arXiv:2602.09958v1 [math.CV] 10 Feb 2026

高维复值函数的洛必达法则

Albert Chern 与 Sadashige Ishida

摘要。 在微积分中，洛必达法则提供了一种简便方法，用以求当分子与分母同时为零时商函数的极限。但当我们超出实区间上的实函数时，情况会如何？本文研究高维中两个复值函数的商在两函数同时为零的点处何时可以连续定义。令人惊讶的是，答案远比实值情形更为微妙。我们给出了商函数连续性的完整刻画。我们还指出，为何将这一结果推广到更光滑的商仍然是一个引人入胜的挑战。

关键词： 洛必达定理，复函数

1. 引言 关于实区间上实函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的经典伯努利–洛必达法则，给出了比值 $f(x)/g(x)$ 在 f 与 g 的公共零点处良定义的条件。具体而言，若 $f(a) = g(a) = 0$， $g'(a) \neq 0$，且极限 $L = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ 存在，则 $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L$。

这一结果后来被推广到实区间上的复值函数，由[1]；最近，又被推广到多变量实值函数，由[2]。

经典的洛必达法则及其推广关注的是 $f(x)/g(x)$在 f和 g的公共零点处的极限，而一个更强的定理可以用正则性来表述。若定义 $f(a)/g(a) := L$，那么只要 f和 g均为光滑函数， $f(x)/g(x)$ 就仍是光滑函数。

定理 1（实函数的光滑商）。设 $f, g \in C^\infty(I)$ 是实区间 I上的光滑实值函数。假设 f, g 在 I 中都只有简单零点，且它们的零点集相同。那么存在处处非零的光滑函数$\varphi \in C^\infty(I)$，使得 $f = g\varphi$ 和 $\varphi = f'/g'$ 在零水平集处成立。

这里，如果对于任意$f(a) = 0$，实函数 f 在 I 上满足 $f'(a) \neq 0$，则称其具有简单零点。定理 1 的一个初等证明见附录 A 和 B。

直观地说，具有公共零点的函数可以看作共享公共因子，这些因子在它们的商中相消。类似的结果也适用于实值多元函数。设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个开集，其中 $n \geq 2$作为定义域。实值函数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 的零点集记为 $\Sigma_f = \{\mathbf{a} \in \Omega \mid f(\mathbf{a}) = 0\} \subset \Omega$。若光滑函数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 对所有 $\mathbf{a} \in \Sigma_f$ 都满足 $\nabla f|_{\mathbf{a}} \neq 0$，则称其具有简单零点。从几何上看，根据隐函数定理，具有简单零点的函数的零点集 Σ_f 构成一个光滑超曲面。

定理 2（任意维数实函数的光滑商）。设 $f, g \in C^\infty(\Omega)$ 为具有简单零点且零点集相同的光滑实值函数$\Sigma_f = \Sigma_g$。那么，存在一个处处非零的光滑函数 $\varphi \in C^\infty(\Omega)$使得$f = g\varphi$。

定理 2 的证明见附录 C。

人们或许会问，类似的结果是否适用于任意维度的复值函数。具体来说，在开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上，两个具有公共零点集的复值函数是否总有一个光滑复值商？这个问题的答案与实值情形有着令人意外的不同。

正如我们将在第 2 节看到的，具有公共简单零点通常是不够的。事实证明，连续商的存在要求函数在零点集上的梯度之间满足额外的代数关系。下面我们将描述这一条件。

2. 复函数的商现有的大多数针对复值函数的洛必达定理推广，都是在实区间 [1] 上，或针对复平面上的全纯函数提出的；后者是复分析中研究的一类受限函数 [3]。在后一种情况下，商 f/g 在全局上有定义，并且在每个公共简单零点 $\mathbf{a}$处都与 $f'(\mathbf{a})/g'(\mathbf{a})$ 一致。

当然，能够保证商存在的理论应当比简单地要求两个函数局部全纯更加一般。例如，即使 f 不是全纯函数，商 $f/f=1$ 仍然是光滑的。此外，全纯性在光滑坐标变换下并不保持不变，而光滑商的存在性则与坐标无关。另外，在一般实维数的定义域中，全纯性的概念应如何成立也并不明确。

那么，我们能否将复值函数的 l'Hˆopital 定理推广到任意维度的空间中？这是本文探讨的主要问题。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，且满足 $n \geq 2$。对于复值函数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$，零点集定义为 $\Gamma_f := \{\mathbf{a} \in \Omega \mid f(\mathbf{a}) = 0\} \subset \Omega$；对于复值函数而言，简单零点的概念由其一阶导数满足非退化条件来刻画。

定义 1（简单零点）。对于 $n \geq 2$，如果一个可微函数 $f\colon \Omega(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$在每个零点 $\mathbf{a} \in \Gamma_f$处，其导数 $Df|_{\mathbf{a}}\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$作为实线性映射的秩为 2，则称其具有简单零点。

根据隐函数定理，具有简单零点的函数的零点集 Γ_f 构成嵌入于Ω中的余维为二的子流形。

问题1（复多元函数的光滑商）。设 $f, g \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ 为光滑复值函数，其公共零点集 $\Gamma_f = \Gamma_g$由简单零点组成。是否存在处处非零复值函数$\varphi \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$使得 $f = g\varphi$?

在大多数情况下，问题1的答案是否定的，如下面的例子所示。

例*1.* 设$\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := x+y+iy$，以及 $g(x,y) = x+iy$。它们在原点处有一个公共简单零点。这两个函数的商由$\varphi(x,y) = {}^{f}(x,y)\,{}_{g}(x,y) = {}^{x+y+}i_{x+}\,{}^{y}i_{y}$ · 给出。该函数沿任何经过原点的直线为常数，但在原点处无定义。为看出这一点，取一条直线$(x(t)\ y(t)) = (t, ct)$，其中有某个实常数 c 和一个参数 t。于是我们有$\varphi(t,ct) = {}^{t+ct+}i_{t+}\,\underline{{}^{ct}i_{ct}} = \underline{{}^{1+c+}i_{1+}}\,{}^{c}_{c}i$，且原点处的值依赖于 c，如图*1*所示。

例*2.* 令 $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x-iy$，且 $g(x,y) = x+iy$，它们在原点有一个公共简单零点。它们的商为 $\varphi(x,y) = {}^{f}(x,y)\,{}_{g}(x,y) = {}^{x-}i_{x+}\,{}^{y}_{y}i$。与 ~~*1*~~ 一样，~~这~~ 个函数沿任何经过原点的直线都为常数，但在原点不连续。

在例1和例2中，商 f/g 沿趋近原点的一维路径（例如沿实轴）限制时，在原点有定义良好的洛必达极限，正如 [1]中所研究的那样。然而， f/g 作为二元函数并不连续。

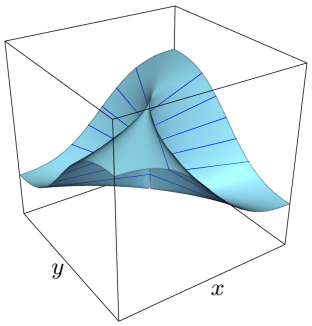


图1。 $f(x,y) = x + y + \mathrm{i}(x + y)$ 与 $g(x,y) = x + \mathrm{i}(x + y)$ 的商的实部。蓝色线条是等值线，显示 f/g 沿着任何经过原点的直线都取常数值。

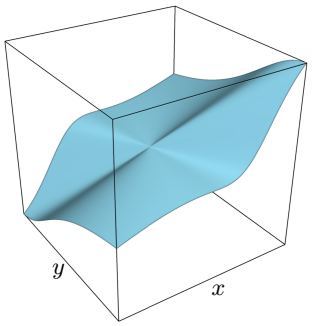


图2。 $f(x,y) = x + x^2 + \mathrm{i}x + \mathrm{i}y$ 与 $g(x,y) = x + \mathrm{i}x + \mathrm{i}y$ 的商的实部。函数 f/g 连续，但在原点不可微。

例3。 令 $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x + x^2 + \mathrm{i}x + \mathrm{i}y$，且 $g(x,y) = x + \mathrm{i}x + \mathrm{i}y$。这对函数定义了一个连续商，尽管它在原点不可微，见图2。

这个例子定义了一个连续商 f/g，与前两个例子不同。现在我们来探究其中的差异所在。

3. 导数之比 与经典洛必达法则类似，两个函数在其公共零点附近的商的行为，与它们导数之商密切相关。在本节中，我们探讨两个复值函数在公共简单零点附近所呈现的更为复杂的结构。

设 $f, g \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ 为具有简单零点且公共零点集为 Γ 的光滑复值函数。则对所有 $\mathbf{a} \in \Gamma$，导数 $Df|_{\mathbf{a}}$ 与 $Dg|_{\mathbf{a}}$ 均为到 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 的满射实线性映射。这定义了唯一的实矩阵 $\mathbf{A}|_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ （$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 上的自同态），它通过下式将这两个实线性算子联系起来

$$Df|_{\mathbf{a}} = \mathbf{A}|_{\mathbf{a}} Dg|_{\mathbf{a}}. \tag{1}$$

该关系的矩阵表示 $\mathbf{A}|_{\mathbf{a}}$ 仅依赖于为 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 所选取的基，该基取为 1 与 i。特别地，矩阵 $\mathbf{A}|_{\mathbf{a}}$ 与 Ω 的坐标系选取无关。

如果进行坐标变换 $\Phi(\tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{a}$，并定义 $\tilde{f} := f \circ \Phi$ 和 $\tilde{g} := g \circ \Phi$，则导数按如下方式变换： $Df|_{\tilde{\mathbf{a}}} = Df|_{\mathbf{a}} D\Phi|_{\tilde{\mathbf{a}}}$ 和 $D\tilde{g}|_{\tilde{\mathbf{a}}} = Dg|_{\mathbf{a}} D\Phi|_{\tilde{\mathbf{a}}}$。特别地，关系式 $Df|_{\tilde{\mathbf{a}}} = \mathbf{A}|_{\tilde{\mathbf{a}}} D\tilde{g}|_{\tilde{\mathbf{a}}}$ 在变换后的坐标中仍然成立。也就是说，矩阵 $\mathbf{A}$ 在此坐标变换中保持不变。

定义 2（导数之比）。在 (1) 中定义的函数 $\mathbf{A}\colon \Gamma \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ 记作

$$\left(\frac{Df}{Dg}\right)_{\mathbf{a}} \coloneqq \mathbf{A}|_{\mathbf{a}}, \quad \text{for } \mathbf{a} \in \Gamma. \tag{2}$$

一般来说，f/g 在 Γ处不连续，正如例1和例2所示，这种不连续的特点是：f/g 在 Γ中某一点的方向极限取决于趋近路径。这种路径依赖性可以用导数之商(2)来描述。

定理3（路径相关的洛必达法则）。设 $f, g \in C^{\infty}(\Omega;\mathbb{C})$ 是具有单零点且具有相同公共零点集 Γ的光滑复值函数。假设$\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \Omega$ 是一条光滑路径，满足 $\gamma(0) \in \Gamma$，且 $\gamma'(0)$ 与Γ横截，即 $g'_{\gamma} \coloneqq \lim_{t\to 0} g(\gamma(t))/t = Dg|_{\gamma(0)}\gamma'(0) \in \mathbb{C}$ 非零。那么，f/g 沿 γ 的方向极限存在，且等于

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma(t))}{g(\gamma(t))} = \frac{1}{g'_{\gamma}} \left(\frac{Df}{Dg}\right)_{\gamma(0)} g'_{\gamma}. \tag{3}$$

这里，$\left(\begin{smallmatrix} Df \\ Dg \end{smallmatrix}\right)_{\gamma(0)} g'_{\gamma}$ 表示 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} Df \\ Dg \end{smallmatrix}\right)$ 作用于 g'_{γ}（将其视为二维实向量），而除以 g'_{γ} 则按复数运算来解释。此外，将商 f/g 限制在该路径上仍然是光滑的，也就是说，存在一个光滑处处非零函数 $\varphi \in C^{\infty}((-\epsilon,\epsilon);\mathbb{C})$，使得$f(\gamma(t)) = g(\gamma(t))\varphi(t)$。

证明见附录D。上一节中的例1和例2属于定理3的情形，它们在零点处的逐路径极限如式（3）所示。

4. 复多元函数的连续商 两个具有公共简单零点集 Γ 的复值函数之商 f/g 的极限（3）通常取决于路径，除非线性算子 $\left(\begin{smallmatrix} Df \\ Dg \end{smallmatrix}\right)$ 满足附加条件。

定义3（复线性）。具有单零点和公共零点集 Γ 的两个光滑复值函数 f，$g \in C^{\infty}(\Omega\ \mathbb{C})$，如果它们的导数之商 $\left(\begin{smallmatrix} Df \\ Dg \end{smallmatrix}\right)\colon \Gamma \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ 在 Γ 中的每一点都是缩放旋转，则称它们复线性相关。也就是说，$\left(\begin{smallmatrix} Df \\ Dg \end{smallmatrix}\right)$ 具有如下形式

$$\left(\frac{Df}{Dg}\right)_{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} u(\mathbf{a}) & -v(\mathbf{a}) \\ v(\mathbf{a}) & u(\mathbf{a}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} \in \Gamma, \tag{4}$$

对于某些函数 u，$v\colon \Gamma \to \mathbb{R}$。

形式为 (4) 的矩阵可改写为 $\left[\begin{smallmatrix} u & -v \\ v & u \end{smallmatrix}\right] = r\left[\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right]$，其中 $r = \sqrt{u^2+v^2}$，且 $\theta = \arctan\frac{v}{u}$，这表明该变换表示一次缩放旋转。将矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} u & -v \\ v & u \end{smallmatrix}\right]$ 作用于一个 $\mathbb{R}^2$ 向量，等价于乘以复数 $u + \mathbb{i}v = re^{\mathbb{i}\theta}$。矩阵表示缩放旋转的另一种等价刻画是：它的两个奇异值相等，且行列式为正。

定理4（任意维度下复函数的连续商）。设 $f, g \in C^1(\Omega;\ \mathbb{C})$ 具有简单零点且公共零点集为 Γ。那么，以下陈述等价：

(i) 存在一个处处非零的连续函数 $\varphi \in C^0(\Omega)$，使得 $f = g\varphi$。*(ii)* f 和 g 复线性相关。

我们在附录E中给出证明。以下推论是定理4的直接结果。

推论1。 根据定义*3*所定义的复线性关系，对于具有公共简单零点的函数构成一种等价关系。

注1。 f 和 g 具有更高正则性，通常并不会提高定理4中商的正则性。考虑例3中给出的函数对 $f(x,y) = x + x^2 + \mathbb{i}x + \mathbb{i}y$和 $g(x,y) = x + \mathbb{i}x + \mathbb{i}y$。其导数商 Df/Dg 在 $(0,0)$处是单位矩阵，因此定理4适用。然而，商仅为 C^0，尽管 f 和 g 都是光滑的，如图2所示。

开放问题 目前我们尚不清楚光滑商存在的确切条件。一个显而易见的充分条件是，Df/Dg 的复线性（即，它定义了一个复数）可以延拓到 Γ的某个开邻域。在二维情形下，这相当于将一个处处不为零的全纯函数与 g相乘来定义 f。

当然，这并非必要条件。例如，考虑这一对$f(x,y) = (x + \mathrm{i}y)e^{\mathbb{i}(x^2+y^2)}$ $g(x, y) = x + \mathrm{i}y$，以及这一对 $f(x,y) = (x + \mathrm{i}y)(1 + x - \mathrm{i}y)$（在原点附近）和 $g(x,y) = x + \mathrm{i}y$。它们的导数比 Df/Dg 都是复线性的，但在原点周围的任何地方都不定义复数。尽管如此，它们都能得到光滑商。我们邀请读者接受挑战，找出光滑商存在的更精确条件。

5. 推广 定理 2、3 和 4 的结果在 $\in \mathbb{R}^n$ Ω 中经过任意光滑坐标变换后仍然成立，且不依赖于 $\mathbb{R}^n$的欧氏结构。因此，这些定理中的定义域 Ω 可以替换为任意光滑流形。

此外，本文所有论述中对给定函数 f, g 的 C^∞光滑性假设，均可放宽为任意 $k \geq 1$的 C^k 正则性，并相应地调整 φ 的正则性，使之与 C^{k-1} 相适应。事实上，我们在附录 A 至 E 中给出的证明，对于一般的 C^k 正则性情形均成立。

致谢。 本项目部分由欧洲研究委员会（ERC Consolidator Grant 101045083 CoDiNA）和美国国家科学基金会 CAREER奖 2239062 资助。

参考文献

[1] Carter D. 复值函数的洛必达法则。《美国数学月刊》。1958；65(4)：264-6。[2] Lawlor GR. 多元函数的洛必达法则。《美国数学月刊》。2020；127(8)：717-25。[3] Ahlfors LV, Ahlfors LV. 复分析。第3卷。麦格劳-希尔，纽约；1979。[4] Peano G. 泰勒公式余项的一种新形式。Mathesis。1889；9：182-3。[5] Persson LE, Rafeiro H, Wall P. 泰勒余项的历史概述。Note di Matematica。2017；37(1)：1-21。

[6] Nestruev J、Bocharov A、Duzhin S。《光滑流形与观测量》。第 220 卷。施普林格；2003。
[7] Whitney H.《泰勒公式中余项的可微性》。《杜克数学杂志》。1943；10(1)。

A. 一阶泰勒展开 定理1–3中的光滑性结论源于泰勒展开中余项的正则性。

设 $f\colon I \to \mathbb{R}$ 是定义在开区间 $I \ni a$上的单个实变量的连续可微函数。那么，f 可利用一阶泰勒公式表示为 $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)h(x)$，其中函数 h满足 $\lim_{x\to a} h(x) = 0$。这种泰勒余项形式称为皮亚诺形式，最早由朱塞佩·皮亚诺于 1889 [4, 5]提出。

如果进一步假设 $f \in C^\infty(I)$，那么皮亚诺余项函数 h也具有C^∞-光滑性。这一正则性结果称为阿达马引理，其表述为：$f(x) = f(a) + (x-a)g(x)$ 对某个 $g \in C^\infty(I)$成立。阿达马引理的一个初等证明可见 [6]。

更一般地，如果 $f \in C^k(I)$ 对某个 $k \geq 1$ 成立，那么一阶皮亚诺余项函数 $h(x)$（或者按阿达马引理的形式写作 $g(x) = h(x) + f'(a)$）属于 $C^{k-1}(I)$。哈斯勒·惠特尼在 1943 [7] 中证明了这一点。

引理1（Whitney 1943 [7]）。设 $f \in C^k(I)$ 在开区间 $I \ni 0$ 上满足 $k \geq 1$。那么存在函数 $g \in C^{k-1}(I)$，使得 $f(x) = f(0) + xg(x)$，且对于 $0 \leq j \leq k-1$，有 $g^{(j)}(0) = \frac{1}{j+1} f^{(j+1)}(0)$。

证明。对于 $x \neq 0$，有限差商 $g = f(x) - f(0)\ x$ 可写为 $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f'(t)\,dt$。$g(x)$ 的导数具有如下积分公式：

$$\frac{d^j}{dx^j} g(x) = \frac{1}{x^{j+1}} \int_0^x t^j f^{(j+1)}(t)\,dt, \quad j = 0, \ldots, k-1.$$

这个恒等式可通过反复分部积分和数学归纳法验证；此处省略细节。由于 $f \in C^k\ I$ $g \in C^k\ I \setminus ()$，可得 $\{0\}\ \subset C^{k-1}\ I \setminus \{0\}$ $g^{(j)}\ x$ $x \to 0$ $()\ ()$。还需证明$()$当，时存在极限，其中$0 \leq j \leq k-1$。定义 $L_j := \frac{1}{j+1} f^{(j+1)}(0)$，它也可表示为$L_j = \frac{1}{x^{j+1}} \int_0^x t^j f^{(j+1)}(0)\ dt$，对任意 $x \neq 0$均成立。于是我们计算：

$$\begin{aligned} \left| g^{(j)}(x) - L \right| &= \left| \frac{1}{x^{j+1}} \int_0^x t^j \left(f^{(j+1)}(t) - f^{(j+1)}(0) \right) dt \right| \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{x^{j+1}} \int_0^x t^j\,dt}_{\frac{1}{j+1}} \max_{t\in[0,x]} \left| f^{(j+1)}(t) - f^{(j+1)}(0) \right|. \end{aligned}$$

由于 $f^{(j+1)}$ 在0处连续，当 $x \to 0$时，此表达式趋于零。因此，每个$g^{(j)}$ 都可连续延拓至 $x = 0$，且 $g^{(j)}(0) = L_j$。因此，$g \in C^{k-1}(I)$。 ■

Whitney 还将引理1的结果推广到了 [7] 中的多维情形。设f：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 在原点的某个邻域内有定义。那么，固定每个 $x_2, \ldots, x_n$，并对变量 x_1应用与引理1相同的论证，可得

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n) + x_1 g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5}$$

其中 $f(0,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ 仍然是 C^k，且 $g_1 \in C^{k-1}$。对函数 $\frac{\partial^{i_2+\cdots+i_n}}{\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}} f$ 应用引理1，便可得到 $i_1+\cdots+i_n \le k-1$ 上 $\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}} g_1$ 的连续性。重复（5）中的过程可得

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + x_1 g_1(x_1,\ldots,x_n) + x_2 g_2(x_2,\ldots,x_n) + \cdots + x_n g_n(x_n) \quad (6)$$

其中 $g_i \in C^{k-1}$ 和 $g_i(\mathbf{0}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0})$。

结果 (6) 也适用于向量值函数 $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ | \\ f_m \end{bmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，只需对各分量分别应用 (6) 即可；这一点可由以下引理得出。在引理中，我们单独列出因子 $\sum_i \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{0}) x_i = D\mathbf{f}(\mathbf{0})\mathbf{x}$，以体现皮亚诺形式的泰勒展开。

引理 2（具有正则性的一阶泰勒公式）。设$\mathbf{f}$: $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是在给定点$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$的某个邻域 U 上具有 C^k-正则性的向量值函数。则存在$\mathbf{H} \in C^{k-1}(U;\, \mathbb{R}^{m\times n})$矩阵值函数，使得 $\mathbf{H}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ 并且

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{H}(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mathbf{a}), \quad \mathbf{x} \in U.$$

B. 定理 1 的证明

定理的证明 I Γ $f \in C^k\ I$ $g \in C^k\ I$ $x \in I \setminus$ 。令为() 和 Γ φ $\varphi\ x\ = f\ x\ /g\ x$ $C^k\ I \setminus \Gamma\ \subset C^{k-1}\ I \setminus \Gamma$ ()的零点集。对于，我们通过() ()()定义，它属于() ()且处处非零。剩下要证明的是，φ 在 Γ的某个邻域内是 C^{k-1}-光滑定义的。根据引理1，在 f 和 g的一个单零点 $a \in \Gamma$ 附近，我们可以表示为

$$f(x) = f'(a)(x-a)F(x), \quad g(x) = g'(a)(x-a)G(x)$$

对于邻域 U中的 x，其中 $F,\ G \in C^{k-1}(U),\ F(a) = G(a) = 1$，并且 $F(x)$和 $G(x)$在 U上均不为零。因此，对于 $x \in U$，我们定义

$$\varphi(x) \coloneqq \frac{f'(a)}{g'(a)} \cdot \frac{F(x)}{G(x)},$$

它是光滑且处处非零的，$\varphi(a) = f'(a)/g'(a)$，并且在$U \setminus \{a\}$上与 $f(x)/g(x)$一致。 ■

C. 定理 2 的证明

定理 2 的证明。设 Σ为 f、$g \in C^k(\Omega)$ 的公共零点集。在 $\Omega \setminus \Sigma$上定义 $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \Sigma$定义 $\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$，它属于 $C^k(\Omega \setminus \Sigma)$ 且不取零值。尚需证明 φ 在 Σ 的任一点的邻域内是 C^{k-1}-连续定义的。设 $\mathbf{a} \in \Sigma$。由隐函数定理，存在~ a 的一个邻域 U、原点 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ 的一个邻域 $U \subset \mathbb{R}^n$，以及一个 C^k 双射 $\Phi: \tilde{U} \xrightarrow{\sim} U$，使得 $\Phi(0) = \mathbf{a}$，且 $\tilde{\Sigma} = \Phi^{-1}(\Sigma)$ 是坐标~ ~超平面 $\Sigma = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_1 = 0\} \cap U$。定义 $f = f \circ \Phi$ 与 $\tilde{g} = g \circ \Phi$，二者均为 $\tilde{U}$ 上的 C^k 函数，并在 $\tilde{\Sigma}$ 上具有简单零点。在此坐标系中，$\nabla \tilde{f}(0, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)\mathbf{e}_1$，且 $\nabla \tilde{g}(0, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)\mathbf{e}_1$，，其中 $\mathbf{e}_1$ 是坐标向量 $(1, 0, \ldots, 0)$，而 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ 与

— $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1}$ 是 $\tilde{\Sigma}$ 上不取零值的 C^{k-1} 函数。由 (5)，存在 $p, q \in C^{k-1}(\tilde{U})$，使得˜对 $(x_1, \ldots, x_n) \in U$

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 p(x_1, \ldots, x_n), \quad \tilde{g}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 q(x_1, \ldots, x_n)$$

和 $p = \frac{\partial f}{\partial x_1} \neq 0$以及$q = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1} \neq 0$ 在 $\tilde{\Sigma}$上。因此，不妨设存在 $\tilde{\Sigma}$的一个邻域，在该邻域上 $\tilde{U}$，且 p和 q均不为零。因此，$\frac{f}{\tilde{g}} = \frac{p}{q}$是 $\tilde{U}$ 上的一个不为零的 C^{k-1} 连续函数，并且在 $\tilde{U}$上与 $\varphi \circ \Phi$ 一致。于是，φ可延拓为 a的某个邻域内的 C^{k-1}-连续函数。 ■

D. 定理3的证明 为证明定理3，我们将引理1和定理 1推广到适用于复值函数的情形。

引理3。 设 $f \in C^k(I, \mathbb{C})$ 在开区间 $I \ni 0$上满足 $k \geq 1$。则存在函数 $g \in C^{k-1}\ I\ \mathbb{C}\ \ f\ x\ = f\ 0\ + xg\ x\ ,\qquad g^{(j)}\ 0\ =(,\ )()()()$，使得 $()()$成立。 $\frac{1}{j+1} f^{(j+1)}\ 0 \qquad 0 \leq j \leq k-1$

证明。 我们将引理1应用于 f 的实部与虚部，从而得到 g 的实部与虚部，并且它们具有所述性质。 ■

引理4（实直线上的复函数的光滑商）。 设 f，$g \in C^\infty$（I，$\mathbb{C}$）是实区间 I 上的光滑复值函数。假设 f，g具有公共零点，并且它们的导数 f' 和 g' 在零点集上均不为零。那么存在一个处处不为零的光滑复值函数 $\varphi \in C^\infty$（I，$\mathbb{C}$），使得 $f = g\varphi$。

证明。 证明过程与定理 1（B节）的证明采用相同步骤，只是将引理 1替换为引理3。 ■

定理3的证明。考虑区间（$-\varepsilon, \varepsilon$）上的光滑函数 f_γ（t）：$= f$（γ（t））以及 f_γ（t）$= g$（γ（t））。根据引理4，函数 φ：$= f_\gamma / g_\gamma$ 是光滑且处处不为零的，并且 $\varphi(0) = f'_\gamma(0)/g'_\gamma(0)$。注意到 $g'_\gamma(0) = Dg|_{\gamma(0)}\gamma'(0)$，以及 $f'_\gamma(0) = Df|_{\gamma(0)}\gamma'(0) = \frac{Df}{Dg} g'_\gamma(0)$，我们得到所述表达式。 — ■

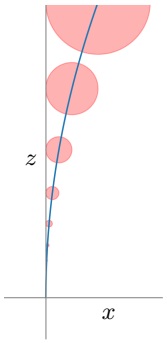
E. 定理4的证明 在二维区域上，定理4是定理3的直接推论。如果 f和 g复线性相关，且导数商 $\left(\frac{Df}{Dg}\right) = \left[\begin{smallmatrix} u & -v \\ v & u \end{smallmatrix}\right]$ 在每个零点处都具有某个 $u, v \in \mathbb{R}$，那么（3）可简化为 —

$$\lim_{t=0} \frac{f(\gamma(t))}{g(\gamma(t))} = \frac{1}{g'}(u + \mathbb{i}v)g' = u + \mathbb{i}v$$

它是一个单一的复数，仅取决于点 $\gamma(0)$，而与路径方向 γ'无关。这就证明了二维情形下的定理4。

然而，在高维中，定理4并不能自动由定理3推出。考虑任意一个与 Γ横截相交的二维平面，在该平面上，问题可归结为前文讨论的二维情形。因此，商函数φ 沿着任何与 Γ横截相交的路径都是连续的。此外，按构造，φ限制在 $\varphi|_\Gamma$ 或$\varphi_{\Omega\setminus\Gamma}$ 上时都是光滑的。然而，这些性质仍不足以得出 φ连续的结论。事实上，我们可以构造一个满足所有这些性质、但在 Γ上仍未定义的函数，如下面的例子所示。

例*4.* 考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的一族光滑鼓包函数$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得每个 b_n 在其支集的中心$(2^{-n}, 0, 2^{1-\frac{n}{2}})$处取得最大值*1*，该支集是半径为 2^{-n}的开球。它们的中心位于曲线 $z = 2\sqrt{x}$上，且支集触及 z 轴，如右图所示。利用这些鼓包函数，我们定义 $\varphi(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x, y, z)$。注意，任何与 z轴横截相交的路径只穿过上述开球中的有限多个。因此，沿这样的路径$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$，且满足 $\gamma(0) = \mathbf{0}$，我们有$\lim_{t\to 0} \varphi(\gamma(t)) = 0$。然而，任何满足 $a > 2$的曲线$(t, 0, a\sqrt{t})$在 $t \to 0$时与这些开球相交无穷多次，从而使 φ 在原点处不连续。



现在我们证明任意维数下的定理4。关键在于 f 和 g的简单零点条件。该条件确保这些函数在$\Omega \setminus \Gamma$上的首阶项由垂直于 Γ的坐标构成。因此，沿着任意趋近 Γ 的路径，商函数都是连续的，即使路径可能不是横截的，正如例4所示。

定理4的证明。$(i) \to (ii)$。由 g 的 C^1 正则性以及 φ 的连续性可知，在每个零点 a 处，$Df(\mathrm{a}) = \varphi(\mathrm{a})Dg(\mathrm{a})$。这表明 $Df/Dg = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\ \varphi(\mathrm{a}) & -\mathrm{Im}\ \varphi(\mathrm{a}) \\ \mathrm{Im}\ \varphi(\mathrm{a}) & \mathrm{Re}\ \varphi(\mathrm{a}) \end{bmatrix}$，因此 f和 g复线性相关。

$(ii) \to (i)$。令 Γ为 f，$g \in C^1(\Omega;\mathbb{C})$的公共零点集。商 $\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ 对于$\mathbf{x} \in \Omega \setminus \Gamma$，是 C^1-连续且处处非零。接下来要证明，f/g 可延拓为任意点$\mathbf{a} \in \Gamma$某个邻域内的 C^0-函数。

如定理 2 的证明所示，隐函数定理保证存在一个以 a 为中心的邻域 U、一个以原点 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$为中心的邻域 U，以及一个C^1 双射 $\Phi\colon \tilde{U} \xrightarrow{\cong} U$，使得 $\Phi(0) = \mathrm{a}$，且 $\tilde{\Gamma} = \Phi^{-1}(\Gamma)$是子空间$\tilde{\Gamma} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \mid x_1 = x_2 = 0\} \cap \tilde{U}$。为简便起见，记 $\mathbf{x}^\perp = (x_1, x_2)$，并记 $\mathbf{x}^\parallel = (x_3, \ldots, x_n)$。现在令 $\tilde{f} = f \circ \Phi$ 和 $\tilde{g} = g \circ \Phi$，它们是 C^1函数，且在 Γ上为零。

断言。存在$\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in C^0(\tilde{U}; \mathbb{R}^{2\times 2})$ 使得

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}^\perp, \quad \tilde{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x}^\perp, \tag{7}$$

其中$\mathbf{P}(\mathbf{0}, \mathbf{x}^\parallel) = \nabla_{\mathbf{x}^\perp} \tilde{f}(\mathbf{0}, \mathbf{x}^\parallel)$和$\mathbf{Q}(\mathbf{0}, \mathbf{x}^\parallel) = \nabla_{\mathbf{x}^\perp} \tilde{g}(\mathbf{0}, \mathbf{x}^\parallel)$均可逆，其中(7) 中的等式是 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 之间的自然识别。

我们将在最后证明这一断言。于是，根据$\mathbf{P}$,$\mathbf{Q}$ 的连续性，以及 f 和 g 复线性相关这一假设，可知存在一个定义在 Γ 上的连续复值函数 λ，使得在 Γ 上$\mathbf{P} = \Lambda\mathbf{Q}$，其中矩阵值函数 $\Lambda = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda & -\mathrm{Im}\,\lambda \\ \mathrm{Im}\,\lambda & \mathrm{Re}\,\lambda \end{bmatrix}$。利用这一点，我们定义一个定义在 $\tilde{\Gamma}$ 上的函数 $\tilde{\varphi}$：

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \tilde{f}(\mathbf{x})/\tilde{g}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \notin \tilde{\Gamma}, \\ \lambda(\mathbf{x}^\parallel), & \mathbf{x} \in \tilde{\Gamma} \end{cases}$$

并证明它在 $\mathbf{0} \in \Gamma$ 处连续。

˜由于$\mathbf{Q}$ 在 Γ 上可逆，也就是说，在$\mathbf{0}$附近的一个小区域内可逆，因此存在一个严格为正的常数 c，使得 $|\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x}^{\perp}| \geq c|\mathbf{x}^{\perp}|$ 在某个开邻域 U' 中成立，其中 $U' \subsetneq U$。于是，对于$\mathbf{x}\in U' \setminus \Gamma$，

$$
\begin{aligned}
|\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) - \tilde{\varphi}(\mathbf{0})| &= \left| \frac{\tilde{f}(\mathbf{x})}{\tilde{g}(\mathbf{x})} - \lambda(\mathbf{0}) \right| \\
&= \frac{|\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}^{\perp} - \Lambda(\mathbf{0})\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x}^{\perp}|}{|\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x}^{\perp}|} \\
&\leq \frac{\|\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \Lambda(\mathbf{0})\mathbf{Q}(\mathbf{x})\| \cdot |\mathbf{x}^{\perp}|}{c|\mathbf{x}^{\perp}|} \\
&= \frac{\|\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \Lambda(\mathbf{0})\mathbf{Q}(\mathbf{x})\|}{c} \to 0 \text{ as } \mathbf{x} \to \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

这里，$|\cdot|$ 表示复数的绝对值以及 $\mathbb{R}^2$中元素的标准欧几里得范数，而 $\|\cdot\|$ 是由 $\|A\| = \sup_{|\mathbf{z}|=1} |A\mathbf{z}|$定义的线性算子 $A := \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$的算子范数。结合 $\tilde{\varphi}|_{\Gamma}$的连续性，这表明 $\tilde{\varphi}$ 在$\mathbf{0}$处连续。因此，$f/g = \tilde{\varphi} \circ \Phi^{-1}$ 在$\mathbf{a}$处连续。

断言的证明。我们构造具有所述性质的$\mathbf{P}$、 $\mathbf{Q} \in C^0(\tilde{U}, \mathbb{R}^{2\times 2})$ 实例。对于每个$\mathbf{x}\in \tilde{U}$，考虑函数 $F{:}[0,1] \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$，定义为 $F(t) = \tilde{f}(t\mathbf{x}^{\perp}, \mathbf{x}^{\parallel})$。由于 $F(0) = \tilde{f}(\mathbf{0}, \mathbf{x}^{\parallel}) = 0$，由微积分基本定理可得，

$$
\tilde{f}(\mathbf{x}) = F(1) = \int_0^1 \frac{dF}{dt} dt = \int_0^1 \nabla_{\mathbf{x}^{\perp}} \tilde{f}(t\mathbf{x}^{\perp}, \mathbf{x}^{\parallel}) \cdot \mathbf{x}^{\perp} dt.
$$

利用这一关系，我们定义 $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = \int_0^1 \nabla_{\mathbf{x}^{\perp}} \tilde{f}(t\mathrm{x}^{\perp}, \mathrm{x}^{\parallel}) dt$。显然，$\tilde{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{P}(\mathrm{x})\mathrm{x}^{\perp}$。˜还要注意，由于 f 的 C^1 正则性，P 是连续的；此外，根据 f 的单零点假设，$\mathrm{P}(0, \mathrm{x}^{\parallel}) = \nabla_{\mathbf{x}^{\perp}} \tilde{f}(0, \mathrm{x}^{\parallel})$ 是可逆的。我们可以使用相同的论证构造 Q。

■