圆盘。由于 S 是边界不可压缩的， S' 与干净压缩圆盘的交弧在 S'中边界平行。因此，边界压缩之后， S'仍是 S 的一个副本，外加一些干净圆盘。□

10.6. 把手结构的复杂度。 当我们对 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$进行修改时，它们保持复杂度有界，这一点很重要。现在我们将这一概念精确定义。其定义使用顶点 0-柄。

我们考察 $\mathcal{H}$ 的顶点 0-柄与 $\mathcal{H}$ 的 1-柄和 2-柄之并的交集。这是一个曲面 $\mathcal{F}_v$。我们以类似方式定义 $\mathcal{F}'_v$，但使用把手结构 $\mathcal{H}'$。

对于 $\mathcal{F}'_v$ 的一个连通分支 F'，我们定义如下复杂度：

$$c(F') = \max\{-\chi(F') + 2|\partial X \cap F'|, 0\}.$$

这里， X' 是 $\partial N'$ 的指定子曲面。对于 $\mathcal{F}_v$ 的一个连通分支 F，我们定义如下：

$$c_+(F) = -\chi(F) + 2|\partial X \cap F| + 1.$$

我们将 $c(\mathcal{F}')$ 定义为对 $\mathcal{F}'$ 的每个连通分支 F' 上的 $c(F')$ 求和。我们将 $c_+(\mathcal{F})$ 定义为对 $\mathcal{F}$ 的每个连通分支 F 上的 $c_+(F)$ 求和。我们用 $c_+(\mathcal{F})$ 衡量 $\mathcal{H}$ 的复杂度，并用 $c(\mathcal{F}')$ 衡量 $\mathcal{H}'$ 的复杂度。我们将确保，在对 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 进行任何修改时，这些复杂度都不会增加。

我们将在第 10.13 节中为 $c(\mathcal{F}')$ 的这一定义提供一些论证。下面的内容也会作一些解释。

引理 10.2。 设 F 是 $\mathcal{F}$ 或 $\mathcal{F}'$ 的一个连通分支。那么， $F - X$ 中互不相交且不平行的适当嵌入本质弧的最大数量至多为$\max\{3c(F)\ 1\}$。除非 F 是一个与 X 不相交的圆盘，否则该数量小于 $3c_+(F)$。这里，如果一条位于 $F - X$ 中的弧无法在固定其端点的条件下同伦变形为 $\partial F - X$ 中的一条弧，则称其为本质弧。我们还称 F 中的两条弧 α_1 和 α_2

若它们在 F 中分隔出一个圆盘，且该圆盘恰好包含 α_1 的一个副本和 α_2 的一个副本，并且与 X 不相交，则称它们平行。

证明。 首先注意，我们可以假设 F 不是一个与 X 不相交的圆盘，因为这样的圆盘不可能包含任何本质弧。令 α 为引理中所述的一个极大弧集。对于 $F\backslash\backslash\alpha$ 的一个连通分支 F_0，定义其指标 $I(F_0)$ 为

$$-\chi(F_0)+2|F_0\cap X|+|F_0\cap\partial\alpha|/4.$$

那么，对 $F\backslash\backslash\alpha$ 的所有连通分支 F_0，$I(F_0)$ 的和等于 $c(F)$。除非 F 是一个与 X 不相交的环带，否则每个连通分支 F_0 的指标都为正，因为否则 α 的某个连通分支是非本质的，或者两个连通分支彼此平行。当 F 是一个与 X 不相交的环带时，α 由单条弧组成，它将环带切成一个指标为零的区域。我们还注意到，如果 $I(F_0)>0$，那么实际上 $I(F_0)\geq 1/2$。因此，除非 F 是一个与 X 不相交的环带，否则 $F\backslash\backslash\alpha$ 的连通分支数至多为 $2c(F)$。再次利用指标的可加性，我们推得

$$|\alpha|=\sum_{F_0}|F_0\cap\partial\alpha|/4=c(F)+\sum_{F_0}\chi(F_0)-\sum_{F_0}2|F_0\cap X|\leq c(F)+|F\backslash\backslash\alpha|\leq 3c(F).$$

同样，当 F 是与 X 不相交的环带时，这个公式并不成立，但在这种情况下，$|\alpha|=1$ 和 $c(F)=0$。因此，我们一般得到 $|\alpha|\leq\max\{3c(F)\ 1\}$。注意，除非 F 是与 X 不相交的圆盘，否则这显然小于 $3c_+(F)$。□

10.7. **自然把手结构的复杂度**。 本节中，我们计算由初始替代可容许曲面 S 产生的自然把手结构 $\mathcal{H}$ 的 $c(\mathcal{H})$ 和 $c_+(\mathcal{H})$ 的上界。

引理 10.3。 设 $H=\{S_1,\ldots,S_k\}$ 是一个外部为 M、边界模式为 P 的部分层次结构，且其绑定权重为 w。设 $\mathcal{K}$ 是第 *6.5* 节中所述的 $(M,\ P)$ 的把手结构。设 S 是一个近嵌入的替代可容许曲面，且相对于 $\mathcal{K}$ 处于正规形式。那么，S 的瓦片类型数至多为 $832w^2(w-\sum_i\chi(S_i))$。

证明。 S 的可能正规圆盘类型见引理 6.9、6.10、6.11 和 6.12。每个瓦片都必须与一个鞍点关联，而该鞍点必须位于扩展四面体或扩展三角帽中。由引理 6.10 和 6.11 可知，每个扩展三角帽中至多有三种这样的初等圆盘类型，而每个扩展四面体中至多有五种这样的正规初等圆盘类型。任意给定类型的最外层瓦片都必须与扩展四面体或扩展三角帽中的某个最外层圆盘相交。根据引理 6.3 和 6.4，这样的正规圆盘至多有 $208w^2(w-\sum_{i=1}^n\chi(S_i))$ 个。根据引理6.13，每个这样的圆盘至多与 4 个瓦片相交。因此，瓦片类型的数量至多为$832w^2(w-\sum_{i=1}^n\chi(S_i))$。□

引理 10.4。 初始自然把手结构 $\mathcal{H}$ 的复杂度满足

$$c(\mathcal{H})\leq c_+(\mathcal{H})\leq 11648w^2(w-\sum_i\chi(S_i)).$$

证明。 由引理 10.3，S 的瓦片类型数量至多为 $832w^2(w-\sum_i\chi(S_i))$。每种瓦片类型至多产生 $\mathcal{F}_v$ 的两个1-柄（在该瓦片的每个顶点处各一个）。因此，$|\mathcal{F}_v^1|\leq 1664w^2(w-\sum_i\chi(S_i))$。此外，由于 $\mathcal{H}$ 的每个0-柄包含 $\mathcal{F}^1$的一个连通分支，这也构成$\mathcal{H}$的0-柄数量的一个上界。

$X\cap\mathcal{F}_v$ 的每个连通分支与 $\mathcal{F}_v$ 的某个1-柄相交，且任一给定的1-柄至多与 $X\cap\mathcal{F}_v$的两个这样的连通分支相交。 $X\cap\mathcal{F}_v$ 的每个连通分支至多产生 $\partial X\cap\mathcal{F}_v$的两个点。因此，$|\partial X\cap\mathcal{F}_v|\le 6656w^2(w-\sum_i\chi(S_i))$。因此，

$$c_+(\mathcal{H})=c_+(\mathcal{F}_v)\le|\mathcal{F}_v^1|+2|X\cap\mathcal{F}|\le 11648w^2(w-\sum_i\chi(S_i)).$$

不等式 $c(\mathcal{H})\le c_+(\mathcal{H})$显然成立。 □

10.8. **移除柄**。

引理10.5. 设 $\mathcal{H}'_-$ 是由 $\mathcal{H}'$ 通过移除若干与 P 和 X不相交的柄而得到的把手结构。为使 $\mathcal{H}'_-$ 成为把手结构，我们要求每当移除 $\mathcal{H}'$ 的一个柄时，所有指标更高的相邻柄也一并移除。于是 $c(\mathcal{H}'_-)\le c(\mathcal{H}')$。

证明。令 F 为 $\mathcal{F}'$的一个连通分支。移除一个与 X 不相交的 F 中的1-柄时， $-\chi(F)$会减少1。若此1-柄在 F中是非分离的，那么所得连通分支的复杂度便小于 F。假设此1-柄在 F中是分离的。那么， $-\chi(F)+1$和 $2|\partial X\cap F|$这几个量会分摊到两个新的连通分支中。因此，总复杂度会减少1，除非产生一个与 X不相交的圆盘连通分支。但在这种情况下，另一个连通分支是 F的一个副本，所以复杂度不变。

现在假设移除 $\mathcal{F}'$ 的一个0-柄。与之关联的1-柄已经移除。因此，此过程只是移除 $\mathcal{F}'$的一个连通分支，这显然不会增加复杂度。□

10.9. **通过缩小把手结构实现粗正规性**。现在我们对 N'作另一种修改。最终， S' 将在$(\mathcal{H}',\ X')$中粗正规，如第4.4节所定义。我们所作的变换是通常正规化变换的变体，因此保证会终止。更准确地说，每次变换都会降低 S'的扩展权重，定义见第4.3节。

我们在引理 8.1 中看到，由于 S' 被 N' 弱承载，它满足粗正规性定义中的 (1)。

假设与粗正规性定义中的 (4′) 相反， S' 与 $\mathcal{F}'$ 的一个 0-柄之间存在一条交弧 α，其一个端点 α 位于 $\mathcal{F}'$ 的一个 1-柄中，另一个端点位于 $\partial N'$ 中。假设 $\mathcal{F}'$ 的 0-柄边界上的一条弧 β 连接 $\partial\alpha$，且与 X 、 P 以及 $\mathcal{F}'$ 的任何其他 1-柄均不相交。设 β 的内部与 S' 不相交。那么， $\alpha\cup\beta$ 围成一个位于 $\mathcal{F}'$ 的 0-柄中的圆盘，而此圆盘与区间的积构成一个球 B_1，位于 $\mathcal{H}'$ 中与之关联的 1-柄内。α 的一个端点位于 $\mathcal{H}'$ 的一个 2-柄中。该 2-柄被 S' 分割成若干球。令 B_2 为与 β 的内部相交的那个球。（见图 40。）

我们所做的修改是从 N' 中移除 $B_1\cup B_2$ 的一个正则邻域。 $B_1\cup B_2$ 与 S' 的交集是一个圆盘，它与 $\partial S'$ 相交于一条弧。此修改将该圆盘从 S' 中移除。这使得 S' 在 S 中保持同痕不变。

或者，假设 S' 与 $\mathcal{F}'$ 的一个 0-柄之间存在一条交集弧 α，它从 $\mathcal{F}'$ 中分隔出一个圆盘，该圆盘与 $\mathcal{F}'$ 的 1-柄以及 X 不相交，这与粗正规性定义中的 (3′) 矛盾。假设该圆盘的内部与 S' 不相交。该圆盘与区间的积是 $\mathcal{H}'$ 的相邻柄中的一个球 B_1 。我们所做的修改

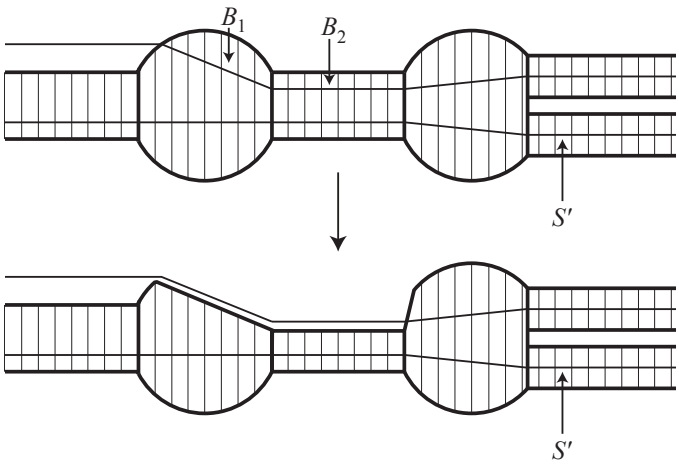

FIGURE 40. 收缩把手结构

是从 N' 中移除这个球的一个正则邻域。这相当于沿着一个干净边界压缩圆盘D对 S 进行边界压缩。 D 与 $\partial_h N'$ 的交集避开了 X'，因此位于 Y' 中。 D 与 $\partial_v N'$ 的交集位于 $\partial_v N'$ 中与 $\partial S'$ 相交的那些部分内，而这些部分又位于 Y' 中。因此， $D \cap \partial N'$ 位于 Y' 中，符合嵌套可容许包络定义的要求。

这些修改可能会产生不与 S'相交的 $\mathcal{H}'$ 柄。在这种情况下，我们会移除这些柄。根据引理 10.5，这不会增加 $c(\mathcal{H}')$。

请注意，这些仅仅是对 N'、 $\mathcal{H}'$和 S'的修改，而非对 N、 $\mathcal{H}$和 S的修改。

引理 10.6. 假设 S' 在 $\mathcal{H}'$中粗正规。那么，对于位于 $\mathcal{H}'$的某个 *0*-柄 $D^2 \times [-1,1]$ 中的 $\mathcal{F}'$ 的每个 *0*-柄，以下条件之一必须成立：

(1) 它与 $X \cap (D^2 \times \{1\})$ 和 $X \cap (D^2 \times \{-1\})$都相交；或者 *(2)* 它两侧都有 $\mathcal{F}'$ 的 *1*-柄。

证明。 反设 $\mathcal{F}'$ 的某个 0-柄 D 与 $X \cap (D^2 \times \{1\})$ 或 $X \cap (D^2 \times \{-1\})$ 不相交，并且至多只有一侧有 1-柄从中伸出。我们将 D 与 $[-1,1] \times I$ 识别，并将其纤维视为形如 $* \times I$。根据假设， $\mathcal{F}'$ 的 1-柄与 $\{-1,1\} \times I$的某个连通分支不相交，不妨设该分支为 $\{-1\} \times I$。它们也与 $[-1,1] \times \partial I$不相交。 S' 与 $\mathcal{F}'$ 的这个 0-柄的交集是由若干弧组成的非空集合。$S' \cap D$ 的每条弧至多与 $\mathcal{F}'$ 的一个 1-柄相交，因为它与纤维横向相交。考虑这样一条弧中最外层的一条。它将 D 分成两个圆盘，其中一个（记作 D' ）的内部与 S'不相交。我们可以选择这条弧，使得 D' 也不与 X相交。 D' 的边界不可能与 $D \cap (\mathcal{F}')_1$的一个完整连通分支相交，因为 S' 穿过 $\mathcal{F}'$的每个 1-柄。因此，我们推得这条弧违反了粗正规性定义中的 (3′) 或 (4′)。□

10.10. **约化柄结构**。 我们称 $\mathcal{H}'$ 为约化的 , 如果以下两项均成立：

(1) $\mathcal{F}'$ 中没有任何0-柄与 ∂X 不相交，且与 $\mathcal{F}'$ 的1-柄相交的弧至多有一条，并且

(2) 对于 H_0' 的每个 0-柄， $\partial H_0' \cap (\mathcal{F}' \cup X \cup P)$ 是连通的。

现在我们展示如何修改把手结构 $\mathcal{H}'$，使其成为约化的，同时不增加其复杂度 c（$\mathcal{F}'$）。

假设 $\mathcal{F}'$ 中存在一个 0-柄，它与 X 不相交，并且与 $\mathcal{F}'$ 的 1-柄至多相交于一条弧。设 H_0' 是 $\mathcal{H}'$ 中包含该 0-柄的 0-柄。则 $S' \cap H_0'$ 的任意连通分支都会违反粗正规性定义中的条件 (1)、(3′) 或 (4′)。因此， S' 必定与该 0-柄不相交。但这样一来， $\mathcal{H}'$中与之关联的 1-柄，以及可能存在的一个关联 2-柄，就会被移除。

因此，我们可以假设 $\mathcal{F}'$ 满足约化定义中的条件 (1)。假设对于 $\mathcal{H}'$的某个 0-柄 H_0'， $\partial H_0' \cap (\mathcal{F}' \cup X \cup P)$ 不连通。则存在一个圆盘 D 正常嵌入于 H_0' 中，将 $\partial H_0' \cap (\mathcal{F}' \cup X \cup P)$ 的各连通分支分隔开。我们可以假设 D 与 $S' \cap H_0'$ 的每个圆盘相交于若干条弧（也可能为空）。我们所做的修改是沿着 D切开 H_0'。这不会影响复杂度 $c(\mathcal{F}')$，但会增加 $\mathcal{H}'$的 0-柄数量。由于 $\mathcal{H}'$ 的每个 0-柄都包含 $\mathcal{F}'$的一个连通分支，这一过程必定会终止。对 S' 的影响是沿干净的边界压缩圆盘对其进行边界压缩。因此， S' 在 S中仍然是 π_1-单射的，并且 $S \backslash\backslash S'$ 仍位于 ∂S的一个领圈内。

我们需要说明为何此修改仍使 N' 成为弱承载 S' 的广义分支曲面的加厚。回顾一下， H_0' 被识别为 $D^2 \times [-1,1]$。圆盘 $D^2 \times \{-1,1\}$ 位于 $\partial_h N'$ 中，因此与 $\mathcal{F}'$ 不相交。 $D^2 \times \{-1,1\}$ 的每个连通分支要么位于 X 中，要么与 X 不相交。我们还可以假设 $\mathcal{F}' \cap (D^2 \times \{-1,1\}) \subset X$。由于 ∂D 与 X 不相交，我们可以对 ∂D 作同痕，使其位于 $\partial D^2 \times [-1,1]$ 中。我们断言， ∂D 是 $\partial D^2 \times [-1,1]$ 中的一条本质曲线。否则， $\mathcal{F}'$ 的某个连通分支就位于 $\partial D^2 \times [-1,1]$ 中的一个圆盘内。但这意味着 $\mathcal{F}'$ 的某个 0-柄上的 1-柄仅从其一侧伸出，且该 0-柄与 X 不相交，这与引理 10.6 矛盾。因此， ∂D 在 $\partial D^2 \times [-1,1]$ 中是本质的。于是我们可以对其作同痕，使其处处横向于 I 中的 $\partial D^2 \times [-1,1]$-纤维。因为唯一的障碍是 $\mathcal{F}'$ 中存在一个 0- 柄，其 1- 柄仅从一侧伸出，并且 $\mathcal{F}'$ 的这个连通分支阻碍了将 ∂D 拉紧。因此，一旦 ∂D 横向于 I-纤维，我们就可以使 D 全部横向于 I-纤维。于是，沿 D 切开该 0-柄会产生两个仍由区间纤维化的 0-柄，因而它们是 $D^2 \times [-1,1]$ 的副本。因此，沿 D' 切开 N' 和 S' 后，所得仍是一个三维流形，并且是弱承载新的 S' 的广义分支曲面的加厚。

引理 10.7. 假设 $\mathcal{H}'$ 是约化的。那么 $\mathcal{F}'$ 不包含与 X 不相交的圆盘连通分支。

证明. 设 F' 是这样的一个连通分支。 F' 上的把手结构是一个加厚图。根据假设，F' 是一个圆盘，因此该图是一棵树。所以，它要么是一个孤立顶点，要么包含一个叶。这与 $\mathcal{H}'$ 是约化的这一假设矛盾。□

注意，在复杂度 $c(\mathcal{F}')$ 的定义中，与 X 不相交的 $\mathcal{F}'$ 的圆盘分支 F' 是一种特殊情况。公式中 $c(F')$ 的第一部分给出 -1，但由于取的是最大值，这一结果会提升为 0。因此，能够假设不会出现此类连通分支会很方便。

现在我们来说明粗正规性的一些推论。

引理 10.8. 假设 $\mathcal{H}'$ 是约化的，且 S' 是粗正规。则 $S' \cap \mathcal{F}'$ 的任何连通分支都不是简单闭曲线（该曲线在 $\mathcal{F}'$ 中围成一个圆盘），也不是与 $\partial\mathcal{F}' - X$中的一条弧平行的弧。

证明。 先考虑 $S' \cap \mathcal{F}'$的某个连通分支是简单闭曲线，且在 $\mathcal{F}'$中围成一个圆盘的情形。一条最内层的此类曲线围成$\mathcal{F}' \backslash\backslash S'$的一个圆盘分支。该圆盘分支继承了一个把手结构，此结构是一个加厚树。它要么是单个0-柄，要么有一个叶。若它是单个0-柄，则 S' 不是标准的，因为它与 $\mathcal{H}'$ 中相应1-柄的交集有一个环带分支。若 $\mathcal{F}' \backslash\backslash S'$ 的圆盘分支有一个叶，则这意味着 $S' \cap (\mathcal{H}')^{0}$ 的相关连通分支穿过 $\mathcal{F}'$ 中的某个1-柄不止一次，这与粗正规性矛盾。

现在假设 $S' \cap \mathcal{F}'$ 的一个连通分支是与 $\partial\mathcal{F}' - X$ 中的一条弧平行的弧。这样一条弧中最外层的弧会在 $\mathcal{F}'$ 中分出一个圆盘 D 。同样，这继承了一个加厚树形式的把手结构。如果它是单个 0-柄，那么这就与粗正规性定义中的（3′）矛盾。因此，假设该把手结构有一片叶。这是 D 的一个 0-柄，它与 D 的一个 1-柄关联。这个 0-柄与 ∂D 的交集是一条弧 α。如果 α 完全位于 $\partial\mathcal{F}'$ 中，那么这意味着 $\mathcal{F}'$ 有一片叶，这与假设 $\mathcal{H}'$ 是约化的矛盾。如果 α 的两个端点都位于 S' 中，那么这就与粗正规性定义中的（1）矛盾。如果 α 的一个端点位于 S' 中，另一个端点位于 $\partial\mathcal{F}'$ 中，那么这就与粗正规性定义中的（4′）矛盾。剩下的可能性是， α 在其内部包含 $\partial D \cap S'$。但这样一来， D 至少还有另一片叶，而该叶与 ∂D 的交集完全位于 $\partial\mathcal{F}'$ 中，因此再次得到矛盾。□

引理 10.9. 假设 $\mathcal{H}'$ 是约化的，且 S' 是粗正规的。假设 $S' \cap \mathcal{F}'$ 的两个连通分支在 $\mathcal{F}' - X$中拓扑平行。则它们正规平行。

证明. 假设 $S' \cap \mathcal{F}'$ 的两个连通分支在 $\mathcal{F}' - \partial X$中拓扑平行，且它们是弧 α_1 和 α_2。则这两条弧从$\mathcal{F}'$中分离出一个圆盘 D 。该圆盘继承一个把手结构。可以把 D 的一个0-柄的指标定义为：它与 D的1-柄的交集连通分支数目的一半，加上它与 $\partial\alpha_1 \cup \partial\alpha_2$ 的交点数目的四分之一，再减去1。于是 D 的0-柄的指标之和等于0。 D 的每个0-柄的指标都非负，否则粗正规性将被破坏。因此， D 的每个0-柄的指标都为零。从而， D 由一列0-柄和1-柄组成。假设至少存在一个1-柄，否则 α_1 与 α_2 正规平行。于是两端的0-柄各自与 $\partial\alpha_1 \cup \partial\alpha_2$ 交于两点。此时有两种可能：要么 $\alpha_1 \cap D$和 $\alpha_2 \cap D$ 各自位于 D的单个0-柄中，要么 α_1 与α_2 正规平行。我们必须排除前一种可能。考虑 D 中与包含 α_1的0-柄相关联的1-柄。它与 S'的交集必定非空。因此， S' 中至少有一条弧从 D 的这个1-柄进入该0-柄。但这样一来粗正规性就被破坏了。

当 α_1 和 α_2 是 $S' \cap \mathcal{F}'$ 中拓扑平行的简单闭曲线时，也适用一个类似但更简单的论证。它们在 $\mathcal{F}'$中围成一个环带 A。同样， A 的每个0-柄的指标都是零。因此， A 由一圈0-柄和1-柄组成。所以， α_1 和 α_2 正规平行。□

10.11.低价边界顶点（再探）。假设 $\mathcal{H}'$ 是约化的，且 S' 是粗正规。

在楔移除的情况下，可以利用平行性。设 s^1、.....、s^n 是 S' 的低价边界顶点。设 D_i 是 s^i 的星形。假设这些星形在 $\mathcal{H}'$ 中平行。则存在 $D\times[1,n]$ 在 N' 中的一个嵌入，其中 $D_i = D\times\{i\}$，且 S' 的其余部分与 $D\times[1,n]$ 不相交。然后，我们可以将 $D\times[1,n]$ 的一个正则邻域取为从 N' 中移除的楔形 W。

因此，通过一次楔移除，S' 的绑定权重减少了 n。

从图 35 可以看出，这些星形各自的边界中至多包含 S' 的一个内部顶点。对 N' 和 $\mathcal{H}'$ 的影响如下:

(1) 包含顶点 s^1、.....、s^n 的 $\mathcal{F}'$ 连通分支，沿其与 W 的交集切开；W 是 $\mathcal{F}'$ 中一条适当嵌入弧 γ 的正则邻域。这使 $\chi(\mathcal{F}')$ 增加 1。我们将在下文证明，这不会产生任何与 X 不相交的 $\mathcal{F}'$ 圆盘分支。因此，$c(\mathcal{F}')$ 减少 1。

(2) 如果星形中除 s 以外的任何顶点位于 $\partial S'$ 中，那么这些点处对 $\mathcal{F}'$ 的影响就是沿一条弧切开，该弧在 $\partial\mathcal{F}'$ 中恰有一个边界点。因此，$\mathcal{F}'$ 的拓扑保持不变，其复杂度也随之不变。(3) 如果星形中有一个内部顶点，那么包含该顶点的 $\mathcal{F}'$ 连通分支将沿一条弧切开。这条弧位于 $\mathcal{F}'$ 的内部，因此对 $c(\mathcal{F}')$ 的影响是使其增加 1。

因此，整体效果是保持 $c(\mathcal{H}')$ 不变。但我们需要证明，步骤 (1) 中沿弧 γ 剖开 $\mathcal{F}'$ 的过程不会产生与 X 不相交的圆盘分支。弧 γ 是 $S'\cap\mathcal{F}'$ 的一个连通分支，因此根据引理 10.8，它不平行于 $\partial\mathcal{F}' - X$ 的任何连通分支。此外，它不是 $\mathcal{F}'$ 的环带分支中的本质弧，因为它的端点由 $S'\cap(\partial(\mathcal{H}')^0\backslash\backslash(\mathcal{F}'\cup X\cup P))$ 的一条弧连接。这就证明了该断言。

还要注意，插入楔形时，我们不会改变 N 和 $\mathcal{H}$，因此它们的复杂度保持不变。

10.12. 割点。插入楔形的操作会通过移除与 $\partial S'$ 关联的圆盘来缩小 S'。在此过程中，$\partial S'$ 可能会在某个阶段与自身相交。此时可能会产生一个 割点。这是 $\partial S'$ 中的一个顶点，在该点处 S' 不是带边曲面。相反，该点的一个邻域是至少两个闭区间上的锥。

我们可以在这些点处切割 S'，得到一个曲面 S'_{cut}。这样做时，我们不会忽略 S'_{cut}中切割后留下的顶点残余。原因是，如果 S'_{cut} 的一个割点是低价顶点，那么我们就无法沿其插入一个楔形。

S'_{cut}的切割调整欧拉示性数记作 $\chi_c(S'_{\text{cut}})$，定义为$\chi(S'_{\text{cut}})$减去其割点数量的一半。由于 S'_{cut} 是通过沿某些弧切割 S' 得到的，并且每条这样的弧都会产生两个割点，因此我们可得 $\chi_c(S'_{\text{cut}}) = \chi_c(S')$。

10.13. 复杂度度量的合理性。现在我们可以说明，为 $\mathcal{F}'$ 选择复杂度度量 $c(\mathcal{F}')$ 是合理的。在某些方面，这个量不太理想，因为 $\mathcal{F}'$ 的某些连通分支的复杂度为零。因此，如果我们只有关于 $c(\mathcal{F}')$ 的上界，就无法控制这些连通分支的数量。

这些连通分支分为两类：与 X 不相交的圆盘和环带。与 X 不相交的圆盘可以用引理 10.7 处理，因此我们可以假设 $\mathcal{H}'$ 是约化的。然而，与 X 不相交的环带则更难控制。下面的例子说明了原因。

假设最初有两个 $\mathcal{F}'$ 的连通分支：一个与 $X\cup P$ 不相交的环带，以及一个与 $X\cup P$ 不相交的裤子曲面。（见图 41。）假设插入一个楔形，沿一条弧切开裤子曲面，将其分成两个环带。再假设星形包含一个内部顶点，且围绕该内部顶点的相关 $\mathcal{F}'$ 连通分支是与 $X\cup P$ 不相交的环带。随后在这个环带中插入一条狭缝，形成一个裤子曲面。因此，这次楔形插入将一个裤子曲面和一个环带变成了一个裤子曲面和两个环带。由此可得，无论我们对 $\mathcal{F}'$ 采用何种复杂度概念，如果不希望楔形插入增加复杂度，那么与 $X\cup P$ 不相交的环带就必须具有零复杂度。

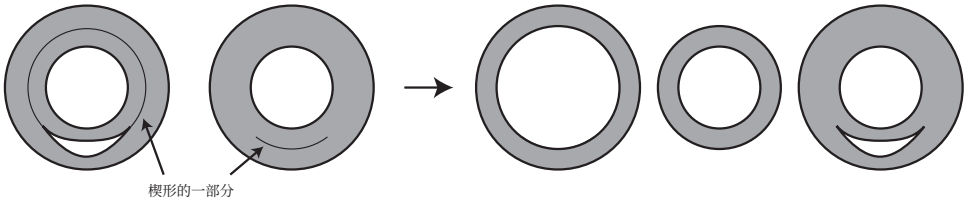

FIGURE 41. 楔形插入对 $\mathcal{F}'$的影响示例

10.14. **近似平行性**。考虑 $\mathcal{F}'$中的两条正规简单闭曲线 α和 α'。如果

(1) 它们具有相同的 $\mathcal{H}$-类型；且 (2) 沿它们分解 $\mathcal{F}'$，形成曲面 F''时，位于它们之间环形区域内的 F'' 的各部分恰好是环带，其中每个 F'' 的0-柄都与 F'' 的1-柄有两条交弧。

如果某个 $\mathcal{H}'$ 的0-柄中的两个不相交的真嵌入圆盘，其边界曲线位于 $\mathcal{F}'$ 中且近似平行，我们就称它们近似平行。类似地，如果包含这些顶点的 $\mathcal{H}'$ 的0-柄与 S' 的交集圆盘近似平行，我们就称S' 的内部顶点近似平行。

当两条曲线、两个圆盘或两个顶点近似平行时，我们也称它们具有相同的近似类型。

10.15. **内部二价顶点（再探）**现在我们来考察第 8.1 节中修改的“平行”版本。假设 $\mathcal{H}'$ 是约化的。

再次考虑 S'的一个二价内部顶点 s。现在我们将描述一种对 S 和 S' 的修改，它会移除这个顶点以及 S 中所有星形近似平行的其他顶点。

令 $s^1,\dots,s^n$ 为这些顶点，对于每个 i，令 s_1^i 和 s_2^i 为其星形中的两个顶点。于是这些顶点沿着 S_ϕ^1 按以下顺序排列

$$\dots,s_1^1,\dots,s_1^n,s^n,\dots,s^1,s_2^1,\dots s_2^n,\dots$$

令 i: $S^1_\phi \to S^1_\phi$ 将区间 (s^n_1, s^n) 线性映射到区间 (s^1, s^1_2)，将区间 (s^1, s^1_2) 线性映射到区间 (s^n_1, s^n)，并保持其他所有部分不变。

(1) 移除 S 中 s^1、……、s^n 的星形。(2) 对于叶状结构的任意一片叶，或链环上的任意一条弧，只要其端点位于 $\phi \in (s^n_1, s^n) \cup (s^1, s^1_2)$中，就将其替换为一片终止于 $i(\phi)$ 的叶。(3) 对于终止于 s^i_1 或 s^i_2、但不属于 s^i 的星形的叶状结构中的叶，将其替换为一片终止于 s^i 的叶。

因此，执行了一次广义交换移动，但S的绑定权重减少了 $2n$。此外，若 m 表示位于 S' 中的 s^1、……、s^n 这些顶点的数量，则 S' 的绑定权重减少了 $2m$。

s 旁边有两块瓦片，分别记作 T_1 和 T_2，它们都位于 $\mathcal{H}$的一个 2-柄中。任何其他顶点的星形若与 s 的星形 $\mathcal{H}$-平行，则包含 T_1 和 T_2的平行副本。沿某个横截方向从 s 出发，考察一列这样的星形。经过若干阶段后，我们会到达最后一个与 s 平行的星形。再往外可能有 T_1 的一个平行副本，或 T_2的一个平行副本，但不会两者都有。为明确起见，假设存在 T_1的一个平行副本。于是，过程的第一步是将包含 T_1 的 $\mathcal{H}$ 的 2-柄切分为两个手柄，从而把这个 T_1 的平行副本与那些和 s的星形平行的星形分离开来；该副本不属于任何与 s 的星形平行的星形。我们还切分与这个 2-柄关联、且包含与 s关联的分离曲线的两个 1-柄。该过程如图 42 所示。

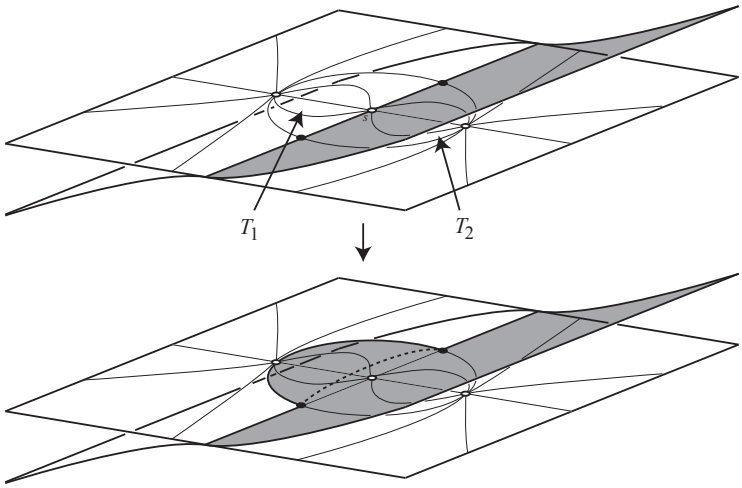

FIGURE 42. 包含 T_1 的 $\mathcal{H}$ 的 2-柄被切分为两个 2-柄

我们执行类似的过程，但沿着另一个横截方向远离 s 。同样，为了明确起见，假设在该方向上有一个 T_2 的平行副本，但没有 T_1。这两个过程对包含 s 的 0-柄的影响是将其切分为三个 0-柄。图 43 展示了这对这些 0-柄中的 $\mathcal{F}$ 所造成的影响。

注意， $\mathcal{F}_v$ 在 s 附近的原连通分支被沿着两条弧切开，从而形成三个连通分支。这使 $-\chi(\mathcal{F}_v)$减少了 2，但连通分支的数量增加了 2，因此 $-\chi(\mathcal{F}_v)$对 $c_+(\mathcal{F}_v)$的贡献保持不变。

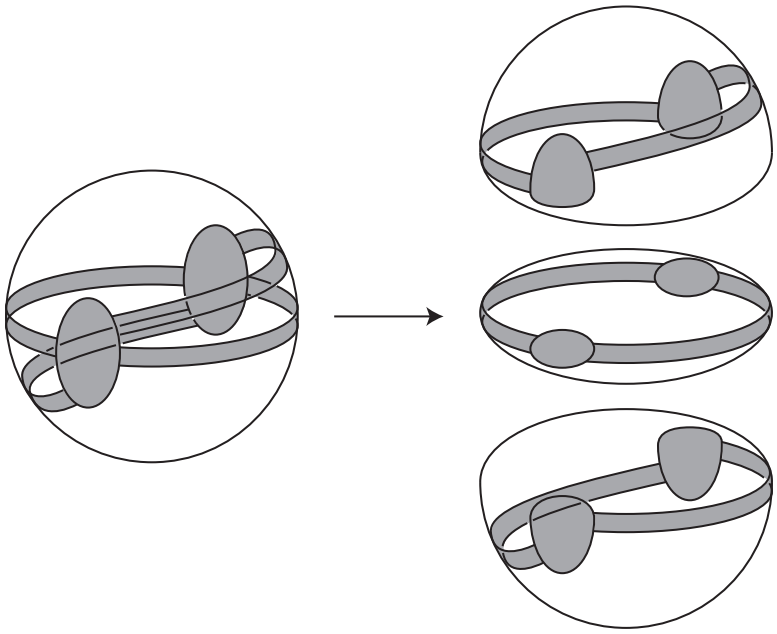

FIGURE 43. 对 $\mathcal{F}$ 附近 s的影响

然而，这并非对 $\mathcal{F}_v$的唯一影响。设 s_1 和 s_2 为 s的星形中的顶点。它们位于也受此修改影响的顶点 0-柄中。每个 0-柄都与包含 T_1 或 T_2 的 2-柄相交于 $\mathcal{F}_v$的一个 1-柄。 $\mathcal{F}_v$ 的这个 1-柄被替换为两个 1-柄。在 $\mathcal{H}$的两个顶点 0-柄中进行此操作时， $-\chi(\mathcal{F}_v)$增加了 2，但 $\mathcal{F}_v$ 的连通分支数量保持不变。因此， $-\chi(\mathcal{F}_v)$对 $c_+(\mathcal{F}_v)$ 的贡献增加了 2。

我们还必须分析由 $\mathcal{F}_v \cap \partial X$ 对 $c_+(\mathcal{F}_v)$ 所产生的贡献。将包含 T_1 的 $\mathcal{H}$ 的 2-柄一分为二后， N 的水平边界随之扩大。如果包含 X 的 $\partial_h N$ 的任何连通分支扩大，那么我们也扩大 X。这会移动 ∂X ，但不会增加它所穿过的顶点 0-柄的数量。因此， $\mathcal{F}_v \cap \partial X$ 对 $c_+(\mathcal{F}_v)$ 的贡献保持不变。

现在我们执行上述过程，移除 s 的星形以及所有平行星形。这个新的曲面由一个新的把手结构承载。移除包含 s 的顶点手柄以及所有与之相邻的柄。因此，该 0-柄中 $\mathcal{F}$ 的环带分支被移除，从而使复杂度 $c_+(\mathcal{F})$ 减少 1。

包含 v_1 和 v_2 的顶点 0-柄合并，形成一个单独的 0-柄。这会对 $\mathcal{F}$ 产生如下影响：这些 0-柄中的两个 $\mathcal{F}$ 连通分支与一个 2-柄关联，而该 2-柄因包含 T_1 或 T_2 而被移除。随后，这两个 $\mathcal{F}$ 连通分支合并为一个连通分支。其影响是使 $-\chi$（$\mathcal{F}$）保持不变，但连通分支数减少 1。 $\partial X \cap \mathcal{F}_v$ 的点数保持不变。因此，复杂度降低 1。

我们看到，这一过程的净效果是使复杂度 $c_+(\mathcal{F})$保持不变。

我们还可以观察到， $\mathcal{F}'$ 的复杂度保持不变，原因如下。对 $\partial X \cap \mathcal{F}'_v$ 的修改与上文所述完全一致。因此，我们唯一需要关注的是对欧拉示性数的影响，以及这些修改是否会生成或移除 $\mathcal{F}'_v$ 中与 X不相交的圆盘连通分支。

第一阶段将 $-\chi(\mathcal{F}'_v)$ 增加 2，但随后将 $-\chi(\mathcal{F}'_v)$ 减少 2。在任何阶段，都不会产生与 X 不相交的 $\mathcal{F}'_v$ 圆盘分支。在第一阶段，这是因为 $\mathcal{F}'_v$ 的每个连通分支至多沿一条与 $S' \cap \mathcal{F}'_v$ 的某个连通分支平行的弧被切开，且该弧的两个端点位于 $\partial\mathcal{F}'_v$ 的同一个连通分支上。根据引理 10.8，这不会产生与 X 不相交的 $\mathcal{F}'_v$ 圆盘分支。在第二阶段，从 $\mathcal{F}'_v$ 的两个连通分支中移除 $\mathcal{F}'_v$ 的一个非分离 1-柄，然后将这两个连通分支合并为 $\mathcal{F}'_v$ 的一个连通分支；同样，这不可能是与 X 不相交的圆盘。

在上述讨论中，我们假设，在沿 s 平行的瓦片的一侧横截方向上，存在 T_1 的一个副本，但不存在 T_2；而在另一横截方向上，存在 T_2 的一个副本，但不存在 T_1。然而，这并非唯一可能的排列。例如，两个横截方向上都可能存在 T_1 的一个副本，但不存在 T_2。或者，在一个或两个横截方向上，既没有 T_1 的副本，也没有 T_2 的副本。在前一种情形中，0-柄仍被切分为三个 0-柄。上述论证仍适用，因此 $\mathcal{F}_v$ 和 $\mathcal{F}'_v$ 的复杂度保持不变。在后一种情形中，即在一个或两个横截方向上，既没有 T_1 的副本，也没有 T_2 的副本，0-柄会被切分为两个 0-柄，或者根本不被切分。同样，很容易推得 $\mathcal{F}_v$ 和 $\mathcal{F}'_v$ 的复杂度保持不变。

10.16. 内部三价顶点（再探）。考虑一个三价内部顶点 s。它位于 $\mathcal{H}$的一个0-柄中的初等正规圆盘 D 内。它的星形包含三块瓦片，因此 D 穿过 $\mathcal{F}$的三个1-柄和三个0-柄。从这三个0-柄伸出三个 $\mathcal{H}$的1-柄，它们终止于其他顶点 s_2， s_3， s_4。与第 9.2 节中一样，假设这些顶点按 s， s_2， s_3， s_4的顺序围绕 S^1_ϕ 排列。设 x_1 和 x_2 为第 9.2 节中定义且方向相同的广义鞍点，并设 t_1和 t_2 为它们的 θ值。

我们希望执行第 9.2 节所述的过程，不仅作用于 s 的星形，也作用于所有星形（相对于 $\mathcal{H}$）与之平行的顶点。第 9.2 节中的过程可以看作分三步进行：

(1) 将区间 (t_1, t_2) 内发生的事件移至未来或过去。(2) 折叠边界为 s, x_1, s_3, x_2 的瓦片，使得 x_1 与 x_2 合并，形成一个单一的广义鞍点。(3) 第9.1节中给出的处理2价内部顶点的过程。

步骤 (1) 可通过 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{H}'$ 的同痕实现，因此这不会影响 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{H}'$ 的复杂度。我们已在第 10.15 节中看到，在处理二价内部顶点的平行副本时， $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{H}'$ 的复杂度保持不变。因此，只需证明步骤 (2) 不会改变 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{H}'$ 的复杂度。

在步骤（2）中，我们将包含该瓦片的 2-柄塌缩。包含广义鞍点 x_1 和 x_2 的 0-柄合并为一个 0-柄。这些不是顶点 0-柄，因此不会计入 $\mathcal{H}$的复杂度。 $\mathcal{H}$ 中从 s 延伸到 x_1 以及从 s 延伸到 x_2 的 1-柄合并为一个

1-柄。从 s_3 延伸出去的 1-柄也以类似方式合并。对 $\mathcal{F}_v$ 的两个相关连通分支而言，其效果是在每个连通分支中将 $\mathcal{F}_v$的一个 1-柄塌缩。这使 $\mathcal{F}_v$ 保持不变（在保持 $X \cap \mathcal{F}_v$的同胚意义下），因此不会改变其复杂度 $c_+(\mathcal{F}_v)$。它也使 $\mathcal{F}'_v$ 保持不变（在保持 $X \cap \mathcal{F}'_v$的同胚意义下），因此不会改变其复杂度 $c(\mathcal{F}'_v)$。

10.17. **星形类型的数量**。

命题 10.10。设 $\mathcal{H}'$ 是约化的，且 S' 是粗正规的。那么， $\partial S'$ 中非切割顶点的星形类型数量至多为 $3c(\mathcal{H}')$。

证明。 S' 的每个顶点 s 都位于 $\mathcal{H}'$的一个顶点 0-柄 H_0 内。 S' 与 H_0 的交集是一族基本正规圆盘。设 E 为包含 s的基本正规圆盘。由于 s 是一个非切割顶点，该圆盘 E 与 $\mathcal{F}'$ 的交集是一条弧或简单闭曲线。为本证明之目的，我们将这样的圆盘称为相关圆盘。我们也将该圆盘与 $\mathcal{F}'$ 的交集称为一条相关 弧。

现在我们证明， H_0 中的一个相关圆盘 E 由其相关弧 $E \cap \mathcal{F}'$决定（在保持 X、P 和这些柄不变的 H_0的同痕意义下）。首先注意，由于 $\mathcal{H}'$ 是约化的， $H_0 \cap (\mathcal{F}' \cup X \cup P)$ 是连通的，因此其补集是一族圆盘。根据该弧是否与 $P \cap H_0$相交，弧 $E \backslash\backslash \mathcal{F}'$ 与其中一个或两个这样的圆盘相交。（注意， $P \cap H_0$至多有一条弧。）因此，弧 $\partial E \backslash\backslash \mathcal{F}'$ 由其端点决定，证毕。

因此，只需对这类相关弧的数量给出上界。由引理 10.8，$S' \cap \mathcal{F}'$ 在 $\mathcal{F}'$中是本质的，也就是说，没有简单闭曲线在$\mathcal{F}'$ 中围成一个圆盘，或者没有弧与 $\partial\mathcal{F}' - X$中的弧平行。由引理 10.9，只要两条弧在 $\mathcal{F}' - X$中拓扑平行，它们就是正规平行的。

因此，当我们考虑 H_0中一族两两不相交的相关圆盘，且其中任意两个都不与 $\mathcal{H}'$平行时，可以推出它们与 $\mathcal{F}'$ 的交集构成一族正常嵌入弧，其中任意两条都不拓扑平行。每条弧在 X的补集中都是本质的。因此， H_0 中两两不平行的相关圆盘的最大数量，不超过$(\mathcal{F}' \cap H_0) - X$中两两不相交且不平行的本质弧的数量。根据引理 10.2，这个数量至多为 $3\max\{c(\mathcal{F}' \cap H_0)\ 1\}$。然而，事实上，这类弧的数量至多为 $3c(\mathcal{F}' \cap H_0)$，理由如下。当最大值为 1 时， $\mathcal{F}' \cap H_0$ 是一个与 X不相交的圆盘或环带。我们在引理 10.7 中看到，当 $\mathcal{H}'$ 是约化的时， $\mathcal{F}'$ 没有与 X不相交的圆盘分支。 $\mathcal{F}'$ 中任何与 X 不相交的环带分支，都由一串彼此连接并沿圆周排列的 0-柄和 1-柄组成。因此，这种环带中的任何正规弧都必须连接 $\partial H_0 \backslash\backslash \mathcal{F}'$的不同连通分支。所以，这样的弧不是相关弧，因为它来自一个割点。□

命题 10.11. 假设 $\mathcal{H}'$ 是约化的，且 S' 是粗正规。那么 S' 中的内部顶点的近似类型数量至多为 $2c_+(\mathcal{H}) + c(\mathcal{H}')$。

证明。考虑 S' 的内部顶点的一个极大集合，其中任意两个顶点的近似类型都不同。每个顶点都会在 $\mathcal{F}_v$ 中产生一条简单闭曲线。根据引理 10.8，这些曲线都不在 $\mathcal{F}_v$ 中围成圆盘。在 $\mathcal{F}_v$ 中，既不围成圆盘又两两不相交且不平行的简单闭曲线的最大数量至多为 $2c_+(\mathcal{F}_v)$。为证明这一点，考虑 $\mathcal{F}_v$ 的一个连通分支 F，以及 F 中既不在 F 中围成圆盘、又两两不相交且不平行的曲线的一个极大集合。由于 F 是平面的，这个数量为 $-2\chi(F) + 1 \leq 2c_+(F)$。

然而， $\mathcal{F}$ 中可能有两条闭曲线拓扑平行，但近似类型不同。当然，若它们在 $\mathcal{F}$ 中拓扑平行，那么它们具有相同的 $\mathcal{H}$ 类型。不过，近似类型定义中的条件 (2) 未必成立。我们可以沿这些曲线切割 $\mathcal{F}'$，而它们之间由此得到的曲面部分之一可能不是环带。注意，事实上我们不会得到任何与 ∂X 不相交的圆盘形曲面连通分支，因为这些圆盘本应属于 $\mathcal{F}'_v$，这与 $\mathcal{H}'$ 是约化的这一假设矛盾。因此，沿这组顶点切割 $\mathcal{F}'_v$ 后，得到一组曲面 $\mathcal{F}''$，其中没有任何一个是与 ∂X 不相交的圆盘。由于我们是沿简单闭曲线切割，$\chi(\mathcal{F}'') = \chi(\mathcal{F}'_v)$。因此，$\mathcal{F}''$ 中不是与 ∂X 不相交的环带的连通分支数量至多为 $c(\mathcal{F}'_v)$。这些连通分支至多会使 S' 的内部顶点的近似类型数量增加 $c(\mathcal{F}'_v)$。□

10.18. 瓦片的近似星形类型。 设 T 是 S' 的一个瓦片，其边界上有顶点v_1 和 v_2；再设 T' 是 S' 的另一个瓦片，其边界上有顶点 v'_1 和 v'_2。如果满足以下条件之一（允许重新标记v'_1 和v'_2），则称 T 和 T' 具有相同的近似星形类型：

(1) v_1 和 v'_1 的星形在 $\mathcal{H}'$中平行，且 v_2 和 v'_2的星形也平行；(2) 它们的所有顶点都位于 S'的内部，且 v_1 和 v'_1 的星形近似平行，v_2 和v'_2的星形也近似平行。

11. The Euclidean subsurface

我们继续考虑弧表示中的链环 K，以及链环 K 的外部的可容许偏层次结构 H。我们将 H 的外部记为 M。

我们考虑 M 中的广义容许曲面 S，其不含环形瓦片。我们还假设 S 的任何连通分支都不是双边形瓦片。设 S 是嵌套可容许包络 $(N,\ X,\ Y,\ P\cap N,\ \mathcal{H},\ S)$ 和 $(N',\ X,\ Y',\ P\cap N',\ \mathcal{H}',\ S')$ 的一部分。特别地，S 包含 π_1-单射子曲面 S'。

令 approx-type(S') 表示 S' 的瓦片的近似星形类型数。我们假设以下量在保持图案的同位下取最小值：

$$(w_\beta(S'), \text{approx-type}(S')).$$

通常，此类有序对按字典序比较。更具体地，假设不存在 M 的图案同痕将 S 和 S' 分别变为 S_2 和 S'_2，并且不存在满足下述条件的嵌套可容许包络 $(N_2,\ X_2,\ Y_2,\ P\cap N_2,\ \mathcal{H}_2,\ S_2)$ 和 $(N'_2,\ X_2,\ Y'_2,\ P\cap N'_2,\ \mathcal{H}'_2,\ S'_2)$

$$(w_\beta(S'_2), \text{approx-type}(S'_2)) < (w_\beta(S'), \text{approx-type}(S')),$$

$$c_+(\mathcal{H}_2) \le c_+(\mathcal{H}), \qquad c(\mathcal{H}'_2) \le c(\mathcal{H}').$$

现在定义欧几里得子曲面 E of S' 为移除价不等于 4 的内部顶点、位于 $\partial S'$ 上的顶点 v（其中 $2d_i(v)+d_b(v) \neq 4$）、交集 $P\cap S'$、非内部鞍点的广义内部鞍点，以及非边界鞍点的广义边界鞍点后所得的结果。因此，E 包括：

(1) S'中每个瓦片的内部。(2) S'中每条分界线的内部。(3) S' 中每个价为 4 的内部顶点。

(4) 每个与边界模式 P不相交的、带有 $2d_i(v) + d_b(v) = 4$ 的边界顶点 v。
(5) S'的每个内部鞍点和边界鞍点。

文献 [17]中讨论过一个类似的欧几里得曲面。

E 中的每个方形瓦片，其边界上都有四条弧分离线。因此，我们可以将该瓦片实现为边长为 1 的欧几里得正方形的内部，其中分离线构成正方形的各边。E 中的每个半瓦片都实现为一个边长分别为 1、1 和 $\sqrt{2}$的直角等腰三角形，其中斜边位于 $\partial S'$中。因此，E具有局部欧几里得黎曼度量。其余部分 $S' \setminus E$ 由一组孤立点构成。

定义 $S' \setminus E$ 中一点的度为与该点关联的分离曲线数量。$S' \setminus E$的度记作 $\deg(S' \setminus E)$，等于其中各点度数之和。论证的关键部分是根据 $\deg(S' \setminus E)$，求出 E 面积的一个上界。一个简单的几何论证，与[17], 中的引理 7.2 类似，可得如下结果。

引理 11.1。假设 E 中的每个点到 $S' \setminus E$的距离至多为 R。那么，E 的面积至多为 $(\pi/4)R^2\deg(S' \setminus E)$。

证明。对于 E中的每个点 y，都存在一条从 y 到 $S' \setminus E$的最短路径，它是一条长度至多为 R的欧几里得测地线。因此，E 被从 $S' \setminus E$ 出发、长度至多为 R的测地线的并集覆盖。这些测地线扫过的区域面积至多为 $(\pi/4)R^2\deg(S' \setminus E)$。因此，这给出了 E面积的一个上界。□

注 11.2。[17] 中的引理 7.2 断言，E 的面积不超过$\pi(R+1)^2\ell(\partial E)$，其中 $\ell(\partial E)$是 ∂E的“组合长度”。然而，[17] 中对 $\ell(\partial E)$的定义有误，应改为 ∂E 中的分离曲线数量加上 ∂E中孤立点的度数之和。采用修正后的定义后，[17] 中引理 7.2 的证明无需调整，且 [17] 中定理 7.1 的证明对它的应用是成立的。

因此，仍需控制 E 的每个点到 $S' \setminus E$的距离。这由以下定理实现，该定理是本节的主要结果。

定理 11.3. 设$(N, X, Y, P\cap N, \mathcal{H}, S)$与$(N', X, Y', P\cap N', \mathcal{H}', S')$为嵌套可容许包络。假设不存在同胚 $h\colon N \to N$ 使得以下各项均成立：

(1) h 在 $P \cap N$和 X 上等于恒等映射（从而可延拓到 M）；*(2)* h 是沿正常嵌入于 M中的环面或干净环带的德恩扭转；*(3)* $(N, X, Y, P \cap N, \mathcal{H}, h(S))$与$(h(N')\ X, h(Y')\ P \cap N', h(\mathcal{H}')\ h(S'))$为嵌套可容许包络；*(4)* $w_\beta(h(S')) < w_\beta(S')$。

还假设不存在将 S 和 S' 映到 S_2 和 S_2'的图案同痕，并且嵌套可容许包络$(N_2, X_2, Y_2, P\cap N_2, \mathcal{H}_2, S_2)$和$(N_2', X_2, Y_2', P\cap N_2', \mathcal{H}_2', S_2')$满足

$$(w_\beta(S_2'), \textit{approx-type}(S_2')) < (w_\beta(S'), \textit{approx-type}(S')),$$
$$c_+(\mathcal{H}_2) \le c_+(\mathcal{H}), \qquad c(\mathcal{H}_2') \le c(\mathcal{H}').$$

令 e 为 $E \setminus N_2(S' \setminus E)$ 的瓦片的近似星形类型数。那么，对于 S' 的欧几里得子曲面 E 中的每个点，以下情况之一成立：

(1) 它到 $S' \setminus E$ 的距离至多为 $4784e$；或者 *(2)* 它位于 S' 的一个环面或干净环带分支中，该分支包含于 E 中，且绑定权重至多为 $23552e^2$。

该定理的证明很大程度上依赖于作者在[17]第9节中的工作。我们需要花些时间回顾其中的一些内容；更多细节请参阅 [17]。

请注意，基于以下理由，我们可以假设不存在定理 11.3 中所述的同胚 h。

引理11.4。设(M, P)是带有边界模式的紧致可定向不可约边界不可约三维流形。设 S是一个正常嵌入曲面。如果(M, P)包含一个本质干净环带或本质环面，那么设 S 为 *JSJ* 环面与环带。设 $h\colon\ M \to M$ 是沿一个正常嵌入环面或干净环带进行的德恩扭转。那么 $h(S)$ 与 S强等价。

证明。设 T 为进行德恩扭转所沿的环面或环带。若T 是环面，则 h(*S*)与 S强等价。若 T 是非本质环带，则 h 模式同痕于恒等映射，因此 h(*S*)模式同痕于 S。另一方面，若 T 是本质干净环带，则根据假设，S 是 JSJ 环面与环带。因此，S 可以通过模式同痕移离 T。于是，同样有 h(*S*)模式同痕于 S。□

因此，假设存在定理 11.3 中所述的同胚 h。则由上述引理，我们可以用 h(*S*)替换 S。我们也可以用 $(N, X, Y, P \cap N, \mathcal{H}, h(S))$ 和 $(h(N')\ X, h(Y')\ P \cap N', h(\mathcal{H}')\ h(S'))$ 替换嵌套可容许包络。这些把手结构与原来的把手结构具有相同的复杂度，因为$c(h(\mathcal{H}')) = c(\mathcal{H}')$。此过程使 S' 的绑定权重依照定理 11.3 的 (4) 减小。因此，通过选取绑定权重最小的 S'，我们可以假定不存在同胚 h。

11.1. **“欧几里得”分支曲面**。回顾 S' 正常嵌入于流形 N' 中。设 M' 由 N' 粘贴 $M \backslash\backslash N$ 得到。因此，M' 由 M 插入楔形体得到，但我们假设，当以会产生割点的方式插入一个楔形时，我们并不完全插入整个楔形，以便保持 M' 为三维流形。

第一步是在 M中构造一个分支曲面 B_E。B_E 的主要片类型源自 S'的欧几里得曲面 E 的瓦片。更准确地说，$E \setminus N_2$（$S' \setminus E$）的 $\mathcal{H}$ 中每一种近似星形类型的瓦片，都会产生 B_E的一个片。不过，我们也考虑$S' \setminus E$（$E \setminus N_2$）的稍微扩大的版本，它由$S' \setminus E$在 E中的一个正则邻域 $E \setminus N_2$构成，而它的平行片也构成 B_E的瓦片。$S' \setminus E$（$E \setminus N_2$）的这一扩展由分支曲面B_E承载。

设 N（B_E）是 B_E的一个加厚，设 $\pi\colon B_E$（N）$\to B_E$是将纤维塌缩的映射。[17] 中的引理 8.1表明，B_E（∂N）中的每个尖点不是环带就是圆盘。此外，圆盘形尖点与∂B_E（π^{-1}）相交于两条弧。（[17] 中的引理 8.1有几个假设，对于由B_E（N）稍微扩大的三维流形，这些假设很容易验证。）

在 [17], 引理 9.1中，我们证明了欧几里得铺片至多有 $24n^2$ 种类型（其中 n 是 K的弧表示的弧指标）。这一估计在此处并不适用。但下面给出了另一个上界。

引理 11.5。 $E - N_2(S' \setminus E)$ 的瓦片的近似星形类型数至多为

$$e = 16c_+(\mathcal{H}) + 32c(\mathcal{H}').$$

证明。选取 $E - N_2(S' \setminus E)$ 中一组极大的瓦片，使它们具有相同的近似星形类型。考虑某个给定近似星形类型中最外层的瓦片 T。它的一个顶点必定是该近似星形类型中最外层的顶点。由命题 10.10 和 10.11，这样的顶点至多有 $4c_+(\mathcal{H}) + 8c(\mathcal{H}')$ 个。由于我们所考虑的瓦片位于 $E - N_2(S' \setminus E)$ 中，其顶点位于 E 中，因此价至多为 4。于是，每个这样的顶点至多关联 4 个瓦片。所需的上界由此得出。□

因此，我们的分支曲面 B_E 至多有这么多个欧几里得片。

引理 11.6。 B_E 的尖点是 $\partial N(B_E)$ 中的环带和圆盘。这些圆盘位于N'中。

证明。在 [17] 中应用引理 8.1 可知，每个尖点要么是环带，要么是圆盘。后一种情况下，该圆盘是 $I \times I$ 的一个副本，其中每条 $\{*\} \times I$ 都位于 $N(B_E)$ 的一个纤维中。还证明了 $\partial I \times I$ 位于 $\partial_h N(B_E)$ 中。现在，通过向 N' 添加 S' 中具有相同星形近似类型的瓦片之间的空间，可得到 $N(B_E)$。当与 $\partial S'$ 关联的 S' 的瓦片在 N' 中平行时，当且仅当它们具有相同的近似类型。因此我们推知，$\partial I \times I$ 位于 N' 中。于是，$\partial I \times I$ 与构成 $N' \setminus\setminus N$ 的楔形体不相交。这些楔形体与 $N(B_E)$ 的每个尖点相交于弧和曲线的正则邻域中；这些弧和曲线横向于纤维，且与水平边界不相交。因此，如果某个楔形体与 $N(B_E)$ 的圆盘尖点相交，那么它会交于弧的正则邻域中，而每条弧都完全位于尖点内部。考虑其中一条弧的端点。它上方和下方的 S' 瓦片不具有相同的近似星形类型，这与 $N(B_E)$ 的定义矛盾。因此，我们推知，$N(B_E)$ 的尖点的圆盘连通分支位于 N' 中，证毕。□

11.2. **单值化同态**。对于 B_E的每个连通分支 B_0，都有一个同态 $\pi_1(B_0) \to O(2)$，其中 $O(2)$是 $\mathbb{R}^2$的正交变换群。要定义这个同态，必须考虑 B_0 中的一个环路 ℓ，其基点为某个基点。当 ℓ 从一个片移动到另一个片时，可以随之将一个欧几里得二维平面平行移动。环路返回基点时，这个二维平面经历了一个正交变换，该变换就是 $[\ell]$ 在此同态下的像。详细内容见 [17]中的第 9.3 节。

11.3. **分支曲面的有限覆盖**。显然，单值化同态的像包含于 $O(2)$中保持以原点为中心的单位正方形的子群。该子群是一个阶为 8 的二面体群。因此，$\pi_1(B_0) \to O(2)$的核是 $\pi_1(B_0)$的有限指数子群。这对应于 B_0的一个有限覆盖$\tilde{}$ $\tilde{}$ B_0。令 B_E 为这些覆盖的并，其中 B_0 遍历 B_E的每个连通分支。这是一个分支曲面。事实上，我们可以取 B_E的一个加厚 $N(B_E)$，$\tilde{}$，若取其对应的覆盖，所得结果便是

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}B_E$的一个加厚 $N(B_E)$。因此，B_E 是三维流形 $N(B_E)$中的一个分支曲面。

..*B*..的主要模型几里得片的提升。我们将这些欧几里得片称为 B_E。由于覆盖映射 $B_E \to B_E$ 在每个连通分支上的度至多为

˜ ˜8（对应 B_E），我们推得 B_E 至多有 $8e$ 个欧几里得片。

˜ ˜ ˜令 S'为 $N(B_E)$ 中 S'的逆像。$N(B)$ 中 E的逆像是˜由欧几里得瓦片构成的曲面 E。

˜对 B_E 的每个分支 B_0，都可以定义一个单值化同态 $\pi_1(B_0) \to O(2)$。但根据 B_E 的构造，该单值化同态˜是平凡的。这意味着 B_E 是横向可定向的，因为若非如此，则˜对于 B_E 中的某个环路 ℓ，ℓ 在单值化同态下的像将˜具有行列式 -1。现在我们固定 B_E 的横向定向，这会在 E 上诱导出˜一个横向定向。

11.4. 证明策略。 [17] 中第9节的主要结果是命题 n 9.8，内容如下。如果 $\tilde{E}$ 中有一点与 ∂E 的距离大于 $8000n^2$ ˜ ˜（其中 n 仍为链环的弧指标），那么当把 E 看作由 B_E 携带的曲面时，它有一个环面直和项˜。

这便推出了 E 中每一点与 ∂E 的距离至多为 $8000n^2$。因为若不然，$\tilde{E}$ 中便有一点与 ∂E 的距离大于 $8000n^2$ ˜ ˜ ˜，因此 E 会有一个环面直和项。E 在 $N(B_E)$ 上的投影是 E 的一个非零倍数，而该环面投影为由 B_E 携带的环面。因此，我们推知 E 的某个非零倍数有一个环面直和项。由此又可推出，作为正规曲面，S 的某个非零倍数有一个环面直和项。（此处，S 是平凡结的生成圆盘。）但是，在 [17] 中，S 的安排使得 S 的任何倍数都没有环面直和项，因为在 [17], 中，S 是一个“边界顶点曲面”。

遗憾的是，同样的策略在我们的情形下并不奏效，因为我们并未假设 S' 是一个“边界-顶点”曲面。特别是，没有明显的理由能够阻止 S' 的某个倍数含有环面直和项。相反，我们将证明如下结论。

定理11.7。 假设在 E 中存在某个点，其到 $S' \setminus E$ 的距离大于 $1196e$。那么，在 M 中存在一个环面或干净环带 A，它正常嵌入于 M 中，并且在 $\mathcal{H}$ 中是正规的；还存在一个同胚 $h\colon\ M \to M$，它是沿 A 的德恩扭转的某个幂，并满足定理 *11.3* 的 *(1)–(4)*。

11.5. 双重化。 令 E_+ 为沿 $\partial S' \cap E$ 对 cl(E) 的抽象加倍。令 B_{E+} 为沿 ∂B_E 对 B_E 的双重。令 $N(B_{E+})$ 为沿 $\pi^{-1}(\partial B_E)$ 对 $N(B_E)$ 的双重。注意，$N(B_{E+})$ 的尖点全都是环带。

˜ ˜ ˜ ˜覆盖 $B_E \to B_E$ 和 $E \to E$ 诱导出覆盖 $B_{E+} \to B_{E+}$ 和 $E_+ \to E_+$。˜类似地，我们有一个覆盖 $N(B_{E+}) \to N(B_{E+})$。

˜**11.6. 网格和环带。** A网格 是 E 或 E 的一个子曲面，由若干瓦片组成，这些瓦片粘合在一起形成一个边长为奇数的方形。由于边长是奇数，这个方形的中心位于某个瓦片的中心。对于正整数 r 以及位于 E 或 E中的一点 x，我们用 $D(x, r)$ 表示一个以包含 x 的瓦片为中心、边长为 $2r + 1$的网格。

[17] 命题 9.8 的证明分为两种情况：要么存在一条与 ∂E“相距很远”的“短”闭测地线，要么不存在。在 [17], 中，“短”和“相距很远”是根据弧指标 n来衡量的。而在这里，我们改为根据 e来衡量。我们˜同样分为两种情况，但使用 E 而不是 E。为此，我们需要以下引理。

引理 11.8。 假设 $E-N_{4784e}(S'\setminus E)$非空。令 E_+ 为沿 $\partial S'\cap E$对$\mathrm{cl}(E)$ 作的抽象加倍。令 W 为 $S'\setminus E$ 在 E_+中的逆像。则以下情况之一成立：

（*1*）在 E_+-N_{1472e}（W） 中存在一条闭测地线 α，其长度至多为 $736e$，使得 N_{1472e}（α） 要么在 E_+ 的对合下保持不变，要么与其在对合下的像不相交；（*2*）在 E_+-N_{1472e}（W） 中存在一个网格，其边长为 $512e+1$，该网格要么在对合下保持不变，要么与其在对合下的像不相交。

证明。 由于 $E-N_{4784e}(S'\setminus E)$ 非空， $E_+-N_{4784e}(W)$ 也非空。取 $E_+-N_{4784e}(W)$ 中的某个点 x'。如果 x' 到 E_+ 中 $\partial S'\cap E$ 的副本的距离不超过 $1840e$，那么 $\partial S'\cap E_+$ 上存在一点 x，且该点位于 $E_+-N_{2944e}(W)$ 中。另一方面，如果 x' 到 $\partial S'\cap E_+$ 的距离大于 $1840e$，则令 $x=x'$。因此， x 要么位于 $\partial S'\cap E_+$ 上，要么到 $\partial S'\cap E_+$ 的距离大于 $1840e$。

令 r 为 E_+ 在 x 处的内射半径。若 $r>368e$，则存在一个以 x 为中心、边长为 $512e+1$ 的嵌入网格，因为 $512e+1<368\sqrt{2}e$。当 x 位于 $\partial S'\cap E_+$ 上时，我们可以选择一个在 E_+ 的对合下不变的网格。当 x 与 $\partial S'\cap E_+$ 的距离大于 $1840e$ 时，该网格与其在对合下的像不相交。注意，该网格位于 $E_+-N_{2576e}(W)$ 中，因此满足(2)。

因此，假设 r 至多为 $368e$。令 γ_1 和 γ_2 为从 x 出发、长度为 r 且在 E_+ 中具有相同端点 y 的不同测地线。由于 r 正好是 x 处的内射半径，这两条测地线恰好在 y 处拼接成一条光滑测地线。然而，它们未必能在 x 处拼接成一条光滑闭测地线。令 γ 为 $\gamma_1.\gamma_2$ 的拼接，它是一条以 x 为基点的测地线。 γ 的单值化属于 $O(2)$。事实上，它属于 $SO(2)$，因为 E_+ 是可定向的。

情形 *1*。 $\mu(\gamma)$是恒等映射。

测地线 γ 是一条处光滑。其长度至多为 $736e$，且位于 $E_+-N_{1472e}(W)$中。因此，当 x 与 $\partial S'\cap E_+$ 不相交，进而$N_{1472e}(\gamma)$与 $\partial S'\cap E_+$不相交时， γ 就是所需的测地线。

然而，当 x 位于 $\partial S'\cap E_+$上时，我们需要验证 γ 在 E_+的对合下保持不变。在这种情况下，令 D 为以 x为中心、半径为 r 的开圆盘。这是一个在 E_+的等距对合下保持不变的欧几里得圆盘。因此，该对合是关于经过 x的一条直线的反射。由此可知， $D\cap(\partial S'\cap E_+)$就是这条直线。如果 $\gamma'(0)$指向这条直线的方向，或与其正交，那么 γ 在该对合下保持不变，符合要求。因此，反设 $\gamma'(0)$与 $\partial S'\cap E_+$之间的角度严格介于 0 和 $\pi/2$之间。在 D中， γ 与 $\partial S'\cap E_+$ 的唯一交集位于 x处。然而， γ_1 位于 E_+ 的一半中，而 γ_2 位于另一半中；这两半在该对合下互换。由此可知， $\partial S'\cap E_+$ 也必定位于 γ_1的端点处。因此，它在该点与 ∂D 相切。然而，这个欧几里得子曲面由方形构成，而 $\partial S'\cap E_+$ 沿着这些方形的边行进。由此可知，$\partial S'\cap E_+$ 与 γ 在 γ_1端点处可能形成的角度只能是 $\pi/2$的整数倍。这就产生了矛盾。

情形 *2*. $\mu(\gamma)$ 是一个阶为 2 的旋转。

那么 γ_1 和 γ_2 相等，这与它们互不相同的假设相矛盾。

情形*3*。 $\mu(\gamma)$ 是一个 4 阶旋转。

然后， γ^4 可以展开到欧几里得平面上的一条闭曲线上。我们可以像图44所示，在平面内缩短这条曲线。除非曲线与 W相交，否则这可以在$E_+ - W$ 内实现。但在这种情况下， x 到 W的距离至多为 $1472e$ ，这与假设矛盾。不过，如果我们能将 γ^4 缩短至长度为 0，那么它在 E_+中就是同伦平凡的。因此， γ也同伦平凡，因为 E_+ 的基本群无挠。这就产生了矛盾，因为 $\mu(\gamma)$非平凡。□

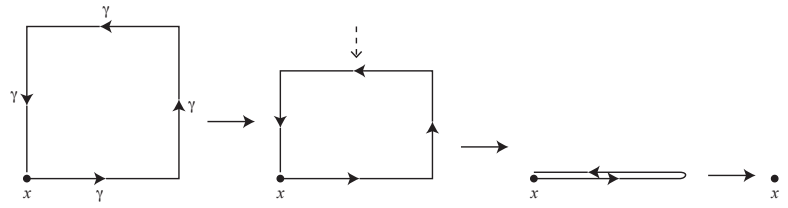

FIGURE 44. 收缩 γ^4

定理 11.3 的证明分为上述引理中的两种情况。我们暂且搁置第一种情况，现在考虑如下情形：在 $E_+ - N_{1472e}(W)$中有一个边长为 $512e+1$ 的网格，且该网格在 E_+ 的对合下保持不变，或者与其像不相交。该网格可提升为

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}E_+ - N_{1472e}(W)$ 中的网格 $D(\tilde{x},\ 256e)$，其边长也为 $512e+1$；其中， E_+ 是沿着 $\partial S' \cap E$的逆像对 cl(E) $\tilde{}$ $\tilde{}$取双重所得，而 W 是 W 在 E_+中的逆像。

$\tilde{}$ $\tilde{}$**11.7. 首次返回映射。 </style}对于 或 中的子曲面 ，我们可以如下定义一个 首次返回映射** $r_F\colon \mathrm{dom}(F) \to F$。其定义域是 F 的一个子曲面 dom(F)。

$\tilde{}$ $\tilde{}$对于 F 上的一点 y，考察经过该点的 $N(B_E)$ 或 $N(B_{E+})$ 的纤维 α_y。该纤维与 F 相交于若干个点。我们沿着 $\alpha_y\tilde{}$ $\tilde{}$，在 B_E 或 B_{E+}上指定的横截方向，选取距离最近的那个交点。如果沿此横截方向， $\alpha_y \cap F$ 上没有点，则 $r_F(y)$ 未定义。否则，我们令 $r_F(y)$ 等于这个点。

我们将考虑由瓦片组成的曲面 F 。在这种情况下， F 中每个瓦片的内部要么包含于 dom(r_F)，要么与之不相交。后一类中的每个瓦片，都是包含它的 $N($$B_E$) 或 $N(B_{E+})$ 的片中的最外层瓦片。由于 $\tilde{}$ B_E 至多有 $8e$ 个欧几里得片，因此可推知， $F \subset E$ 中至多有 $8e\tilde{}$ 个欧几里得瓦片不属于 dom(r_F)。类似地， $F \subset E_+$ 中至多有 $16e$ 个欧几里得$\tilde{}$瓦片不属于 dom(r_F)。

11.8. 大网格的首次返回映射。 如上所述，我们目前考虑的情形是：在 $E_+ - N_{1472e}(W)$ 中存在一个边长为 $512e+1$ 的网格 $D(\tilde{x}, 256e)$。我们假设该网格同胚地投影到 E_+ 中的一个网格上，并且在 E_+ 的对合下保持不变。

命题 11.9。 每个点 $\tilde{y} \in D(\tilde{x}, 174e)$ 都属于 $\mathrm{dom}(r_{D(\tilde{y},81e)})$。

这与 [17], 中的命题 9.14 非常相似，二者的证明思路也相同。关键步骤如下，它是 [17]中命题 9.15 的一个类比。

命题 11.10。设 $D_1, \dots, D_m$ 是 E_+ 中一组互不相交的网格，每个网格的边长至少为 $64e+1$。假设覆盖映射 $E_+ \to E_+$ 在每个 D_i 上的限制都是到其像的同胚。另假设每个 D_i 要么在 E_+ 的对合下保持不变，要么与其在该对合下的像不相交。令 d_i 为 D_i 中满足 $r_{\tilde{E}_+}$ 未定义的点到 ∂D_i 的距离的上确界。那么 $\sum_i d_i \le 16e$。

请注意，命题 11.10 有一个假设，而命题 9.15 在 [17]中并没有这个假设。这个假设是：覆盖映射 $E_+ \to E_+$ 在每个 D_i 上的限制都是到其像的同胚。这里需要这个假设，因为我们并不假设 S 或 S' 是“边界顶点”曲面。

证明。考虑 B_{E+} 的尖点，并令 $\partial_- C$ 表示 E_+ 中恰好位于这些尖点上方的 1 维流形。这里“上方”是指，$\partial_- C$ 处 E_+ 上的横向定向指向尖点。注意，$\partial_- C$ 将 E_+ 分成两个子曲面：$\mathrm{dom}(r_{\tilde{E}_+})$ 和 $E_+ \setminus \mathrm{dom}(r_{\tilde{E}_+})$。对 E_+ 中的 $\partial_- C$ 作横向定向，使其指向 $\mathrm{dom}(r_{\tilde{E}_+})$。1 维流形 $D_i \cap \partial_- C$ 由真嵌入弧和简单闭曲线组成。

我们断言，$D_i \cap \partial_- C$ 中的每条简单闭曲线都指向它在 D_i 中所围成的圆盘内部。这类似于[17]中命题 9.15 的证明里的断言 2。反之，假设存在一条简单闭曲线 β_-，它在 $D_i \cap \partial_- C$ 中指向其在网格 D_i 中所围成的圆盘外部。这是一条嵌入曲线，位于网格 D_i 中，因此投影为 E_+ 中的一条嵌入曲线 β_-。因此，B_{E+} 的正下方的尖点同胚地投影为 B_+ 中的一个尖点。令 β_+ 为 β_- 正下方、位于 E_+ 中的曲线。那么 β_+ 同胚地投影为 E_+ 中的一条简单闭曲线 β_+。它在 E 中的截面为一条简单闭曲线或真嵌入弧 γ_+。类似地，β_- 在 E 中的截面为一条简单闭曲线或真嵌入弧 γ_-。β_- 所围成的圆盘在 S' 中的截面为一个圆盘 D_-，它被 γ_- 分隔出来。

首先假设 γ_+ 和 γ_- 是简单闭曲线。因此，它们之间的纤维部分的并集是一个环带 A，其中包含 $N(B_E)$ 的一个环带尖点。$A \cup D_-$ 的并集是一个圆盘，其边界为 γ_+，且位于 M 中。由于 S 不可压缩，我们可以推出 γ_+ 在 S 中围成一个圆盘 D_+。该圆盘的边界位于 S' 中，因此 D_+ 全部位于 S' 中。于是，$D_- \cup A \cup D_+$ 是一个球面，它在 M 中围成一个球。

现在假设 γ_+ 和 γ_- 是弧。因此，它们之间的纤维部分的并集是一个圆盘 D，其中包含 $N(B_E)$ 的一个圆盘尖点。根据引理 11.6，D 位于 N' 中。因此，经过一个小的同痕后，$D_+ \cup D$ 是 M' 中的一个圆盘，其边界由 S' 中的一条弧和 $\partial M'$ 中的一条弧组成，且其内部与 S' 不相交。根据 S' 的边界不可压缩性，我们可以推出 γ_+ 在 S' 中隔出一个干净圆盘 D_+。因此，$D_- \cup A \cup D_+$ 是一个正常嵌入于 M' 中的圆盘，且与图案不相交。于是，根据 M' 的边界不可约性，我们可以推出 $D_- \cup A \cup D_+$ 隔出了一个与图案不相交的三维球。这个球的内部与 S' 及 S 不相交。

我们可以假设 D_- 和 D_+ 具有相同的绑定权重；否则，我们可以对 S' 和 S 作同痕，用一个圆盘替换另一个，从而降低 S' 的绑定权重。注意，在 γ_+ 和 γ_- 为简单闭曲线的情形下，$S \setminus S'$ 与由.....围成的球之间可能存在交集的分支

$D_- \cup A \cup D_+$。但我们可以用平行于 D_- 或 D_+的圆盘替换这些分支。这可能会引入新的 $S \setminus S'$的 2-球面分支，在这种情况下将其舍弃。

现在尽可能多地将 D_+ 的平行副本替换为 D_- 的平行副本。最终，这一过程必定会停止，因为某种 S' 的近似瓦片类型已被移除。因此，我们找到了一个曲面 S_2'，它与 S' 模式同痕且具有相同的绑定权重，但满足 approx-type(S_2') < approx-type(S')，这与定理 11.3 的一个假设矛盾。这就证明了该断言。

我们断言， $D_i \cap \partial_- C$ 中距离 ∂D_i 最远的任意一点都位于 $D_i \cap \partial_- C$ 的某个弧分支上。这类似于 [17] 中命题 9.15 的证明中证明里的断言 1。沿着 $D_i \cap \partial_- C$ 的弧分支切开 D_i，令 D_i' 为包含 D_i 中心的圆盘。由于弧分支的长度至多为 $32e$， D_i' 中包含一个边长为 $32e+1$ 的网格。因此， D_i' 至少包含 $(32e+1)^2$ 个瓦片。我们将排除 D_i' 中存在 $\partial_- C$ 的任何简单闭曲线的可能性。令 δ 为 $D_i' \cap \partial_- C$ 中最外层的简单闭分支之并，换言之，这些分支不位于 $D_i' \cap \partial_- C$ 的其他简单闭分支之内。 δ 的总长度至多为 $32e$，因此它所围成的瓦片总数至多为 $(8e)^2$。然而，根据上述断言，dom($^r\tilde{E}_+$) $\cap D_i'$ 位于 γ 内。因此，至少有 $(32e+1)^2 - (8e)^2$ 个瓦片不在 dom($^r\tilde{E}_+$) 中的 $\tilde{}$ 内。然而，$^r\tilde{E}_+$ 在 E_+ 中除至多 $16e$ 个瓦片外的所有瓦片上都有定义。这就产生了矛盾，从而证明了该断言。

现在我们可以完成命题 11.10 的证明。考虑 $D_i \cap \partial_- C$ 上距离 ∂D_i 最远的一个点。根据上述断言，该点位于 $D_i \cap \partial_- C$ 的某个弧分支上，因此它到 ∂D_i 的距离至多为 $16e$。由此可知，以 D_i 为中心、边长为 $32e+1$ 的网格，其内部与 $\partial_- C$ 不相交，因此该网格要么包含在 dom($^r\tilde{E}_+$) 中，要么与 dom($^r\tilde{E}_+$) 不相交。但这个网格至少包含 $(32e+1)^2$ 个瓦片，而 $^r\tilde{E}_+$ 至多在 $16e$ 个瓦片上未定义。因此，我们可以推知， $D_i \setminus\setminus$dom($^r\tilde{E}_+$) 中距离 ∂D_i 最远的点到 ∂D_i 的距离至多为 $\partial_- C \cap D_i$ 长度的一半。所以， d_i 至多为 $\partial_- C \cap D_i$ 长度的一半。因此，$\sum_i d_i$ 至多为 $\partial_- C$ 长度的一半，进而至多为 $16e$。□

命题 *11.9* 的证明。该证明直接类似于 [17] 中命题 9.14 的证明。设 $\tilde{y}$ 是 $D(\tilde{x},\ 81e)$ 中的一点。我们将证明存在一个非负整数 m 以及一个映射 $D(\tilde{y},\ 32e) \times [0, m'+1] \to N(B_{E+})$，使得

(1) 对 $D(\tilde{y},\ 32e) \times [0, m'+1)$ 的限制是一个嵌入；(2) $D(\tilde{y},\ 32e) \times \{0\}$ 的像是 $D(\tilde{y},\ 32e)$；(3) E_+ 的逆像是 $D(\tilde{y},\ 32e) \times ([0, m'+1] \cap \mathbb{Z})$；(4) 对于 $D(\tilde{x},\ 32e)$ 中的每一点 z， $\{z\} \times [0, m'+1]$ 的像是 $N(B_{E+})$ 的某个纤维的子集；(5) $D(\tilde{y},\ 32e) \times \{m'+1\}$ 的像与 $D(\tilde{y},\ 48e)$ 有非空交集。

我们定义两个非负整数递增序列 m_i 和 k_i，以及映射 $D(\tilde{y}, 48e - k_i) \times [0, m_i] \to N(B_{E+})$，它们具有与上文 (1)-(4) 类似的性质。该过程从 $k_0 = 0$ 和 $m_0 = 0$开始。然后执行以下过程：

(1) 如果 $D(\tilde{y},\ 48e-k_i) \times \{m_i\}$ 与 $D(\tilde{y},\ 48e)$ 和 $m_i > 0$相交，则过程终止；否则进入下一步。

(2) 如果 $r_{\tilde{E}_+}$ 在整个 $D(\tilde{x}, 48e-k_i)\times\{m_i\}$上都有定义，令 $r_{\tilde{E}_+}(D(\tilde{x}, 48e-k_i)\times\{m_i\})$ 为 $D(\tilde{x}, 48e-k_i)\times\{m_i+1\}$，将 m_i增加 1，并在这两个网格之间加入一个积，将其并入乘积区域。然后返回步骤 (1)。(3) 假设 $r_{\tilde{E}_+}$ 并非在整个 $D(\tilde{x}, 48e-k_i)\times\{m_i\}$上都有定义。这意味着，$N(B_{E+})$ 至少有一个尖点位于 $D(\tilde{x}, 48e-k_i)\times\{m_i\}$下方。令 d_i 为这些尖点到 $D(\tilde{x}, 48e-k_i)\times\{m_i\}$边界的最大距离。将命题 11.10 应用于$D(\tilde{x}, 48e-k_0)\times\{m_0\}$、……、$D(\tilde{x}, 48e-k_i)\times\{m_i\}$ 的像，可得 $\sum_{j=1}^{i} d_j$ 至多为 $16e$。设定 $k_{i+1}=\sum_{j=1}^{i} d_j$，并定义 $m_{i+1}=m_i+1$。将 i 增加 1，然后返回步骤 (1)。

注意，在步骤 (3) 中应用命题 11.10 是允许的。这是因为覆盖映射 $E_+\to E_+$ 在每个网格 $D(\tilde{x}, 48e-k_0)\times\{m_0\},\dots,D(\tilde{x}, 48e-k_i)\times\{m_i\}$ 上的限制都是嵌入。假设情况并非如此，即其中某个网格里有两个点在 E_+ 中的像相同。那么，沿纤维将这两个点向 $D(\tilde{x}, 48e)$ 平移，就会推知 $D(\tilde{x}, 48e)$ 中有两个不同的点在 E_+ 中的像相同。然而，$E_+\to E_+$ 在 $D(\tilde{x}, 48e)$ 上的限制是到 $D(x, 48e)$ 的同胚，因而是单射。因此，我们证明了所需的映射 $D(\tilde{y}, 32e)\times[0, m'+1]\to N(B_{E+})$ 存在。

设 $\tilde{y}$ 是 $D(\tilde{x}, 174e)$ 中的一点。在 $\tilde{y}$ 周围有网格 $D(\tilde{y}, 32e)\subset D(\tilde{x}, 256e)$。设 $D(\tilde{y}, 32e)\times[0, m'+1]\to N(B_{E+})$ 为上述映射。由 (5)，存在一点z，位于 $D(\tilde{y}, 32e)$ 中，使得 $\{z\}\times\{m'+1\}$ 的像等于 $D(\tilde{y}, 48e)$ 中的一点。现在 $\{\tilde{y}\}\times\{m'+1\}$ 位于网格 $D(\{z\}\times\{m'+1\}, 32e)$ 中，因此也位于 $D(\tilde{y}, 1+80e)\subset D(\tilde{y}, 81e)$ 中。$D(\tilde{y}, 81e)$ 中可能还有其他点位于 $\{\tilde{y}\}\times\{0\}$ 和 $\{\tilde{y}\}\times\{m'+1\}$ 之间的纤维上。但 $D(\tilde{y}, 81e)$ 的首次返回映射在 $\tilde{y}$ 处肯定有定义。□

11.9. 首次返回映射的平移不变性。与前一个小节一样，设 $D(\tilde{x}, 256e)$ 是 $E_+ - N_{1472e}(W)$ 中的一个网格。我们假设 $D(\tilde{x}, 256e)$ 要么在 E_+ 的对合下不变，要么与其在对合下的像不相交。我们还假设 $D(\tilde{x}, 256e)$ 同胚地投影到 E_+ 中的一个网格。根据命题 11.9，对于每个 $\tilde{y}\in D(\tilde{x}, 174e)$，点 $\tilde{y}$ 和 $r_{D(\tilde{y}, 81e)}(\tilde{y})$ 都位于圆盘 $D(\tilde{x}, 256e)$ 中，因此存在一个定义良好的向量 $v_{\tilde{y}}$，位于 $T_{\tilde{x}}E_+$ 中，将 $\tilde{y}$ 映射到 $r_{D(\tilde{y}, 81e)}(\tilde{y})$。

命题 11.11。向量场 $\{v_{\tilde{y}}:\ \tilde{y}\in D(\tilde{x}, 48e)\}$ 是协变常数。

这在 [17], 中是命题 9.16，证明基本相同，我们在此简要概述。首先，考虑在一块瓦片内移动 $\tilde{y}$。此时，$D(\tilde{y},\ 81e)$仍是同一个网格，随着 $\tilde{y}$ 变化。映射 $r_{D(\tilde{y}, 81e)}$ 将 $\tilde{y}$ 送到 $N(B_{E+})$ 中正下方的一个点。由于 B_{E+} 具有平凡单值化，从 $\tilde{y}$ 到其像的 $D(\tilde{y},\ 80e)$ 中的向量保持不变。

现在考虑当 $\tilde{y}$ 移动到相邻瓦片中的点 $\tilde{y}'$ 时会发生什么。此时，$D(\tilde{y},\ 81e)$也会移动，而 $D(\tilde{y}',\ 81e)$ 的一块新瓦片出现在 $\tilde{y}'$ 下方。这同样是因为 B_{E+} 具有平凡单值化。$\tilde{y}'$ 在 $r_{D(\tilde{y}', 81e)}$ 下的像位于这块瓦片中，并且 $D(\tilde{y}',\ 81e)$ 中从 $\tilde{y}'$ 到其像的向量仍保持不变。

由此论证可得以下结果。

命题 11.12。 存在一个正整数 m，具有以下性质。对于任意一点 $\tilde{y} \in D(\tilde{x}, 174e)$，存在一个映射 $D(\tilde{y}, 81e) \times [0, m+1] \to N(B_{E+})$ 使得

(1) 到 $D(\tilde{y}, 81e) \times [0, m+1)$ 的限制是一个嵌入；*(2)* $D(\tilde{y}, 81e) \times \{0\}$ 的像是 $D(\tilde{y}, 81e)$；*(3)* E_+ 的逆像是 $D(\tilde{y}, 81e) \times ([0, m+1] \cap \mathbb{Z})$；*(4)* 对于 $D(\tilde{x}, 81e)$ 中的每个点 z，$\{z\} \times [0, m+1]$ 的像是 $N(B_{E+})$ 的一个纤维的子集；*(5)* $D(\tilde{y}, 81e) \times \{m+1\}$ 的像与 $D(\tilde{y}, 81e)$ 有非空交集。

11.10. 路径的单值化。 在第 11.2 节中，我们定义了 B_{E+} 中闭环的单值化。现在我们用它来定义 E_+ 中某些路径的单值化。

设 p 是 E_+ 中的一条路径，满足 $\pi p(0) = \pi p(1)$，其中 $\pi\colon N(B_{E+}) \to B_{E+}$ 是将每个纤维塌缩为一点的投影映射。则存在唯一一条嵌入路径 ϵ，位于一个纤维中，连接 $p(1)$ 与 $p(0)$。我们将 p 的单值化 $\mu(p)$ 定义为 $p.\epsilon$ 的单值化。注意，若 p 是一个闭环，则这两种单值化概念相同，因此不会产生混淆。还需注意，若对 p 在 E_+ 中施加一个固定其端点的同伦，则路径 p 的单值化不变。

11.11. 端点相近的路径。 设 p 是 $D(x, 174e)$ 中的一条路径，满足 $p(0)$ 和 $p(1)$ 位于 $N(B_{E+})$ 的同一纤维中，且 p 位于 $D(p(0), 81e)$ 中。设 ϵ 是这两个点之间的纤维部分。假设，对于命题 11.12 中所述的映射与覆盖映射 $\tilde{} \colon N(B_{E+}) \to N(B_{E+})$ 的复合，ϵ 位于其像 $D(p(0), 81e) \times [0, m+1)$ 或 $D(p(0), 81e) \times (0, m+1]$ 位于 $N(B_{E+})$ 中。此时称 p 具有端点相近的性质。我们的目标是证明以下结论。

命题 11.13. $D(x, 81e)$ 中不存在端点彼此接近的路径 p。

只需考虑 p 是 $D(x, 174e)$ 中一条测地线的情形。

引理 11.14. 设 p 是 $D(x, 174e)$ 中一条端点彼此接近的测地线。那么，以下环路在 $N(B_{E+})$ 中是同伦平凡的：

$$\begin{array}{ll} p.\epsilon.(-\mu(p)p). - \epsilon & \text{if } \det(\mu(p)) = 1; \\ p.\epsilon.(-\mu(p)p).\epsilon & \text{if } \det(\mu(p)) = -1. \end{array}$$

这里，$-\mu(p)p$表示一条测地线，它从 $p(0)$ 出发，初始向量为 $-\mu(p)p'(0)$，且长度等于 p 的长度。此外，$-\epsilon$表示与 ϵ 位于同一纤维中的嵌入弧，其终点为 $\epsilon(1)$，与 E_+ 相交的次数和 ϵ 相同，并且仅在 $\epsilon(1)$ 处与 ϵ 相交。

证明。设 $\tilde{p}$ 是 p 到 $D(\tilde{x}, 174e)$ 的一个提升。设 $\tilde{\epsilon}$ 是从 $\tilde{p}$ 的端点出发的 ϵ 的提升。于是，$\tilde{p}.\tilde{\epsilon}$ 位于 $D(p(0), 81e) \times [0, m+1)$ 或 $D(p(0), 81e) \times (0, m+1]$ 的像中。以 $\tilde{\epsilon}$ 的端点为起点的 $(-\mu(p)p). - \epsilon$ 或 $(-\mu(p)p).\epsilon$（视情况而定）的提升沿着一条与 $\tilde{p}$ 平行但方向相反的路径运行，随后闭合，并终止于 $\tilde{p}(0)$。因此，这 4 条路径的复合是在 $D(p(0), 81e) \times [0, m+1)$ 或 $D(p(0), 81e) \times (0, m+1]$ 中的一个同伦平凡环路。因此，这 4 条路径的像是 $N(B_{E+})$ 中的一个同伦平凡环路。□

因此，当 p 是 $D(x,\ 174e)$ 中一个端点相同的路径时，下面的路径关于其端点同伦：

$$\begin{aligned} p.\epsilon &\simeq \overline{-\epsilon}.\overline{(-\mu(p)p)} \quad \text{if } \det(\mu(p)) = 1; \\ p.\epsilon &\simeq \bar{\epsilon}.\overline{(-\mu(p)p)} \quad \text{if } \det(\mu(p)) = -1. \end{aligned}$$

这里，上划线表示路径的反向。

11.12. **端点相近的网格路径具有正行列式**。

引理 11.15. $D(x, 81e)$ 中任何端点相近的路径，其单值化的行列式均为正。

证明。假设 p 的单值化具有负行列式。因此，$p.\epsilon$ 是 $N(B_{E+})$ 中的非平凡同伦环路。因此，$p.\epsilon.p.\epsilon$ 也是，因为 $N(B_{E+})$ 的基本群无挠（它是三维球面的紧致三维子流形）。但是

$$p.\epsilon.p.\epsilon \simeq p.\epsilon.\bar{\epsilon}.\overline{(-\mu(p)p)} \simeq p.\overline{(-\mu(p)p)}.$$

然而，$p.\overline{(-\mu(p)p)}$ 仍位于 $D(x,\ 174)$ 内，而后者是一个网格，因此不包含任何非平凡同伦环路。□

11.13. **具有接近端点的网格中的路径具有平凡单值化**。

引理 11.16。 $D\ (x,\ 81e)$ 中任何具有接近端点的路径都具有平凡单值化。

证明。设 p 是 $D(x, 81e)$ 中一条端点接近且具有非平凡单值化的路径。根据引理 11.15，该单值化具有正行列式，因此是阶为 2 或 4 的旋转。根据假设，p 的端点位于 $N(B_{E+})$ 的同一纤维中。事实上，从 $p(0)$ 到 $p(1)$ 的纤维部分位于 $D(\tilde{x},\ 81e)\ \times [0, m+1)$ 或 $D(\tilde{x}, 81e)\ \times (0, m+1]$ 的像中。我们可以将 p 相对于其端点同伦变形为一条测地线。令 p_2 为从 $p(1)$ 出发的测地线，其长度和方向由 $\mu(p)(p'(0))$ 平移至 $p(1)$ 后给出。于是，p_2 与 p 同行，即它们在投影映射 $N(B_{E+}) \to B_{E+}$ 下具有相同的像。类似地定义 p_3 和 p_4。于是，$p.p_2.p_3.p_4$ 在 $N(B_{E+})$ 的同一纤维中具有不同的端点。然而，$p.p_2.p_3.p_4$ 是 $D(x, 174e)$ 中的同伦平凡环路，尤其是它最终回到起点。这就产生了矛盾。□

命题 *11.13* 的证明。反设存在一条在$D(x,\ 81e)$中的路径 p，其端点相近。令 $\tilde{p}$ 为到 $D(\tilde{x},\ 81e)$的一个提升。令 ϵ 为 $N(B)$中连接 $p(0)$与 $p(1)$的路径。由引理 11.16，$p.\epsilon$ 具有平凡单值化，因此˜可提升为 $N(B)$中的一个环路，并以 $\tilde{p}(0)$为起点。因此，要么 $\tilde{p}(1)$是 $D(\tilde{p}(0)\ 81e)$中的一个点，且严格位于 $\tilde{p}(0)$与$r_{D(\tilde{p}(0),81e)}(\tilde{p}(0))$之间；要么 $\tilde{p}(0)$是 $D(\tilde{p}(1)\ 81e)$中的一个点，且严格位于 $\tilde{p}(1)$与$r_{D(\tilde{p}(1),81e)}(\tilde{p}(1))$之间。这与首次返回映射的定义矛盾。□

˜**11.14. 嵌入在** $N(B_+)$**中的嵌入环带**。现在我们可以在 $N(B_+)$中构造一个嵌入环带 C。构造方法如下。

˜设 $\tilde{\alpha}$ 为 $D(\tilde{x}, 81e)$中从 $\tilde{x}$ 到 $\tilde{x}' = r_{D(\tilde{x},81e)}(\tilde{x})$的测地线。设 β 为一条从 $\tilde{x}$ 出发、长度为 $32e$ 的测地线，它平行于 $D(\tilde{x}, 81e)$的一条边，并且˜与 $\tilde{\alpha}$之间的角度介于 $\pi/2$和 $3\pi/4$之间。设 β' 为用向量 $v_{\tilde{x}}$ 平移˜ ˜ ˜β 后的结果，使其经过 $\tilde{x}'$。β 与˜ ˜ ˜β' 之间的区域 Q 是一个欧几里得平行四边形。按照我们选择 β的方式，Q 位于

$D(\tilde{x}, 81e)$。所有内角都介于 $\pi/4$ 和 $3\pi/4$之间。还需注意，当 $\tilde{\alpha}$ 在 E_+的对合下不变时， Q也同样不变。

两侧 β 和 β' 在 Q中的像相同。因此，我们可以在 Q的这两侧之间插入一个矩形 R，该矩形在 $N(B_{E+})$ 中是垂直的，意思是它是由位于 $N(B_{E+})$ 的纤维中的弧组成的并集。 Q 与 R 的并是一个环带 C。

当 $B_{E+}(\tilde{x}, 256e)$ 下保持不变时，那么 $\tilde{x}$和 $\tilde{x}'$ 是不动点。因此在这种情况下， $\tilde{\alpha}$ 在对合下逐点不变，所以 C 在对合下保持不变。

引理 11.17。 C 嵌入在 $N(B_+)$ 中。

证明。环带 C 由平行四边形 Q 和一个垂直矩形 R组成。 Q与 R 都是嵌入的。因此， C 可能不是嵌入的的唯一情形是：存在 Q 中的一点 z_1 与 R 内部的一点 z_2 在 N中重合（B_{E+}）。设 z_3 为 R 中的一点，它与 z_2 位于同一纤维，并且也位于 Q中。则$r_{\tilde{Q}}$（z_3）是位于 z_3 与 z_2 之间的一点（可能等于 z_2，但不等于 z_3）。因此，$r_{D(z_3,81e)}$（z_3）也位于 z_3 与 z_2之间。所以， E_+ 的严格位于 z_3 与$r_{D(z_3,81e)}$（z_3）之间的点的个数小于 m，即命题11.12中的常数，这是一个矛盾。□

引理 11.18。 C 与其在覆盖群作用下的覆盖变换像不相交，适用于 $N(B_{E+}) \to N(B_{E+})$。

证明。 反设 C 与某个非平凡覆盖变换 g下的像 $g(C)$相交。这个覆盖变换像由 Q 的一个覆盖变换像（Q）以及 R的一个覆盖变换像 g（R）构成。设 z 是 C 中的一点，且为 C 与 $g(C)$的交点。需要考虑几种可能的情况。

先假设 z 位于 $\tilde{Q}$ 和 $g(\tilde{Q})$中。于是 $g^{-1}(z)$位于 $\tilde{Q}$中，并且存在一条路径$\tilde{p}$，它位于 $\tilde{Q}$ 中，从 $g^{-1}(z)$通往 z。这在 $N(B_{E+})$中投影为一个具有非平凡单值化的闭环。然而，这条路径位于 Q的像中，而该像位于 $D(x,\ 81e)$中；此网格中的每个闭环都具有平凡单值化。这就产生了矛盾。

现在假设 z 位于 $\tilde{Q}$ 和 $g(\tilde{Q})$中。令 z_2 为包含z的那条弧的一个端点，其中 z_2 位于 $g(\tilde{Q})$中。因此， $g^{-1}(z_2)$位于 $\tilde{Q}$中。令 $\tilde{p}$ 为 $\tilde{Q}$ 中一条连接z 与 $g^{-1}(z_2)$的测地线。令 p 为 $\tilde{p}$ 在投影映射到 $N(B)$下的像。于是p 是 $D(x,\ 81e)$中的一条端点相近的路径，这与命题 11.13 矛盾。类似的论证也排除了 z 位于 $g(Q)$和 $\mathrm{int}(R)$中的情形。

最后一种情形是 z 位于 $\mathrm{int}(R)$ 且 $g(\mathrm{int}(R))$。然而，如果我们沿着 z 所在的纤维移动它，就能找到一个点 z'，它是 C 与 $g(C)$的交点，并且位于 Q或 $g(Q)$中（或两者皆是）。前面的情形已经排除了这种情况。□

因此， C 在 $N(B_{E+})$ 中投影为一个嵌入环带 C。它要么与其在 $N(B_{E+})$ 的对合下的像不相交，要么在该对合下保持不变。

11.15. **回到环带情形**。在引理 11.8 中，我们证明了以下二者必居其一： $E_+ - N_{1472e}(W)$ 中存在一条长度至多为 $736e$ 的闭测地线，或者 $E_+ - N_{1472e}(W)$ 中存在一个边长为 $512e+1$ 的网格 $D(x,\ 256e)$。到目前为止，我们一直关注第二种情形。不过，现在我们来考虑第一种情形。

设 α 是 $E_+ - N_{1472e}(W)$ 中一条长度至多为 $736e$ 的简单闭测地线，并且 $N_{1472e}(\alpha)$ 在对合下不变，或者与其在对合下的像不相交。

以下是引理 9.9 的一个版本，其中的证明基本相同，故略去。

引理 11.19。设 α 是 $E_+ - N_{1472}(W)$ 中的一条简单闭测地线，其长度不超过 $736e$。又设 E_+ 中包含 α 的连通分支不是绑定权重不超过 $23552e^2$ 的环面。那么对于所有 $r \leq 16e$，$N_r(\alpha)$ 都是以 α 为核心曲线的欧几里得环带。

沿 α 的单值化属于 $SO(2)$，因为 E_+ 是可定向的。还要注意，由于 α 是一条闭测地线，单值化保持与 α 相切的单位向量。因此，沿 α 的单值化实际上是平凡的。因此，E_+ 中 α 的逆像是不相交的若干个 α 的副本之并。令 $\tilde{\alpha}$ 为其中一个连通分支。

令 β 为为条经过的 $\tilde{x}$ 点垂直于 $\tilde{\alpha}$ 的测地线，并从 $\tilde{x}$ 向两个方向各延伸距离 $16e$。令 Q 为沿着 β 切割 $N_{16e}(\tilde{\alpha})$ 后得到的矩形。令 Q 为它在 E_+ 中的像。我们将 Q 中在 E_+ 里由 β 和 β' 识别的边称为。
注意，Q 要么在 $N(B_{E+})$ 的对合下保持不变，要么与其在该对合下的像不相交。

现在我们同时考虑引理 11.8 的两种情况。

11.16. 另一个垂直矩形。以下结果已在[17]的第 9.8 节中证明。

引理 11.20。存在 $\tilde{\alpha}$ 的一个平移像 $\tilde{\gamma}$，它始于 β，终于 β'，并且存在一个映射 $\tilde{\gamma} \times [0, K+1] \to N(B_{E+})$，其中 $K \geq 0$ 为某个整数，且满足以下性质：

(1) 对 $(\tilde{\gamma} - \partial\tilde{\gamma}) \times [0, K+1)$ 的限制是一个嵌入；*(2)* 如果 x_1 和 x_2 是 $\tilde{\gamma}$ 的起点和端点，那么对每个 $x_i \times [0, K+1)$ 的限制都是一个嵌入；*(3)* (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的像重合，当且仅当 $y_1 - y_2$ 是命题 *11.12* 中的整数 m；*(4)* $\tilde{\gamma} \times \{0\}$ 的像是 $\tilde{\gamma}$；*(5)* E_+ 的逆像是 $\tilde{\gamma} \times ([0, K+1] \cap \mathbb{Z})$；*(6)* 对于 $\tilde{\gamma}$ 中的每个点 z，$\{z\} \times [0, K+1]$ 的像是 $N(B_{E+})$ 的某个纤维的子集；*(7)* $\tilde{\gamma} \times [0, K+1)$ 的像与 Q 不相交；*(8)* 在 $\tilde{\gamma}$ 的内部存在一个点 y，使得 $y \times \{K+1\}$ 的像是，等于 Q 中的一个点 y'。

此外，如果 $\tilde{\alpha}$ 在 $N(B_{E+})$ 的对合下保持不变，那么 $\tilde{\gamma}$、y 和 y' 也保持不变。

令 V 为 $\tilde{\gamma} \times [0, K+1]$ 在 $N(B_{E+})$ 中的像。根据构造，其内部与 C 不相交。

引理 11.21。$C \cup V$ 与其覆盖变换像不相交。

证明。</style>假设相反，在某个非平凡的覆盖变换 g 下，$C \cup V$ 的像与 $C \cup V$ 有非空交集。设 z 是交集中的一个点。

$\tilde{}$ $\tilde{}$由引理 11.18 可知， $g(C)\cap C$为空。因此，还剩下三种情况： z 可以位于 $g(C)\cap V$、 $g(V)\ \cap C$ 或 $g(V)\ \cap V$中。在第三种情况下，我们可以沿垂直方向滑动

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}z$ ，直到它位于 $g(C)$或 C中。因此，如果第三种情况成立，那么前两种情况之一也成立。此外，前两种情况本质上相同。$\tilde{}$ $\tilde{}$所以，我们可以假设 $z\in g(C)\ \cap V$。

$\tilde{}$考虑一条水平路径 $\tilde{q}$，它位于 V 中，从 z 出发，沿 $\tilde{\alpha}$ 的方向前进。（参见图 45。）它的像 $g^{-1}(\tilde{q})$ 从 $g^{-1}(z)\in\tilde{C}$ 出发，并沿着 $\tilde{Q}$ 中的一条水平路径前进。由于我们应用了一个非平凡的覆盖变换，这条路径 $g^{-1}(\tilde{q})$受到了 $O(2)$ 中一个非平凡元素的作用。当我们到达 $\tilde{q}$ 的终点时，会到达一个与 $\tilde{q}$ 的起点处于同一纤维的点，而在$\tilde{}$之间，有 m 个 E，恰好位于 $\tilde{q}$ 的起点和终点之间，其中 m 是命题 11.12 中的整数。因此， $g^{-1}(\tilde{q})$ 也有同样的性质。但是 $g^{-1}(z)$ 位于网格 $D(\tilde{x},81e)$ 中。因此，根据命题 11.11， $D(g^{-1}(z)\ 81e)$ 中沿指定横截方向首个与 $g^{-1}(z)$ 处于同一纤维的点，与 $g^{-1}(z)$ 相差一个沿 $\tilde{\alpha}$ 方向的平移。因此， $g^{-1}(\tilde{q})$ 必定与 $\tilde{\alpha}$ 朝同一方向前进。因此， g 必须保持 $\tilde{\alpha}$ 方向以及 $N(B_{E+})$ 上指定的横向定向$\tilde{}$。但这意味着 g 表示 $O(2)$ 中的平凡元素，因此 g 是恒等覆盖变换。这就产生了矛盾。□

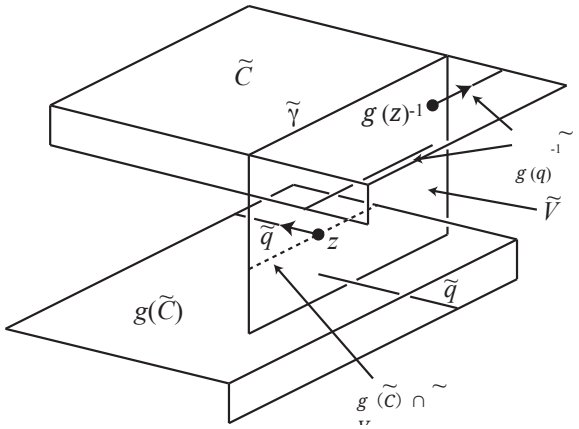

FIGURE 45. 引理 11.21 证明中的一种构造

11.17. () 中的一个嵌入环面 $N(B_+)$。令 γ 为 $\tilde{\gamma}$ 在 Q中的像。令 γ' 为其经过 y' 的平移像。令 δ 为 β 中位于 $\beta\cap\gamma$与 $\beta\cap\gamma'$之间的子集。类似地定义 $\delta'\subset\beta'$。

于是， $\gamma\cup\delta\cup\gamma'\cup\delta'$ 在 $N(B_{E+})$ 中构成一个嵌入平行四边形 Q'。边 δ 和 δ' 在 $N(B_{E+})$ 中沿着相同行程，并在它们之间包含垂直矩形 R 的一部分。因此，它们首尾相接构成一个嵌入环带。

这个环带的附接到这两个边界分支上，便得到 $N(\tilde{B_{E+}})$ 中的一个嵌入环面 T。（见图 46。）

令 σ 为 T 中的一条曲线，它由 γ 的一个平行副本与 R中的一条纤维组成。

这个环面 T 要么与其在 $N(B_{E+})$ 对合下的像不相交，要么在该对合下保持不变。若 T 与其像不相交，则令

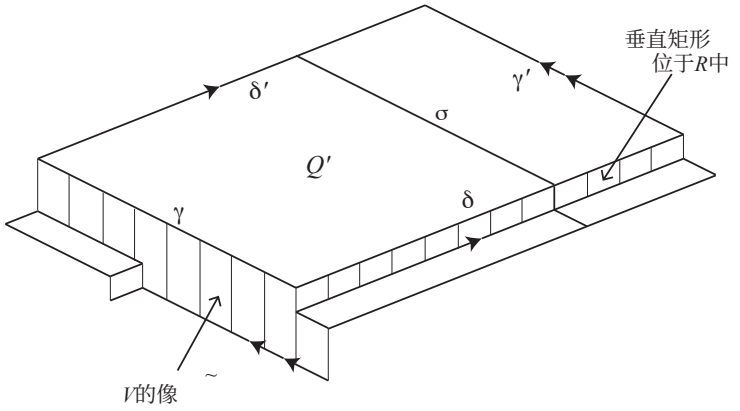

FIGURE 46. 环面 T

T' 为 T 与其像的并集。当 T 在该对合下保持不变时，令$T' = T$。

11.18. **移除直和项** T'。 该环面或环面组 T'是 E_+的一个直和项，这是由于下面的引理，即 [17]中的引理 8.2。

引理 11.22。 设 S_1 和 S_2 是由分支曲面承载的正规曲面。假设在分支曲面的每个片中， S_2 的权重都至少为 S_1的权重。那么， S_1 是 S_2的一个直和项。

在 $\tilde{x}$ 位于网格 $D(\tilde{x},\ 256e)$中的情况下，设 m 为严格位于 $\tilde{x}$ 与 $r_{D(\tilde{x},81e)}(\tilde{x})$ 之间的 E_+ 的层数~。（这是命题 11.12 中的常数。）在 $\tilde{\alpha}$ 为闭测地线的情况下，令 m 为零。

引理 11.23。 $(m+1)T'$ 是 E_+的一个直和项。

证明。 当 $m = 0$ 时，这是引理 11.22 的推论。因此，假设$\tilde{x}$ 位于网格 $D(\tilde{x},\ 256e)$ 中。根据引理 11.22，只需证明 $(m+1)T'$由分支曲面 $N(B_{E+})$ 承载，并且在每个片中，~ E_+ 的权重至少与 $(m+1)T'$的权重相同。对于 Q 中的每个点 z， $r_{D(z,81e)}(z)$ 和 ~ ~z 都位于 $N(B_{E+})$ 的同一个片中。如果 E_+ 的任何部分位于它们之间，那么该部分~也位于同一个片中。正如利用 Q 构造环面 T' 一样，因此也可以利用E_+ 的这些部分构造环面 $(m+1)T'$，而后者是 E_+的一个直和项。（见图 47。）□

设 $\overline{E_+}$ 为 B_{E+} 所承载的、满足 $E_+ = E_+ + (m+1)T'$ 的曲面。

11.19. **沿 T' 的德恩扭转**。

命题 11.24. 曲面 E_+ 由 E_+ 沿 $\overline{T'}$进行若干次德恩扭转而得到。

我们将需要以下内容。

引理 11.25。 设S 是由分支曲面 B承载的曲面， T 是由 B承载的环面。假设 $S \cap T$ 由 k 条在 T上本质的曲线组成，且求和方向均沿 T一致定向。那么

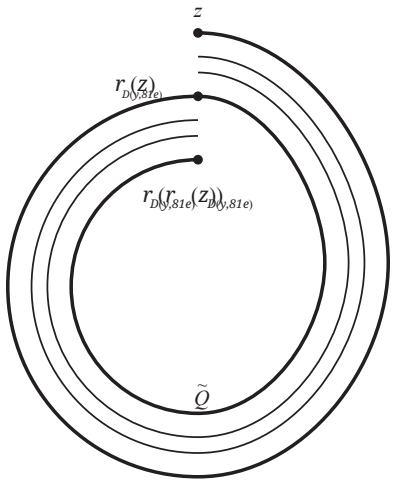

FIGURE 47. 其他部分可能位于 E_+ 与 z 之间，但它们仍与 $r_{D(z,81e)}$ 平行（z）

对于 k的任意倍数 n， $\overline{S}+nT$ 都可以通过绕 T进行若干次德恩扭转从 S 得到。

证明。 考虑一条位于 T 上、与 $S\cap T$ 中每条曲线恰好相交一次的简单闭曲线。那么在这条曲线的一个正则邻域内，曲面 S 和 T 的位置如图 48 所示。显然，当 n 是$-k$ 的倍数时， $S+nT$ 可由 S 通过绕 T n/k 德恩扭转 $\square$ 次得到。

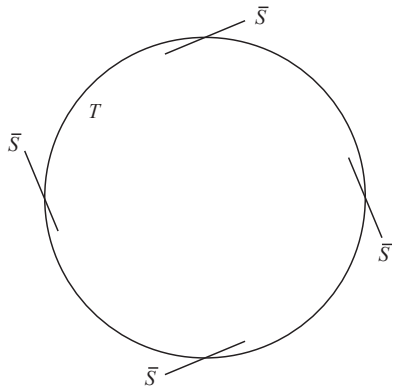

FIGURE 48. 情形 $k=4$

因此，要证明命题 11.24，只需证明 $E_+\cap T'$ 由 T' 中的本质曲线构成，并且对于 T' 的每个连通分支 T， $|E_+\cap T|$ 是 $m+1$ 的倍数。下面的引理将用于处理这些曲线的数量。

引理 11.26。 设 ζ' 是环面 T上的一族平行的本质简单闭曲线。设 ζ 是 T 上的一条简单闭曲线，其斜率不同于 ζ' 的斜率，并且与 ζ' 的每个连通分支相交于符号相同的点。则 $|\zeta'|$ 整除$|\zeta\cap\zeta'|$。

证明。 </style}假设与 ζ' 的每个连通分支相交于符号相同的点，这意味着此类交点的数量恰好等于两斜率交集的模。因此， $|\zeta \cap \zeta'|$ 正是 $|\zeta'|$ 乘以这个交数。□

命题 *11.24* 的证明。 令 σ 为第 11.17 节中定义的环面 T 上的曲线。我们看到， σ 与 $E_+ \cap T$ 之间的所有交点符号相同，并且与正规曲面求和的方向一致。因此， $\zeta = \sigma$和$\zeta' = E_+ \cap T$ 满足引理 11.26 的假设。于是，对 T'的每个连通分支 T， $|E_+ \cap T|$都将 $|\sigma \cap E_+|$分成两部分，即 $m+1$。因此，根据引理 11.25， E_+可由 E_+ 绕 T'进行若干次德恩扭转得到。□

11.20. T 与其像不相交的情形。现在假设 T 与其在 $N(B_{E_+})$的对合下的像不相交。因此，它在 $N(B_E)$中限制为一个环面，我们也将其记作 T。它与M的边界不相交。命题 11.24 中定义的德恩扭转限制为 M中绕T的德恩扭转。令 E 为从 E中去掉$(m+1)$个 T加项后所得的曲面，并将其视为由 B_E承载的曲面。于是， E 可由 E 对 T施加此德恩扭转的某个幂次 h得到。令 S_2'为曲面$(S' \setminus\setminus N(B_E)) \cup E$。于是， S_2' 可由 S' 施加 h得到。曲面 $S \setminus\setminus S'$ 可能与 $N(B)$相交，但在T附近，它与 S'平行延伸。因此，我们也可以通过对 S 施加h得到曲面 S_2 。类似地，我们可以得到三维流形 $h(N')$和把手结构 $h(\mathcal{H}')$。因此，$(N, X, h(Y)\ P \cap N, \mathcal{H}, h(S))$和$(h(N')\ X, h(Y')\ P \cap N', h(\mathcal{H}')\ h(S'))$是嵌套可容许包络。（见图 49。）注意，绑定权重 $w_\beta(h(S'))$严格小于绑定权重 $w_\beta(S')$，因为我们去掉了$(m+1)w_\beta(T)$，其权重为正。这与定理 11.3 的一个假设矛盾。因此，该情形下定理得证。

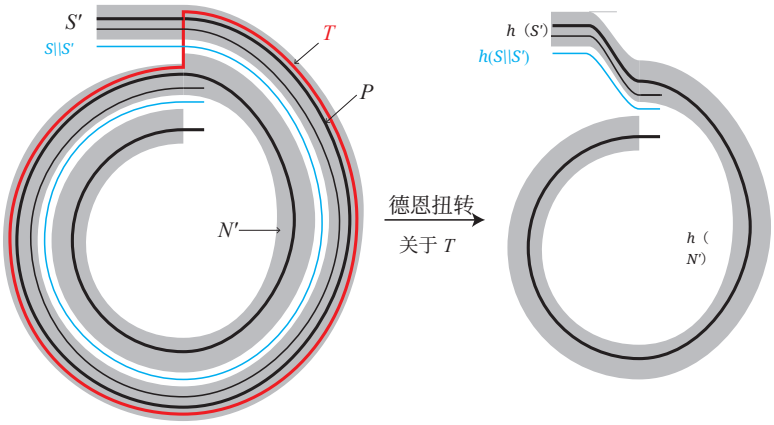

FIGURE 49. 沿环面 T in M进行德恩扭转

11.21. **当 T 在对合下保持不变时**。在这种情况下， T限制为 $N(B_E)$ 中的一个环带 A 。关于 T 的德恩扭转限制为关于 A 的德恩扭转。由于我们沿着 $\partial M' \cap N(B)$ 将 $N(B_E)$ 双重化，因此这个环带 A的边界位于 $\partial M'$ 中。

当 T 与其在对合下的像不相交时， $S \setminus\setminus S'$ 可能有部分位于 E 各层之间、靠近 T的地方。不过，在当前情况下，

以下原因说明这种情况不会发生。如果 $S\backslash\backslash S'$ 有任何部分位于 E 各层之间、靠近 T的地方，那么它们就会与 E平行，因此必定与 $\partial M'$相交。考虑这样一个交点。该点的上方和下方会有 S' 的瓦片，且它们属于相同的近似类型。然而，这些瓦片与 $\partial M'$相交，因此实际上必定在 N'中平行，所以它们之间事实上不可能有 $S\backslash\backslash S'$ 。

如果 ∂A 的某个连通分支不位于 ∂M中，那么我们可以通过在楔形区域$N\backslash\backslash N'$中附加一个领圈，将 A 扩展为一个正常嵌入于 M 中的环带 A 。这个环带 A位于 N中，并由分支曲面承载，而N 是该分支曲面的加厚。绕 A 的德恩扭转可扩展为绕 A的德恩扭转 h 。同样，$(N, X, h(Y)\ P \cap N, \mathcal{H}, h(S))$ 和 $(h(N')\ X, h(Y')\ P \cap N', h(\mathcal{H}')\ h(S'))$ 是嵌套可容许包络。同样，绑定权重 $w_\beta(h(S'))$ 严格小于绑定权重 $w_\beta(S')$，因为我们移除了 $(m+1)w_\beta(A)$，而它是正的。同样，这就证明了此情形下的定理 11.3。

12. The thin part of the surface

在第10.12节中，定义了 S' 的割点。这些是 S'的非流形点。文中给出了对 S'的修改，但重要的是，这些修改必须在远离割点的地方进行。因此，第10.12节中定义了曲面 S'_{cut} ，它是通过沿 S' 的割点切割而得到的。 S'_{cut} 中割点留下的部分并未被忽略。我们可以将第 10 节中的修改视为应用于 S'_{cut}。稍后我们将看到，可以不断应用这些修改，直到 S'_{cut} 的非双边形连通分支的绑定权重足够小，也就是说，其上界为链环初始弧指标的某个多项式函数。然而，这并不意味着 S' 的绑定权重也足够小，因为 S' 中可能有些部分由一长串首尾相连的双边形组成。我们称这些为 S'的“薄”部分。本节将说明如何修改这些薄部分，使它们的绑定权重也足够小。

12.1. 薄部分。 曲面的薄部分 S' 由 S'_{cut}的双边形分支的并集，以及 S' 中与两个双边形且不与其他瓦片关联的割点组成。见图50。我们用 S'_{thin}表示薄部分。

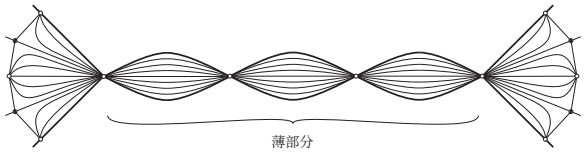

Figure 50. S'的薄部分

回想一下， S'正常嵌入在流形 N'中。令 M'由 N'附加 $M\backslash\backslash N$得到。因此，M'由 M插入楔形体得到；不过，我们假设若插入楔形体会产生割点，则不会插入完整的楔形体，以保持 M' 为三维流形。

以下是本节的主要结果。

命题 12.1. 假设包含 S' 的 M' 连通分支不是以紧曲面为底、且 P 作为一组本质简单闭曲线位于垂直边界中的 I-丛。另假设，如果包含

S' 有任何 *JSJ* 环带，那么 S' 就是这些 *JSJ* 环带。设 e_{bigon} 是 S' 中二边形的 $\mathcal{H}'$-平行性类型数量的一个上界。存在 S' 的一种图案同痕，将其变为一个近似可容许曲面 S''''，其绑定权重至多为

$$(2e_{bigon} + w_\beta(\partial M') + 1)\, w_\beta(S' \backslash\backslash S'_{thin}).$$

注记 12.2。这个命题涉及 S' 中二边形的 $\mathcal{H}'$-平行类型数。该数至多为 S' 中瓦片的近似星形类型数。这是因为，当两个二边形具有相同的近似星形类型时，它们在 $\mathcal{H}'$ 中实际上是平行的，因为它们的顶点位于 $\partial M'$ 上。

12.2. **薄丛**。薄丛 $\mathcal{B}$ 是 M' 的一个三维子流形，构造如下。取 S' 薄部分的一个正则邻域。在 S'_{thin} 中任意两个平行的双边形瓦片之间，插入它们之间的空间。在 S' 薄部分中任意两个平行的顶点之间，插入它们之间的空间。基于以下原因，这是一个以曲面为底的 I-丛。S'_{thin} 的每个双边形瓦片都是一个积 $I \times I$，其中第二个因子由 θ 值给出。S' 薄部分中每个顶点的正则邻域仍然是一个积 $I \times I$；为此，需要适当扩大该顶点，使曲面在 M' 中正常嵌入。对这些双边形瓦片和顶点取正则邻域后，所得结构仍是一个 I-丛；将它们之间的空间附加进去后也依然如此。

12.3. **环带简化**。我们现在描述对 M'的一种修改。假设存在一个干净环带 A 正常嵌入于 M'中。再假设 $\partial M'$ 中存在一个干净环带 A'，使得 $\partial A = \partial A'$。假定 $A \cup A'$ 界定一个三维流形 G，使得

(1) 要么 G 是 A 与 A'之间的乘积区域，要么 G 位于 M'中的一个三维球内；(2) G与薄丛 $\mathcal{B}$ 的交集是 $\mathcal{B}$的若干连通分支之并；(3) A是 $\mathcal{B}$的一个垂直边界分支。

从 M' 中去掉 G 和 A' 的内部，称为一次环带简化。

注意，环带简化可以通过部分层次结构中较早曲面的一次同痕来实现，如下所述。由于 A' 与边界模式不相交，它位于部分层次结构的某个曲面 S_i 之内。若我们将 S_i 替换为曲面$(S_i \backslash\backslash A') \cup A$，则这个新曲面与 S_i同痕。A的所有顶点都是 A'的顶点，因此这不会增加层次结构的绑定权重。该曲面的同痕具有从 M'中去掉 G 的效果。然而，G 被添加到 S_i另一侧的三维流形部分中。注意，在构造部分层次结构时，我们始终确保它是充分分离的，因而保证在 A'的两侧存在 M'的不同连通分支。因此，每当我们对包含 S'的M' 的连通分支执行一次环带简化时，我们就减少了M'的该连通分支中 $\mathcal{B}$ 的连通分支数目。

那么，假设包含 S' 的 M' 分量无法再进行环带简化。

12.4. **广义薄丛**。利用与 [16], 中所引入的论证类似的论证，我们现在将 $\mathcal{B}$ 扩张为一个更大的 I-丛 $\mathcal{B}_+$，我们称之为广义薄丛。在整个扩张过程中，$\mathcal{B}_+$ 将具有以下性质：

(1) $\mathcal{B}_+$ 是紧曲面上的一个 I-丛；(2) $\mathcal{B}_+$ 的水平边界是 $\mathcal{B}_+ \cap \partial M'$，并且是干净的；(3) $\mathcal{B}_+$ 的垂直边界是薄丛的若干垂直边界分支的并。

命题 12.3. 假设 $\mathcal{B}_+$ 满足上述性质且极大。另假设包含 S' 的 M' 连通分支不允许进行环带简化。那么 $\mathcal{B}_+$ 的每个连通分支要么是以圆盘为底的 I-丛，要么具有不可压缩垂直边界。

证明。令 $\mathcal{B}'_+$ 为 $\mathcal{B}_+$ 中不是以圆盘为底的 I-丛的连通分支之并。我们将证明 $\mathcal{B}'_+$ 的垂直边界不可压缩。

反设它有一个压缩圆盘 D。令 A 为包含 ∂D的垂直边界分支。根据 $\mathcal{B}'_+$的定义， D 并非完全位于 $\mathcal{B}'_+$中。其内部与 $\mathcal{B}'_+$ 不相交（根据压缩圆盘的定义），但可能与 $\mathcal{B}_+ - \mathcal{B}'_+$相交。

现在， A 沿着 D 压缩，得到两个正常嵌入于 M'中的圆盘 D'_1 和 D'_2 。它们的边界都是干净的。由于（M'， P）不可约且边界不可约，因此 D'_1和 D'_2分别通过三维球 B_1和 B_2，与 $\partial M' - P$中的圆盘 D_1和 D_2平行。需要考虑两种情况： B_1 和 B_2 不相交，以及它们彼此嵌套。

先假设它们不相交。那么，由于 M'的不可约性， $A \cup D_1 \cup D_2$ 围成一个三维球B。由于 D 的内部与 $\mathcal{B}'_+$不相交，这个球B 不包含在 $\mathcal{B}'_+$中。因此，我们可以将 $\mathcal{B}'_+$ 的 I丛结构延伸到 B上，这与 $\mathcal{B}_+$的极大性矛盾。

现在假设 B_1 和 B_2 彼此嵌套；不妨设 B_2 位于 B_1内。令 A'为 $D_1 \backslash\backslash D_2$。那么， A' 是 $\partial M'$ 中的一个干净环带，且满足 $\partial A = \partial A'$。令 G 为由 $A \cup A'$围成的三维流形。它位于三维球 B_1内。因此， M' 可以进行环带简化，这就产生了矛盾。

因此， $\mathcal{B}'_+$ 的垂直边界是不可压缩的。 □

命题 *12.1* 的证明。 $\partial_v \mathcal{B}_+$ 是广义薄丛的垂直边界。它是 $\mathcal{B}$垂直边界中若干连通分支的并。

我们断言， $\partial_v \mathcal{B}_+$ 的绑定权重至多为 $2e_{\text{bigon}}$，其中 e_{bigon} 是 S'中 $\mathcal{H}'$-平行性类型的双边形数量的一个上界。它由 S'的若干双边形瓦片组成，且每个这样的瓦片都是其 $\mathcal{H}'$-平行性类别中最外层的瓦片。该断言显然成立。

我们将证明，经过图案同痕后， S' 与 $\mathcal{B}_+$ 相交所得的圆盘相对于 $\mathcal{B}_+$上的 I-丛结构是垂直的。此外，这确实会增加曲面在 $\mathcal{B}_+$ 之外的绑定权重，而且不会增加 $S' \cap \partial_v \mathcal{B}_+$的连通分支数。首先注意到，由于 $\mathcal{B}_+$ 的垂直边界等于 $\mathcal{B}$的若干垂直边界分支之并，且 S' 与 $\mathcal{B}$相交所得的是双边形，我们可以对 S' 做一个小的同痕，使其随后与 $\partial_v \mathcal{B}_+$相交所得的是竖直弧。现在假设 $S' \cap \mathcal{B}_+$ 有一个边界压缩圆盘 D，它与 $\partial \mathcal{B}_+$ 相交于 $\partial_h \mathcal{B}_+$。由于 S' 是边界不可压缩的（相对于图案），弧 $S' \cap D$ 在 S'中隔出一个干净圆盘。这个圆盘与 D 一起隔出一个与图案不相交的球，因此我们可以将 S' 穿过这个球做同痕。这会减少 $S' \cap \partial_v \mathcal{B}_+$的连通分支数，也不会增加 S' 在 $\mathcal{B}_+$之外的绑定权重。还要注意， $S' \cap \mathcal{B}_+$ 是不可压缩的。假设它有一个压缩圆盘 D。由于 S' 不可压缩， ∂D 围成

一个圆盘 D'，位于 S'中。它不与 M'的边界相交，因此也不与$\partial_v\mathcal{B}_+$相交。但这样一来，它必定位于 $\mathcal{B}_+$中，这就产生了矛盾，从而证明了这一断言。因此，$S' \cap \mathcal{B}_+$ 现在不可压缩，且不存在与 $\partial\mathcal{B}_+$ 相交于 $\partial_h\mathcal{B}_+$的边界压缩圆盘。除同痕外，保持 $\partial_h\mathcal{B}_+$和 $\partial_v\mathcal{B}_+$不变的这类曲面在 $\mathcal{B}_+$中只能是垂直或水平的。然而，由于 $S' \cap \partial_v\mathcal{B}_+$ 是垂直的，我们便可推出 $S' \cap \mathcal{B}_+$ 必定是垂直的，正如所需。

令 $\mathcal{B}_+^a$ 为 $\mathcal{B}_+$ 中那些在环带上为 I 丛、且两个垂直边界分支在 M' 中均为非本质的连通分支。现在我们将 S' 同痕变形，使其避开 $\mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_+^a$。首先处理 $\mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_+^a$ 中那些在圆盘上为 I 丛的连通分支。在任意这样的 $D^2 \times I$ 连通分支中，它与 S' 的交集同痕于 $\alpha \times I$，其中 α 是一组正常嵌入 D^2 的弧。选取一条这样的最外层弧，并用一张平行于 $\partial_v\mathcal{B}_+$ 某个子集的圆盘替换它。重复这一过程，最终我们将 S' 同痕变形，使其避开 $\mathcal{B}_+$ 中的 $D^2 \times I$ 连通分支。

现在考虑 $\mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_+^a$ 中那些不是在圆盘上为 I 丛的连通分支。根据命题 12.3，它们的垂直边界是不可压缩环带的并。$\mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_+^a$ 的一个连通分支 B 不可能所有垂直边界分支在 M' 中都是非本质的，原因如下。如果其中任何一个是非本质的，那么它就平行于 $\partial M'$ 中的一个环带，而该环带与图案的交集是核心曲线（可能为空）的并。若这些环带与垂直边界之间的所有乘积区域都不与 B 的内部相交，那么 M' 的这个连通分支就是一个 I 丛，且边界模式与每个垂直边界分支的交集都是平行核心曲线的集合（可能为空），这与假设矛盾。另一方面，若其中一个乘积区域包含 B，那么 $\partial_v B$ 是环带的本质子曲面，因此它是若干环带的并。这意味着 B 必须是在环带上的 I 丛，这就产生了矛盾。因此，若 $\mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_+^a$ 非空，我们便可推知 M' 含有一个干净本质环带。在这种情况下，我们假设 S' 由 JSJ 环带构成。因此，S' 可以通过模式同位避开 $\mathcal{B}_+$ 的不可压缩垂直边界。于是，S' 与该垂直边界之间存在一个乘积区域。我们可以让 S' 通过模式同位穿过这个乘积区域，使其一部分与垂直边界的某个子集平行。这个乘积区域可能不在 $\mathcal{B}_+$ 中，此时 S' 的新部分位于 $\mathcal{B}_+$ 中。不过，S' 与 $\mathcal{B}_+$ 的交集仍然是垂直圆盘，或者是与 $\mathcal{B}_+$ 某些垂直边界分支平行的环带。S' 仍然与 $\mathcal{B}_+$ 中那些在 I 上为丛的圆盘连通分支不相交。因此，我们可以重复这一过程，直到 S' 与 $\mathcal{B}_+$ 的垂直边界不相交为止。如果 S' 的任何连通分支与 $\mathcal{B}_+$ 的某个垂直边界分支平行，就可以通过模式同位使其避开 $\mathcal{B}_+$。

在这一过程结束时，所得曲面 S''' 与 $\mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_+^a$不相交。在 $\mathcal{B}_+^a$的每个 B^a 连通分支中，曲面都是垂直的。如果某个连通分支 S''' 在 B_a中是非本质的，我们可以将其同痕移出 B_a，使其与垂直边界的某个子集平行。剩余的 $S''' \cap B_a$ 本质分支可以调整，使其与 $\partial_h B_a$ 中的每个顶点至多相交一次。所得曲面与原曲面相差一个同痕，以及绕 $\partial_v B_a$的某个边界分支作若干次德恩扭转。此德恩扭转在 M'上模式同痕于恒等映射。

$S'''\backslash\backslash S'$ 中的每个连通分支都与$\mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_+^a$ 中的某个垂直子集平行。因此，其绑定权重至多为 $2e_{\text{bigon}}$。每个这样的连通分支都始于并终于 $S'\backslash\backslash S'_{\text{thin}}$ 的一个顶点，且该顶点不在其薄部分中。因此，

$S'''\backslash\backslash S'$ 在 $\mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_+^a$ 中的总绑定权重至多为 $2e_{\text{bigon}}\, w_\beta(S'\backslash\backslash S'_{\text{thin}})$。在$\mathcal{B}_+^a$中，$S'''\backslash\backslash S'$ 的每个连通分支同样始于并终于 $S'\backslash\backslash S'_{\text{thin}}$ 的一个顶点，且该顶点不在其薄部分中。因此，这些连通分支的绑定权重至多为$w_\beta(\partial M')\ w_\beta(S'\backslash\backslash S'_{\text{thin}})$。 S''' 的其余部分是 $S'\backslash\backslash S'_{\text{thin}}$，因此我们得到了 S'''的绑定权重所需的上界。□

13. The Euler characteristic argument

定理 13.1。 设(M, P) 是一个带边界模式的紧致可定向不可约边界不可约三维流形。假设 M 是 S^3 的一个子集，其中 ∂M 采用替代可容许形式， P 采用弧表示。设 S 是 M中一个处于广义容许形式的适当嵌入曲面。设$(N, X, Y, P\cap N, \mathcal{H}, S)$ 和$(N', X, Y', P\cap N', \mathcal{H}', S')$ 是嵌套可容许包络。假设不存在如定理 *11.3* 中所述的同胚 h 。设 e 为 S'的瓦片的近似星形类型数。将 S' 沿其割点切割，再舍弃所有双边形瓦片，得到 $S'\setminus S'_{\text{thin}}$ 。将 S'_{thin} 中位于 E 内且绑定权重不超过 $23552e^2$的所有环面或环带分支舍弃，得到 S'' 。设 S_+ 是 S''的双重，它继承了一个奇异叶状结构。则 S_+ 中价不超过 *3* 的非切割顶点数至少为

$$\frac{w_\beta(S'')}{31\pi(2392e)^2} + \frac{72}{31}\chi(S) - \frac{5}{31}|S\cap P|.$$

证明。 回忆一下，切割调整欧拉示性数 χ_c 在第10.12节中定义，并且 $\chi_c(S'') = \chi_c(S'\setminus S'_{\text{thin}}) = \chi_c(S'_{\text{cut}}) = \chi(S')$。另定义 S_+ 的切割调整欧拉示性数 $\chi_c(S_+)$为 $\chi(S_+)$减去其割点数。于是 $\chi_c(S_+) = 2\chi_c(S'') = 2\chi(S')$。注意， S' 与 S同胚，外加若干干净圆盘（如果有），因此 $\chi(S') \geq \chi(S)$。在 S_+ 上构造一个胞腔复形，规定 S_+ 的每个顶点都是一个0-胞腔，每个广义鞍点也是一个0-胞腔。每条分界线都是一个1-胞腔。每个瓦片都是一个2-胞腔。令 E 和 F 分别为该胞腔复形的边和面。令 C 为 S_+的割点。由于顶点 V和广义鞍点 X 构成了该复形的0-胞腔，因此显然

$$|V| + |X| - |E| + |F| - |C| = \chi_c(S_+) \geq 2\chi(S).$$

由于 S_+ 的每个瓦片在其边界上都有四条分离曲线， $2|E| = 4|F|$，因此 $|E| = 2|F|$。每条边都从一个顶点延伸到一个广义鞍点，因此对 $d(v)/2 + d(x)/2$ 贡献 1，其中某个顶点为 v，广义鞍点为 x，其价为 d。所以

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d(v) + \frac{1}{2}\sum_{x\in X} d(x).$$

因此，

$$\begin{aligned} 2\chi(S) &\leq |V| + |X| - |E| + |F| - |C| \\ &= |V| + |X| - |E|/2 - |C| \\ &= \sum_{v\in V}\left(1 - \frac{d(v)}{4}\right) + \sum_{x\in X}\left(1 - \frac{d(x)}{4}\right) - |C|. \end{aligned}$$

现在，我们将 S_+ 中顶点 v 的切割调整价数 定义为

$$d_c(v) = \begin{cases} d(v) + 4 & \text{if } v \text{ is a cut vertex} \\ d(v) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

So,

$$2\chi(S) \leq \sum_{v\in V}\left(1-\frac{d_c(v)}{4}\right)+\sum_{x\in X}\left(1-\frac{d(x)}{4}\right).$$

对于每个整数 $k \geq 2$，令 v_k 表示 S_+ 中切割调整价数为 k 的顶点数。那么

$$3v_1+2v_2+v_3=\sum_{\substack{v\in V\\ d_c(v)<4}}(4-d_c(v)) \geq 8\chi(S)+\sum_{\substack{v\in V\\ d_c(v)>4}}(d_c(v)-4)+\sum_{x\in X}(d(x)-4).$$

注意

$$\sum_{\substack{v\in V\\ d_c(v)>4}}(d_c(v)-4)=\sum_{k>4}\sum_{\substack{v\in V\\ d_c(v)=k}}(d_c(v)-4)=\sum_{k>4}v_k(k-4) \geq \frac{1}{5}\sum_{k>4}kv_k.$$

同样，由于每个广义鞍点的价都是至少为 4 的偶整数，

$$\sum_{x\in X}(d(x)-4) \geq \frac{1}{3}\sum_{\substack{x\in X\\ d(x)\neq 4}}d(x).$$

So,

$$3v_1+2v_2+v_3 \geq \left(\frac{1}{5}\sum_{k>4}kv_k+\frac{1}{3}\sum_{\substack{x\in X\\ d(x)\neq 4}}d(x)\right)+8\chi(S).$$

特别是，

$$3v_1+2v_2+v_3 \geq \frac{1}{5}\sum_{k>4}kv_k+8\chi(S) \geq \sum_{k>4}v_k+8\chi(S), \tag{1}$$

and

$$3v_1+2v_2+v_3 \geq \frac{1}{3}\sum_{\substack{x\in X\\ d(x)\neq 4}}d(x)+8\chi(S).$$

现在我们希望根据非欧几里得鞍点和顶点的价，对 $\deg(S_+ \setminus E_+)$ 给出一个上界。令 $v_4^{E_+}$ 为 E_+ 内部的 4 价非切割顶点的数量。这些位于 E_+ 内部的顶点各自为 E_+ 的面积贡献 1，因此由引理 11.1 和定理 11.3 可得，

$$v_4^{E_+} \leq \pi(2392e)^2\deg(S_+ \setminus E_+).$$

其余的 4 价非切割顶点位于 S_+ 中 $S\cap P$ 的副本内，因此 e

$$v_4 \leq v_4^{E_+}+|S\cap P|.$$

$S_+ \setminus E_+$ 中的每个点都是一个非鞍点的广义鞍点、一个切割调整价数不等于 4 的顶点，或一个位于 $S\cap P$ 中且切割调整价数为 4 的点。

因此，我们推得

$$\begin{aligned}
&\deg(S_+ \setminus E_+)\\
&\le 4|S\cap P| + \sum_{k\neq 4} k v_k + \sum_{\substack{x\in X\\ d(x)\neq 4}} d(x)\\
&\le 4|S\cap P| + 3v_1 + 2v_2 + v_3 + \sum_{k>4} k v_k + \sum_{\substack{x\in X\\ d(x)\neq 4}} d(x)\\
&\le 4|S\cap P| + 3v_1 + 2v_2 + v_3 + 15v_1 + 10v_2 + 5v_3 - 40\chi(S) + 9v_1 + 6v_2 + 3v_3 - 24\chi(S).
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
27v_1 + 18v_2 + 9v_3 &\ge \deg(S_+ \setminus E_+) + 64\chi(S) - 4|S\cap P|\\
&\ge \frac{v_4^{E_+}}{\pi(2392e)^2} + 64\chi(S) - 4|S\cap P| \qquad (2)\\
&\ge \frac{v_4}{\pi(2392e)^2} + 64\chi(S) - 5|S\cap P|.
\end{aligned}$$

将 (1) 与 (2) 相加，得到

$$31v_1 + 21v_2 + 11v_3 \ge \frac{v_4}{\pi(2392e)^2} + \sum_{k\neq 4} v_k + 72\chi(S) - 5|S\cap P|.$$

因此，

$$31v_1 + 21v_2 + 11v_3 \ge \frac{|V|}{\pi(2392e)^2} + 72\chi(S) - 5|S\cap P|.$$

最后注意， S'' 中的每个顶点都会对应于 V中的一个或两个顶点，而 V 中的每个顶点都是以这种方式得到的。因此，

$$w_\beta(S'') \le |V| \le 2w_\beta(S'').$$

因此， S_+ 中价至多为 3 的非切割顶点至少有

$$\frac{w_\beta(S'')}{31\pi(2392e)^2} + \frac{72}{31}\chi(S) - \frac{5}{31}|S\cap P|.$$

□

14. Modifications in the case of a broken section

在第 3 节所述的层次结构中，最终曲面可能是一个破碎截面。回想一下，这种情况下，部分层次结构的外部由若干三维球和带有干净经线的实心环面组成。这些实心环面拼接在一起形成一个圆丛。任意两个这样的实心环面的交集都是由圆纤维并成的若干环带。任意三个这样的实心环面的交集是有限多个纤维的并。令 M 表示该圆丛，令 A 表示这些环带，并令 C 表示与三个实心环面相交的纤维以及与 ∂M 和两个实心环面相交的纤维的并。破碎截面由 M 的一个截面在 $M\backslash\backslash A$的每个连通分支中稍作扰动后得到。因此，在 $M\backslash\backslash A$的每个连通分支中，它都是一个子午圆盘，且这些圆盘彼此不相交。令 P 表示 M的边界模式。

在本节中，我们将介绍先前论证所需的细微修改，以处理断裂截面。

M 的一些连通分支采用与其他分支不同的方式处理。令 M_{st} 为 M 的实心环面分支之并，并令 M_{nst} 为其余连通分支之并。

14.1. **把手结构** $\mathcal{K}$。我们正在考虑这样一种情形：层次结构中倒数第二个流形是 $M\backslash\backslash A$，外加若干个三维球。与之前一样，我们为 K 的外部构造多面体分解 Δ，其中部分层次结构 H 是一个子复形。该分解同样塌缩为三角剖分 $\mathcal{T}$。这将限制为 M 的三角剖分 $\mathcal{T}_M$。环带 A 在 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}_M$ 中是单纯的。ˆ 如同第 6.5 节，我们将 $\mathcal{T}_M$ 扩大为 Δ_M，并令 $\mathcal{K}$ 为 M 的对偶把手结构。由于 A 在 $\mathcal{T}_M$ 中是单纯的，它自然地与 $\mathcal{K}$ 中的 1-柄、2-柄和 3-柄相交。特别地，对于每个 1-柄，A 要么与其不相交，要么 A 与该 1-柄相交于一个余核。

14.2. **不是实心环面的连通分支**。目前，我们聚焦于M_{nst}。

引理 14.1。 $\partial M_{nst}\backslash\backslash P$ 的每个连通分支都是一个圆盘。

证明。 $M\backslash\backslash A$ 的每个连通分支都是一个实心环面，其边界中有一个干净的纵向环带。因此， $\partial M_{\mathrm{nst}}\backslash\backslash P$ 由圆盘和环带组成，其中环带是纤维的并集。所以，如果 $\partial M_{\mathrm{nst}}\backslash\backslash P$ 的某个连通分支是环带，那么它位于$\partial N(K)$中，因为否则它将与另一个实心环面连通分支关联，从而会位于 A 而不是 $\partial M_{\mathrm{nst}}$中。因此，在 M_{nst} 中有一个正常嵌入的不可压缩干净环带A'，它不平行于 $\partial M_{\mathrm{nst}}$中的干净环带。 A' 的一条核心曲线是圆丛的一条纤维，因此在 K的外部中是 π_1-单射的。所以， A' 在 K的外部中是不可压缩的。它与 K的外部的 JSJ 环面不相交，因为我们在部分层次结构的较早步骤中沿这些环面进行了切割；它也不位于塞弗特块中，因为部分层次结构已将这些块分解为实心环面。因此， A' 在 K的外部中是边界平行的。考虑 A' 与 $\partial N(K)$中相关环带之间的乘积区域。部分层次结构中第一个与该区域相交的曲面必定是非本质的，这与层次结构的构造相矛盾。该矛盾证明了此引理。□

14.3. **分支曲面** B **及其自然把手结构**。根据命题 2.23， M_{nst} 的某个截面 S 可以通过保持 A不变的同痕，进行图案同痕，使其成为 $\mathcal{T}_M$中的弱基本曲面。此外，该曲面与 P 的交次数尽可能少；在所有此类曲面中，它的扩展权重最小。与第 8.5 节一样，构造分支曲面 B，它为 S的每种瓦片类型各有一个片。环带 A 与 $N(B)$ 的交是纤维的并。令 $\mathcal{H}$表示 $N(B)$ 上的自然把手结构。

14.4. $\partial S\cap M_{\mathbf{nst}}$**的弧指标**。

引理 14.2。 $\partial S\cap M_{nst}$的弧指标至多为 $|S\cap P|96w\left(w-\sum_{i=1}^{n}\chi\left(S_i\right)\right)$，其中 w 是 S之前的部分层次结构的绑定权重。

证明。 $\partial S\cap M_{\mathrm{nst}}$ 中的曲线被 P切分成若干弧。每条这样的弧都位于 $\partial M_{\mathrm{nst}}\backslash\backslash P$ 的一个圆盘分支内。由于 S 在图案同痕意义下具有最小扩展权重， $\partial S\cap M_{\mathrm{nst}}$ 的每条弧与 $\mathcal{T}_M$ 的每条边至多相交一次。因此， $\mathcal{T}_M$ 的边数至多为 $96w(w-\sum_{i=1}^{n}\chi(S_i))$，由引理 6.3 可知。□

14.5. **新的边界模式**。 定义 P' 为 $\partial M_{\mathrm{nst}}$中部分层次结构各瓦片的边界。于是，$|S \cap P'|$ 至多为 $\partial S \cap M_{\mathrm{nst}}$的弧指标，而根据引理 14.2，该指标有上界。

14.6. **由低价内部顶点引起的修改**。在第9节中，我们对部分层次结构中的下一个曲面进行了各种修改。在这种情况下，我们对截面 S 进行这些修改。注意，我们从不插入楔形，因为这只在 ∂S 中那些与图案不相交的低价顶点周围进行。然而，∂S 中的每个顶点都是 ∂M 的顶点，因此都位于图案 P' 中。

我们所作的修改会移动截面 S，但不会移动 A。因此， S 与 A 的相对位置可能会改变。特别是， $S\backslash\backslash A$ 不一定仍然是实心环面 $M\backslash\backslash A$ 的子午圆盘。我们将在第 14.10 节中适当调整 A 。

如同第 10 节中一样，我们记录一个容许包络（N， X， Y， $P\cap N$， $\mathcal{H}$， S）。为了与前面的论证保持一致，我们还将考虑另一个曲面 S' 和另一个容许包络（N'，X， Y'， $P\cap N'$， $\mathcal{H}'$， S'）。然而，由于我们不会进行任何楔形插入， S'、 N'、Y' 和 $\mathcal{H}'$ 将分别等于 S、 N、 Y 和 $\mathcal{H}$。

环带 A 最初与 $N(B)$相交于纤维的并，并且我们将对与 N的交集保持这一性质。

当我们如第 10.15 节那样考虑内部二价顶点时，也需要小心地考虑环带 A。此处唯一需要小心的情形是， A 与每个顶点 s^i 的星形相交于一条从 s^i_1 经s^i到 s^i_2 的弧。但在第 10.15 节的修改之后，仍保留 s^i_1 与 s^i_2的一个副本，我们只需确保 A 包含它们之间的纤维。

涉及内部三价顶点的修改也容易处理。此时，一个与该顶点关联的瓦片被塌缩，从而将两个广义鞍点合并。若 A 与该瓦片相交，则相交于一条纤维，并且我们可以确保在修改之后， A 穿过这个新合并的广义鞍点。

14.7. **欧几里得子曲面**。 和以前一样，我们必须考虑 $S' = S$的欧几里得子曲面。其定义方式与先前相同，只是 E也不包含交集 $S \cap C$。分支曲面 B_E 与 $\partial M \cup C$不相交， $E\backslash N_2(S'\backslash\backslash E)$亦然。因此它位于流形 $M_C = M\backslash N(C)$中。这是圆上的一个圆丛，我们可以把环带 A 视为正常嵌入于 M_C中。

我们需要确保定理 11.3 的结论依然成立。该定理有两个假设，我们将其修改如下。第一个假设是，不存在同胚 $h\colon N \to N$ 满足以下所有条件：

(1) h 在 $P\cap N$和 X 上等于恒等映射（因此可延拓到 M_C和 M）；(2) h 是沿着正常嵌入于 M中的环面的德恩扭转；(3) (N， X， Y， $P\cap N$， $\mathcal{H}$， h(S)) 是一个容许包络；(4) $w_\beta(h(S)) < w_\beta(S)$。

第二个假设是，不存在将 S 同痕到曲面 S_2 的图案同痕，以及满足以下条件的嵌套容许包络（N_2， X_2， Y_2， $P\cap N_2$， $\mathcal{H}_2$， S_2）

$$(w_\beta(S_2), \text{approx-type}(S_2)) < (w_\beta(S), \text{approx-type}(S)),$$

$$c_+(\mathcal{H}_2) \le c_+(\mathcal{H}), \qquad c(\mathcal{H}_2) \le c(\mathcal{H}).$$

现在我们说明，在这些修改后的假设下，定理 11.3 的结论为何仍然成立。

第二个假设用于命题 11.10 的证明。在那里，考虑了 E_+ 中一组互不相交的网格 ˜。证明中，分析了其中一个网格里的圆盘 D_- 。它的边界是一个环带的边界分支，该环带在 N 中是垂直的。这个环带的另一个边界分支位于 S 中，并在 S 中围成一个圆盘 D_+ 。如果这些圆盘的绑定权重不同，那么我们可以用其中一个替换另一个，从而降低 S 的绑定权重。另一方面，如果它们的绑定权重相同，那么我们可以尽可能多地用 D_- 的平行副本替换 D_+ 的平行副本。这会减少 S 中瓦片的近似星形类型数量。

证明通过构造一个由 $N(B_+)$ 承载的环面 T 来进行。在我们的情形中，T 实际上由 N 承载。接着，对 T 施加德恩扭转 h 的某个幂，可降低 S 的绑定权重。这与我们的第一个假设矛盾。

14.8. **薄部分**。 在先前的论证中，插入楔形体可能会在 S' 中引入割点。因此，我们定义了曲面 S'_{cut} 。然而，在当前情形下，并未插入楔形体，因此也没有引入割点。因此， $S'_{\text{cut}} = S' = S$，且 S' 的薄部分为空。

14.9. **欧拉示性数论证**。 这一部分几乎没有变化。唯一的变化是，我们将边界模式从 P 修改为 P'，并且还规定欧几里得子曲面与 C 不相交。因此，定理 13.1 的修订表述为： S 中价不超过 3 的内部顶点数至少为

$$\frac{w_\beta(S)}{31\pi(2392e)^2} + \frac{72}{31}\chi(S) - \frac{5}{31}|S \cap P'| - \frac{5}{31}|S \cap C|.$$

14.10. **控制环带** A。 正如我们将在第 15 节中看到的，我们将不断修改 S ，直到其权重有界为止。所有这些修改都在远离 C 的地方进行，因此都包含在流形 $M_C = M\backslash\backslash N(C)$ 中。令 $F = S \cap M_C$，并令 F' 为 M_C 中由此得到的曲面。我们没有移动 A，因此 $F \cup A$ 可能与 $F' \cup A$ 不同痕。下面说明如何解决这一问题。我们将考虑以下修改。

设 S_1 和 S_2 是正常嵌入于三维流形 M_C 中且彼此横截相交的两个曲面。假设 $S_1 \cap S_2$ 中有一条简单闭曲线，它在其中一个曲面上围成一个圆盘。假设该圆盘是 $D_1 \subset S_1$。还假设 D_1 的内部与 S_2 不相交。另假设 ∂D_1 在 S_2 中围成一个圆盘 D_2 ，其内部可能与 S_1 相交。那么，从 S_2 中移除 D_2 ，并用 D_1 的一个平行副本替换它，从而从 $S_1 \cap S_2$ 中移除 ∂D_1 ，这一操作称为 圆盘交换。

引理 14.3. 设 M_C 是一个以圆为底空间的紧致可定向三维流形圆丛。设 A 是一族适当嵌入的竖直环带，使得 $M_C\backslash\backslash A$ 是一族实心环面。设 F 是 M_C 的一个截面。设 F' 由 F 经由一个支撑在 M_C 内部的 M_C 的同胚得到，并且假设 F' 与 A 横截相交。设 F'' 和 A'' 由 F' 和 A 经过一系列圆盘交换得到，直到无法再进行此类圆盘交换为止。那么存在一个支撑在 M_C 内部、并将 $F'' \cup A''$ 映到 $F \cup A$ 的 M_C 的同胚。

证明。由于 F 是一个截面，它与 ∂A 的每个连通分支恰好相交一次。由于 F'' 是由 F 经由一个支撑在 M_C 内部的 M_C 的同胚得到的， F'' 也与 ∂A 的每个连通分支恰好相交一次。因此， F'' 与 A 的每个连通分支相交于一条本质弧，以及可能存在的若干条非本质简单闭曲线。然而，由于无法再进行圆盘交换， $F''\cap A$ 中不存在简单闭曲线。经过进一步保持 A 不变的同痕后，我们可以假设弧 $F''\cap A$ 与圆纤维横截相交。

设 $N(A\cup\partial M_C)$ 是 $A\cup\partial M_C$ 的薄正则邻域。我们可以假设 $F''\cap N(A\cup\partial M_C)$ 与 $F\cap N(A\cup\partial M_C)$ 同胚。现在， F 是通过向 $F\cap N(A\cup\partial M_C)$ 附加圆盘得到的。由于 F 和 F'' 具有相同的欧拉示性数， F'' 也必须通过向 $F''\cap N(A\cup\partial M_C)$ 附加圆盘得到。这些圆盘在 $M_C\backslash\backslash A$ 的每个连通分支中各有一个，构成该连通分支的子午圆盘。因此，存在一个保持 A 不变且支集包含于 M_C 内部的同痕，将 F'' 变为一个截面。由此存在一个 M_C 的同胚，其支集包含于 M_C 内部，并将 $F''\cup A''$ 变为 $F\cup A$。□

因此，我们采用的过程如下。我们对 M_C 施加一个同胚，将其变为 F'，直到它具有受控权重。我们没有移动 A，因此其权重保持不变。假设 F' 和 A 允许进行圆盘交换。那么可以进行圆盘交换而不增加曲面的绑定权重，具体如下。考虑 $F'\cap A$ 上的一条简单闭曲线，它在其中一个曲面上围成圆盘 D；并假设在所有此类曲线中， D 的绑定权重最小。于是我们可以假设 D 的内部与 $F'\cap A$不相交。由曲面的不可压缩性可知， ∂D 在另一个曲面上围成圆盘 D' 。根据我们的极小性假设， D' 的绑定权重至少与 D的绑定权重一样大。因此，移除 D' 并以 D 替换它的圆盘交换不会增加曲面的绑定权重。

因此，我们可以进行圆盘交换，将 F' 和 A 变为所需形式，同时不增加绑定权重；如此反复，直到无法再进行圆盘交换。然后，根据引理 14.3，所得曲面与 $F\cup A$强等价。

14.11. 实心环面分支。上述论证处理的是 M_{nst}。实心环面分支必须采用不同的方法处理，因为它们不一定包含一个干净不可压缩环带，且该环带不平行于 ∂M中的干净环带。然而，与其他圆丛不同，实心环面有一个优点：沿截面切割后，它会分解成一个球。因此，我们只需从 M_{st}中移除 A 和C ，令 S_{st} 为 M_{st}中的一个截面，然后像处理层次结构中其余曲面那样处理 S_{st} 。

15. 以多项式有界绑定权实现层次结构

本节中，我们证明以下结果：该结果将一个指数受控层次结构整理为容许形式，并使其绑定权重多项式有界。这一关键结果是本文的核心，依赖于迄今发展出的全部工具，包括正规曲面理论和弧表示的结构。

定理 15.1。设 K 是 S^3中的一个非分裂链环，且不是平凡结。按照定理 *3.3* 所述，为 ∂N（K）赋予边界模式。设 $H=\{S_1,\dots,S_\ell\}$ 是该外部的一个充分分离、（λ,2_{15}）-指数受控分层

对于 K，其中

$$\lambda = \sum_{i=1}^{\ell} -3\chi(S_i) + 6|S_i| + 6|S_i \cap P_i|.$$

这里， P_i 是第一个 $i-1$ 曲面外部的边界模式。令 H' 由 $S_1 \cup \cdots \cup S_\ell$ 经第 *14* 节中的过程得到；该过程在最后阶段移除 H 与相关圆丛实心环面分支内部的交集，然后插入弱基本子午圆盘。令

$$q(x) = (10^{80}\lambda^8)^{\sum_{i=0}^{\ell} 22^i} x^{22^\ell}.$$

设 D 是 K 的弧表示，其弧指标为 n。那么，经过至多 $n^2 q\,(n)$ 次交换移动和循环置换，以及一个在 $\partial N\,(K)$ 上等于恒等映射的 K 外部同胚，可将 $\partial N\,(K) \cup H'$ 变为绑定权重至多为 $q\,(n)$ 的可容许层次。

证明。令 k 为一个不超过层次结构 H长度的正整数。对于 $k < \ell$，令 H_k 为由 H 的前 k 个曲面构成的部分层次结构，其中包括 $S_0 = \partial N\,(K)$。令 $H_\ell = H'$。令

$$q_k(x) = (10^{80}\lambda^8)^{\sum_{i=0}^{k} 22^i} x^{22^k}.$$

我们将对 k 进行归纳，证明存在一列至多包含 $n^2 q_k(n)$次交换移动和循环置换的变换，并对 K 的外部进行同痕，将$\partial N(K) \cup H_k$ 变为一个权重至多为 $q_k(n)$的可容许偏层次结构。令k 等于层次结构的长度 ℓ，显然即可证明该定理。

归纳从对 D 进行至多 $n+1$ 次稳定化开始，使得对于 $\partial N(K)$中边界模式非空的每个连通分支，该模式的斜率都等于 K相应连通分支的缠绕数。接着，我们将 $\partial N(K)$置于容许形式。只需取 K的一个薄正则邻域即可做到这一点。这不需要交换移动或循环置换，而所得 $\partial N(K)$的绑定权重至多为 $4n+2$。注意， $q_0(n) \geq 4n+2$。

现在我们来证明归纳步骤。设 $\{S_0, \ldots, S_k\}$ 为部分层次结构 H_k中的曲面，其中 $k < \ell$，并设 $S = S_{k+1}$ 为下一个曲面。设 P 为 H_k外部上的边界模式。假设 H_k 是可容许的，且绑定权重至多为 w。我们将证明，存在一列至多包含 $10^{40}\lambda^4 w^{11}$ 步的变换，可将 $\partial N(K) \cup H_{k+1}$ 变为绑定权重至多为 $10^{80}\lambda^8 w^{22}$的可容许层次结构。因此，绑定权重至多为

$$10^{80}\lambda^8 (q_k(n))^{22} = 10^{80}\lambda^8 (10^{80}\lambda^8)^{\sum_{i=1}^{k+1} 22^i} n^{22^{k+1}} = (10^{80}\lambda^8)^{\sum_{i=0}^{k+1} 22^i} n^{22^{k+1}} = q_{k+1}(n).$$

每一步至多使用 n^2 次交换移动和循环置换。因此，到目前为止，交换移动和循环置换的次数至多为

$$n^2 q_k(n) + n^2 10^{40}\lambda^4 (q_k(n))^{11} < n^2 10^{80}\lambda^8 (q_k(n))^{22} = n^2 q_{k+1}(n).$$

由此即可完成归纳步骤。

因此，我们现在假设 H_k 是容许形式，且绑定权重至多为 w。特别地，它不含环形瓦片。

步骤 *1.* 修改 H_k，使其间距良好。

我们使用第7.2节中描述的过程，使层次结构的间距良好。这会使其绑定权重增加至至多 $7w$。

步骤 *2.* 构造 H_k 的外部的三角剖分。

M H_k 的外部的三角剖分见第 6.2 节。引理 6.3 指出，该三角剖分至多有 $t = 112w(7w - \sum_{i=1}^{k} \chi(S_i)) \leq 112w(7w + \lambda)$ 个四面体。

步骤 *3.* 将 S 实现为指数受控的正规曲面。

根据假设， S 可以实现为一个 $(\lambda, 2_{15})$-指数受控曲面，因此 S 的权重至多为 $\lambda 2^{15t}$。

ˆ步骤 *4.* 将 S 同伦变形为近嵌入曲面 S，其边界位于弧表示中。

如第 6.7 节所述，我们现在将 S 同伦变形为一个几乎嵌入的替代可容许曲面 ˆS，其绑定权重至多为 $200(7w)^3(7w + \lambda)^2\lambda 2^{15t}$。它相对于把手结构 $\mathcal{K}$ 是正规的。

步骤 *5.* 构造承载 S 的分支曲面 B。

在第 8.5 节中，我们描述了一个承载 S的分支曲面 B。令 $N = N(B)$ 为其加厚，并令 $\mathcal{H}$ 为其自然把手结构。我们令 X 为$\partial_h N$，并令 Y 为空。在第 10.2 节中，我们定义了容许包络 $(N, X, Y, P \cap N, \mathcal{H}, S)$。我们还首先令 $(N', X, Y', P \cap N', \mathcal{H}', S')$ 等于 $(N, X, Y, P \cap N, \mathcal{H}, S)$，并注意到它们构成嵌套可容许包络。在第 10.6 节中，我们定义了这些把手结构的复杂度。根据引理 10.4，这些复杂度满足

$$c(\mathcal{H}) \leq c_+(\mathcal{H}') \leq 11648(7w)^2(7w + \lambda).$$

我们将按照第 10 节所述修改包络，但其复杂度不会增加。曲面 S' 可能有一些割点。我们令 $S' \setminus S'_{\text{thin}}$ 为沿这些割点切割 S' 并丢弃所有双边形瓦片后得到的结果。令E 为 $S' \setminus S'_{\text{thin}}$的欧几里得子曲面。令 S'' 为从 $S' \setminus S'_{\text{thin}}$中移除位于 E 内且至多有$23552e^2$ 个顶点的任何环面或干净环带分支后得到的结果，其中这些分支属于 S'。令 e为 S''的瓦片的近似星形类型数。根据命题 10.10 和 10.11，

$$e \leq 16c_+(\mathcal{H}) + 32c(\mathcal{H}') \leq 559104(7w)^2(7w + \lambda).$$

步骤 *6.* 寻找许多价较小的顶点。

令 S_+ 为 S''的双重。根据定理 13.1，当 $k < \ell$时， S_+ 中价至多为 3 的非切割顶点数量至少为

$$\frac{w_\beta(S'')}{31\pi(2392e)^2} + \frac{72}{31}\chi(S) - \frac{5}{31}|S \cap P| \geq \frac{w_\beta(S'')}{31\pi(2392e)^2} - \lambda.$$

在最后一步，我们可能面对的是一个破碎截面；此时， S_+ 中价至多为 3 的非切割顶点数量（按照第 14 节的术语）至少为

$$\begin{aligned}
&\frac{w_\beta(S'')}{31\pi(2392e)^2} + \frac{72}{31}\chi(S) - \frac{5}{31}|S \cap P'| - \frac{5}{31}|S \cap C| \\
&\quad \geq \frac{w_\beta(S'')}{31\pi(2392e)^2} - \lambda - \frac{5}{31}|S \cap P|96(7w)(7w + \lambda) \\
&\quad \geq \frac{w_\beta(S'')}{31\pi(2392e)^2} - 388w^2\lambda.
\end{aligned}$$

它们的星形至多分为 e 种近似类型。因此，在 S''中，我们可以找到一个至少包含

$$\frac{1}{e}\left(\frac{w_\beta(S'')}{62\pi(2392e)^2}-194w^2\lambda\right)$$

所有低价顶点均具有平行星形。

步骤 *7.* 修改 S 和 S' 以及它们嵌套的可容许包络。

第 10 节中介绍了若干可降低绑定权重的过程。每个过程都应用于一组价较低的平行星形。因此， S'' 的绑定权重至少降低

$$\frac{1}{e}\left(\frac{w_\beta(S'')}{62\pi(2392e)^2}-194w^2\lambda\right)\geq\frac{1}{e}\left(\frac{w_\beta(S'')}{10^{10}e^2}-194w^2\lambda\right)$$

因此， $w_\beta(S'')-194\cdot10^{10}\lambda w^2e^2$ 至少缩小为原来的 $(1-1/(10^{10}e^3))$，理由如下：

$$\begin{aligned}&w_\beta(S'')-194\cdot10^{10}\lambda w^2e^2-w_\beta(S'')/(10^{10}e^3)+194\lambda w^2/e\\&\leq(1-1/(10^{10}e^3))(w_\beta(S'')-194\cdot10^{10}\lambda w^2e^2).\end{aligned}$$

我们重复这些操作，直到 $w_\beta(S'')-194\cdot10^{10}\lambda w^2e^2<1$，也就是说，直到 $w_\beta(S'')\leq194\cdot10^{10}\lambda w^2e^2$。

步骤 *8*。 重新引入环面分支和环带分支。

构造 S'' 时，移除了 S'_{thin} 中的环面分支和环带分支。每个分支的绑定权重至多为 $23552e^2$。这类分支的数量至多为$2e$，因为这是 B_E 所承载的不相交曲面的最大数量的一个上界。上述修改并未增加它们的绑定权重。因此，我们可以将它们加回曲面，从而得到一个绑定权重至多为

$$194\cdot10^{10}\lambda w^2e^3+47104e^3\leq2\cdot10^{12}\lambda w^2e^3.$$

步骤 *9*。 计算迭代次数。

设 x 为我们应用步骤 6 和 7 的次数。每重复执行一次这样的步骤， $w_\beta(S'')-194\cdot10^{10}\lambda w^2e^2$ 至多乘以因子 $(1-1/(10^{10}e^3))$。初始绑定权重至多为

$$200(7w)^3(7w+\lambda)^2\lambda2^{15t}\leq200(7w)^3(7w+\lambda)^2\lambda2^{1792w(7w+\lambda)}\leq2^{11760w(w+\lambda)}.$$

由于经过 $x-1$ 步后，绑定权重仍大于 1，我们可以推出

$$2^{11760w(w+\lambda)}(1-1/(10^{10}e^3))^{x-1}\geq1$$

从而得到

$$(\log2)11760w(w+\lambda)+(x-1)\log(1-1/(10^{10}e^3))\geq0.$$

重新整理并利用对 $0<y<1$ 成立的不等式 $\log(1-y)\leq-y$，可得

$$(x-1)/(10^{10}e^3)\leq(\log2)11760w(w+\lambda).$$

因此，

$$x\leq1+10^{10}(\log2)11760(559104)^37^9w^7(w+\lambda)^4\leq10^{40}\lambda^4w^{11}.$$

最后一个不等式利用了对于整数 $x,y\geq2$， $x+y\leq xy$。如上文所述，交换移动和循环置换的总次数因此至多为$n^2q_{k+1}(n)$。

第 *10* 步。对部分层次结构的绑定权重进行界定。

每一步都会使层次结构 $\{S_0, \dots, S_k\}$ 的绑定权重至多增加 6。因此，经过这些步骤后，其绑定权重至多为 $w + 6 \cdot 10^{40}\lambda^4 w^{11} \leq 7 \cdot 10^{40}\lambda^4 w^{11}$。

步骤 *11.* 控制 S' 的薄部分。

根据命题 12.1 和注记 12.2，存在 $S'' \cup S'_{\text{thin}}$ 的一个图案同痕，将其变为曲面 S_{k+1}，其绑定权重至多为

$$(2e + 1 + 7 \cdot 10^{40}\lambda^4 w^{11})\, w_\beta(S'') \leq (2e + 1 + 7 \cdot 10^{40}\lambda^4 w^{11}) \cdot 2 \cdot 10^{12}\lambda w^2 e^3$$
$$\leq 10^{54}\lambda^5 w^{13} e^3 \leq 10^{79}\lambda^8 w^{22}.$$

在 S_{k+1} 为破碎截面的情形下，我们需要对 S_{k+1} 与环带 A 进行圆盘交换，使得 $S_{k+1} \backslash\backslash A$ 成为构成圆丛的实心环面的子午圆盘。如第 14.10 节所述，这可以在不增加 S_{k+1} 和 A 的绑定权重的情况下实现。此外，由于该同痕发生在 K 的外部，因此不需要交换移动或循环置换。最后，将该截面扰动为破碎截面，这可能使其权重至多变为原来的 3 倍，但它仍然至多为 $10^{80}\lambda^8 w^{22}$。□

16. Isotoping a link through a handle structure

设 $\mathcal{H}$ 是三维球面的一个把手结构。若链环 K 符合把手结构 $\mathcal{H}$，则称其满足以下所有条件：

(1) K 位于 $\mathcal{H}$ 的 0-柄与 1-柄的并集中；(2) 它与每个 0-柄相交于一个正常嵌入的 1 维流形；(3) 它与每个 1-柄 $D^1 \times D^2$ 相交于若干条弧，每条弧都具有 $D^1 \times \{*\}$ 的形式，其中某点 $* \in$ 属于 int(D^2)。

本节的目标是从一个符合 $\mathcal{H}$ 的链环 K 出发，执行环境同痕 K，将其移入单个 0-柄中。这显然可以做到。不过，我们希望以可控的方式执行这一同痕。因此，我们引入以下变换。每个变换都以符合把手结构的 K 开始，并以其结束。

变换 *1*：跨越一个 2-柄滑动

设 H_2 是 $\mathcal{H}$ 的一个 2-柄，并设 $N(H_2)$ 是它的一个小正则邻域。因此，对于 H_2 所附着的每个 0- 柄和 1- 柄，$N(H_2)$ 与该手柄的交集都是若干个球。注意，$N(H_2)$ 具有自然的乘积结构，即 $D^2 \times D^1$。假设 $K \cap N(H_2)$ 由一条形如 $\alpha \times \{*\}$ 的弧组成，其中 α 是 ∂D^2 中的一条弧，而 $\{*\}$ 是 int(D^1) 中的一点。还假设这条弧 $K \cap N(H_2)$ 位于单个 0-柄内。然后我们将 $\alpha \times \{*\}$ 沿圆盘$D^2 \times \{*\}$ 做同痕，用弧 ($\partial D^2 \backslash\backslash \alpha$) $\times \{*\}$ 替换它。（见图 51。）

移动 *2*：沿 1-柄滑动

设 H_1 是 $\mathcal{H}$ 的一个 1-柄，并设 $N(H_1)$ 是 H_1 的一个正则邻域。它具有乘积结构 $D^1 \times D^2$。假设 $K \cap N(H_1)$ 除了一条弧之外，其余弧均具有如下形式：$D^1 \times \{*\}$，其中 $* \in$ 是 int(D^2) 中的某个点。假设剩下的弧 γ 是三条弧 $\alpha \times \{p_1\}$、$\alpha \times \{p_2\}$ 和 $\{q\} \times \beta$ 的拼接，其中 α 是 D^1 中的一条弧，使得 $\alpha \cap \partial D^1$ 是一个单点，其中 q 是剩下的点$\partial\alpha \backslash \partial D^1$，并且 β 是 D^2 内部的一条弧，连接 p_1 与 p_2。另假设 γ 与 H_1 相交于两条弧。于是，我们用一条与 H_1 不相交的弧 γ' 替换 γ。同样，γ' 是三条弧 $\alpha' \times \{p_1\}$、$\alpha' \times \{p_2\}$ 和

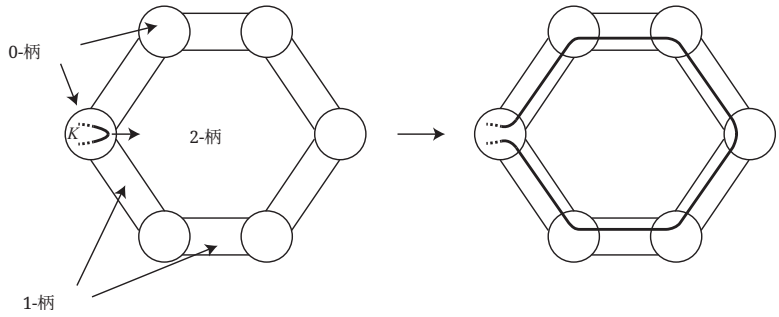

FIGURE 51. 跨越 2-柄滑动

$\{q'\} \times \beta$，其中 α' 是 α 的一条子弧。我们也允许这一操作的逆操作。（见图52。）

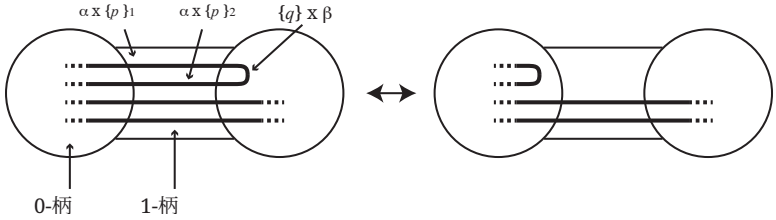

FIGURE 52. 跨越 1-柄滑动

移动*3*：保柄同痕

最后一个变换由三维球面的环境同痕构成，该同痕保持每个柄不变，并且使 K 始终尊重 $\mathcal{H}$ 。

命题16.1。 设 K 是三维球面上尊重把手结构 $\mathcal{H}$ 的一个链环。那么，经过一系列上述变换后， K 将位于单个 *0*-柄的内部。

证明。 我们首先定义嵌入在 $\mathcal{H}$中的弧与圆盘系统，并将其称为指定弧与圆盘。指定弧很容易定义：它们就是 2-柄的余核。换句话说，对于一个 2-柄 $D^2 \times D^1$，指定弧为 $\{0\} \times D^1$，其中 $\{0\}$ 是 D^2中的中心点。

现在我们需要定义指定圆盘。每个圆盘都包含一个 1-柄的余核，它是 $\{*\} \times D^2$，其中 $\{*\}$ 是 int(D^1)中的某个点。指定圆盘还将包含位于 2-柄中的部分，具体如下。对于一个 2-柄 $D^2 \times D^1$，它与 1-柄余核的交集形如 $P \times D^1$，其中 P是 ∂D^2中的有限点集。对于 P中的每个点 p ，在 D^2 中都有一条径向弧 α，沿直线从 p 延伸至 0。我们将 $\alpha \times D^1 \subset D^2 \times D^1$ 称为带。（见图53。）对于每个 1-柄的余核，将所有与之关联的带附接上去。所得结果就是一个指定圆盘。（见图 54。）

利用指定弧和圆盘，可以按如下方式为三维球面构造一个把手结构 $\mathcal{H}'$ 。 $\mathcal{H}'$ 和 $\mathcal{H}$ 的3-柄相同。每条指定弧的一个狭长正则邻域构成 $\mathcal{H}'$的一个2-柄。每个指定圆盘的加厚构成一个1-柄。流形的其余部分就是

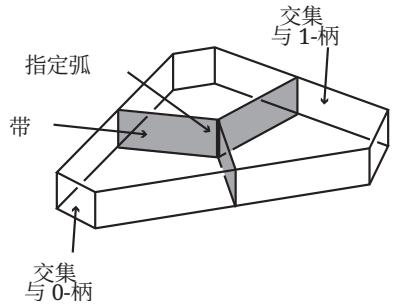

FIGURE 53. 2-柄内的指定弧和带

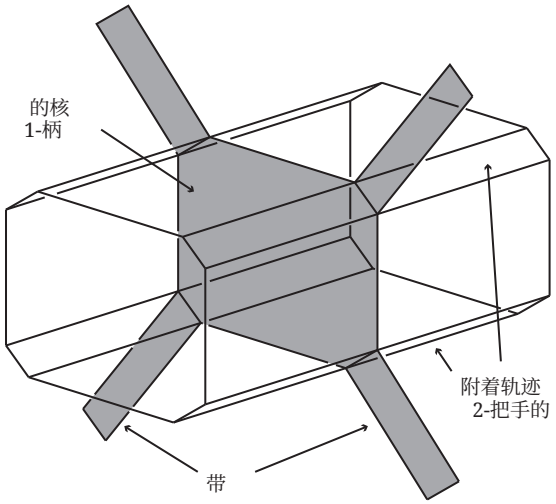

FIGURE 54. 与 1-柄相关的指定圆盘

$\mathcal{H}'$的0-柄。现在，从某种意义上说， $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 是相同的把手结构。更准确地说，存在一个同胚 h: $S^3 \to S^3$ ，它将 $\mathcal{H}'$ 的每个柄映射到 $\mathcal{H}$的一个柄上。这个同胚会扩展 $\mathcal{H}'$ 的每个2-柄，直到它填满包含它的 $\mathcal{H}$的2-柄。它还会拉长 $\mathcal{H}'$的每个1-柄。

现在，我们选取 S^3 的一个同痕，将 $h^{-1}(K)$ 移入 $\mathcal{H}'$ 的一个 0-柄中。根据一般位置，我们可以假设链环避开指定弧，只有在有限多个时刻例外；在这些时刻，链环会横截地穿过某条指定弧。因此，我们还可以安排链环在该时刻通过一次滑动穿过 $\mathcal{H}'$ 的一个 2-柄。类似地，链环与每个指定圆盘横向相交于有限多个点，只有在有限多个时刻例外；此时可能发生两种情况之一。一种情况是，链环靠近指定圆盘，随后只是与其接触，然后穿过它，从而产生两个新的交点。因此，链环通过一次滑动穿过 $\mathcal{H}'$ 的一个 1-柄。另一种情况则与此相反。 S^3 的这段同痕给出 S^3 的一参数同胚族，其起始映射为恒等映射。将 h 应用于其中每一个同胚，便得到一个同痕，它将 K 移入 $\mathcal{H}$ 的一个 0-柄内部，并且具有所需的形式。□

17. 从同痕到 From the isotopy to Reidemeister moves

本节中，我们完成主定理的证明。给定一个链环的图 D，其链环类型为 K，其中 D 有 c 个交叉点。我们选取 K 的一个固定图 D'。我们需要证明，存在一个多项式 p_K，使得 D 与 D' 可以通过至多 $p_K(c)$ 次 Reidemeister 变换构成的序列相互转换。

令 μ 为定理 3.6 中的常数。首先，我们为 K的外部选取一个固定的、(μ, 2_{15})-指数受控层次结构 H，其存在性由定理 3.6 保证。我们还确保它充分分离。

我们将 D 同痕变换为矩形图。根据引理 5.1，我们可以使该矩形图的弧指标为 n，其中 $n \leq (81/20)c$。由于这里只对平面进行了同痕变换，因此此阶段不需要 Reidemeister 变换。该矩形图还确定了一个弧指标为 n的弧表示。定理 15.1 给出了一个多项式 q，它仅取决于 K 和 H；经过至多 $n^2q(n)$ 次循环置换和交换移动后，该层次结构便可置于容许形式，且绑定权重至多为 $q(n)$。

17.1. 由层次结构产生的把手结构。层次结构 H如下确定了 K的外部的一个把手结构。$\partial N(K)$与 H 的并是一个 2-复形。将其加厚为一个把手结构。K 的外部的其余部分是由若干三维球组成的集合，我们将其视为该把手结构的 3-柄。

现在我们按如下方式将其扩展为 S^3的一个把手结构 $\mathcal{H}$。取 K的一个小正则邻域，记为 $N_{\text{small}}(K)$，使其位于 $N(K)$的内部。因此，$N(K)\backslash\backslash N_{\text{small}}(K)$是不相交的 $T^2 \times I$副本的并，每个K的连通分支对应一个副本。我们为 $N_{\text{small}}(K)$的每个连通分支赋予一个由 0-柄和 1-柄组成的把手结构。在 $\partial N(K)$的每个连通分支上取一条经向简单闭曲线，并在 $\partial N(K)$上取一条简单闭曲线，使其斜率等于一条经线加上若干条子午线。令 m 和 l 分别表示这些子午线和整曲线。在 $\partial N(K)$的每个连通分支上，取 m 和 l，使它们与该环面上的把手结构相容，并且在某个 0-柄中的一点 p 处相交。在p 与 $N_{\text{small}}(K)$的 0-柄上的一点之间，连接一个在 $T^2 \times I$ 区域中竖直的 1-柄。现在连接一个 2-柄，使其先沿着 $m - p$，再沿着这个 1-柄，然后绕过与 K相交的 0-柄，最后沿着该 1-柄返回。类似地，连接另一个 2-柄，使其先沿着 $l - p$，再沿着竖直的 1-柄，然后沿着与 K相交的 1-柄，最后沿着竖直的 1-柄返回。这两个 2-柄和竖直的 1-柄将 $T^2 \times I$区域分解为一个球，我们将其视为一个 3-柄。

我们将 $\mathcal{H}$ 称为由产生的 H把手结构。它取决于 H 以及曲线 m和 l的选择。注意，K 遵循 $\mathcal{H}$，其意义与第 16 节中的相同。

现在，我们选取 $\mathcal{H}$中位于单个0-柄内的 K 的另一个固定副本 K'。根据命题 16.1，存在如第 16 节所述的一系列变换，将 K 变为 K'。由于 H 具有多项式有界权重，因此能够使用多项式有界数量的Reidemeister变换，将 K 的矩形图变为 K' 的图，并不会令人感到非常意外。因此，如果选择 D' 和K'，使得 K' 的某个适当投影为 D'，那么定理 1.1的证明就完成了。在本节余下部分，我们将进一步详细说明这一论证。

17.2. **从弧表示到矩形图**。我们将 K 以一种特定的方式置于三维球面中，这种方式源自其弧表示。现在，我们回顾 [6]中的构造；该构造安排 K ，使其在平面上的投影成为相应的矩形图。

三维球面是连接 $S^1_\phi * S^1_\theta$，其中 S^1_ϕ 是绑定圆。由于 K 是弧表示，它与绑定圆相交于有限多个点，即 K的顶点；并且它与每一页 $\mathcal{D}_t$ 的交集要么为空，要么是连接 K不同顶点的一条开弧。我们可以安排每条这样的开弧由两条弧拼接而成，每条弧都从 K 的一个顶点直线延伸至点 $\mathcal{D}_t \cap S^1_\theta$。我们还可以假设 K 的顶点避开值 $\phi = 0$，并且与 K 相交的页 $\mathcal{D}_t$ 避开 $\theta = 0$。

现在我们按如下方式将 K 从 S^1_ϕ 和 S^1_θ 移开。我们将每一页 $\mathcal{D}_t$ 视为一个开单位圆盘。我们通过移除交弧 $K \cap \mathcal{D}_t$与 $\mathcal{D}_t$ 中原点周围某个小圆盘的交集，并用一条绕该圆盘圆周的弧替代，来替换交弧。我们选择这条弧，使其避开取值$\phi = 0$。在绑定圆附近，我们也进行类似处理。我们不再直线延伸至绑定圆上的一个顶点再离开，而是将其替换为一条与各页横向相交且具有恒定 ϕ 值的弧。我们选择这条弧，使其避开值 $\theta = 0$。

因此， K 现在与 $S^1_\theta \cup S^1_\phi$不相交。 $S^1_\theta \cup S^1_\phi$ 的补集是$S^1_\theta \times S^1_\phi$ ×(0，1)的一个副本，其中前两个因子分别由 θ和 ϕ 坐标参数化。投影到前两个因子上，即可得到 K的图示投影映射。事实上，由于 K 避开了 $\theta = 0$ 和 $\phi = 0$，其像位于(0， 2π) × (0， 2π)中。

我们已将 K 安排为由三种类型的弧拼接而成。第一种弧的 θ和 ϕ值为常数，因此投影到(0， 2π) × (0， 2π)中的一个点。第二种弧位于一页内并靠近 S^1_θ，其 θ值为常数。因此，它投影为(0， 2π) × (0， 2π)中的一条竖直弧。第三种弧位于 S^1_ϕ附近，且 ϕ 值为常数，因此投影为一条水平弧。由此，我们得到K到(0， 2π) × (0， 2π)的投影，它由水平弧和竖直弧拼接而成。此外，当两条这样的弧相交时，竖直弧是上弧。这就是所需的 K矩形图。

当 K 处于这种形式时，它从图中继承了一个自然框架，因此每个连通分支都有一个缠绕数，即其框架的整数斜率。我们对矩形图进行一些初始稳定化，使每个连通分支的缠绕数等于 l中相应连通分支的整数斜率。

17.3. **1-骨架的投影**。层次结构 H 确定了 K外部的胞腔结构。现在我们将为其1-骨架构造一个投影。

每个0-胞腔都位于绑定圆 S^1_ϕ上。因此，它有一个特定的 ϕ值 s。所以它对应于(0, 2π) × $\{s\}$ 中(0, 2π) × (0, 2π)的一条弧。这个0-胞腔的一个正则邻域是 $\mathcal{H}$的一个0-柄。我们可以先假设这个0-柄在平面上的投影是这条弧的一个小正则邻域。我们也可以将这个0-柄与 $D^2 \times I$等同起来，使其到第一个因子的投影就是图示投影映射。

胞腔结构中的每个 1-胞腔都是层次结构中某个曲面边界上的一条弧。因此，它处于弧表示中。于是，它在平面上的投影是由水平弧和垂直弧拼接而成的。我们将每个 1-胞腔加粗，使其投影成为这些弧之并的一个正则邻域。

这就确定了 K 外部的 0-胞腔和 1-胞腔的投影。此外，还有构成 $N_{\mathrm{small}}(K)$ 的 0-柄和 1-柄，以及在 $N(K)\backslash\backslash N_{\mathrm{small}}(K)$ 中垂直的 1-柄。我们可以假设每个 0-柄都是 K 中一个顶点的正则邻域。 $N_{\mathrm{small}}(K)$ 中的每个 1-柄沿着 K 的一个连通分支的剩余部分延伸，而该连通分支处于弧表示中。因此，这就确定了它的投影。每个竖直 1-柄都可以选为一条具有恒定 ϕ-值的弧的正则邻域。因此，它在平面上的投影是水平弧的一个正则邻域。

17.4. **2-柄的位置**。除位于 $N(K)$ 中的 2-柄外，其余每个 2-柄都是一个加厚的 2-胞腔，而这个 2-胞腔由若干瓦片的并组成。因此，只需说明每个瓦片的位置。瓦片具有乘积叶状结构。每个叶具有恒定的 θ 值，并在两个顶点之间延伸。因此，只要 $\theta \neq 0$，该叶就确定图中的一条竖直弧。所以，当 $\theta = 0$ 所在的叶被移除时，瓦片就是这类弧的并。

$N(K)$ 中每个连通分支的两个 2-柄，在 $\partial N(K)$ 中斜率为 m 或 l 的一条弧与 $\partial N_{\mathrm{small}}(K)$ 中对应的弧之间进行插值。最初，在构造层次结构之前， K 是一个弧指标为 n 的弧表示，而 $N(K)$ 是它的一个薄正则邻域。若情况一直如此，那么很容易将 $N(K)$ 中的 2-胞腔实现为由若干瓦片组成的并，且绑定权重至多为 $2n$。然而，在构建层次结构 H 的过程中，我们以两种方式修改 $N(K)$。一种修改是在 K 上进行交换移动和循环置换，这会相应地影响 $N(K)$ 和 $N_{\mathrm{small}}(K)$。这种修改不会影响 $N(K)$ 中 2-胞腔的绑定权重。另一种修改是沿着 $\partial N(K)$ 进行楔形插入。这些操作会扩展 $N(K)$，但保持 $N_{\mathrm{small}}(K)$ 不变。因此，每次进行楔形插入时， $N(K)$ 中的 2-柄都可能扩展。这种扩展使其组成的 2-胞腔的绑定权重最多增加 2。因此，经过这些修改后，总绑定权重至多为 $2q(n)$，因为 $q(n)$ 是楔形插入次数的上界。

17.5. **收缩 0-柄**。如上所述，自然的做法是选取每个 0-柄，使其投影为平面中一条水平弧的正则邻域。将这个 0-柄缩小，使其实际投影为一个小圆盘会很方便；该圆盘的内部与 1-柄内部的投影不相交。我们需要延伸连接到这个 0-柄的 1-柄，但可以通过在每个 1-柄的每个端点处添加一条水平弧的正则邻域来实现这一点。

17.6. **从滑动到 Reidemeister 变换**。我们选取了一系列跨越把手的滑动和保持把手的同伦，将 K in$\mathcal{H}$ 的初始副本变为位于某个 0-柄中的副本 K'。我们可以在三维空间中实现这些变换中的每一个。进行投影后，得到一系列图示，其起始于 D，终止于 D'。因此，我们需要给出这组序列中相邻图示之间所需 Reidemeister 变换次数的上界。我们将设法使这些图示实际成为矩形图。

我们需要一个上界 d，来限制该序列中每个矩形图的弧指标。每个图都来自链环在把手结构 $\mathcal{H}$ 中的一种固定实现。 $\mathcal{H}$ 的每个 0-柄都是 $D^2 \times I$ 的一个副本，并以尊重其乘积结构的方式嵌入到 $(0,\ 2\pi) \times (0,\ 2\pi) \times (0,\ 1)$ 中。因此，链环 K 与该 0-柄的交集在 $(0,\ 2\pi) \times$ 上有一个特定的投影

(0， 2π)。特别是，该投影由有界数量的直线弧组成，并且我们可以假定这些弧均为垂直或水平的。这个界仅取决于 $\mathcal{H}$ 中 K 的排列方式，而与 $\mathcal{H}$ 在三维空间中的嵌入方式无关。现在我们考虑链环与 $\mathcal{H}$ 的一个 1-柄的交集。正如第 17.3 节所指出的，该 1-柄是弧 α 的一个正则邻域，而这条弧属于一个弧表示，其弧指标不超过该层次结构的绑定权重。现在， K 尊重该 1-柄上的乘积结构，因此 K 与该 1-柄之间的每条交弧都位于 α 的一个狭窄正则邻域内。因此，其图示投影是至多 w 条水平弧和至多 w 条垂直弧的拼接，其中 w 为绑定权重。我们还可以确保各个 0-柄的投影彼此不相交。我们也可以安排使每个 1-柄的投影避开每个 0-柄的投影，但 1-柄连接到 0-柄的点除外。然而，不同 1-柄的投影可能彼此重叠。因此我们可以推得，该序列中的每个矩形图的弧指标至多为 $d = c_1 w + c_2$，其中 c_1 和 c_2 是仅取决于 K 的常数，而 w 是该层次结构的绑定权重。

现在，我们来求第 16 节所述各类变换所产生的 Reidemeister 变换次数的上界。我们从沿 1-柄滑动的过程开始，因为这是最简单的。在这里，纽结始终位于 0-柄与 1-柄的并集中。此外，它与 0-柄的交集几乎没有变化。尤其是，链环中位于 0-柄内的部分，其投影不会改变，只有涉及该变换的 1-柄附近的一个小正则邻域内除外。当 K 穿过 1-柄滑动时，会进行一系列第二类 Reidemeister 变换。当 1- 柄的核心曲线 α 与 K 的另一个点具有相同的投影时，就会发生这些变换。因此，第二类 Reidemeister 变换的次数至多为 α 与 K 的投影之间的交点数，而该数至多为 $2wd$。

接下来考虑保柄同痕的情形。这会改变链环在 0-柄和 1-柄内的位置。不过，我们可以分别进行这些同痕：先改变链环在 0-柄内的位置，再改变它在 1-柄小正则邻域内的位置。支撑在 0-柄内的同痕会使链环发生同痕变形，并由此产生 Reidemeister 变换。0-柄像内的图如何变化，只取决于 $\mathcal{H}$ 内所选的同痕，而与它的嵌入方式无关。因此，我们可以得出，这部分过程中 Reidemeister 变换的次数是一个常数，与 w 无关。过程的下一部分是在 1-柄的正则邻域内对链环进行同痕变形，同时始终保持 1-柄上的乘积结构。这可以通过一次第二类 Reidemeister 变换，再接若干次第三类 Reidemeister 变换来实现。第三类变换的次数等于 1-柄的核 α 与其余柄中链环的投影之间的投影点数。因此，变换次数至多是 w 的二次函数。

最后，我们考虑链环滑过一个 2-柄的情形。考虑这一变换的逆过程会更方便。所需的 Reidemeister 变换数量相同。该 2-柄是一个近乎可容许的 2-胞腔 C 的加厚。起初， K 绕着 ∂C。我们将让 K 逐块瓦片地穿过 C进行同痕。令 C_- 为尚未穿过的瓦片的并集。接下来，我们

将安排使 C_- 成为一个圆盘（最后一步之后为空）。我们还将安排使 K 绕着 ∂C_-。

我们可以在 C_- 中选取一个瓦片 T，使得从 C_- 中移除该瓦片后，结果仍然是一个圆盘。理由如下。考虑任何至少有一条边与 ∂C_- 相邻的瓦片。如果从 C_- 中移除这块瓦片后得到的不是圆盘，那么该瓦片至少有一条边的两个端点都落在 ∂C_- 上，且其内部位于 C_- 的内部。考虑所有与 ∂C_- 至少有一条边相邻的瓦片所对应的这类弧的并集。每条弧都正常嵌入于 C_- 中，且这些弧的内部彼此不相交。因此，我们可以找到一条在 C_- 中最外层的弧 β。它从 C_- 中分隔出一个子圆盘，其内部与这些弧不相交。任取该圆盘内一块至少有一条边与 ∂C_- 相邻的瓦片。（避开包含 β 的瓦片，除非它是该子圆盘内唯一的瓦片。）然后我们可以令 T 为这块瓦片。

首先，假设 T 在其边界上恰有两条 ∂C_- 的边，且它们交于 C的一个鞍点。此时，我们可以将 K 滑过这块瓦片，并始终使其保持为页中的一条弧。在图中，这样的弧都是垂直的。因此，我们得到一个垂直弧的一参数族。当这条弧越过另一条垂直弧时，这是通过交换移动实现的。根据引理 5.2，至多使用 d 个 Reidemeister 变换即可完成。瓦片中的某条弧可能有 $\theta = 0$。此时，图中的弧会从一条 0 上方紧邻处带有 θ 的垂直弧，切换为一条 0 下方紧邻处带有 2π的垂直弧，反之亦然。这是一个循环置换，至多使用 d^2 个 Reidemeister 变换。因此，Reidemeister 变换的总数至多为 $2d^2$。

现在，假设 T 在 ∂C_-中恰有一条边。这条边连接一个鞍点和一个顶点。考虑从这个鞍点发出的瓦片的另一条边。于是，我们可以在 K 上引入一个指状突起，使其沿着这条边延伸后再折返回来。这可以通过滑过一个 1-柄来实现。这样做至多需要 $2wd$ 个第二类 Reidemeister 变换。现在，我们可以像上面那样将 K 滑过这块瓦片。

∂C_- 有三条或四条边的情形也类似。我们可以让K 滑过瓦片，然后执行指状突起变换的逆变换。当瓦片的边界上有 ∂C_- 的两条边，但它们相交于一个顶点时，我们沿着剩余边中的一条引入一个指状突起，然后滑过瓦片，再移除一个指状突起。这至多需要 $2d^2 + 4wd$ 个第二类 Reidemeister 变换。

每个 2-柄都是一个 2-胞腔 C的加厚，它至多由 $4w$ 个瓦片组成，原因如下。C 中的瓦片数量至多等于半瓦片的数量加上完整方形瓦片数量的两倍。这等于 $4x^i(C)$和 $2x^b(C)$，其中 $x^i(C)$和 $x^b(C)$分别表示该 2-胞腔中的内部鞍点数和边界鞍点数。根据引理 5.5，这等于 $4v^i(C) + 2v^b(C) - 2$，其中 $v^i(C)$和$v^b(C)$分别表示 C内部和边界上的顶点数。这至多为 $4w$。

滑过每块瓦片至多使用 $2d^2 + 4wd$ 次Reidemeister 变换，我们总共至多使用了 $8d^2w + 16w^2d$ 次Reidemeister 变换，这至多是 w 的三次函数。

因此，我们证明了以下结论。

命题 17.1。设 K 是一个非分裂链环，H 是 K外部的一个层次结构。设 D' 是 K 的一个固定图。则存在一个常数 k，仅取决于 K、H 和 D'，并具有如下性质：若 K 是一个弧表示，且H 处于容许形式，绑定权重为 w，则存在一个至多包含

kw^3 个 *Reidemeister* 变换的序列，将由该弧表示得到的 K 矩形图变换为 D'。

17.7. **分裂链环**。我们几乎已经可以证明本文的主定理——定理 1.1。但首先，我们说明如何处理分裂链环。

定理 17.2. 设 L 是由非分裂链环 $L_1 \sqcup \cdots \sqcup L_s$ 远离并而成的分裂链环。设 D 是 L 的一个弧指标为 n 的矩形图。那么，存在一个至多包含$(11n)^{11}$ 次交换移动、循环置换和去稳定化的序列，将 D 变为一个不连通矩形图，其中各连通分支分别是 L_1、.....、L_s 的图。

证明。定理 1.4 的 [17] 给出了一个至多包含（$14n$）^{10} 次交换移动、循环置换和去稳定化的序列，将 D 变为一个不连通矩形图。注意，这些变换不会增加矩形图的弧指标，因此弧指标仍至多为 n。如果该图的某个连通分支表示一个分裂链环，那么再进行至多（$14n$）^{10} 次此类变换，即可使其不连通。如此重复，最终便可得到所需的矩形图，其中各连通分支分别是 L_1、.....、L_s 的图。由于每个连通分支的弧指标至少为 2，因此重复次数至多为 $n/2$。所以变换总次数至多为（$n/2$）（$14n$）$^{10} \leq$（$11n$）^{11}。□

17.8. **主定理的证明**。

定理 *1.1* 的证明。设 D 是 K 的某个图，其交叉数为 c。在定理的情形下，我们将考虑 $D = D_1$ 或 $D = D_2$。设 D' 是 K 的某个固定图。我们将给出将 D 与 D' 联系起来所需的 Reidemeister 变换次数的一个上界。因此，这也将给出将 D_1 与 D_2 联系起来所需的 Reidemeister 变换次数的一个上界。

如果 K 是分裂链环，那么将其写成非分裂链环的远离并 $L_1 \sqcup \cdots \sqcup L_s$。不妨设 D' 是 $L_1, \ldots, L_s$ 的图的远离并。根据引理 5.1，给定的图 D 可以同痕变形成弧指标为 $n \leq (81/20)c$ 的矩形图。根据定理 17.2，可以使用至多 $(11n)^{11}$ 次交换移动、循环置换和去稳定化，将其转换为一个非连通矩形图，其中各连通分支分别是 $L_1, \ldots, L_s$ 的图。因此，只需分别考虑这些图即可。

因此，我们可以假设 K 是非分裂的。我们还可以假设 K 不是平凡结，因为 [17] 的主要结果表明，在这种情况下，$p_K(c) = (236c)^{11}$ 适用。

设 H 是外部 K的一个固定的、充分分离的、$(\mu, 2_{15})$-指数受控层级结构，它由定理 3.3 和注 3.7 保证存在。这里，μ 是定理 3.6 中的常数。这确定了外部 K的一个把手结构。再设 m 和 l 是 $\partial N(K)$每个连通分支上的固定曲线，它们相交一次，具有子午斜率和整数斜率，并且与把手结构相容。由此确定了三维球面的一个相应把手结构 $\mathcal{H}$。设 f 为 l的整数斜率绝对值之和。

如上所述，根据引理 5.1，图 D 可以通过同痕变形成为弧指标至多为 $(81/20)c$的矩形图。随后我们进行稳定化，使 K 的每个连通分支的缠绕数都等于l中相应连通分支的框架。这最多需要 $f + c$次稳定化。令 $n \leq f + (101/20)c$为所得的弧指标。定理 15.1 给出了一个多项式 q，它仅取决于 K、H

和 D'；经过至多 $n^2q(n)$次循环置换和交换移动后，层次结构便被置于容许形式，其绑定权重至多为 $q(n)$。对图进行上述每项修改，最多需要 n^2 次 Reidemeister 变换。

根据命题 17.1，该图可以通过至多 D' 个 $k(q(n))^3$ 次 Reidemeister 变换转换得到，其中 k 仅取决于 K、H 和 D'。

因此，我们已经通过至多以下数量的 Reidemeister 变换将 D 转换为 D'：

$$\begin{aligned} &f + c + (f + (101/20)c)^4 q(f + (101/20)c) + k(q(f + (101/20)c))^3 \\ &\qquad \leq 2k(q(f + (101/20)c))^3. \end{aligned}$$

因此，我们可以令 $p_K(c) = 2k(q(f + (101/20)c))^3$。 □

注记 17.3。上述命题中的常数 k 可以通过算法计算。利用层次结构 H、子午线 m 和整曲线 l 的选择，可以构造三维球面的把手结构 $\mathcal{H}$。链环 K 在 $\mathcal{H}$ 中的初始位置是确定的。显然存在某个将三维球面中的 K 同痕到位于 $\mathcal{H}$的一个 0-柄内的链环 K' 的同痕。由于该同痕是一个保层单纯映射 $S^3 \times [0,1] \to S^3 \times [0,1]$，且所有可能的此类单纯映射都可以枚举，因此总能最终找到这样的同痕。最终会找到一个将 K 同痕到一个 0-柄内的同痕。随后，我们令 K' 为 0-柄中的所得链环。0-柄具有作为 $D^2 \times [0,1]$的乘积结构，而到 D^2 上的投影给出了 K的图 D''，必要时可对 K'进行小扰动。上述利用同痕生成变换的过程是确定性的，因此它确定了一系列将 D 变换为 D''的 Reidemeister 变换。最后，由于 D'' 和 D' 都是同一链环 K的图，因此总能找到联系它们的某个 Reidemeister 变换序列。

最后一步是算法性的，但它无法为连接 D'' 和 D'的 Reidemeister 变换次数提供良好的先验界。不过，如果我们一开始选择 D' 等于 D''，就不需要这一步了。

18. Explicit polynomials

我们希望确定图八字结和环面结所对应的常数 k 的具体值。为此，我们需要一个更定量的论证。

在上一节中，我们定义了由层次结构导出的三维球面的把手结构。引入以下稍微一般化的版本会很有帮助。和之前一样，我们从由层次结构导出的 K外部上的把手结构开始，然后在 $N(K)$ 中附加手柄。和之前一样，我们选取一组 l 整曲线，在 $\partial N(K)$ 的每个连通分支上各取一条，并使其符合边界上的把手结构。不过现在，我们在 $\partial N(K)$ 上选取多条互不相交的子午线m，并要求 $\partial N(K)$ 的每个连通分支至少包含其中一条子午线，也可能包含多条。每条子午线都符合把手结构，并且我们要求它与 l 恰好相交一次。

现在，我们为 $N_{\text{small}}(K)$ 配备一个由 $|m|$ 0-柄和 $|m|$ 1-柄组成的把手结构，其中 $|m|$ 是子午线的数量。在 $N(K)\backslash\backslash N_{\text{small}}(K)$ 中，我们插入 $|m|$个竖直 1-柄，每个竖直 1-柄都从 $N_{\text{small}}(K)$ 的一个 0-柄延伸至 m与 l的一个交点。现在插入 $|m|$ 2-柄，每个都绕行

m的某个连通分支，向下经过一个竖直 1-柄，绕过 $N_{\text{small}}(K)$ 中的一个 0-柄，然后再沿竖直 1-柄向上返回。还要插入 $|m|$ 2-柄，每个都沿着 $l\backslash\backslash m$的一个连通分支延伸，再经过一个竖直 1-柄，接着沿着 $N_{\text{small}}(K)$ 中的一个 1-柄延伸，最后再沿另一个竖直 1-柄向上返回。最后，我们将 $|m|$个 3-柄插入 $N(K)\backslash\backslash N_{\text{small}}(K)$ 中。我们也称这是一个由层次结构导出的三维球面上的把手结构。与之前一样，它也取决于额外的数据，具体来说，是整曲线 l 和子午线 m的选取。

我们还会对三维球面上的把手结构 $\mathcal{H}$ 作一个额外假设，现将其描述如下。

设 $\mathcal{H}$ 是满足约定 4.1 的三维流形的把手结构。若把手结构 $\mathcal{H}'$ 可由 $\mathcal{H}$ 通过塌缩得到，则：

(1) 存在 $\mathcal{H}$的柄 H_- 和 H_+，其中 H_+ 的指标比 H_-的指标大一，且 H_+ 的核与H_- 的余核恰好相交一次；因此 $H_- \cup H_+$ 是一个三维球；令 D_- 为$\partial($ $H_- \cup H_+$)中 H_- 和 H_+ 附着到较低指标手柄上的点的并集，并令 D_+ 为 $\partial($ $H_- \cup H_+$)$\backslash\backslash D_-$；(2) 移除手柄 H_- 和 H_+；(3) 将所有关联于 D_+ 的较高指标手柄改为沿 D_- 附着，并使用 D_- 与 D_+之间的自然识别。

因此，即使较高指标的柄附着在这些柄上，我们仍允许将柄对塌缩。若在上述定义中，D_+ 位于三维流形的边界上，或者等价地，H_- 和 H_+ 与任何其他较高指标的柄都不相交，则称这种塌缩为初等 塌缩。若存在一系列塌缩，可将 $\mathcal{H}$ 塌缩为单个 0- 柄，则称 $\mathcal{H}$ 是完全可坍缩 的。

命题 18.1. 若三维流形的把手结构 $\mathcal{H}$ 是可缩的，则存在一系列初等塌缩，可将其塌缩为单个 *0*-柄。

证明。 对此按柄的数量进行归纳。归纳的起始情形显然成立：当 $\mathcal{H}$ 只有一个柄时，该柄必为 0-柄，因此无需进行初等塌缩。

因此，考虑一个可缩的把手结构 $\mathcal{H}$，并假设该引理对所有柄数少于 $\mathcal{H}$的可缩把手结构均成立。

根据假设，$\mathcal{H}$ 有一系列塌缩，可将其变为一个 0-柄。我们断言，存在这样一系列塌缩，其中所有 3/2 塌缩先进行，然后是所有 2/1 塌缩，最后是所有 1/0 塌缩。这直接源于一个简单的观察：如果一次 1/0 塌缩紧接在一次 3/2 或 2/1 塌缩之前，或者一次 2/1 塌缩发生在一次 3/2 塌缩之前，我们就可以交换这两次相邻塌缩的顺序。进行这样一对塌缩后得到的把手结构，与它们发生的顺序无关。因此，我们现在假设通向 $\mathcal{H}$ 的塌缩按这种顺序进行。

类似地，我们可以交换 3/2 塌缩的顺序；出于以下原因，我们可以随意这样做。我们仅用在 3/2 塌缩中被移除的 2-柄和 3-柄构造一个图。图的顶点对应于 3-柄，以及流形边界与参与 3/2 塌缩的 2-柄之间的交集分支。图的边对应于在这些塌缩中被移除的 2-柄。在 3/2 塌缩中被移除的每个 2-柄都至少与一个 3-柄关联。执行 3/2 塌缩时，这个

图的同伦型保持不变，除非某次 3/2 塌缩移除了图的整个一个连通分支。因此，这个图是一片森林。特别地，它的顶点数多于边数。然而，参与 3/2 塌缩的 2-柄数与 3-柄数相同。因此，存在一个顶点对应于流形边界与参与 3/2 塌缩的某个 2-柄之间的交集分支。于是，这个 2-柄与相邻的 3-柄可以进行一次初等塌缩。这样便得到一系列初等塌缩，可移除所有 3-柄。

现在考虑第一个 2/1 塌缩。设该塌缩涉及手柄 H_2 和 H_1，并设所得的把手结构为 $\mathcal{H}'$。如果这是最后一次 2/1 塌缩，那么它实际上是一次初等塌缩。于是，根据归纳法， $\mathcal{H}'$ 可通过一系列初等塌缩变为一个 0-柄。因此，我们可以假设下一次塌缩也是一次 2/1 塌缩。根据归纳法， $\mathcal{H}'$ 可通过一系列初等塌缩变为一个 0-柄。因此，我们可以假设接下来对 $\mathcal{H}'$的塌缩是一次初等塌缩，涉及手柄 H_2' 和 H_1'。注意， H_1' 和 H_2' 也是 $\mathcal{H}$中的手柄。

首先，假设 $H_2' \cup H_1'$ 与 $H_2 \cup H_1$ 在 $\mathcal{H}$中不相交。那么我们可以交换这两次塌缩的顺序。设 $\mathcal{H}''$ 为将 H_2' 和 H_1'从 $\mathcal{H}$ 中塌缩后得到的把手结构。注意， $\mathcal{H}''$ 是通过一次初等塌缩从 $\mathcal{H}$ 得到的。由于 $\mathcal{H}''$ 可塌缩为 $\mathcal{H}'$，它也是完全可塌缩的。因此，根据归纳法，存在一系列初等塌缩，可将 $\mathcal{H}''$ 变为一个 0-柄，正如所需。

因此现在假设 $H_2' \cup H_1'$ 与 $H_2 \cup H_1$相交。由于相同指标的柄互不相交，存在两种可能： H_2' 穿过 H_1，或者 H_2 穿过 H_1'。

假设 H_2' 穿过 H_1，但 H_2 并不穿过 H_1'。 H_2 与 H_1 的塌缩并不改变 H_1' 与2-把手之间的交集的分支。因此，在 $\mathcal{H}$中， H_1' 仅有H_2' 穿过它一次，并且不与任何其他2-把手关联。故 H_1' 与 H_2' 在 $\mathcal{H}$中可作一次初等塌缩。所得的把手结构是完全可坍缩的，因为我们可以塌缩 H_2 与H_1 ，然后继续执行曾应用于 $\mathcal{H}$的其余塌缩。因此，由归纳法，它仅使用初等坍缩即可完全塌缩。故 $\mathcal{H}$亦然。

现在假设 H_2 穿过H_1'。于是 H_1 与 H_2 的塌缩会在 H_1' 与2-把手之间引入新的交集的分支。但在 $\mathcal{H}'$中， H_1' 与2-把手仅相交一次。因此我们推得，在 $\mathcal{H}$中， H_1 要么与除 H_2 之外的2-把手不相交，要么与这些柄仅有单一交分支。在前一种情形中， H_1 与 H_2 的塌缩是一次初等塌缩，证明至此完成。另一方面，当 H_1 与其他2-把手恰好相交一次时，该交集必定是与 H_2'的交集。我们推得 H_2 穿过 H_1 一次且穿过 H_1' 一次，并且 H_2' 穿过 H_1 一次。此外， H_1' 与2-把手仅相交一次，即在 H_2中。因此我们对 H_2 与 H_1'执行一次初等塌缩。所得的把手结构是完全可坍缩的，因为我们随后可以塌缩 H_1 与 H_2'，然后执行曾应用于 $\mathcal{H}'\backslash\backslash (H_1' \cup H_2')$ 的其余塌缩。因此，再次用归纳法， $\mathcal{H}$ 允许一列初等坍缩，将其化为一个0-柄。

因此，我们归结为最后一种情形：只进行 1/0 塌缩。因此， $\mathcal{H}$ 是一棵加厚树。特别是，可以通过依次塌缩树的叶子，将其塌缩为单个 0-柄。这是一系列初等塌缩。□

命题 18.2。 设 K 是一个非分裂链环， H 是 K外部的一个层次结构。设 l 是 ∂N（K）上的一组整曲线，在 ∂N（K）的每个连通分支上各有一条。设 m 是一组互不相交的子午线，在 ∂N（K）的每个连通分支上至少有一条。我们要求这些曲线与把手结构相容，并且 m 的每个连通分支与 l 恰好相交于一点。设 $\mathcal{H}$ 是相关的三维球面把手结构。假设从 $\mathcal{H}$中移除某个 *3*-柄后，所得结构完全可坍缩。这确定了三维球面上的一个同痕，将该 *3*-柄的补集映到 $\mathcal{H}$的一个 *0*-柄上。设 K' 是 K 经过此同痕后的像，并假设将 *0*-柄$D^2 \times I$ 投影到第一个因子上，得到 K'的一个图 D' 。设 a 是此胞腔结构中的 *1*-胞腔数， b 是任意 *2*-胞腔穿过的 *1*-胞腔最大数，按重数计算。则命题 *17.1* 中的常数 k 可以取为 $216a^4b^{3a+3}$。

证明。 根据命题 18.1，我们可以从 $\mathcal{H}$ 中移除 3-柄，然后进行一系列初等塌缩，直至只剩下一个 0-柄。

当一个 2-柄和一个 3-柄塌缩时，由于链环符合把手结构，这不会对链环产生影响。这种塌缩也不会影响其余 2-胞腔所跨越的 1-胞腔数量。因此，我们忽略这些塌缩。其余每次塌缩都会移除一个 1-胞腔，因此共有 a 次这样的塌缩。

经过第 i次此类塌缩后，每个 0-柄都与 K 相交成一个缠结，投影后会成为垂直弧与水平弧的并。令 t_i 为这些弧的总数。最初，恰有 $|m|$ 个缠结包含三条垂直弧和水平弧，其余缠结均为空。因此，最初， $t_0 = 3|m| \leq 3a$。

设 m_i 为第 i次塌缩之后，链环穿过每个1-柄的次数的一个上界。该次数仅在一个1-柄与一个2-柄被塌缩时增加。在这样的塌缩之前，需要将链环从该1-柄上滑离。每一次这样的滑动至多使它穿过其他1-柄的次数增加 b。初始时， $m_0 = 1$。于是 $m_{i+1} \leq bm_i$。 因此，在 i 次塌缩之后，我们有$m_i \leq b^i$。

在所有3-柄都被移除之后，我们便可执行所有涉及一个1-柄与一个2-柄的塌缩。如上所述，在塌缩之前，我们先将 K 的至多 m_i 条弧滑过该2-柄。每一次滑动至多向缠结引入b 个连通分支，且每个这样的连通分支是三条垂直弧与水平弧的拼接。因此，$t_{i+1} \leq t_i + 3bm_i \leq t_i + 3b^{i+1}$。于是由归纳法， t_i至多为 $3a + 3b^{i+1}$，而后者至多为 $3ab^{i+1}$。因此，弧指标至多为$t_i + 2m_i w \leq 3ab^{i+1}w$。令 d_i 为这一上界 $3ab^{i+1}w$。

考虑 1-柄和 2-柄塌缩的情形。在塌缩之前，我们先将至多 m_i 条 K 的弧滑过 2-柄。正如命题 17.1 的证明中所述，每次这样的滑动所需的 Reidemeister 变换不超过 $8d_i^2 w + 16w^2 d_i \leq 24d_i^2 w \leq 216a^2 b^{2i+2} w^3$ 次。

现在考虑一个 0-柄和一个 1-柄被塌缩的情形。我们将该 1-柄收缩，并连同该 0-柄一起收回。在此过程中，0-柄投影中至多 t_i 条弧会从至多 d_i 条其他弧旁经过，至多 w 次。这至多通过 $t_i d_i w$ 次交换移动实现，每次交换移动至多需要 d_i 次 Reidemeister 变换。因此，Reidemeister 变换的次数至多为 $t_i d_i^2 w \leq 27a^3 b^{3i+3} w^3$。此后，这两个 0-柄合并为一个 0-柄，这些 0-柄中的图示合并为一个图。这不会使 t_i 或 m_i 增加。

我们推得，Reidemeister 变换的总数至多为 $216a^4b^{3a+3}w^3$。

□

注 18.3。 胞腔结构中的每个 1-胞腔，除内部位于 int($N(K)$) 中的 1-胞腔外，均出现在层次结构中的三个曲面相交之处，或层次结构中的一个曲面与 $\partial N(K)$ 相交之处。此类 1-胞腔的端点处，是某个 S_i 与图案 P_i 相交的点。再考虑内部位于 int($N(K)$) 中的 1-胞腔，可得

$$a = 2|m| + 2\sum_i |S_i \cap P_i|.$$

此外，位于层次结构中或 $\partial N(K)$ 中的每个 2-胞腔，经过每个 1-胞腔的次数至多为一次。另有一些 2-胞腔位于 $N(K)$ 中，它们经过这些 1-柄的次数分别至多为 length(l) $+3$ 和 length(m) $+2$ 次。因此，

$$b \le \max\{a, \text{length}(l)+3, \text{length}(m)+2\}.$$

结合这些估计、定理 15.1、命题 18.2 以及定理 1.1 的证明，我们得到以下结论。

定理 18.4. 设 K 是一个非平凡结以外的非分裂链环。设 $S_1, \dots, S_\ell$ 是 K 的外部的一个层次结构，如命题 *18.2* 所述，并且该层次结构充分分离且受到$(\lambda, 2_{15})$-指数控制，其中

$$\lambda = \sum_{i=1}^{\ell} -3\chi(S_i) + 6|S_i| + 6|S_i \cap P_i|.$$

设 m 和 l 是 $\partial N(K)$ 上的曲线，如命题 *18.2* 所述；设 f 是 l 的整数斜率绝对值之和。假设从三维球面得到的把手结构在移除某个 *3*-柄后完全可塌缩。令

$$a = 2|m| + \sum_{i=1}^{\ell} 2|S_i \cap P_i|,$$
$$b = \max\{a, \mathit{length}(l)+3, \mathit{length}(m)+2\}$$

那么我们可以取

$$p_K(c) = 512a^4b^{3a+3}(10^{80}\lambda^8)^{3\sum_{i=0}^{\ell} 22^i}(f + (101/20)c)^{3\cdot 22^\ell}.$$

19. The figure-eight knot

定理 19.1. 对于 K 八字结，我们可以取 $p_K(c) = (10^{108}c)^{15460896}$。

证明。 八字结见图 55 (i)。现在我们按照第 3 节给出的过程，为其外部 M 构造一个充分分离且受到 $(\lambda, 2_{15})$-指数控制的层次结构。该层次结构的长度 ℓ 为 5。定理 18.4 中定义的常数 λ 和 a 分别为 $\lambda = 492$ 和 $a = b = 128$。框架 f 为 4。在移除一个合适的 3-柄后，得到的 S^3 上的把手结构将完全可塌缩。因此，根据定理 18.4,

$$512a^4b^{3a+3}(10^{80}\lambda^8)^{3\sum_{i=0}^{\ell} 22^i}(f + (101c/20))^{3(22)^\ell}$$

可作为 $p_K(c)$。它的上界为 $(10^{108}c)^{15460896}$, , 我们可以将其设为 $p_K(c)$。

由于 M 是双曲的，我们可以直接跳到第 3 节中的步骤 (3)。令 S_1 为图 55 (ii) 所示曲面的可定向双重覆盖。注意，

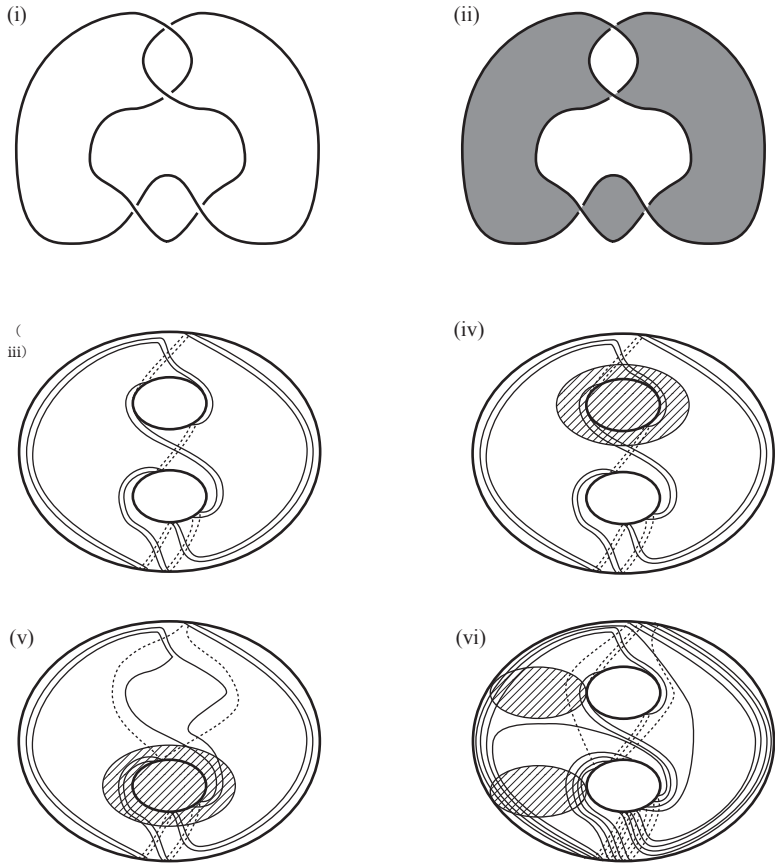

FIGURE 55. 用于构建八字纽结外部弱基本层次结构的部分曲面

$-\chi(S_1)+2|S_1|+2|S_1\cap P_1|=4$。Hatcher 和 Thurston [11] 证明了 S_1 是不可压缩且边界不可压缩的。注意，它不是 M 在圆上的纤维化中的纤维，因为它是分离的且连通的。因此，我们可以在步骤 (3) 中沿此曲面切割。此曲面与 $\partial N(K)$ 相交成两条曲线，每条的整数斜率均为 4。

这就产生了一个流形 M_2，它有两个连通分支。其中一个连通分支（记为 M_2'）是图 55 (ii) 所示曲面的外部。另一个连通分支（记为 M_2''）是这个棋盘曲面的正则邻域。现在， M_2'' 是一个 I-丛腔室，因此此时不能对其进行分解。连通分支 M_2' 如图 55 (iii) 所示。它具有如下非平凡的 JSJ 分解。它包含一个正常嵌入的圆盘，该圆盘与图案相交四次，如图 55 (iv) 所示。这个圆盘的正则邻域是一个以该圆盘为底空间的 I-丛。将 $\partial M_2'\cap\partial N(K)$ 的正则邻域附加到这个 I-丛上。所得结构是一个以曲面为底空间的 I-丛，记为 M_3'。可以算出，底曲面是一个带一个穿孔的 M¨obius 带。令 M_3''为 $M_2'\backslash\backslash M_3'$。如图 55 (v) 所示。于是， M_3'和M_3''相交于一个环带 S_2，我们声称它是 M_2'的 JSJ 环带。注意

M_3'' 是一个实心环面，其边界模式由两条曲线组成，每条曲线都绕实心环面三圈。因此， M_3'' 是 Seifert纤维化的，而M_3' 是一个 I-丛，所以它们确实构成了 M_2'的 JSJ 分解中的各块。按照步骤 3 (iii) 的要求，我们将这个环带 S_2 作为层次结构中的下一个曲面。

由于 M_3'' 是一个实心 Seifert纤维化环面，其边界模式等于若干纤维的并，因此它是简单的。于是，步骤 4(v) 适用于它。因此，我们令 S_3 为该实心环面的子午圆盘的两个平行副本，每个副本都可以选取得与图案相交 6 次。

I 丛 M_2'' 的水平边界现在继承了某种边界模式。可以验证，其中不含干净本质环带，因此它是简单的。于是，步骤 4(v) 可以应用于它。我们沿着 S_4 进行分解，其中 S_4 是图 55 (vi) 所示圆盘的两个平行副本。这些圆盘中有两个与图案相交 8 次，另外两个与图案相交 6 次。

唯一剩下的非三维球连通分支是 M_3'，它是一个以带一个穿孔的 M¨obius 带为底空间的 I 丛。同样可以验证，其中不含干净环带。我们可以沿着 S_5 进行分解， S_5 是两个竖直圆盘的两个平行副本。这些圆盘中的每一个都与图案相交 4 次。我们如下谨慎选择这些圆盘的位置。如上所述， $\partial N(K)$ 与 S_1 相交于两条曲线，每条曲线的斜率均为 4。这些曲线将 $\partial N(K)$ 分成两个环带。 $N(K)$ 上存在一种乘积结构，将其表示为环带 A 与区间 I 的积，其中 $A \times \partial I$ 是这些环带各自的一个副本。进行进一步分解时，其中一个环带继承了额外的边界模式。具体而言，当我们沿着 S_4 进行分解时，其中一个环带继承了 8 条新的图案弧，它们组成四对平行弧。我们选择这八个圆盘 S_5 ，使得这八条弧 $S_5 \cap (A \times \partial I)$ 通过乘积结构 $A \times I$ 与已有的八条图案弧几乎平行。

在这些分解之后，所得流形均为 3-球，因此该层次终止。

我们可以将 l 设为一条斜率为 4 的曲线，它沿着 ∂S_1的某个连通分支延伸。其长度为 16。因此框架 f 为 4。我们选取 m 由 8 条子午线组成，每条均沿着 ∂S_5中的一条弧、 ∂S_4 中的一条弧以及 ∂S_1中的两条短弧延伸。我们仔细选择了 S_5 的位置，以便能够将 m 设为这 8 条子午线。

现在我们简要说明如何验证命题 18.2 中的可塌缩性假设。我们必须首先选取一个待移除的 3-柄。我们选取位于 M_3''中的一个 3-柄，即图 55 中包含无穷远点的那个。

我们很快会给出一系列塌缩，将所得的把手结构变为单个 0-柄。但首先，我们先介绍一个简化的例子。考虑图 56 所示的三维球的把手结构。这是对以下胞腔结构的加厚。首先取一个标准嵌入的闭合可定向二属曲面。然后为其补空间中的柄体附加压缩圆盘。按照图 56 所示，我们在每个柄体中使用两个压缩圆盘。这些圆盘将“内部”柄体分解成一个三维球，我们将其视为一个 3-胞腔。这些圆盘的边界将亏格二曲面分解成一个环带。我们选取环带中的一条本质弧，如图 56 所示，并将其定义为一个 1-胞腔。这样，曲面就被分解成一个圆盘，我们将其视为胞腔结构中的一个 2-胞腔。如下所示，塌缩这个胞腔结构并不困难，

首先，将位于亏格二曲面中的 2-胞腔与内部的 3-胞腔一起塌缩。然后，将每个压缩圆盘连同其边界上的一个 1-胞腔一起塌缩。最后，将所得的树收缩到一个点。

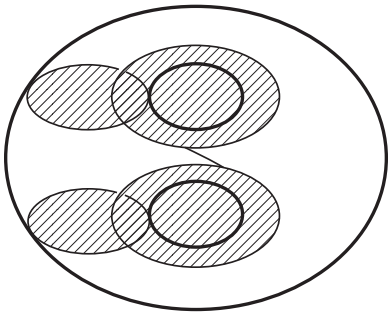

FIGURE 56. 一个三维球的可缩柄结构

我们的目标是将给定的三维球把手结构收缩到上图所示的结构。我们从 N（K）上的把手结构开始。我们将 N（K）$\backslash\backslash N_{\text{small}}$（$K$）中的八个垂直1-柄与和 K相交的八个0-柄一起塌缩，并将 K 穿过的1-柄与关联于 l的2-柄一起塌缩。我们还将包含m 与 ∂S_1之间交弧的十六个1-柄塌缩。经过这些塌缩后， N（K）上的把手结构相当简单。它由十六个0-柄和十六个1-柄组成，这些柄组合起来形成两个沿着 ∂S_1延伸的加厚圆。它还由另外16个1-柄组成，在 $A \times \partial I$的每个连通分支中各有八个。它还包括八个2-柄，每个都形成一条子午线，以及 $A \times \partial I$的每个连通分支中的另外八个2-柄。最后，它包含八个3-柄。我们可以先将此把手结构塌缩到 $A \times \partial I$的一个连通分支上，再塌缩到 ∂S_1的单个连通分支上。之后，它就只由八个以环状方式粘合的0-柄和八个1-柄组成。

现在考虑 M_3'，它原本是一个 I-丛，沿八个垂直圆盘进行分解。分解后，它变成了七个球，其中每个球都是以一个圆盘为底空间的 I-丛。其中一个球包含图 55 (iv) 所示的圆盘，并且在该球的边界中有该圆盘的两个副本。我们将其余六个球分别塌缩到它们与 $S_1 \cap S_2$ 的某个交集的分支上。然后，将剩下的三维球塌缩到图 55 (iv) 所示圆盘的两个副本中的一个上。

S_3 中的两个圆盘彼此平行，其间有一个 3-柄。我们将其中一个圆盘与该 3-柄一起塌缩。类似地， S_4 中的圆盘成两对出现，每对圆盘共同界定一个 3-柄。我们将这两个 3-柄分别与其中两个圆盘一起塌缩。

我们得到的把手结构与上文描述的简单结构非常接近。我们有一个亏格二曲面，其上附着了四个压缩圆盘，如图 56 所示。亏格二曲面被它与这四个圆盘的交集分割成 2-胞腔，但也被其他剩余的胞腔分割，例如沿着 $N(K)$ 延伸的那些胞腔。不过，我们可以塌缩这些多余的胞腔，直到恰好得到图 56 中的把手结构。如上文所述，这一结构是完全可坍缩的。□

20. Torus knots

定理20.1. 当 K 是环面结时，我们可以令 $p_K(c) = (10^{80}c)^{21962}$。

证明。设 K 是一个满足 $0 < r < s$ 的 (r, s)-环面结。我们为 K 的外部构造一个长度为 3 的指数受控分层。K 的外部是 Seifert纤维化的，因此我们赋予 $\partial N(K)$一个边界模式，该模式由一条经线构成。环面结 K 位于一个标准嵌入环面上。该环面与 K 外部的交集是一个环带，我们将其取作 S_1。它与经线相交$2rs$次。根据命题2.16，这一结构是弱基本的，因此根据推论 2.7，它是 $(2 + 4rs, 2_{15})$- 指数受控的。这将K 的外部分解为两个实心环面。取其中一个，令 S_2 为它的子午圆盘的两个副本，并使它们与图案的交点尽可能少。这个数目设为 $2r$。根据定理2.8，它可以变为弱基本的，因此是 $(4 + 8r, 2_{15})$-指数受控的。现在，另一个实心环面继承了一个边界模式，其中每个补区域都是一个圆盘。一张子午圆盘与此图案相交$2s$ 次。令 S_3 为该曲面的两个副本。根据定理2.8，这一结构是弱基本的，因此是 $(2 + 8s, 2_{15})$-指数受控的。对于这个分层，$\lambda = 6 + 12rs + 24r + 24s$。因此，定理 15.1 给出的多项式 q 为

$$\begin{aligned} q(x) &= (10^{80}(42 + 12rs + 24r + 24s)^8)^{\sum_{i=0}^{3} 22^i} x^{22^i} \\ &= (10^{80}(6 + 12rs + 24r + 24s)^8)^{11155} x^{10648}. \end{aligned}$$

将这一层次结构加厚，可在 K的外部得到一个把手结构。我们利用第17.1节所述的方法，将其扩展为 S^3上的把手结构 $\mathcal{H}$ 。这需要在 $\partial N(K)$上选取简单闭曲线 m 和 l 。对于 l，我们选取一条位于 $\partial N(S_1)$中的曲线，其斜率等于一条经线加上 rs条子午线。对于 m，我们取一条与把手结构相容、且与 l 恰好相交一次的子午曲线。

我们不会使用命题18.2中的估计，因为它不够强。相反，我们将明确构造一个使 K 经过 $\mathcal{H}$ 的同痕。首先，我们将 K 滑过一个2-柄，该2-柄在 $N(K)\backslash\backslash N_{\text{small}}(K)$中垂直，并沿着 l延伸。这个2-柄是一个绑定权重至多为 $2q(n)$的2-胞腔的加厚，因此至多由 $8q(n)$块瓦片组成。滑过该2-柄时， K 的弧指标始终至多为 $d \le n + 8q(n) \le 9q(n)$。每次滑过一块瓦片至多需要 $2d^2 + 4wd$ 次Reidemeister 变换，其中 w 是层次结构的绑定权重。因此，Reidemeister 变换的次数至多为$1296(q(n))^3 + 288w(q(n))^2$。

然后，我们将 K 滑过在 $N(K)\backslash\backslash N_{\text{small}}(K)$ 中垂直的 1-柄。这最多需要 $2wd$ 次 Reidemeister 变换。此后，纽结沿着包含 l 的 0-柄和 1-柄延伸。它沿着每个这样的柄延伸一次。

现在考虑 S_2 中的一个圆盘和 S_3中的一个圆盘。将它们稍微延展，使其边界位于包含 K的标准环面上。它们的边界相交一次，因此这些边界的并是两个圆的楔形 W。我们将对纽结进行同痕，使其之后位于 W的一个小正则邻域内。我们可以将标准环面看作一个带边等同的方形，其中方形的边构成 W。目前，纽结作为一条斜率为（r， s）的曲线位于这个环面上。两条曲线 ∂S_1与 ∂S_2 和∂S_3 一起将环面分割成圆盘。我们可以将纽结滑过这些圆盘，直到它位于方形的边界 W 上。这样的圆盘有 $r + s + 1$ 个。纽结被分成 $r + s$ 条弧。 K 的每条弧至多滑过每个 2-胞腔一次。

因此，我们至多需要执行 $(r+s+1)$ $(r+s)$ 次将 L 滑过 2-胞腔的操作，才能使其进入圆的楔和的一个正则邻域。随后，它绕楔和中的一个圆转 r 圈，绕另一个圆转 s 圈。现在，我们将 K 滑过这些圆围成的圆盘。我们需要执行 $r+s$ 次滑动。如第 17.6 节所述，每次滑过一个 2-柄至多需要 $24w^3$ 次 Reidemeister 变换。这里， w 是层次结构的绑定权重。完成后，纽结便位于单个 0-柄中，符合要求。它的投影实际上是环面结的标准图 D'，其交叉数为 $(r-1)s$。

因此，正如定理 1.1 的证明中所论证的，将任意图 D 转换为标准图 D' 所需的 Reidemeister 变换次数至多为

$$rs + c + (rs + (101/20)c)^4 q(rs + (101/20)c) + k(q(rs + (101/20)c))^3,$$

其中 $k = 1602 + 24(r+s)(r+s+2)$。现在我们可以利用环面结的交叉数为 $(r-1)s$ 这一事实，因此 $c \geq (r-1)s$。所以 $c \geq rs/2$ 且 $c \geq r+s+2$。因此， $k \leq 24c^2$。于是，Reidemeister 变换的次数至多为

$$\begin{aligned} &rs + c + (rs + (101/20)c)^4 q(rs + (101/20)c) + k(q(rs + (101/20)c))^3 \\ &\leq 3c + (141/20)^4 c^4 (10^{80}(6 + 12rs + 24r + 24s)^8)^{11155} (141c/20)^{10648} \\ &\quad + (1602 + 24c^2)(10^{80}(6 + 12rs + 24r + 24s)^8)^{33465} (141c/20)^{31944} \\ &\leq (10^{11}c)^{299666}. \end{aligned}$$

所以我们可以取 $p_K(c) = (10^{11}c)^{299666}$, , 如所声称。 □

References

[1] John A. Baldwin 与 Steven Sivek。论环面结识别的复杂度。 *Trans. Amer. Math. Soc.* 371 6 3831 3855, 2019 , ():–。[2] Daniel Bennequin。缠结与 *Third Schnepfenried geometry conference Vol. 1 (Schnepfenried, 1982)* 107 108 *Astérisque* 87 161 Pfaff方程。载于,，第-卷，第–页。法国数学会，巴黎，1983年。[3] Joan S. Birman 与 William W. Menasco。借助闭辫研究链环。IV. 复合链环与分裂链。 *Invent. Math.*，102(1):115–139，1990。[4] Ryan Budney。 S^3中纽结与链环补空间的JSJ分解。 *Enseign. Math. (2)*，52 3 4 319(-): –359，2006。[5] Alexander Coward 与 Marc Lackenby。Reidemeister 变换的一个上界。 *Amer. J. Math.* 136 4 1023 1066, 2014 , ():–。[6] Peter R. Cromwell。纽结与链环在开书分解中的嵌入。I. 基本性质。 *Topology Appl.* 64 1 37 58, 1995 , ():–。[7] M. Culler 与 P. B. Shalen。纽结流形中的有界、分离的不可压缩曲面。*Invent. Math.*，75(3):537–545，1984。[8] I. A. Dynnikov。链环的弧表示：单调简化。 *Fund. Math.* 190 29 76, , :–。[9] 2006 Wolfgang Haken。关于3维流形中曲面的若干结果。载于 *Studies in Modern Topology*, *Studies in Mathematics*第5卷，第39–98页。美国数学协会，，1968。[10] Joel Hass 与 Jeffrey C. Lagarias。解开平凡结所需的Reidemeister 变换次数。*J. Amer. Math. Soc.*，14(2):399–428，2001。[11] A. Hatcher 与 W. Thurston。 2 *Invent. Math.* 79 2 225 246, 1985 桥纽结补空间中的不可压缩曲面。, ():–。[12] Geoffrey Hemion。论2-流形同胚的分类与3维流形的分类。 *Acta Math.*，142(1-2):123–155，1979。[13] William Jaco 与 J. Hyam Rubinstein。3维流形的PL等变手术与不变分解。 *Adv. in Math.*，73(2):149–191，1989。[14] Klaus Johannson。 *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, *Lecture Notes in Mathematics*第761卷。施普林格，柏林，1979。

[15] Greg Kuperberg。作为几何化推论的3维流形算法同胚。*Pacific J. Math.*，301(1):189–241，2019。[16] Marc Lackenby。复合结的交叉数。 *J. Topol.*，2(4):747–768，2009。[17] Marc Lackenby。Reidemeister 变换的多项式上界。 *Ann. of Math. (2)*，182 2 491 564，2015（）：–。[18] Sergei Matveev。 *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds* 9 *Algo-*，第 卷。施普 *rithms and Computation in Mathematics* 2007 林格，柏林，第二版，。[19] Kunio Murasugi。论交替链环的辫指数。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，326 1 237（）：–260，1991。[20] Friedhelm Waldhausen。一类 3 *Invent.* 维流形。I，II。，：–; *Math.* 3 308 333 4 1967 87 117, 1967 同上（），–。[21] Friedhelm Waldhausen。具有中心的群与 3 *Topol-* 维流形。，：–。 *ogy* 6 505 517, 1967 [22] Friedhelm Waldhausen。关于充分大的不可约 3 *Ann. of Math.* -流形。，：–。 *(2)* 87 56 88, 1968

Mathematical Institute, University of Oxford, Woodstock Road, Oxford OX2 6GG, United Kingdom