arXiv:2602.09952v1 [math.DS] 10 Feb 2026

超越函数的游荡动力学

VASILIKI EVDORIDOU、DAVID MARTI-PETE和 LASSE REMPE

ABSTRACT. 我们证明，任意全纯函数在平面某个紧子集上的一致逃逸型游荡动力学，都可以由一个定义在 $\mathbb{C}$上的超越亚纯函数实现。

更准确地说，设 φ 是复平面某个开子集上的全纯函数，并设 K 是一个紧集，使得 φ 及其所有迭代 φ^n 都在 K上有定义，且 $\varphi^n(K) \to \infty$ 如 $n \to \infty$。我们证明，存在一个超越亚纯函数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 以及一个紧集 K，使得 f 在上、 K 的轨道上的动力学，通过一个接近恒等映射的光滑坐标变换，与 φ在 K的轨道上的动力学共轭。如果 K 不分离平面，则函数 f 可以选为整函数。如果 φ 的所有迭代在 K上都是单叶的，我们可以取 $K = K$。

我们还证明了一个关于振荡动力学的类似定理。最后，我们运用所得结果回答了 Benini 等人提出的若干有关整函数游荡域的问题。

1. INTRODUCTION

超越函数迭代理论始于 Fatou [Fat26] 于 1926 年发表的开创性著作。Fatou [Fat19] 和 Julia [Jul18] 都撰写了关于有理函数迭代的长篇论文，各自重点研究了如今分别称为 Fatou集和朱利亚集的对象。这些论文奠定了被称为全纯动力系统的研究领域的基础。Fatou 将这一理论推广到超越整函数（即复平面上的全纯自映射，其中 ∞ 是一个本性奇点）时，已经发现了一些显著差异，包括存在一些曲线，使得曲线上的点在迭代下快速收敛到 ∞。

超越整函数或亚纯函数 f的*Fatou*集 $F(f)$由这样一些点组成：这些点存在一个邻域，使得迭代 $\{f^n\}_{n=0}^{\infty}$ 均有定义并构成正规族。朱利亚集 $J(f)$定义为 $\mathbb{C}$中 $F(f)$的补集；在此集合中， f 在迭代下的行为对微小扰动不稳定。根据定义，Fatou集是开集；其连通分支称为 f的*Fatou*分支 。朱利亚集要么是整个 $\mathbb{C}$ ，要么内部为空。关于超越亚纯函数迭代理论的综述，请参阅 [Ber93] 。

本文研究超越函数对游荡动力学的实现。给定超越整函数或亚纯函数 f，若对所有 $n \neq m$， $\partial K \subseteq J(f)$ 与 $f^n(K) \cap f^m(K) = \emptyset$，则称紧集 $K \subseteq \mathbb{C}$ 为 f 的 游荡紧集 。此外，若集合 K 连通，则称 K 为 游荡

日期：2026年2月11日。2020 数学主题分类。主要分类 37F10；次要分类 30D05、37B45、37B55、37F20。关键词和短语。复动力系统、游荡域、若尔当域。

连续统。注意， $J(f)$ 总有具有稠密轨道的点，这些点是（退化的）游荡连续统的例子；事实上， $J(f)$ 总包含一个游荡康托尔集。

还有一个有趣的问题是：其他哪些游荡紧集可能出现？McMullen [McM88] 证明，对于形如 $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda/z^3$的有理映射，当 $\lambda > 0$ 充分小时， $J(f_\lambda)$包含一个由游荡若尔当曲线组成的康托尔集。Cheraghi [Che17] 证明，某些具有不可线性化无理非双曲不动点的二次多项式的朱利亚集包含游荡弧。据我们所知，目前尚不清楚有理映射的朱利亚集是否可能包含一个既不是弧也不是若尔当曲线的非退化游荡连续统。相比之下，由 [Rem16, Theorem 1.6] 可知，存在一个超越整函数 f ，使得对于每个弧状连续统 X，朱利亚集 $J(f)$都包含一个与 X同胚的游荡连续统。（弧状连续统的定义见 [Rem16] 。）

最近， [MRW25b, MRW25a] 证明了，每个紧集 $K \subseteq \mathbb{C}$都是某个超越亚纯函数 f 的游荡紧集；如果 K 是满的（即 $\mathbb{C} \setminus K$ 是连通的），那么 f 可以选为整函数。在这些例子中， f 及其迭代在 K 上的映射行为尤其简单。事实上， f 在 K的某个开邻域上是单叶的，所有迭代 f^n 也如此（在依赖于 n的邻域上）。本文旨在证明这一结果的一个广泛推广。我们证明，若一个集合在迭代下，一致地收敛到 ∞ ，那么任何（不一定是全局定义的）全纯函数的游荡动力系统，都可以通过微小的光滑变量替换，由一个全局定义的超越整函数或亚纯函数实现。更准确地说，我们证明以下定理。在下文中，

$$I(f) := \{z \in \mathbb{C} \colon f^n(z) \to \infty \text{ as } n \to \infty\}$$

表示超越整函数或亚纯函数 f的逃逸集 .

定理 1.1 （通过逃逸游荡域实现动力系统）。设$(X_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一列两两不交的紧集，且$\inf\{|z| \colon z \in X_n\} \to \infty$ 当 $n \to \infty$时成立；设$(C_n)_{n=0}^{\infty}$ 是一列有限集 $C_n \subseteq X_n$。

设 φ 是定义在 $X := \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ 某个邻域上的全纯函数，使得 $\varphi(X_{n-1}) \subseteq X_n$ 且 $\varphi(\partial X_{n-1}) \subseteq \partial X_n$ 对所有 $n \geq 1$均成立。设$(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$ 是一列正数。则存在一个超越亚纯函数 f 和一个 $\mathcal{C}^\infty$微分同胚 $\theta \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ，使得

(a) $f \circ \theta = \theta \circ \varphi$ 在 X上；***(b)*** $|\theta(z) - z| \leq \varepsilon_n$ 在 X_n 上对所有 $n \geq 0$均成立；***(c)*** $\partial\theta(X) \subseteq J(f)$；***(d)*** θ 在 X上满足柯西-黎曼方程；特别地，它在$\operatorname{int}(X)$上是共形的；***(e)*** $\theta(c) = c$ 对 $c \in \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$成立。

特别地， $\theta(X) \subseteq I(f)$ 以及每个 $\theta(X_n)$ 都是 f 的游荡紧集 .

我们还可以在超越整函数或亚纯函数 f 的蹦极集 中实现 φ 的动力系统，

$$BU(f) \coloneqq \left\{z \in \mathbb{C}\colon \liminf_{n\to\infty}|f^n(z)| < \infty = \limsup_{n\to\infty}|f^n(z)|\right\}.$$

定理 1.2（通过振荡游荡域实现动力系统）。 设（X_n）$_{n=0}^{\infty}$ 是复数域中一列两两不交的紧集，且$\inf\{|z|\colon\ z \in X_n\} \to \infty$ 当 $n \to \infty$时成立；设（C_n）$_{n=0}^{\infty}$ 是一列有限集 $C_n \subseteq X_n$。

设 φ 是定义在 $X \coloneqq \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ 的某个邻域上的全纯函数，使得 φ（X_{n-1}）$\subseteq X_n$ 且 φ（∂X_{n-1}）$\subseteq \partial X_n$ 对所有 $n \geq 1$都成立。设（ε_n）$_{n=0}^{\infty}$ 为一个正数序列。那么存在一个超越亚纯函数 f、一个 $\mathcal{C}^\infty$微分同胚 $\theta\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 以及一个序列（k_n）$_{n=0}^{\infty}$，使得

(a) $f^{k_n} \circ \theta = \theta \circ \varphi$ 在 X_n 上对所有 $n \geq 0$都成立；***(b)*** $|\theta$（z）$- z| \leq \varepsilon_n$ 在 X_n 上对所有 $n \geq 0$都成立；***(c)*** $\partial\theta$（X）$\subseteq J$（f）；***(d)*** θ 在 X上满足柯西-黎曼方程；特别地，它在$\mathrm{int}(X)$上共形；***(e)*** θ（c）$= c$ 对 $c \in \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$成立；***(f)*** 集合 f（θ（X））有界。

特别地，θ（X）$\subseteq BU$（f）以及每个 θ（X_n）都是 f 的游荡紧集。

注 1.3。证明定理 1.1 和定理 1.2 的关键结果是定理 4.4，该定理是关于非自治全纯动力系统之间共轭的一个更一般的结果。

注 1.4。设 $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ 是一个非负整数序列。那么，定理 1.1 和定理 1.2 的 (b) 部分可以加强如下：θ 在 X_n 的一个邻域上与恒等映射 $\mathcal{C}^{M_n}$-近似，并且在其他地方等于 id。此外，θ 在 C_n 上与 id 直到 M_n 阶一致。（见注 5.4。）

一般而言，函数 f 会有极点。事实上，例如，当集合 X_n 分离平面，而 X_n 对于无穷多个 $n \in \mathbb{N}$ 都属于 $\mathbb{C} \setminus X_{n+1}$ 的无界连通分支时，这是不可避免的。然而，当集合 X_n 是非分离的时，我们可以构造出整函数 f。

定理 1.5（整函数情形）。 在定理 *1.1* 和定理 *1.2* 中，如果 $\mathbb{C} \setminus X$ 连通，那么 f 可以取为整函数。

例 1.6。 设 K 为***Douady***兔，它是 $P_c(z) = z^2 + c$ 的填充朱利亚集，其中 $c \simeq -0.12 + 0.74i$。这个二次多项式有一个周期为三的吸引周期：$0 \mapsto c \mapsto c^2 + c \mapsto 0$。对于 $n \geq 0$，考虑 $X_n \coloneqq K + t \cdot n$对 K的平移，其中 $t > 0$。如果 t 足够大，那么这些 X_n 两两不交。事实上，容易验证 K 包含在以原点为中心、半径为 2 的闭圆盘内，因此我们可以取 $t = 5$；数值计算表明，$t = 3$ 也足够。我们可以在 $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ 上定义若干具有不同动力系统的模型映射 φ。若设$\varphi(z) = z + t$ 于 X上，则 φ 及其所有迭代在 K 上都是单叶的。另一方面，若对于 $n \geq 0$，定义 $\varphi_{|X_n}(z) = (z - 3n)^2 + c + 3(n + 1)$，则可得到一个映射，除平移外，它与 P_c 具有相同的动力系统（见图 1）。

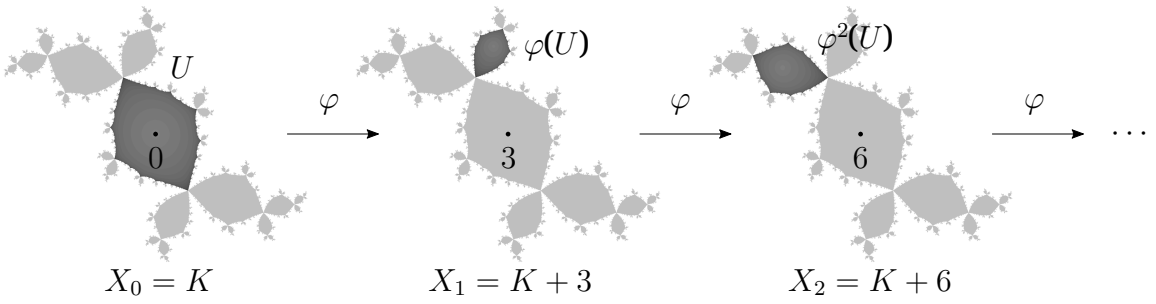

FIGURE 1. 例 1.6 中的连续统 $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ 与模型映射 φ。此处 K 为 Douady兔（浅灰色），区域 U （深灰色）是 int(K) 的分支之一。注意，对所有 $n \geq 0$，均有 $\varphi^{n+3}(U) = \varphi^n(U) + 9$。

注 1.7。 在定理 1.1 和定理 1.2 中，(c) 部分可以加强如下： $\theta(\partial X)$的每个连通分支都是 $J(f)$的一个连通分支。（即使 $\mathbb{C} \setminus X$ 连通，我们为此构造的函数也会有极点。）

在我们的定理中，集合 $\theta(X_0)$ 将不同于 X_0 （尽管它们通过一个接近恒等映射的微分同胚相关联）。这在一般情况下似乎难以避免。然而，当 φ为单射时，我们证明可以精确实现 X_0 ，从而将上述先前结果 [Boc21，定理 1]，[MRW25b，定理 1.7] 以及 [MRW25a，定理 1.3] 作为特例加以恢复。

定理1.8 （实现单叶动力学）。 在定理 *1.1*、*1.2* 或 *1.5* 的假设下，进一步假设 φ在 X 的某个邻域上是单叶的，并且对所有 $n \geq 0$，$\varphi(X_n) = X_{n+1}$。那么我们可以选择 θ，使得 $\theta = \mathrm{id}$ 在 X_0上成立。

应用。 游荡紧集与游荡域密切相关：即并非最终周期的 Fatou 分支。若 K 是 f的一个游荡紧集，那么 int(K)的每个分支都是 f的游荡域；因此，在定理 1.1 中， $\theta(X)$的每个内部分支都是 f的游荡域。请注意，反过来未必成立：若 U 是 f的一个游荡域，那么按照我们的定义，U 未必是 f的游荡连续统。事实上，$f(z) = z + \sin(z) + 2\pi$在实轴上有游荡域 U，且满足 $U \cap f(U) \neq \emptyset$。在这个例子中，每个游荡域的闭包都是 f^2的游荡连续统；然而，一般而言，例如游荡域的边界是否可能包含 f的不动点，目前尚不清楚。

游荡域可分为逃逸型、振荡型 或有界轨道型 ，分别取决于区域中的点是否属于 $I(f)$、属于$BU(f)$，或具有有界轨道。是否存在有界轨道型游荡域是一个著名的公开问题 [HL19, 问题 2.67]。在定理 1.1 中， X 的任何内部分支都是逃逸型游荡域；而在定理 1.2 中，它们是振荡型游荡域。

现在，我们将说明如何运用我们的定理来回答一些关于整函数在单连通游荡

域上的可能行为的未解问题。Benini 等人 [BEF+22] 提出了这类游荡域内部动力学的分类。一方面，他们根据迭代相对于双曲度量的渐进行为，将这种动力系统分为收缩型、半收缩型或最终等距型。他们还区分轨道是远离边界（按照欧几里得距离衡量）、收敛到边界，还是沿不同子序列表现出这两种行为。（精确定义见第 7 节。）这两种描述组合起来，得到逃逸游荡域的九种可能类型，以及振荡游荡域的六种可能类型（其迭代无法始终远离边界）。

Benini 等人还证明，九种类型的逃逸游荡域都可以实现 [BEF+22，定理 E],；而 Evdoridou、Rippon 和 Stallard [ERS23，定理 1.1] 构造了六种类型的振荡游荡域的实例。对于其中一些逃逸型实例， [BEF+22，定理 7.2] 证明游荡域可以取为约旦域；但对于其余类型以及振荡游荡域，能否做到这一点仍未有定论。

我们可以利用实现定理回答这个问题。事实上，上述实例是通过逼近适当的 Blaschke 乘积序列构造的，由此我们得到以下结果。

推论1.9。 对于逃逸型（分别为振荡型）内部动力学的九种（分别为六种）类型中的每一种，都存在一个超越整函数，其游荡域具有 U 这种内部动力学类型，并且 ∂U 是 $\mathcal{C}^\infty$一条若尔当曲线。在最终为等距的内部动力学情形下，我们实际上可以取 $U = \mathbb{D}$。

据我们所知，这是首批具有光滑边界的收缩或半收缩游荡域实例。

我们还运用这些结果，回答了 [BEF+24] 中提出的若干关于游荡域边界行为的问题。作者研究了定义在单连通区域上的全纯函数序列的边界行为。类比于广为人知的 Denjoy–Wolff 点概念，他们定义了此类区域边界上的 Denjoy–Wolff 集；见定义 8.1。在同一篇论文中，他们构造了各种边界行为颇为引人入胜的有限布拉施克乘积序列。例如， [BEF+24，定理 D]表明，所有内部轨道都趋于 1，而所有边界轨道最终离开 1 周围某个弧段，这种情况是可能发生的。作者提出了这样一个问题： [BEF+24, 定理 D 后的注 2] 这种例子能否由某个整函数的游荡域实现；我们证明确实可以（见例 8.3）。事实上，我们证明了 [BEF+24，第 8]节中构造的所有例子都可以通过这种方式实现，从而回答了 [BEF+24，第 7] 页提出的问题。

我们再提及我们的结果的四项应用。

(a) 在 [EGM25], 中，定理 1.5 被用于构造若干具有游荡域的整函数实例；从复合算子的泛性角度看，这些游荡域具有有趣的性质。(b) 我们的结果为 [EFGP24, 定理 B], 提供了一种新的证明。该定理构造了一个同时呈现离散与不可分轨道关系的游荡域。

(c) 在 [FR24], 中，定理 1.1 被用于为亚纯函数构造一种新型的多连通游荡域：一个局部但非全局最终等距的 游荡域；定义见 [FR24] 。(d) 在 [MRW26], 中，我们将这一技术与 [MRW25b] 中的构造相结合，回答了 Bishop [于 2014 年提出的一个问题（第 133] 页；另见 [BR25, 问题 6.47]）：关于逃逸型游荡域边界上的非逃逸点。

记号。我们用 $D(z,r)$ 表示以 $z\in\mathbb{C}$ 为中心、半径为 $r>0$ 的圆盘；记$\mathbb{D}$ 为单位圆盘 $D(0,1)$。在本文中，对于集合 $X\subseteq\mathbb{C}$，其边界 ∂X和闭包 X 均取自 $\mathbb{C}$。若 X_1, $X_2\subseteq\mathbb{C}$ 是闭集，则 $\operatorname{dist}(X_1,X_2)$ 表示它们之间的欧几里得距离。若 $U\subseteq\mathbb{C}$是一个区域，且 $z,w\in U$，则我们用 $\operatorname{dist}_U(z,w)$ 表示 z与 w在 U中的双曲距离。若 $U,V\subseteq\mathbb{C}$ 是开集，则记作 $U\Subset V$；若 U在 V中相对紧，即 U有界且 $U\subseteq V$。对于 $0\le n\le\infty$，类 $\mathcal{C}^n=\mathcal{C}^n(\mathbb{R}^2)$ 由函数 $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 组成，这些函数n 次可微且其 n 阶偏导数连续，并可赋予范数

$$\|f\|_{\mathcal{C}^n}:=\sum_{k=0}^{n}\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\|\mathrm{D}^k f(x,y)\|,\quad\text{for } 0\le n<\infty,$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示算子范数。在不会引起混淆时，我们将直接用 $\|f\|$代替 $\|f\|_{\mathcal{C}^0}$。对于全纯函数 $\varphi\colon U\to\mathbb{C}$，$\operatorname{CP}(\varphi)$ 表示 φ 在 U中的所有临界点组成的集合。

本文结构。在第 2 节中，我们介绍所需的逼近理论工具。在第 3 节中，我们证明，在紧集上定义的两个相近且具有相同临界点和临界值的全纯映射，可由一个共形同构共轭，且该共形同构可延拓到 $\mathbb{C}$。第 4 节给出了证明定理 1.1（逃逸动力学）、1.2（振荡动力学）和 1.5（整函数情形）所需的关键结果，这些定理将在第 5 节中证明。第 6 节讨论单叶情形。在第 7 节中，我们构造了若尔当边界的游荡域实例，使其实现各种内部动力学。最后，第 8 节介绍了若干应用，利用我们的结果构造具有有趣边界动力学的游荡域。

致谢。 我们感谢Gustavo Ferreira、Phil Rippon、Gwyneth Stallard和 James Waterman 就这一主题进行了有益的讨论。

2. Preliminaries

本节将介绍我们需要用到的逼近理论工具。我们将使用以下版本的龙格定理 [Gai87，第 2 定理，第 94], 页，该定理基于[EL87，主要引理], ，并且可以用类似的方法证明；另见 [Boc21，附录]和 [MRW25a，第 4 定理1]。

定理 2.1（龙格定理的延拓）。 设 $A\subseteq\mathbb{C}$ 是一个紧集。假设 $g\colon A\to\mathbb{C}$ 在 A 的某个邻域内亚纯。那么对于每个 $\varepsilon>0$、 $M\in\mathbb{N}$

以及每个有限点集 $C = \{z_n\}_{n=1}^{N} \subseteq A$，都存在一个有理函数 f，使得

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \quad for\ all\ z \in A \setminus g^{-1}(\infty)$$

and

$$f^{(m)}(z_n) = g^{(m)}(z_n)$$

对所有 $0 \le m \le M$ 和 $1 \le n \le N$。若 A 是满的，且 g 在 A的某个邻域上全纯，则 f 可以选为多项式。

下面的引理将在后文用于确保我们的紧集的边界是朱利亚集的子集。

引理 2.2. 设 U、$V \subseteq \mathbb{C}$ 为开集，且 $f\colon U \to V$全纯且无处局部常值。设 $X \subseteq U$ 是紧集。对每个 $\varepsilon > 0$，存在具有如下性质的 $\delta > 0$ 。设 $P \subseteq \mathbb{C}$满足$\operatorname{dist}(z, P) \le \delta$，对每个 $z \in f(X)$，$\tilde{}$ $\tilde{}$，并设 $f\colon U \to \mathbb{C}$是全纯函数，且 $|f - f| < \delta$在 U上成立。则$\tilde{}\operatorname{dist}(w, f^{-1}(P)) \le \varepsilon$对每个 $w \in X$成立。

$\tilde{}$证明。 我们首先对 $f = f$证明该引理。设 $(B_n)_{n\in N}$ 是一个由半径为 $\varepsilon/2$ 的开球组成的有限集，其中 B_n 以 $z_n \in X$为圆心，并满足 $X \subseteq \bigcup_{n\ge 0} B_n$。根据开映射定理，像 $f(B_n)$ 是一个包含 $f(z_n)$ 的开集。设 $r_n > 0$为以 $f(z_n)$ 为圆心且包含于 $f(B_n)$ 中的最大球的半径。考虑

$$\delta = \min_{n\in N} r_n.$$

设 P 满足：对所有 $z \in f(X)$，$\operatorname{dist}(z, P) \le \delta$，则 $f^{-1}(P)$ 在每个球B_n中都有一点，因此对每个 $w \in X$，$\operatorname{dist}(w, f^{-1}(P)) \le \varepsilon$。

Th $\tilde{}$e 的情形中，若 f 接近 f，则由胡尔维茨定理可从前一种情形推出。 ■

我们还会用到两个关于逼近的简单结果。第一个是 [MRW25b, 引理 2.3] 的一个特例，讨论的是共形同构的逼近。（它也可由下文的引理 3.1 推出。）

Lem引理 2.3。 设 U 为开集，且设 $\varphi\colon\ U \to V$ 为共形同构 .

设 $A \subseteq U$ 为紧集。则存在 $\varepsilon > 0$，具有以下性质：如果 $f\colon\ U \to \mathbb{C}$ 为全纯函数，且对于所有 $z \in U$ 都有 $|f(z) - \varphi(z)| \le \varepsilon$，那么 f 在 A 上是单射，并且 $f(A) \subseteq V$。

第二个结果实质上说明，函数复合是一种连续运算；我们省略简单的证明。（另请参见 [MRW25b，引理 2.4]。）

引理 2.4 (复合的逼近**)**。 设 $n \ge 0$，令 $(U_k)_{k=0}^{n}$ 为 $\mathbb{C}$ 的开子集序列，并令 $(g_k)_{k=0}^{n}$ 为连续函数序列 $g_k\colon\ U_k \to \mathbb{C}$。对于 $k \le n$，定义

$$G_k := g_k \circ \cdots \circ g_0.$$

假设 $K \subseteq U_0$ 为紧集，且 G_n 在 K 上有定义。

那么对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ ，具有以下性质。如果 $(f_k)_{k=0}^{n}$ 是连续函数 $f_k\colon$ $U_k \to \mathbb{C}$，且对所有 $z \in U_k$都有 $|f_k(z) - g_k(z)| < \delta$，那么 F_n 在 K上有定义，其中

$$F_k := f_k \circ \cdots \circ f_0$$

对于 $k \le n$，并且

$$|F_k(z) - G_k(z)| < \varepsilon \tag{2.1}$$

对所有 $z \in K$ 和所有 $k \le n$。

3. Approximation of holomorphic maps

本节证明：如果两个全纯函数彼此接近，且它们的临界点也彼此接近（重数相同），那么这两个函数相差一个与恒等映射接近的同胚的前复合。注意，两个全纯函数可以任意接近，但其临界点集合却不同（例如，$f(z) = z^3$ 有一个二重临界点，而 $g(z) = z^3 + \varepsilon$ 对于 $\varepsilon \neq 0$有两个单根临界点）。

引理 3.1. 设 $U \subseteq \mathbb{C}$ 为开集，设 $\varphi\colon U \to \mathbb{C}$ 为全纯函数。另设$V \Subset U$ 为开集，并假设存在一个有限集 $C \subseteq V$，其中包含 φ 在 U中的所有临界点。对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 满足以下性质。

设 $f\colon U \to \mathbb{C}$ 是全纯的，满足 $|f - \varphi| \le \delta$ 在 U上，满足 $f = \varphi$在 C上，并且 φ 在 V 中的每个临界点都是 f 的临界点，且重数相同。则存在一个共形同构 $\theta\colon V \to \theta(V)$，满足 $f \circ \theta = \varphi$在 V上，满足 $|\theta(z) - z| < \varepsilon$ 对所有 $z \in V$成立，并且 $\theta =$ 恒等映射 在 C上。

证明。 首先假设 $C = \emptyset$，特别是 φ 在 U中没有临界点。于是 φ 是局部单叶的。

取足够小的 $\eta > 0$，使得 $\eta < \min\bigl(\operatorname{dist}(V, \partial U)/2,\ \varepsilon\bigr)$ 并且

$$2\eta < \min\bigl\{|\zeta - z|\colon \zeta, z \in \overline{V}, \zeta \neq z \text{ and } \varphi(\zeta) = \varphi(z)\bigr\}. \tag{3.1}$$

最小值存在，因为 φ 是连续的，且 V 是 U的紧致子集；该值为正，因为 φ是局部单叶的。最后，取

$$\delta < \min\bigl\{|\varphi(z) - \varphi(\zeta)|\colon z \in \overline{V}, \zeta \in U \text{ and } |z - \zeta| = \eta\bigr\}/2.$$

No现在假设 f 如引理陈述所述，并定义 $\theta\colon V \to \mathbb{C}$ 为

$$\theta(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,\eta)} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - \varphi(z)} \mathrm{d}\zeta.$$

要看出 θ 确实对所有 $z \in V$都有定义，注意到 $D(z, \eta) \subseteq U$，这是由 η 的选取以及

$$|f(\zeta) - \varphi(z)| \ge |\varphi(\zeta) - \varphi(z)| - |f(\zeta) - \varphi(\zeta)| > 2\delta - \delta = \delta$$

当 $|\zeta - z| = \eta$时。此外，θ 是 z 的全纯函数，因为被积函数在 z中全纯。

设 $z \in V$。则 $\zeta \mapsto \varphi(\zeta) - \varphi(z)$在 $D(z, \eta)$中恰好有一个根，这是由 η的选取所决定的，且由于 φ 是局部单叶的，该根为单根。若 $\zeta \in \partial D(z, \eta)$，则

$$|f(\zeta) - \varphi(\zeta)| \le \delta < |\varphi(\zeta) - \varphi(z)|.$$

根据Rouch´e定理，$\zeta \mapsto f(\zeta) - \varphi(z)$也恰好有一个根 α，位于 $D(z,\eta)$中（计及重数）。根据留数定理，

$$\theta(z) = \operatorname{Res}\Big(\zeta \mapsto \zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-\varphi(z)}, \alpha\Big) = \lim_{\zeta\to\alpha}(\zeta-\alpha)\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-\varphi(z)}$$
$$= \lim_{\zeta\to\alpha}\zeta\cdot\frac{\zeta-\alpha}{f(\zeta)-f(\alpha)}\cdot f'(\zeta) = \alpha\cdot\frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha.$$

因此，对于所有 $z \in V$，$f(\theta(z)) = \varphi(z)$。此外，根据构造，$\theta(z) = \alpha \in D(z, \eta)$，因此对于所有 $z \in V$，$|\theta(z) - z| < \eta < \varepsilon$。同理，若 $\theta(z) = \theta(w)$，则 $|z-w| < 2\eta$。由 (3.1) 可得 $z = w$。所以 φ 是单射，因而是到其像上的共形同构。这就完成了 $C = \emptyset$ 情形下的证明。

现在假设 $C \neq \emptyset$。对于每个 $c \in C$，令 d_c 为 φ 在 c处的局部次数。我们可以在 $\varphi(c)$ 周围选取一个足够小的圆盘 $W(c)$，使得 $W(c) \cap \varphi(C) = \{\varphi(c)\}$，并且 $\varphi^{-1}(W(c))$ 的分支 $\Omega(c)$（其中包含 c）满足 $\Omega(c) \subseteq V$。于是 $\Omega(c)$ 是一个若尔当域，且 $\varphi\colon \Omega(c) \to W(c)$ 是一个分歧覆盖映射，除 c 处（可能）外没有临界点。选取足够小的 $\rho > 0$，使得对于所有 $c \in C$，$D(c, \rho) \subseteq \Omega(c)$。

现在定义 $U^* := U \setminus C$ 和

$$V^* := V \setminus \bigcup_{c\in C}\overline{D(c,\rho)} \Subset U^*.$$

于是，φ 在 U^*中没有临界点。令 $\delta > 0$ 为将情形 $C = \emptyset$应用于映射 $\varphi|_{U^*}\colon U^* \to \mathbb{C}$所得，其中 $V^* \Subset U^*$且 $\varepsilon^* = \min(\varepsilon, \operatorname{dist}(V^*, \partial U^*)/2)$。

假设 f 如引理陈述所述。根据 δ的选取，存在一个共形同构 $\theta^*\colon V^* \to \theta(V^*)$，使得 $f(\theta^*(z)) = \varphi(z)$ 且 $|\theta^*(z) - z| < \varepsilon^*$，对所有 $z \in V^*$均成立。

我们断言 θ^* 可解析地延拓到 V。令 $c \in C$；根据假设，f 在 c处的局部次数为 d_c。此外，根据 $W(c)$的选取，将映射 φ 限制在若尔当曲线 $\partial\Omega(c)$ 上时，它是一个次数为 d_c 的覆盖映射。由于在 $\partial\Omega(c)$ 上，$f(\theta(z)) = \varphi(z)$，映射 f 在 $\theta(\partial\Omega(c))$ 上是 d_c对一的。令 $\Omega(c)$ 为由 $\theta(\partial\Omega(c))$ 围成的若尔当域；根据 $\tilde{}$ $\tilde{}$对 ε^*的选取，我们有 $\Omega(c) \subseteq U$ 且 $c \in \Omega(c)$。由黎曼–赫尔维茨公式可知，c是 f 在 $\Omega(c)$ 中唯一的临界点。

因此，$\varphi\colon \Omega(c) \to W(c)$ 是次数为和 d_c 且仅在 c 处有一个临界点的分支覆盖映射。因此存在一个共形同构 $\theta_c\colon \Omega(c) \to \Omega(c)$，满足 $\theta_c(c) = c$ 以及 $f \circ \theta_c = \varphi$；可以选择它使其在 $\partial\Omega(c)$ 上与 θ^* 一致。所需的映射 θ 由下式给出

$$\theta(z) := \begin{cases} \theta^*(z) & \text{if } z \in V^*; \\ \theta_c(z) & \text{if } z \in \Omega(c), c \in C. \end{cases}$$

根据定义，对于所有 $c \in C$，$f \circ \theta = \varphi$ 且 $\theta(c) = c$。此外，$|\theta(z)$ 在 V^* 上 $-z| < \varepsilon^* \leq \varepsilon$。由于

$$V \setminus V^* = \bigcup_{c\in C}\overline{D(c,\rho)} \Subset V,$$

由最大值原理，我们还有 $|\theta(z) - z| < \varepsilon$ 在 V 上成立。根据定义可知，θ 是一个共形同构。引理得证。■

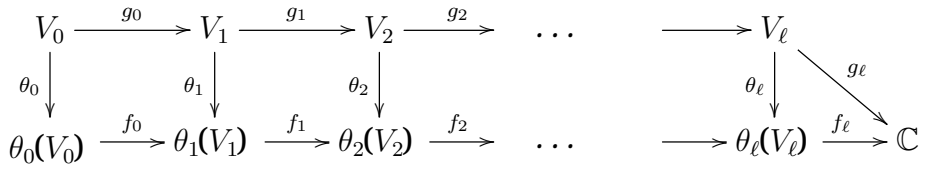

FIGURE 2. 引理 3.2 证明示意图。

引理 3.2. 设 U_0、……、$U_\ell \subseteq \mathbb{C}$ 为开集，且 g_n 是定义在U_n 上的全纯函数，其中 $n = 0$、……、ℓ。另设 $V_n \Subset U_n$ 对于 $n = 0$、……、ℓ 是开集，且满足 $g_n(V_n) \subseteq V_{n+1}$，其中 $n = 0$、……、$\ell - 1$。此外，设 $C_n \subseteq V_n$ 对于 $n = 0$、……、ℓ 是一个有限集，使得C_n 包含 g_n 在 V_n 中的所有临界点，并且满足 $g_n(C_n) \subseteq C_{n+1}$，其中 $n < \ell$。那么，对于每个 $\eta > 0$，都存在 $\delta > 0$ 具有以下性质。

假设对于每个 $n = 0$，……，ℓ，f_n 是定义在 U_n 上的全纯函数，且满足 $|f_n - g_n| < \delta$；此外，$f_n|_{C_n} = g_n|_{C_n}$，其中 g_n 的每个临界点 $c \in C_n$ 也是 f_n 的临界点，且重数相同。

那么对于每个 $n = 0$，……，ℓ，存在一个共形同胚 θ_n：$V_n \to \theta_n(V_n)$，满足 $\theta_n(V_n) \subseteq U_n$，使得

(a) $f_n \circ \theta_n = \theta_{n+1} \circ g_n$ 在 V_n 上对 $n = 0$，……，$\ell - 1$ 成立，***(b)*** $f_\ell \circ \theta_\ell = g_\ell$ 在 V_ℓ 上成立，***(c)*** $\theta_n =$ 恒等 在 C_n 上对 $n = 0$，……，ℓ 成立，且 ***(d)*** 对所有 $z \in V_n$，均有 $|\theta_n(z) - z| < \eta$。

证明。我们对 ℓ 使用归纳法证明该断言。对于 $\ell = 0$，这是将引理 3.1 应用于 $U = U_0$、$\varphi = g_0$ 和 $V = V_0$ 后得到的结论。

现在假设该引理对 $\ell - 1$ 已成立，并来证明它对 ℓ 也成立。设 $U \subseteq U_0$ 是开集，满足 $V_0 \subseteq U$ 和 $g_0(U) \subseteq V_1$。将引理 3.1 应用于 $\varphi = g_0|_U$，其中取 $V = V_0$ 和 $\varepsilon = \eta$。

我们得到一个 $\delta_0 > 0$，具有以下性质。设 f 在 U 上全纯，满足$|f - g_0| < \delta_0$，且在 C_0 上满足 $f = g_0$，并且在临界点处具有相同的重数。那么存在一个共形同构 θ，定义在 V_0 上，使得 $f \circ \theta = g_0$，且$|\theta - \mathrm{id}| < \eta$ 在 V_0 上，并且 $\varphi = \mathrm{id}$ 在 C_0 上。

现在选取足够小的 $\delta_1 > 0$，使得以下条件成立。若 f_0 在 U_0 上全纯，且在 U_0 上满足 $|f_0 - g_0| < \delta_1$，并且 θ：$V_1 \to \mathbb{C}$ 是共形映射，在 V_1 上满足 $|\theta - \mathrm{id}| < \delta_1$，且 $\theta|_{C_1} = \mathrm{id}$，则 $f_0(U) \subseteq \theta(V_1)$，并且 $|\theta^{-1} \circ f_0 - g_0| < \delta_0$ 在 U 上成立。这样的数 δ_1 存在，因为当 $f_0 \to g_0$ 在 U_0 上一致地趋于 $\theta \to \mathrm{id}$ 时，$\theta^{-1} \circ f_0 \to g_0$ 在 U 上一致地成立。

现在将归纳假设应用于映射 g_1，……，g_ℓ，其中 $\tilde{\eta} := \min(\eta, \delta_1)$。我们得到一个数 $\tilde{\delta}$，并令 $\delta := \min(\tilde{\delta}, \delta_1)$。

现在设映射 $(f_n)_{n=0}^{\ell}$ 如引理陈述所述（见图 2）。根据归纳假设，我们得到具有所需性质的 $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$。此外，再次根据归纳假设，$|\theta_1 - \mathrm{id}| < \delta_1$ 在 V_0上。因此，根据 δ_1的选取，映射 $f := \theta_1^{-1} \circ f_0$ 在 C_0上满足 $|f - g_0| < \delta_0$ 和 $f = g_0$。根据 δ_0的选取，存在映射 θ_0，使得 $\theta_0 =$ 在 C_0上为恒等映射，并且 $|\theta_0(z) - z| < \eta$ 且在 V_0上满足 $f_0 \circ \theta_0 = \theta_1 \circ f \circ \theta_0 = \theta_1 \circ g_0$。■

现在我们来说明，如何将一个接近恒等映射的共形同构 θ 延拓为整个复平面上的微分同胚。

命题 3.3. 假设 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ 是紧致的，且 $U \supseteq X$ 是开集。设 $m \geq 1$，并设 $\varepsilon > 0$。那么存在 $\delta > 0$，具有以下性质。

假设 $\theta\colon\ U \to \mathbb{R}^2$ 是到其像上的微分同胚，且 $\|\theta - 恒等\|_{\mathcal{C}^m} < \delta$.

那么 $\theta|_X$ 可延拓为一个 $\mathcal{C}^\infty$ 微分同胚 $\tilde{\theta}\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，满足 $\|\tilde{\theta} - 恒等\|_{\mathcal{C}^m} < \varepsilon$，并且在 $\mathbb{R}^2 \setminus U$ 上满足 $\tilde{\theta} = 恒等$。

证明。取开集 $V \Subset U$，使得 $X \subseteq V$。设 $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ 是一个光滑函数，满足在 $\mathbb{R}^2 \setminus V$ 上 $\psi = 0$，在 X 上 $\psi = 1$。令 $z = (x,\ y)$，并定义

$$\tilde{\theta}(z) := z + \psi(z) \cdot (\theta(z) - z).$$

于是，根据 $\tilde{\theta}$ 的定义可知，$\tilde{\theta}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上是 $\mathcal{C}^\infty$，并且 $\tilde{\theta} =$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus V$ 上恒等，$\tilde{\theta} = \theta$ 在 X 上。

我们有 $\|\psi \cdot (\theta - \mathrm{id})\|_{\mathcal{C}^m} \to 0$ 作为 $\|\theta - \mathrm{id}\,\|_{\mathcal{C}^m} \to 0$，因为乘法在 $\mathcal{C}^m$-拓扑下连续。因此我们可以选取 $\delta > 0$，使得若 $\|\theta - \mathrm{id}\,\|_{\mathcal{C}^m} < \delta$，则

$$\|\tilde{\theta} - \mathrm{id}\,\|_{\mathcal{C}^m} < \min\Big(\frac{1}{2}, \varepsilon\Big).$$

事实是 $\|\mathrm{D}\theta - \mathrm{D}\,\mathrm{id}\,\| < 1$ 意味着 θ 是一个微分同胚，正如所要求的那样. ■

Co推论 3.4. 设 $m \geq 0$，设 $\Theta\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个微分同胚，并设 $\varepsilon > 0$。

设 $X \subseteq \mathbb{C}$ 是紧致的，且 $V \subseteq \mathbb{C}$ 是 $\Theta(X)$的一个开邻域。那么存在 $\eta > 0$ 满足以下性质。

假设 $\theta\colon\ V \to \theta(V)$ 是一个共形同构，且在 V 上满足 $|\theta - \mathrm{id}| < \eta$。那么存在一个微分同胚 $\theta\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得

(a) $\theta = \theta$ 在 $\Theta(X)$ 的一个邻域上；

(b) 在 V 之外为 $\theta = \mathrm{id}$；*(c)* $\|\theta \circ \Theta - \Theta\|_{\mathcal{C}^m} < \varepsilon$。

证明。令 $V \subseteq V$ 为 $\Theta(X)$ 的一个邻域，并且其紧致包含于 V 中。根据柯西积分公式，在 V 上有 $\|\theta - \mathrm{id}\,\|_{\mathcal{C}^m} \to 0$，而在 V 上有 $|\theta - \mathrm{id}\,\| \to 0$。

因此，对于充分小的 η，由命题 3.3 可知存在满足性质 (a) 和 (b) 的延拓 θ，此外 $\|\theta - \mathrm{id}\,\|_{\mathcal{C}^m} \to 0$ 为 $\eta \to 0$。

由于复合在 $\mathcal{C}^m$-拓扑下是连续的，因此还可推出当 $\eta \to 0$时 $\|\theta\circ\Theta - \Theta\|_{\mathcal{C}^m} \to 0$；于是对于充分小的 η，(c) 成立。■

4. Conjugacies for non-autonomous sequences

现在我们将证明定理 1.1 和定理 1.2 的关键部分。与论文 [Boc21、MRW25b、MRW25a], 中的做法类似，我们的思路是将所需的亚纯函数构造为一列由逼近定义的函数的极限，并使其在越来越多相关紧集的邻域上呈现所需的行为。关键在于，如果在每一步中，我们都选择下一个函数，使其在集合 X_n 上充分接近 φ，并在 X_0、.....、X_{n-1}上接近此前构造的函数，那么所得的极限函数将以我们所期望的方式与 φ 共轭。

这一思路适用于许多不同的情境，并不局限于本文的研究背景。因此，为了便于今后的应用，我们将在一个更一般、但也更抽象的框架下阐述它。我们先定义将要进行逼近的系统类别（定理 1.1 中的情形是其中的一个特例）；回顾一下，我们用 $\mathrm{CP}(\varphi)$ 表示函数 φ 的临界点集合。

定义 4.1（全纯非自治系统）。一个定义在紧集上的标记全纯非自治系统是一个三元组 $\Phi = \big((X_n)_{n=0}^{\infty},(\varphi_n)_{n=0}^{\infty},(C_n)_{n=0}^{\infty}\big)$，其中每个 X_n 都是 $\mathbb{C}$的紧子集，每个 φ_n 都是定义在 X_n 的一个开邻域上的全纯函数，满足 $\varphi_n(X_n) \subseteq X_{n+1}$，而每个 C_n 都是有限集，且 $\mathrm{CP}(\varphi_n) \cap X_n \subseteq C_n$ 和 $\varphi_n(C_n) \subseteq C_{n+1}$。

注 4.2。为简便起见，以下我们将用“非自治系统”代替“定义在紧集上的标记全纯非自治系统”，因为本文只考虑这一类系统。

现在我们希望考虑以下形式的递归构造：我们（以某种方式）选择一个函数 $f_{0,\,1}$，使其在 X_0 的某个邻域内接近 φ_0。然后选择一个函数 $f_{0,\,2}$，使其接近 $f_{0,\,1}$（定义区域相同），并选择一个函数 $f_{1,\,2}$，使其在 X_1 的某个邻域内接近 φ_1。归纳地，在第 j 步，我们选择函数 $f_{n,\,j}$，使其在 $n < j-1$ 时接近 $f_{n,\,j-1}$；并选择 $f_{j-1,\,j}$，使其接近 φ_{j-1}。我们的目标是证明：如果每一步的逼近都足够精确（并以恰当的方式保留临界点），那么对于每个 n，函数 $f_{n,\,j}$ 都收敛到一个函数 f_n；此外，这些极限映射构成一个（定义在适当的紧集序列上的）非自治系统，并且与原系统共轭。

为了更精确地描述这类构造，我们引入以下记号，用于表示如上构造所得函数的“三角形”$(f_{n,\,j})_{0\le n<j}$。以下引入的所有对象都依赖于给定的非自治系统Φ；为简化记号，我们将省略这种依赖关系。

定义 4.3 (三角形)。设 $\Phi = \big((X_n)_{n=0}^{\infty},(\varphi_n)_{n=0}^{\infty},(C_n)_{n=0}^{\infty}\big)$ 是一个非自治系统。对于 $n \ge 0$，我们用 $\mathcal{U}_n(\Phi)$ 表示 X_n 的所有开邻域的集合，在这些邻域上 φ_n 有定义。

一个有限三角形 $\mathcal{T}$(层级为 $k \ge 0$)是一个由 $\mathcal{T} = (f_{n,j})_{0\le n<j\le k}$ 组成的集合，其中的全纯函数满足以下条件。

(a) 设 $0 \le n < k$。则所有 $f_{n,j}$，其中 $j = n+1, \dots, k$，都在同一个区域 $U_n = U_n(\mathcal{T}) \in \mathcal{U}_n(\Phi)$ 上有定义且全纯。(b) 对每个 $z \in C_n$ 和 $n < j \le k$，都有 $f_{n,j}(z) = \varphi_n(z)$，并且$f_{n,j}$ 在 z 附近的局部次数与 φ_n 的局部次数相同。

层级为 k 的有限三角形集合记作 $\Delta_k(\Phi)$；注意， $\Delta_0(\Phi)$ 只包含一个元素（其指标集为空的三角形）。

一个无限三角形是一个集合 $\mathcal{T} = (f_{n,\,j})_{0\le n<j<\infty}$，满足 $\mathcal{T}_{k} := (f_{n,\,j})_{0\le n<j\le k} \in \Delta_k(\Phi)$，对所有 $k \ge 0$ 均成立。注意，$f_{n,\,j}$ 定义在区域 $U_n(\mathcal{T}) \in \mathcal{U}_n(\Phi)$ 上，该区域取决于 n，但与 j 无关。

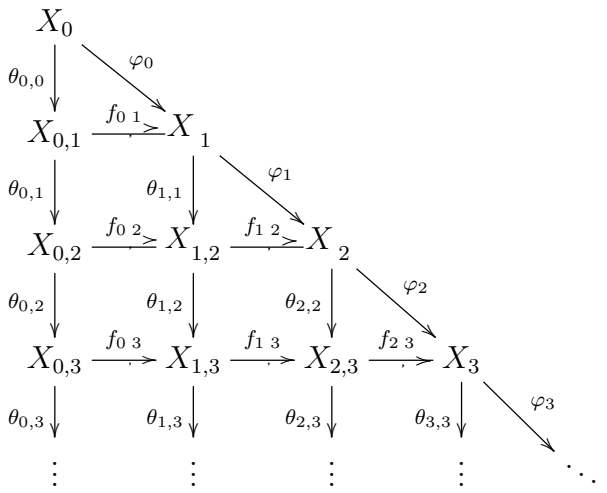

FIGURE 3. 定理 4.4 的证明示意图。对于 $0 \le n \le j$，$\Theta_{n,\,j}$到 $X_{n,\,n} = X_n$的限制是复合 $\theta_{n,\,j-1} \circ \cdots \circ \theta_{n,\,n}$，它将 X_n 映射到 $X_{n,\,j}$。特别地，$\Theta_{j,\,j}$ =是恒等映射，且 $\Theta_{j,\,j+1} = \theta_{j,\,j}$。

采用这一记号，本节的主要结果如下。

定理 4.4 (近邻系统的共轭**)**。 设 $\Phi = \big((X_n)_{n=0}^{\infty}、(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}、(C_n)_{n=0}^{\infty}\big)$ 是一个非自治系统。设$(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$ 为正实数序列，且$(M_n)_{n=0}^{\infty}$ 为非负整数序列。

则存在函数序列$(\delta_j)_{j=1}^{\infty}$，

$$\delta_j \colon \Delta_{j-1}(\Phi) \times \mathcal{U}_{j-1}(\Phi) \to (0,\infty) \tag{4.1}$$

满足以下性质。

设 $\mathcal{T} =(f_{n,j})^{0\le n<j<\infty}$ 是一个无限三角形，使得对所有 $j \ge 1$，

$$|f_{j-1,j} - \varphi_{j-1}| < \delta_j(\mathcal{T}_{j-1}, U_{j-1}(\mathcal{T})) \quad and \tag{4.2}$$

$$|f_{n,j} - f_{n,j-1}| < \delta_j(\mathcal{T}_{j-1}, U_{j-1}(\mathcal{T})) \quad for\ 0 \le n < j-1. \tag{4.3}$$

（这里，$\mathcal{T}_{j-1} \in \Delta_{j-1}(\Phi)$ 是由 $\mathcal{T}$ 确定的第 $j-1$ 层级有限三角形。）

于是，对每个 $n \ge 0$，序列 $(f_{n,j})_{j=n+1}^{\infty}$ 一致收敛到全纯映射 $f_n \colon U_n(\mathcal{T}) \to \mathbb{C}$，并且存在一列微分同胚 $\Theta_n \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，具有以下性质。

(a) $f_n \circ \Theta_n = \Theta_{n+1} \circ \varphi_n$ 在 X_n 上对所有 $n \ge 0$ 成立；***(b)*** $\|\Theta_n(z) - \mathrm{id}\|_{\mathcal{C}^{M_n}} \le \varepsilon_n$ 在 $U_n(\mathcal{T})$ 上对所有 $n \ge 0$ 成立；***(c)*** $\Theta_n = \mathrm{id}$ 在 $U_n(\mathcal{T})$ 之外以及在 C_n 上对所有 $n \ge 0$ 成立；***(d)*** Θ_n 在 X_n 上满足柯西–黎曼微分方程；特别地，它在 $\mathrm{int}(X_n)$ 上是共形的。

证明。 我们递归地构造函数 $(\delta_j)_{j=1}^{\infty}$，并归纳地确保下列条件成立。对 $0 \le n \le j$，令 $m_{n,j} := \max(M_n, j)$。假设 $\mathcal{T}$是定理陈述中所述的一个三角形。则存在一族 $(\Theta_{n,j})_{0\le n\le j<\infty}$，由 $\mathcal{C}^{m_{n,j}}$微分同胚 $\Theta_{n,j} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 组成，并具有下列性质。

1. 对所有 $j \geq 0$，$\Theta_{j,j}$ =为恒等。 2. 每个 $\Theta_{n,j}$ 在 X_n的一个邻域内是共形的。 3. $\Theta_{n,j}$ = 在 U_n 之外以及在 C_n 上为恒等。 4. 当 $0 \leq n < j$ 时，$\Theta_{n+1,j} \circ \varphi_j = f_{n,j} \circ \Theta_{n,j}$ 在 X_n 的一个开邻域上。 5. 当 $0 \leq n \leq j$ 时，$\|\Theta_{n,j} - \Theta_{n,j+1}\|_{\mathcal{C}^{m_{n,j+1}}} < \varepsilon_n/2^{j+1}$。 6. 对所有 j，$\delta_j(\mathcal{T}_{j-1}, U_{j-1}) \leq 2^{-j}$。

此外，对于固定的 $j \geq 0$，映射 $(\Theta_{n,j})_{n=0}^{j}$ 取决于 $\mathcal{T}_j$，但不取决于三角形 $\mathcal{T}$的其他项。

现在，我们将通过归纳应用引理 3.2 和推论 3.4，说明如何定义具有上述性质的 δ_j。

设 $j \geq 1$，并假设给定一个层级为 $j-1$ 的有限三角形 $\mathcal{T}_{j-1}$，且映射 $(\Theta_{n,j-1})_{n=0}^{j-1}$ 已按上述性质定义。再设$U_{j-1} \in \mathcal{U}_{j-1}(\Phi)$。我们必须说明如何定义 $\delta_j = \delta_j(\mathcal{T}_{j-1}, U_{j-1})$，使得对于任意扩展 $\mathcal{T}_{j-1}$ 且满足 (4.2) 和 (4.3) 的三角形 $\mathcal{T}_j$，映射 $(\Theta_{n,j})_{n=0}^{j}$ 均存在。

设 $X_{n,j-1} := \Theta_{n,j-1}(X_n)$，其中 $0 \leq n \leq j-1$。定义 $U_n := U_n(\mathcal{T}_{j-1})$，其中 $n < j-1$，并令 $(g_n)_{n=0}^{j}$ 为由 $g_n := f_{n,j}$ 定义的全纯函数序列，其中 $n < j-1$ 且 $g_{j-1} := \varphi_{j-1}|_{U_{j-1}}$。现在选取开集 $V_n = V_{n,j-1}$，使得 $X_{n,j-1} \subseteq V_n \Subset U_n$ 且$g_n(V_n) \subseteq V_{n+1}$，其中 $n = 0, \ldots, j-2$。为说明这可行，令 $V_{j-1} \Subset U_{j-1}$ 为 $X_{j-1,j-1} = X_{j-1}$ 的任意开邻域，并递归地选取 $V_{\overline{n-1}}$，使得$g_{n-1}(V_{n-1}) \subseteq V_n$；这是可行的，因为 $g_{n-1}(X_{n-1,j-1}) \subseteq X_{n,j-1}$。我们还可以假设 V_n 选得足够小，从而确保 $g_n|_{V_n}$ 的所有临界点都在 $X_{n,j-1}$ 中，因此也在 C_n 中。

对于 $n = 0, \ldots\ldots, j-1$，将推论 3.4 应用于 $m = m_n、_j$、$\Theta = \Theta_n、_{j-1}$、$\varepsilon = \varepsilon_n/2^j$、$X = X_n$ 以及 $V = V_n、_{j-1}$。我们得到一个数 $\eta_n、_j$，它具有如下性质：若 θ 是定义在 V_n、$_{j-1}$ 上且满足 $|\theta - \mathrm{id}| < \eta_n$、$_j$ 的共形同构，则存在一个 $\mathcal{C}^\infty$ 微分同胚 $\tilde{\theta}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，它在 $X_n、_{j-1}$ 的某个邻域上与 θ 一致，在 $V_n、_{j-1}$ 之外（因而也在 U_n 之外）为恒等映射，并且 $\theta \circ \Theta_n、_{j-1}$ 在$\mathcal{C}^{m_n、_j}$-范数下与 $\Theta_n、_{j-1}$ 是 ε-接近的。

令 $\eta_j := \min_{0 \leq n \leq j-1} \eta_{n,j}$，并应用引理 3.2，其中 $\ell = j-1$ 与 $\eta = \eta_j$。区域 $(U_n)_{n=0}^{\ell}$ 与 $(V_n)_{n=0}^{\ell}$、映射 $(g_n)_{n=0}^{\ell}$ 以及集合 C_n 均如上定义，并且由构造满足该引理的假设。我们得到一个数 δ，并定义 $\delta_j(\mathcal{T}_{j-1}, U_{j-1}) := \min(\delta, 2^{-j})$ 如上，以及区域，其中 $\ell = j-1$ 与 $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_j$，以得到一个数 δ。定义 $\delta_j(\mathcal{T}_{j-1}, U_{j-1}(\mathcal{T})) := \min(\delta, 2^{-j})$。

现在假设 $\mathcal{T}_j$ 是延拓 $\mathcal{T}_{j-1}$ 且满足 (4.2) 与 (4.3) 的有限三角形。于是映射$f_{n,j}$ 满足引理 3.2 中的条件，因此存在共形同构$\theta_{n,j}$，它们定义在$V_{n,j}$ 上，并满足该引理的性质 (a)–(d)。由 η的选取，对每个$\theta_{n,j}$，存在一个如上所述的 $\mathcal{C}^\infty$ 微分同胚$\tilde{\theta}_{n,j}$，且映射$\Theta_{n,j+1} := \tilde{\theta}_{n,j} \circ \Theta_{n,j}$ 具有所需性质。

至此，函数 δ_n 的递归定义完成。若 $\mathcal{T}$ 是定理陈述中的一个无限三角形，令映射 $(\Theta_{n,\,j})_{0 \leq n \leq j < \infty}$ 如上所定义。那么，对于任意固定的 n 和任意 $m \geq 0$，序列 $(\Theta_{n,\,j})_{j \geq n}$ 在 $\mathcal{C}^m$ 拓扑中构成一个柯西序列。因此，它收敛于一个具有所需性质的 $\mathcal{C}^\infty$ 微分同胚 Θ_n。■

回顾一下，我们希望利用定理 4.4 构造具有预设动力系统的整函数的游荡紧集。为确保这些紧集的边界包含于朱利亚集中，我们还需要以下附加信息。

定理 4.5。在定理 *4.4* 中，进一步假设给定一个紧集序列$(K_n)_{n=0}^{\infty}$，使得 $K_n \subseteq X_n$ 满足 $\varphi_n(K_n) \subseteq K_{n+1}$ 对所有 $n \geq 0$均成立。那么，除了函数 δ_j之外，还存在一个函数序列

$$\hat{\delta}_j \colon \Delta_j(\Phi) \to (0, \infty),$$

其中 $j \geq 1$，并具有以下性质。

设 $\mathcal{T}$ 是满足定理 *4.4* 中假设的一个三角形，并设$(f_n)_{n=0}^{\infty}$ 是该定理保证存在的极限函数序列。对于每个$\hat{}j \geq 0$，选取一个紧集 Q_j，使其 $\delta_j(\mathcal{T}_j)$邻域包含 K_j。那么，对于每个 $n \geq 0$ 和每个 $j_0 > n$，

$$\Theta_n(K_n) \subseteq \overline{\bigcup_{j=j_0}^{\infty} (f_{j-1} \circ \cdots \circ f_n)^{-1}(Q_j)}.$$

证明。 不失一般性，设 $\varepsilon_n \to 0$ 如 $n \to \infty$，其中 $(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$是定理 4.4 中的序列。我们沿用该定理证明中的记号。

固定 $j \geq 1$。对于 $n \coloneqq 0$, $f_{j-1\,j} \circ \cdots \circ f_{n\,j}$ $V_{n\,j} \to \mathbb{C}$ $K_{n\,j} = \Theta_{n\,j}\ K_n$ $\varepsilon = 1/j$ $_j$ = , $j - 1$，将引理 2.2 应用于复合 $F_{n,\ldots,}$: ., 集合 ,...,( ) 和 ..。我们得到一个数 $\hat{}\delta_{n,j}$，并定义

$$\hat{\delta}_j \coloneqq \min_{0 \leq n \leq j-1} \hat{\delta}_{n,j}.$$

$\hat{}$ 回顾一下，集合 $V_{n,j}$ 仅依赖于 $\mathcal{T}_j$，因此 δ_j 确实是 $\Delta_j(\Phi)$ 上的一个函数。

我们还要求，对于 $j' > j$，定理 4.4 的证明中选取的数 $\delta_{j'}$ 足够小，以确保

$$\|f_{j-1,j'} \circ \cdots \circ f_{n,j'} - F_{n,j}\| < \hat{\delta}_j \tag{4.4}$$

对于所有 $n \leq j-1$ 和所有满足条件 (4.2) 与 (4.3) 的三角形 $\mathcal{T}$，$V_{n,j}$ 上均成立。这可由引理 2.4 得出。

现在假设 $(Q_j)_{j=j_0}^{\infty}$ 是定理陈述中的一个集合，并令 $n \geq 0$。由 (4.4)，映射

$$\tilde{F}_{n,j} \coloneqq f_{j-1} \circ \cdots \circ f_n$$

˜ $\hat{}$ 在 $V_{n,j} - F_{n,j}\| \leq \delta_j$ 上满足$\|F_n$，其中 $n \leq j-1$。因此，根据引理 2.2，$P_{j\cdot\cdot} = \tilde{F}_n^{-1}{}_{,j}(Q_j)$ 的 $1/j$-邻域包含 K_{n,j_0}。由于当 $j \to \infty$ 时 $K_{n,j} \to \Theta_n(K_n)$，故结论成立。■

在定理 4.4 和 4.5 的应用中，三角形 $\mathcal{T}$中的函数通常是递归构造的。在某些情况下，人们可能不希望在整个构造开始之前就指定所有函数 φ_j、集合X_j 或数值 M_j 和 ε_j，而是希望以递归方式选择这些对象。因此，我们指出如下事实。

命题 4.6。 在定理 *4.4* 中，对于每个 $j \geq 1$ ，函数 δ_j 取决于（φ_k）$_{k=0}^{j-1}$、（X_k）$_{k=0}^{j-1}$、（C_k）$_{k=0}^{j-1}$、（ε_k）$_{k=0}^{j-1}$ 和（M_k）$_{k=0}^{j-1}$，但不取决于这些序列在 k 的其他取值下的值。在定理 *4.5* 中，函数 ˆ δ_j 还额外取决于（K_k）$_{k=0}^{j}$。

证明。 仔细检查证明即可得出第一个结论。

对于取决于集合 $V_{n,j}$（对应 $n \leq j-1$）、映射 $\Theta_{n,j}$（对应 $j \leq j-1$）、集合 $X_{n,j} = \Theta_{n,j}(X_n)$（对应 $j \leq j-1$），当然还取决于 X_j。同样，检查定理 4.4 的证明可知，这些对象与索引大于 $j-1$ 的输入数据无关。■

5. Proofs of Theorems 1.1, 1.2 and 1.5

定理 *1.1* 的证明。 我们将超越亚纯函数 f 构造为一列有理映射 $(f_j)_{j=0}^{\infty}$ 的极限，这列映射通过龙格定理（见定理 2.1）归纳定义。更准确地说，对于 $j \geq 1$，函数 f_j 以至多 $\varepsilon_j > 0$ 的误差逼近函数 g_j；函数 g_j 在紧集 $A_j \subseteq \mathbb{C}$ 的某个邻域上有定义且亚纯。函数 g_j 又由前一个函数 f_{j-1} 和 φ定义。进行逼近的集合 (A_j) 满足$A_j \subseteq A_{j+1}$（当 $j \geq 1$ 时），且它们的并集为 $\mathbb{C}$。这意味着，假设 f_j 和 f_{j-1}在 A_j 上足够接近（特别是 f_j 和 f_{j-1} 在 A_j 中有相同的极点），那么在ˆ极限中，我们得到一个亚纯函数 f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$。注意，由于集合 (X_n) 有界， $\theta(X_n)$ 不含任何极点，但对于所有 $n \geq 0$， f 都可能在 $\theta(X_n)$ 附近有极点；我们在证明的最后处理整函数情形。

对于每个 $n \geq 0$，选取一个有界开邻域 W_n ，使其包含 X_n ，且 φ 在其上有定义。根据关于 X_n 的假设，我们可以选取 W_n ，使它们的闭包两两不交，并且当 $n \to \infty$ 时一致地趋于无穷远。我们还可以假设 W_n 不含 φ 在 X 之外的临界点，并且对所有 $n \geq 0$，CP$(\varphi) \cap X_n \subseteq C_n$ 且$\varphi(C_n) \subseteq C_{n+1}$ 。

令 $D = D(c, \rho)$ 为一个圆盘，其闭包与 W_n 的闭包不相交，并定义 $f_0(z) .. = c$。选取紧集的一个递增序列 $(\Lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ ，使得$D \subseteq \Lambda_0$、 $W_j \subseteq \Lambda_n$ 对于 $j < n$ 成立，且 $W_j \cap \Lambda_n = \emptyset$ 对于 $j \geq n$ 成立，并且 $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n = \mathbb{C}$ 。（注意，根据 W_n 的选择，这样的序列 $(\Lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ 确实存在。）

令 $\Phi = \big((X_n)_{n=0}^{\infty}, (\varphi_n)_{n=0}^{\infty}\big)$ 为由 $\varphi_n = \varphi|_{W_n}$ （对所有 n）定义的非自治系统。那么， Φ 满足定理 4.4 和 4.5 的假设，其中 $K_n = \partial X_n$。令 ˆδ_n 和 δ_n 为这些定理所保证存在的函数。（这里，序列 ε_n 如定理陈述中所给出，并且对所有 $n \geq 0$，我们可以取 $M_n = 0$ 。）

我们递归地构造有理映射 $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ 以及开集 $(U_n)_{n=0}^{\infty}$，使得对于 $n < j$，限制 $f_{n,j} .. = f_j|_{U_n}$构成定义 4.3 意义下的无限三角形 $\mathcal{T}$，并满足定理 4.4 中的条件 (4.2) 和 4.4。此外， $|f_j - f_{j-1}| \leq \rho/2^{j+1}$ 在 Λ_{j-1} 上。特别地，每个 f_j 都将 $D(c, \rho)$ 映射到$D(c, \rho/2)$中。

设 $j \geq 1$。假设 f_k 在 $k < j$上有定义， U_n 在 $n < j-1$上有定义，并且映射 $f_{n,k} = f_k|_{U_n}$（其中 $0 \leq n < k \leq j-1$）定义了一个有限三角形 $\mathcal{T}_{j-1}$。令 ˆ$\delta .. =$ ˆ$\delta_{j-1}(\mathcal{T}_{j-1})$。取一个紧集 $Q_{j-1} \subseteq W_{j-1} \setminus X_{j-1}$ ，使得 Q_{j-1} 的 ˆδ-邻域包含 ∂X_{j-1}。令 R_{j-1} 为一个紧邻域，

Q_{j-1} 包含于 W_{j-1} 中且与 X_{j-1}不相交。最后，取 $U_{j-1} \subseteq W_{j-1}$ 为 X_{j-1} 的一个开邻域，使得 $U_{j-1} \cap R_{j-1} = \emptyset$。

定义

$$A_j := \Lambda_{j-1} \cup \overline{U_{j-1}} \cup R_{j-1} \tag{5.1}$$

and

$$g_j(z) := \begin{cases} f_{j-1}(z) & \text{if } z \in \Lambda_{j-1} \\ \varphi_{j-1}(z) & \text{if } z \in \overline{U_{j-1}} \\ c & \text{if } z \in R_{j-1}. \end{cases}$$

注意， A_j 定义中的三个集合是紧致且两两不交的，并且 g_j 在 A_j的一个邻域内是亚纯的。

Set

$$\delta := \min\bigl(2^{-(j+1)}\rho, \delta_n(\mathcal{T}_{j-1}, U_{j-1})\bigr).$$

设 $(C_n)_{n=0}^{\infty}$ 为定义 4.3 中定义的集合。由定理 2.1，我们可以选取 f_j 为有理函数，使其在 A_j上与 g_j 的差小于 δ，并且在 $\bigcup_{k=0}^{j-1} C_k$ 中的各点处取值与 g_j相同，局部次数也相同。特别地， $\mathcal{T}_j$ 是层级为 j的三角形，符合归纳假设。

至此，递归构造完成。根据构造，无限三角形 $(f_{n,\ j})_{0\le n<j<\infty}$ 满足定理 4.4 和 4.5 的假设。此外，函数 f_j 收敛到全局亚纯函数 f，当 $j \to \infty$时成立。

设 (Θ_n) 为定理 4.4 中的函数，并定义 $\theta\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使其在每个 U_n上与 Θ_n一致，而在 U_n的并集之外取恒等映射。于是，(a)、(b) 和 (d) 由定理 4.4 的结论得出。此外，对所有 $n \ge 0$， $f(Q_n) \subseteq D$，且 $f(D) \subseteq D$。因此， Q_n 中的所有点都有有界轨道。由定理 4.5，所有集合 Q_n 的逆向轨道的并集在 $\partial\theta(X)$ 上聚集。另一方面， $\theta(X) \subseteq I(f)$。由此得出， $\partial\theta(X) \subseteq J(f)$，正如 (c) 中所述。至此，亚纯情形下的证明完成。■

注记 5.1。注意，假设 $\varphi(\partial X_n) \subseteq \partial X_{n+1}$ 仅用于确保 $K_n := \partial X_n$ 满足定理 4.5 的假设。若不作此假设，我们可以改为设

$$K_n := \bigl\{z \in \partial X_n\colon \varphi_\ell(\varphi_{\ell-1}(\cdots(\varphi_n(z))\cdots)) \in \partial X_\ell \text{ for all } \ell > n\bigr\}$$

证明过程完全相同。由此可知，存在一个亚纯函数 f，满足定理 1.1 的结论 (a)、(b) 和 (d)，而 (c) 应替换为

(c') $\Theta(K_n) \subseteq J(f)$ for all $n \ge 0$.

类似地，我们可以应用定理 4.4 来证明定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明。证明与定理 1.1 的证明类似。特别是，构造的整体思路相同：我们递归地构造一个有理映射序列 $(f_j)_{j=0}^{\infty}$，其中每个映射都逼近函数 g_j；该函数由构造的前几个步骤定义。非自治系统 Φ 的定义方式与定理 1.1 的证明中相同，但现在三角形 $\mathcal{T}$ 由

映射 $f_{n,\ j} := f_j^{k_n}|_{U_n}$ 给出。（和之前一样， U_n 是 X_n 的一个邻域，它在构造过程中通过归纳选取。）序列 $(k_n)_{n=0}^{\infty}$ 由下式给出：

$$k_n := n + 2, \quad \text{for } n \geq 0.$$

按照定理 1.1 的证明，选取开集 $(W_n)_{n=0}^{\infty}$、圆盘 D 和映射 f_0。此外，取一族圆盘 $(D_n)_{n=0}^{\infty}$，使其闭包与 D 及集合 W_n（$n \geq 0$）的闭包互不相交，并且当 $n \to \infty$ 时，$\inf_{z \in D_n} |z| \to \infty$。另外，对每个 $n \geq 0$，选取两个较小的子圆盘 Ω_n，Σ_n，使它们的闭包彼此不相交，且包含于 D_n。设 ω_n 和 σ_n 为仿射映射，使得

$$\overline{W_{n+1}} \subseteq \omega_n(\Omega_n) \quad \text{and} \quad \overline{D_{n+1}} \subseteq \sigma_n(\Sigma_n).$$

此外，选取足够小的 $\alpha_n > 0$，使得下述性质成立。设 f 是 $\Omega_n \cup \Sigma_n$ 上的全纯函数，满足在 Ω_n 上 $|f - \omega_n| \leq \alpha_n$，且在 Σ_n上 $|f - \sigma_n| \leq \alpha_n$。那么 Ω_n 包含一个单连通区域，该区域经 f共形映射到W_{n+1}， Σ_n 和 D_{n+1}的情形也类似。这可由引理 2.3 得出。

除了定理 1.1 证明中的条件外，还要选取紧集 $(\Lambda_n)_{n=0}^{\infty}$，使得 $D_j \subseteq \Lambda_n$ 对于 $j < n$ 成立，并且 $D_j \cap \Lambda_n = 0$ 对于 $j \geq n$成立。与之前一样，选取映射 $(f_j)_{j=0}^{\infty}$ 和区域 $(U_n)_{n=0}^{\infty}$，使得上述映射$f_{n,j}$ 构成满足 (4.2) 和 (4.3) 的三角形，并且使 f_j 将 D 映入自身。此外，$|f_j - \omega_k| < \alpha_k \cdot (1 - 2^{-j})$，且 $|f_j - \sigma_k| < \alpha_k \cdot (1 - 2^{-j})$ 对于 $k < j$成立。

现在我们描述如何从 f_{j-1}递归构造 f_j。集合 Q_{j-1}、R_{j-1} 和U_{j-1} 的定义与之前相同，但还要求 $\varphi_{j-1}(U_{j-1}) \subseteq W_j$。进行逼近的集合 A_j为

$$A_j := \Lambda_{j-1} \cup \overline{U_{j-1}} \cup R_{j-1} \cup \overline{\Omega_{j-1}} \cup \overline{\Sigma_{j-1}}. \tag{5.2}$$

根据关于 f_{j-1}的归纳假设，并选择 α_0、……、α_{j-1}，存在一个$f_{j-1}^{-(j-1)}$ 在 D_n 上定义且取值于 D_0的分支 β。（此处当 $j = 1$时， $\beta =$ 为恒等映射。）我们定义

$$g_j(z) := \begin{cases} f_{j-1}(z) & \text{if } z \in \Lambda_{j-1} \\ \beta(\omega_{j-1}^{-1}(\varphi_{j-1}(z))) & \text{if } z \in \overline{U_{j-1}} \\ c & \text{if } z \in R_{j-1} \\ \omega_{j-1}(z) & \text{if } z \in \overline{\Omega_{j-1}} \\ \sigma_{j-1}(z) & \text{if } z \in \overline{\Sigma_{j-1}}. \end{cases}$$

注意到 $g_j^{k_j} = \varphi_{j-1}$ 在 $\overline{U_{j-1}}$上成立，且 g_j 全纯延拓到 A_j的一个邻域。因此，我们可以选择 $\delta > 0$，并应用定理 2.1 选取一个有理函数 f_j，使得 $|f_j - g_j| < \delta$ 在 A_j 上成立，并且在有限集的所有点处具有相同的值和次数

$$\bigcup_{m=0}^{j-1} \Big\{ g_j^{\ell}(c) \colon c \in C_m, 0 \leq \ell < \sum_{q=m}^{j-1} k_q \Big\}.$$

数值 δ 应选择得足够小，以确保

$$\delta \leq \min\Big(2^{-(j+1)}\rho, \delta_j(\mathcal{T}_{j-1}, U_{j-1}), \min_{m<j} \frac{\alpha_m}{2^j} \Big),$$

并且使得当 f_j 如上所述时， $|f_j^{n-j} - \varphi_{j-1}| < \delta_j(\mathcal{T}_{j-1}, U_{j-1})$)。（根据引理 2.4，最后这一选择是可行的。）

递归构造至此完成。和之前一样，函数 f_j 收敛于一个 f 亚纯函数 f ，该函数具有所需的性质。■

注 5.2。 在定理 1.2 中，我们还可以额外确保

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0<k<k_n} \operatorname{diam} f^k(\theta(X_n)) = 0. \tag{5.3}$$

（这将在推论1.9的证明中发挥重要作用。）

事实上，在该定理的证明中，我们可以选择圆盘 D_n ，使得它们的欧几里得直径趋于零，当 $n \to \infty$ 时成立。我们还可以假设，对于所有 $n \geq 0$，都有 $|\psi_n'| \geq 2$ ，并且将 α_n 选取得足够小，使得逼近函数 f 在Σ_n上满足 $|f'| \geq 1$ 。

假设我们如此进行。回忆一下，对于 $0 < k < k_n - 1$，集合 $f^k(\theta(X_n))$ 包含于 $f^{-1}(D_k)$ 的某个连通分支中，该分支被单叶地映 onto D_k，并且包含于 Σ_{k-1} 中。我们的假设意味着，在该分支上有 $|f'| \geq 1$ ，从而归纳地得到

$$\operatorname{diam} f^k(\theta(X_n)) \leq \operatorname{diam} D_{k_n-2}$$

对每个 $n \geq 0$ 和 $0 < k < k_n$均成立。根据假设，当 $n \to \infty$时，diam D_{k_n-2} = diam $D_n \to 0$ ，从而得到 (5.3)。

为证明定理 1.5，我们使用以下事实，该事实由标准的分离定理推出。

命题 5.3。 设$(K_n)_{n=0}^{\infty}$ 是一个由两两不交的非空非分离紧集组成的序列 $K_n \subseteq \mathbb{C}$ ，使得 $\min_{z\in K_n}|z| \to \infty$ 当 $n \to \infty$时成立。

那么存在一个递增序列$(\Lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ ，其元素为闭有界若尔当域，使得对 $m < n$有 $K_m \subseteq \Lambda_n$ ，对 $m \geq n$有 $K_m \cap \Lambda_n = \emptyset$ ，并且满足 $\mathbb{C} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n$。

定理 *1.5* 的证明。 回顾一下，该定理声称，在 $\mathbb{C} \setminus X$ 连通的情形下，前两个证明中得到的函数都可以选为整函数。换言之，我们必须证明函数 f_j 可以选为多项式；根据龙格定理，当分别在 (5.1) 和 (5.2) 中定义的集合 A_j 也不分离平面时，这一点成立。

这很容易做到。事实上，由于 X_j 不分离平面，我们可以选择开邻域 W_j ，使得 W_j 不分离平面；参见 [MRW25b，引理 2.9]。递归构造中选取的开邻域 U_{j-1} 也同样如此。集合 Q_{j-1} 可以选为有限集；于是 R_{j-1} 可以选为圆形闭圆盘的有限不交并。集合 Ω_{j-1} 和 Σ_{j-1} 是定理 1.2 中选取的圆盘。最后，由命题 5.3 可知，集合 Λ_n 也可以选为不分离平面的集合；事实上， Λ_n 可以选为闭约旦域。■

注 5.4。 在上述所有证明中，我们对所有 $n \geq 0$ 都选择了 $M_n = 0$ ，但也可以选择更大的 M_n 值。由此得到映射 θ ，它在 X_n 的一个邻域内与恒等映射相差不超过 $\mathcal{C}^{M_n}$，在其他地方则等于恒等映射。此外，请回想一下，我们选择逼近函数 f_j ，使其在 $\bigcup_{k=0}^{j-1} C_k$ 上与 g_j 一致；我们还可以

选择它，使其与 g_n 一致到 M_n 阶。于是，逼近函数 f 也具有同样的性质；由定理 4.4 的证明可知， θ 在 C_n 的各点处与 id 一致到 M_n 阶。这便说明了注 1.4 中所作的断言。

6. The univalent case

本节中，我们简要讨论定理1.8的证明。我们将定理 4.4 和 4.5 推广到单叶情形，具体如下。

定理6.1. 设 $\Phi = \big((X_n)_{n=0}^{\infty}, (\varphi_n)_{n=0}^{\infty}, (C_n)_{n=0}^{\infty}\big)$ 是一个非自治系统，满足条件：对所有 $n \geq 0$， φ_n 均为单叶函数，且 $\varphi_n(X_n) = X_{n+1}$ 。设 $(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$为正实数序列，并设$(M_n)_{n=0}^{\infty}$ 为非负整数序列。

那么存在序列$(\delta_j)_{j=1}^{\infty}$ 和 $(\hat{\delta}_j)_{j=1}^{\infty}$ 个函数

$$\delta_j \colon \Delta_{j-1}(\Phi) \times \mathcal{U}_{j-1}(\Phi) \to (0,\infty) \quad and \quad \hat{\delta}_j \colon \Delta_j(\Phi) \to (0,\infty)$$

具有以下性质。

假设 $\mathcal{T} = (f_{n,j})_{0 \leq n < j < \infty}$ 是满足(4.3) 的无限三角形，对所有 $j \geq 1$ 均成立，并且对每个 $j \geq 1$ 均满足以下条件。

(a) 函数

$$\theta_{j-1} := f_{j-2,j-1} \circ \cdots \circ f_{0,j-1} \circ \varphi_0^{-1} \circ \cdots \circ \varphi_{j-1}^{-1}$$

在 X_{j-1} 的某个邻域内有定义且是单叶的。（约定 $\theta_0 = \mathrm{id}$。）*(b)* θ_{j-1}^{-1} 在 $U_{j-1}(\mathcal{T})$ 上有定义。*(c)* $|f_{j-1,j} - \varphi_{j-1} \circ \theta_{j-1}^{-1}| < \delta_j(\mathcal{T}_{j-1}, U_{j-1}(\mathcal{T}))$。

那么定理 *4.4* 和 *4.5* 的结论成立，此外我们可以取$\Theta_0 = \mathrm{id}$。

证明。证明过程与定理 4.4 和 4.5 类似，不同之处在于证明中出现的映射 $\Theta_{n,j}$ 和 $\theta_{n,j}$ 的构造略有不同，具体如下。（见图4。）

对于所有 $j \geq 0$，我们设定 $\Theta_{0,j} := \theta_{0,j} := \mathrm{id}$。由引理 2.3 可知，如果在每一步都将 δ_j 选得足够小，则假设保证映射 $f_{n,j}$ 在略小于 $U_n(\mathcal{T})$ 的开集上均为单叶映射。同样，定理陈述中的每个映射 θ_n 都在 X_n 的某个邻域上有定义且为单叶映射。（这里我们也用到了引理 2.4。）对于 $1 \leq n \leq j$，我们通过归纳，在适当的邻域 $V_{n,j}$ （$X_{n,j}$ 的邻域）上定义 $\theta_{n,j}$ ，使其满足 $\theta_{n,j} := f_{n-1,j+1} \circ \theta_{n-1,j} \circ f_{n-1,j}^{-1}$。显然，如果将 δ_{j+1} 选得足够小，这些映射都接近恒等映射，θ_{j+1} 也如此。与定理 4.4 的证明类似，我们定义 $\Theta_{n,j+1} := \tilde{\theta}_{n,j} \circ \Theta_{n,j}$，其中 $\tilde{\theta}_{n,j}$ 由 $\theta_{n,j}$ 通过推论 3.4 得到。同样，将推论 3.4 应用于 $\Theta = \mathrm{id}$ 和 $\theta = \theta_{j+1}$，即可得到 $\Theta_{j+1,j+1}$ 。■

定理*1.8*的证明。 证明过程与定理 1.1 和定理 1.2 的证明类似，不同之处在于 U_{j-1} 的选择以及 U_{j-1} 上映射 g_j 的选择；它们经过精确选择，以便我们能够应用定理6.1。■

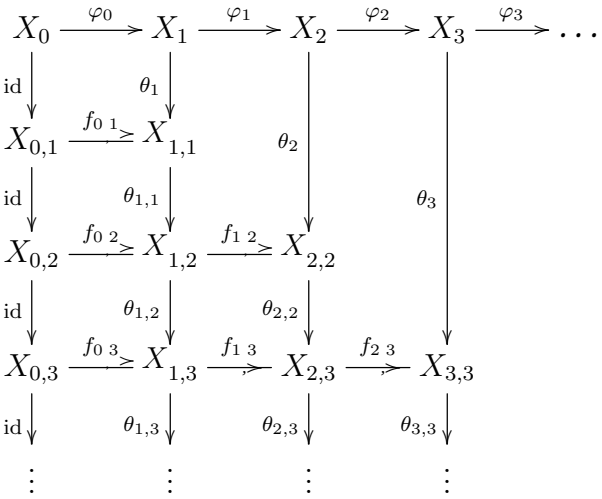

FIGURE 4. 定理1.8的证明示意图。在 X_n上，映射$\Theta_{n,j}$是复合$\theta_{n,j-1} \circ \cdots \circ \theta_{n,}$ $_n \circ \theta_{n}$。注意，对于所有 $j \geq 0$，$\Theta_{0,j} =$均为恒等映射。

7. REALISING INTERNAL DYNAMICS BY JORDAN WANDERING DOMAINS

本节证明推论1.9。我们首先陈述两个分类定理，它们描述了单连通游荡域的不同类型。第一分类（见 [BEF+22，定理A]）依据的是点的轨道之间的双曲距离。

定理7.1（第一分类定理）。设 U 是超越整函数 f 的一个单连通游荡域，且 U_n 是包含f^n（U）的法图分支，其中 $n \geq 0$。定义以下可数对集

$$E = \big\{(z, z') \in U \times U : f^k(z) = f^k(z') \text{ for some } k \in \mathbb{N}\big\}.$$

那么，以下情况恰有一种成立。

(1) 对所有 z、$z' \in U$，$\text{dist}_{U_n}(f^n(z)\ f^n(z')) \to c(z, z') = 0$，我们称 U 是（双曲意义下的）压缩的；(2) $\text{dist}_{U_n}(f^n(z)\ f^n(z')) \to c(z, z') > 0$，且对所有 $(z, z') \in (U \times U) \setminus E$、$n \in \mathbb{N}$，$\text{dist}_{U_n}(f^n(z)\ f^n(z')) \neq c(z, z')$，我们称 U 是（双曲意义下的）半压缩的；或 (3) 存在 $N > 0$，使得对所有 $n \geq N$，$\text{dist}_{U_n}(f^n(z)\ f^n(z')) = c(z, z') > 0$，且对所有 $(z, z') \in (U \times U) \setminus E$，我们称 U 是（双曲意义下的）最终等距的。

第二种分类（参见 [BEF+22，定理 C]）是根据趋近边界的程度（以欧几里得距离计）进行的。

定理 7.2（第二分类定理）。设 U 是超越整函数 f 的一个单连通游荡区域，且 U_n 是包含 f^n（U）的法图分支，其中 $n \geq 0$。那么以下情况恰有一种成立：

（*a*）对所有 $z \in U$，下极限$\liminf_{n\to\infty} \operatorname{dist}(f^n(z), \partial U_n) > 0$，也就是说，所有轨道都远离边界；（*b*）存在一个子序列 $n_k \to \infty$，使得对所有$z \in U$，$\operatorname{dist}(f^{n_k}(z), \partial U_{n_k}) \to 0$；而对另一个子序列 $m_k \to \infty$，则有

$$\liminf_{k\to\infty} \operatorname{dist}(f^{m_k}(z), \partial U_{m_k}) > 0, \quad \text{for } z \in U;$$

(c) $\operatorname{dist}(f^n(z), \partial U_n) \to 0$对所有 $z \in U$ 均成立，也就是说，所有轨道都收敛到边界。

这两种分类产生了九种单连通游荡域，其中只有六种能够实现为振荡游荡域，因为不可能出现轨道始终远离边界的情形。

我们将使用以下推论，它可由定理1.5和1.8以及注 5.4 轻易推出。

推论 7.3. 设 $n \geq 0$，令 $D_n = \{z : |z - 4n| < 1\}$，并令 $\varphi_n : D_n \to \overline{D}_{n+1}$ 在 D_n 的某个邻域内全纯，且满足 $\varphi_n(\partial D_n) = \partial D_{n+1}$。另设 $(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$ 为正数序列，满足当 $n \to \infty$ 时 $\varepsilon_n \to 0$。那么，存在一个超越整函数 f，它有一列逃逸游荡域 $(U_n)_{n=0}^{\infty}$，以及一个微分同胚 $\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得对所有 $n \geq 0$，

(a) $\theta(\overline{D_n}) = \overline{U_n}$;
(b) $f \circ \theta = \theta \circ \varphi_n$ *on* $\overline{D_n}$;
(c) $\|\theta - \mathrm{id}\|_{C^2} \leq \varepsilon_n$ *on* $\overline{D_n}$;
(d) θ *is conformal on* D_n;
(e) $f^n(0) = \Phi_n(0)$ *and* $f^n(1) = \Phi_n(1)$, *where* $\Phi_n = \varphi_{n-1} \circ \cdots \circ \varphi_0$;
(f) $\mathrm{D}\theta(\Phi_n(1)) = \mathrm{D}\,\mathrm{id}(\Phi_n(1))$.

此外，若映射$(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ 是单叶的，则 $U_0 = \mathbb{D}$。

推论*1.9*的证明。令 $(D_n)_{n=0}^{\infty}$ 如推论 7.3 中所述，并对 $n \geq 0$，取 $\varphi_n = b_{n+1}(z - 4n) + 4(n + 1)$，其中 是一个有限Blaschke乘积。

我们先讨论逃逸游荡域的情形。令 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 取自 [BEF+22 第 6] 节给出的九个例子之一。然后应用推论 7.3，得到一个超越整函数 f 和一个微分同胚 θ。现在，f 有一个由逃逸游荡域组成的轨道 $(U_n)_{n=0}^{\infty}$，满足对于 $n \geq 0$，$U_n = \theta(D_n)$。对所有 $z \in D_0 = \mathbb{D}$ 和 $n \geq 0$，

$$\begin{aligned}|\operatorname{dist}(f^n(\theta(z)), \partial U_n) - \operatorname{dist}(\Phi_n(z), \partial D_n)| \\ = |\operatorname{dist}(\theta(\varphi^n(z)), \partial\theta(D_n)) - \operatorname{dist}(\Phi_n(z), \partial D_n)| \leq 2\varepsilon_n,\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时趋于零。此外，θ 在每个 D_n 上都是共形的，因此保持双曲距离。由此可知，$(f^n)_{n=1}^{\infty}$ 和 $(\Phi_n)_{n=1}^{\infty}$ 分别在 U_0 和 $\mathbb{D}$ 上具有相同的内部动力学。现在，[BEF+22 第 6] 节中映射 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 的九种选取分别实现了九种内部动力学类型，因此结论成立。

对于振荡游荡域的情形，我们使用定理 1.5 和注 5.2。令 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 按 [ERS23 第 5]节 $\varphi|_{D_n} = \varphi_n$ 和 $\varepsilon_n \to 0$ 所述 $n \to \infty$定义。应用定理 1.5，得到一个超越整函数 f，其轨道为

振荡游荡域 $(U_n)_{n=0}^{\infty}$，使得定理 1.2 的结论成立。与上文一样，对于所有 $z \in D_0 = \mathbb{D}$ 和 $n \geq 0$，我们有

$$|\mathrm{dist}(f^{k_n+\cdots+k_1}(\theta(z)), \partial U_{k_n}) - \mathrm{dist}(\Phi_n(z), \partial D_n)| \leq 2\varepsilon_n,$$

当 $n \to \infty$ 趋于零时。由注 5.2 可知，当 $\Phi^n(0) = 4n$ 时，U_n 属于定理 7.2 中的类型 (b)；而当 $\Phi_n(0) \to 4n+1$ 时，$(U_n)_{n=0}^{\infty}$ 属于定理 7.2 中的类型 (c)。

此外，对于所有 $z,\ w \in D_0 = \mathbb{D}$ 和 $n \geq 0$,

$$\mathrm{dist}_{U_{k_n}}(f^{k_n+\cdots+k_1}(\theta(z)), f^{k_n+\cdots+k_1}(\theta(w))) = \mathrm{dist}_{D_n}(\Phi_n(z), \Phi_n(w)).$$

因此，关于双曲距离的内部动力学得以保持。证明至此完成。■

8. Wandering domains with interesting boundary dynamics

如引言中所述，在 [BEF+24] 中，作者构造了若干关于单连通区域上非自治映射序列的边界行为的有趣例子，并提出这些例子是否也能由整函数的游荡域实现的问题。我们证明，所有考察的例子确实都可以实现。在大多数情况下（即 [BEF+24、定理 D、例 7.6 以及例 8.1–8.3]），非自治模型由单位圆盘的布拉施克乘积构成，因此，实现只需直接应用推论 7.3。另一方面，[BEF+24、例 4.6] 涉及的模型映射无法全纯延拓到其区域边界之外，因此我们必须对构造作一些调整（见下文例 8.7）。

我们将使用以下定义（见 [BEF+24，定义 1.3]）。

定义 8.1. 设 $F_n\colon U \to U_n,\ n \geq 1$ 是单连通区域之间的一列全纯映射。假设每个 F_n 都连续延拓到 ∂U，且内部轨道收敛到边界（即，对所有 $z \in U$，当 $n \to \infty$ 时，$\mathrm{dist}(F_n(z),\ \partial U) \to 0$）。

$(F_n)_{n=1}^{\infty}$ 的 ***Denjoy–Wolff*** 集由满足以下条件的点 $\zeta \in \partial U$ 组成：对所有$z \in U$,

$$|F_n(\zeta) - F_n(z)| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

注 8.2。在 [BEF+24] 中，并未假定映射 F_n 定义在 U 的边界上；在这种情况下，定义采用径向延拓（见 [BEF+24，第 2.1] 节）。不过，本节只考虑连续延拓到边界的映射。

例 8.3。 存在一个超越整函数 f，其具有一个有界逃逸游荡域的轨道 $(U_n)_{n=0}^{\infty}$，使得对所有 $z \in U_0$ 都有 $\mathrm{dist}(f^n(z),\ \partial U_n) \to 0$，但 $(f^n|_{U_0})_{n=1}^{\infty}$ 的 Denjoy–Wolff 集为空。

证明。 在 [BEF+24 的证明中，作者构造了单位圆盘的 M¨obius 自同构序列 $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$，使得复合 $M_n = \mu_n \circ \cdots \circ \mu_1$具有以下性质。

(a) $M_n(z) \to 1$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$ 都成立。

(b) 存在一条弧 $S = (e^{-i\theta}, e^{i\theta})$， $\theta \in (0, \pi/4)$，环绕着 1，使得对于所有 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$，都存在无穷多个 n，满足 $M_n(\zeta) \notin S$。

现在，我们对 $\varphi_n(z) := \mu_{n+1}(z - 4n) + 4(n+1)$ 应用推论 7.3，并取任意满足 $\varepsilon_n \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时的序列 $(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$。设 f 和 θ 分别为所得的超越整函数和微分同胚。对 $n \geq 0$，令 $U_n := \theta(\mathbb{D} + 4n)$。那么，$(U_n)_{n=0}^{\infty}$ 是单连通游荡域轨道，其中 $U_0 = \mathbb{D}$，并且对所有 $z \in \mathbb{D}$，

$$|f^n(z) - 4n - M_n(z)| = |\theta(M_n(z) + 4n) - (M_n(z) + 4n)| < \varepsilon_n \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

对于 $z \in U_0$，我们有

$$\operatorname{dist}(f^n(z), \partial U_n) \leq |f^n(z) - f^n(1)| \leq |M_n(z) - 1| + 2\varepsilon_n \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

另一方面，假设 $z \in U_0$, $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ 和 n 满足 $M_n(\zeta) \notin S$。那么

$$\begin{aligned} |f^n(\zeta) - f^n(z)| &\geq |M_n(\zeta) - M_n(z)| - 2\varepsilon_n \geq |M_n(\zeta) - 1| - |M_n(z) - 1| - 2\varepsilon_n \\ &\geq \operatorname{diam}(S) - |M_n(z) - 1| - 2\varepsilon_n \to \operatorname{diam}(S) > 0 \end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时。根据构造，满足此性质的 n 有无穷多个，因此 $\limsup_{n\to\infty} |f^n(\zeta) - f^n(z)| > 0$，如所需。■

下一个例子表明，Denjoy–Wolff 集的调和测度可以取严格介于 0 和 1 之间的值。（这与自治情形形成对比，即对单连通区域的单个自映射进行迭代 [DM91，定理 4.1 和 4.2]；另见 [BEF+24，定理 1.2]。）

例 8.4. 存在一个超越整函数 f，它有一个有界逃逸的最终等距游荡域轨道 $(U_n)_{n=0}^{\infty}$，满足 $\operatorname{dist}(f^n(z), \partial U_n) \to 0$，其中 $n \to \infty$ 对所有 $z \in U_0$ 成立，并且 $(f^n|_{U_0})_{n=0}^{\infty}$ 的 Denjoy–Wolff 集相对于 U_0具有正但非满的调和测度。

证明。在 [BEF+24 中，例 7.6] 中作者证明，存在一个由单位圆盘的莫比乌斯自同构组成的序列 $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$，使得 $\mu_n(1) = 1$ 对所有 $n \geq 0$ 成立，并且复合 $M_n = \mu_n \circ \cdots \circ \mu_1$ 具有以下性质：

(a) $M_n(z) \to 1$ 如 $n \to \infty$，对所有 $z \in \mathbb{D}$；(b) $M_n(\zeta) \to 1$ 如 $n \to \infty$，对所有 $\zeta = e^{i\theta}$, $|\theta| < \pi/2$；但 (c) $M_n(\zeta) \not\to 1$ 如 $n \to \infty$，对所有 $\zeta = e^{i\theta}$, $\pi/2 \leq |\theta| \leq \pi$。

与前面的例子一样，我们应用推论 7.3，得到一个超越整函数 f，它具有单连通游荡域轨道 $(U_n)_{n=0}^{\infty}$，满足$U_0 = \mathbb{D}$ 且 $|f^n(z) - 4n - M_n(z)| \leq \varepsilon_n \to 0$ 如 $n \to \infty$，对所有 $z \in \mathbb{D}$。由此可得$|f^n(\zeta) - f^n(z)| \to 0$，当 $z \in \mathbb{D}$ 且 $\zeta = e^{i\theta}$, $|\theta| < \pi/2$ 时；而当$\zeta = e^{i\theta}$, $\pi/2 \leq |\theta| \leq \pi$ 时，$|f^n(\zeta) - f^n(z)| \not\to 0$。■

最后两个例子讨论了内部点趋近边界的收敛速度与 Denjoy–Wolff 集大小之间的关系。根据 [BEF+24，定理 C]，：若 $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ 是超越整函数 f 的一列有界单连通游荡域的轨道，并且

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{dist}(f^n(z_0), \partial U)^{1/2} < \infty, \tag{8.1}$$

那么 ∂U_0 中几乎所有点（相对于调和测度）都属于 Denjoy–Wolff 集。下一个例子表明，不存在任何一种趋近边界的收敛速度能够确保 Denjoy–Wolff 集的测度为零。（同样，这与自治情形 [DM91,BEF+24] 形成对比。）

例 8.5. 设 $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一个正数序列，满足 $\delta_n \le 1$ （对 $n \ge 1$）且当 $n \to \infty$ 时 $\delta_n \to 0$ 。那么，存在一个超越整函数 f，使得 $U_0 = \mathbb{D}$ 是 f 的一个有界逃逸型最终等距游荡域，其轨道 $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ 具有以下性质。

- 对所有 $n \ge 1$，都有 $\operatorname{dist}(f^n(0), \partial U_n) = \delta_n$。
- 每个点 $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus \{-1\}$ 都属于 $(f^n|_{\mathbb{D}})_{n=1}^{\infty}$ 的 Denjoy–Wolff 集。

证明。令 $a_0 := 0$ 且 $a_n := 1 - \delta_n$；那么，当 $n \to \infty$ 时， $a_n \to 1$。在 [BEF+24 的例 8.1] 中，作者构造了以下例子。

对于 $n \ge 1$，令 μ_n 为满足 $\mu_n(\pm 1) = \pm 1$ 且 $\mu_n(a_{n-1}) = a_n$ 的 M¨obius 映射，并定义 $M_n = \mu_n \circ \cdots \circ \mu_1$。那么

$$M_n(z) = \frac{z + a_n}{1 + a_n z}, \quad \text{for } n \ge 1.$$

那么，每个点 $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus \{-1\}$ 都满足 $\lim_{n\to\infty} M_n(\zeta) = 1$。

与前两个例子一样，应用推论 7.3。我们得到一个超越整函数 f，以及由单连通游荡域组成的轨道 $(U_n)_{n=0}^{\infty}$，满足 $U_0 = \mathbb{D}$。对于所有 $z \in \mathbb{D} \setminus \{-1\}$，都有 $|f^n(z) - (1 + 4n)| \to 0$，因为 $n \to \infty$，因此 Denjoy–Wolff 集为 $\partial\mathbb{D} \setminus \{-1\}$。回想一下，推论 7.3 中的映射 θ 在 $\Phi_n(1) = 1 + 4n$ 处与恒等映射一阶相切，并且在 $\mathcal{C}^2$-范数下可以任意接近恒等映射。由此容易得出，只要 ε_n 取得足够小， $f^n(1) = 1 + 4n$ 就是 ∂D_n 中离 $f^n(0) = \Phi_n(0) = 1 - \delta_n + 4n$ 最近的点。■

注记 8.6. 正如 [BEF+24之后所述，例 8.1], 也可以通过使用一列次数更高的布拉施克乘积，而非 M¨öbius 变换，达到相同的效果。（只需选取一个布拉施克乘积 b_n，使其在以 -1为中心的小圆盘之外非常接近 μ_n。）应用上述相同的证明，我们还可得到半收缩游荡域的例子：它们以任意慢的速度趋近边界，且 Denjoy–Wolff 集具有满调和测度。（注意，在这种情况下我们不会有 $U_0 = \mathbb{D}$，因为模型映射不再是单叶的。）细节从略。

最后一个例子表明， [BEF+24中的条件 (8.1)，定理 C] ，即使对于整函数的游荡域也是最优的。

例 8.7。 存在一个超越整函数 f，其具有一条由有界、逃逸型且收缩的游荡域组成的轨道 $(U_n)_{n=0}^{\infty}$，满足

(a) 每个 U_n 都是边界光滑的若尔当域；(b) 对所有 $z \in U_0$，当 $n \to \infty$ 时，$\operatorname{dist}(f^n(z), \partial U_n) \to 0$；(c) 对所有 $z \in U_0$, $\sum$，$\operatorname{dist}(f^n(z), \partial U_n)^{\alpha} \begin{cases} < \infty, & \text{对于 } \alpha > 1/2, \\ = \infty, & \text{对于 } \alpha = 1/2; \end{cases}$ (d) 从 U_0 看，$(f^n|_{U_0})_{n=1}^{\infty}$ 的 Denjoy–Wolff 集的调和测度为零 .

证明。我们遵循 [BEF+24 中例 4.6], 的思路，并作了一些调整。对于 $n \geq 1$，令

$$M_n(z) := \frac{z + 1 - \frac{1}{n}}{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) z}.$$

定义 $b_1(z) := M_1(z) = z$，对于 $n \geq 2$，我们定义 Blaschke 乘积

$$b_n(z) := M_n\left((M_{n-1}^{-1}(z))^2\right),$$

and

$$B_n(z) := b_n \circ \cdots \circ b_1(z) = M_n(z^{2^n}) = \frac{z^{2^n} + 1 - \frac{1}{n}}{1 + (1 - \frac{1}{n})z^{2^n}}. \tag{8.2}$$

如 [BEF+24 的例 8.3], 所示，对于所有 $z \in \mathbb{D}$， $B_n(z) \to 1$ 作为 $n \to \infty$，且 $\{B_n(\zeta)\}_{n=1}^{\infty}$ 对于 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ 中几乎每一点都在 $\partial\mathbb{D}$ 中稠密。

定义

$$\psi \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto (z-1)^2$$

并取 $U := \psi(\mathbb{D})$。于是 $\psi \colon \mathbb{D} \to U$ 是一个共形同构。在 [BEF+24 的例 4.6], 中，作者考察了由 $\psi \circ B_n \circ \psi^{-1}$ 给出的 U 的自映射。由于 ψ 不能全纯延拓到 0 的某个邻域，我们改用一列更小的区域作为模型映射。对于 $n \geq 1$，定义

$$\psi_n \colon \mathbb{D} \to U; \quad z \mapsto \psi((1 - \tfrac{1}{n+1})z) + 8n$$

以及 $X_n := \overline{\psi_n(\mathbb{D})}$。另设 $X_0 := \overline{\mathbb{D}}$ 和 $\psi_0 = \mathrm{id}$。定义

$$\varphi(z) := \psi_{n+1} \circ b_{n+1} \circ \psi_n^{-1}$$

在 X_n上。注意，这意味着

$$\varphi^n(z) = \psi_n(B_n(z))$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$，并且 $\bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$ 可解析地延拓到 X 的一个邻域 根据定义，.

对 $n \geq 1$，设 $V_n := \mathrm{int}(X_n)$。我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\varphi^n(0), \partial V_n) \leq \varphi^n(0) - 8n &= \psi_n(B_n(0)) - 8n \\ &= \psi((1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{1}{n+1})) = \left(-\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n(n+1)}\right)^2 \asymp \tfrac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

由相同的计算可知， $\psi'(B_n(0)) \asymp \frac{1}{n}$；由科比定理可得 $\operatorname{dist}(\varphi^n(0), \partial V_n) \asymp 1/n^2$，因此 φ 具有 (c) 中所述的性质。还需回忆，对于几乎每个点 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$，都存在一个序列 $(n_k)_{k=0}^{\infty}$，满足 $n_k \to \infty$ as$k \to \infty$，使得 $B_{n_k}(\zeta) \to -1$，因此

$$\varphi^{n_k}(\zeta) - 8n \to 4 \tag{8.3}$$

如 $k \to \infty$。

现在将 $C_n = \{\varphi^n(0)\}$ 和 $\varepsilon_n = o(1/n^2)$ 作为 $n \to \infty$应用定理 1.5。由此得到一个超越整函数 f，它具有由单连通逃逸游荡域组成的轨道 $(U_n)_{n=0}^{\infty}$，以及一个微分同胚 θ，使得

$$|f^n(\theta(z)) - \varphi^n(z)| = |\theta(\varphi^n(z)) - \varphi^n(z)| \leq \varepsilon_n$$

对所有 $z \in X_0$ 均成立。我们有

$$|\mathrm{dist}(f^n(\theta(0)), \partial U_n) - \mathrm{dist}(\varphi^n(0), \partial V_n)| \le 2\varepsilon_n = o\big(\tfrac{1}{n^2}\big).$$

因此 dist(f^n(θ(0)) ∂U_n) $\asymp 1/n^2$，(b) 和 (c) 便得证。由 8.3 可知，对于几乎所有的 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$， θ(ζ) 都不属于 Denjoy–Wolff 集。由于 $\theta\colon \mathbb{D} \to U_0$ 是共形同构，我们得出 Denjoy–Wolff 集的调和测度为零。由于 ψ 在 $\mathbb{D}$ 上共形，由 [BEF+24 的引理 8.6] 可知，每个 U_n 都是收缩游荡域。最后，每个 U_n ..= θ(V_n) 都是边界光滑的若尔当域。证明完毕。■

我们指出，[BEF+24 的第 8] 节还包含另一组例子（例 8.3）。这个例子主要涉及一列 Blaschke 乘积在单位圆盘上的行为；目前尚不清楚，将其通过超越整函数的游荡域来实现（同样可以借助我们的定理，仿照上文进行）是否有意义。

References

[BEF+22] A. M. Benini、V. Evdoridou、N. Fagella、P. J. Rippon 和 G. M. Stallard，单连通游荡域的分类，《数学年刊》383 (2022), 1127–1178。[BEF+24] A. M. Benini、V. Evdoridou、N. Fagella、P. J. Rippon 和 G. M. Stallard，全纯序列、非自治动力系统与游荡域的边界动力学，《数学进展》446 (2024)，论文编号 109673，共 51 页。[Ber93] W. Bergweiler，亚纯函数的迭代，《美国数学会通报》29(1993), 第2期，151–188。[Bis14] C. J. Bishop，超越动力学导论，2014。讲义可在线查阅：http://www.math.stonybrook.edu/~bishop/classes/math627.S13/itd.pdf。[Boc21] L. Boc Thaler，单连通游荡域的几何，《伦敦数学会通报》53 (2021), 第6期，1663–1673。[BR25] W. Bergweiler 和 L. Rempe，超越动力学中的逃逸集，《德国数学家协会年报》127 (2025), 1–141。[Che17]D. Cheraghi，无理非双曲吸引子的拓扑，2017。预印本，arXiv:1706. 02678。[DM 91] C.I. Doering 和 R. Ma˜n´e，内函数的动力学，Ensaios Matem´aticos，So- ciedade Brasileira de Matem´atica 3 (1991), 1–79。[EFGP24] V. Evdoridou、N. Fagella、L. Geyer 和 L. Pardo-Sim´on，游荡域中的大轨道关系，2024。预印本，arXiv:2405.15667。[EGM25] V. Evdoridou、C. Gilmore 和 M. Manolaki，泛复合算子与复动力系统之间的相互作用，《伦敦数学会杂志》(2) 112 (2025), 第3期，论文编号 e70262，共 27 页。[EL87] A. E. Eremenko 和 M. Lyubich，具有病态动力学的整函数例子，《伦敦数学会杂志》(2) 36 (1987), 第3期，458–468。[ERS23] V. Evdoridou、P. J. Rippon 和 G. M. Stallard，振荡的单连通游荡域，《遍历理论与动力系统》43 (2023), 第4期，1239–1268。[Fat19] P. Fatou，论函数方程，《法国数学会通报》47 (1919), 161–271。[Fat26] P. Fatou，论超越整函数的迭代，《数学学报》47 (1926), 第4期，337–370。[FR24] G. R. Ferreira 和 L. Rempe，多连通游荡域的分类，2024。预印本，arXiv:2405.12165。[Gai87] D. Gaier，复逼近讲义，Birkhäuser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，1987。由 Renate McLaughlin 从德文翻译。

[HL19] W. K. Hayman 和 E. F. Lingham，《函数论中的研究问题》，五十周年纪念版，数学问题丛书，施普林格，沙姆，2019。[Jul18] G. Julia，论有理函数的迭代，《纯粹与应用数学杂志》 (7) 4(1918), 47–245。[McM88] C. McMullen，有理映射的自同构，《全纯函数与模》，第 I 卷（美国加利福尼亚州伯克利，1986），1988，第 31–60 页。[MRW25a] D. Mart´ı-Pete、L. Rempe 和 J. Waterman，亚纯函数的有界 Fatou 分支与 Julia 分支，《数学年刊》391 (2025), 第1期，95–111。[MRW25b] D. Mart´ı-Pete、L. Rempe 和 J. Waterman，Eremenko 猜想、游荡的和田湖与异常点，美国数学会杂志 38 (2025), 第4期，877–918。[MRW26] D. Mart´ı-Pete、L. Rempe 和 J. Waterman，异常容量，2026。手稿正在准备中。[Rem16] L. Rempe，弧状连续统、整函数的 Julia 集与 Eremenko 猜想，2016。预印本，arXiv:1610.06278。

School of Mathematics and Statistics, The Open University, Walton Hall, Milton Keynes MK7 6AA, United Kingdom电子邮箱：vasiliki.evdoridou@open.ac.uk
Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool, Liverpool L69 7ZL, United Kingdom电子邮箱：david.marti-pete@liverpool.ac.ukDepartment of Mathematics, University of Manchester, Manchester M13 9PL, UnitedKingdom电子邮箱：lasse.rempe@manchester.ac.uk