arXiv:2602.09978v1 [cs.CC] 10 Feb 2026

几何 1-可平面性的参数化复杂度*

Alexander Firbas[0009−0007−2049−2144]

维也纳工业大学，奥地利
afirbas@ac.tuwien.ac.at

摘要。 如果一个图存在一种直线绘图，使得每条边至多被交叉一次，则称其为几何 *1*-平面 图。我们首次系统地研究了识别几何 1-平面图的参数化复杂度。通过大幅扩展 Bannister、Cabello 和 Eppstein 的一项技术，并结合 Thomassen 关于可拉直的 1-平面嵌入的刻画，我们证明了：当以树深度为参数时，该问题是固定参数可解的。此外，我们还得到了一个以反馈边数为参数的几何 1-平面性核 ℓ。作为副产品，我们将 1-平面性 [4] 和 k-平面性 [16] 在相同参数化下已知的最佳核大小 $\mathcal{O}((3\ell)!)$ 改进为 $\mathcal{O}(\ell \cdot 8^{\ell})$。我们的方法自然地扩展到几何 k-平面性，从而在相同参数化下得到一种核化算法，尽管其核更大。作为这些结果的补充，我们给出了匹配的下界：即使对于具有有界路径宽度、有界反馈顶点数和有界带宽的图，几何 1-平面性仍然是 NP完全的。

关键词： 几何 1-平面性 · 参数化复杂性 · Graph Drawing

1 引言

如果一个图存在一种绘图，使得每条边至多被交叉一次，则称其为*1*-平面图；如果它存在一种具有直线边的此类绘图，则称其为几何 *1*-平面图。对于各种限制条件，识别 1-平面图是 NP完全问题；详见 Kobourov、Liotta 和 Montecchiani [21]的综述。尽管这一问题具有上述困难性，1-平面性的参数化复杂性却相对较为明确。在一项具有影响力的工作中，Bannister、Cabello 和 Eppstein 分析了结构参数化，基本严格地分类了哪些参数可以带来固定参数可处理性（例如树深度、反馈边数），以及哪些参数仍保持 NP完全性（例如带宽、路径宽度） [4]。近期，这一研究已扩展至 k-平面性 [16]„ 此外还有互补性工作

* 作者感谢维也纳科学与技术基金（WWTF） [10.47379/ICT22029] 和奥地利科学基金（FWF）[10.55776/Y1329], 提供的支持，并感谢Robert Ganian进行了富有帮助的讨论。

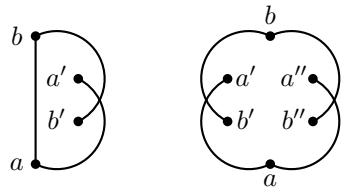

图 1. Thomassen 的 B （左）和 W （右）构型 [28]；其正式定义见定义 2。

研究了正交参数化，例如从部分预绘制实例 [14] 完成，以及交叉总数 [18]。

拓扑情形和几何情形呈现出不同的组合特性和算法行为。具有 n 个顶点的几何 1-平面图至多有 $4n-9$ 条边（对无穷多个 $n \geq 8$ 都能达到此上限） [11]。相比之下，1-平面图最多可有 $4n-8$ 条边（对 $n \geq 12$ 可达到此上限） [21]。因此，并非每个 1-平面图都是几何 1-平面图。

从复杂度角度来看，有充分证据表明几何变体严格更难：对于每个固定的 $k \geq 1$，几何 k-平面性都是 NP-困难的 [26,27], ，而且对于 $k = 867$ ，它是 $\exists\mathbb{R}$-完全的 [27], ，这意味着对于这个固定的 k，除非 $\exists\mathbb{R}$ =NP，否则该问题甚至不属于 NP。相比之下，对于每个固定的 k，其拓扑对应问题 k-平面性显然属于 NP。

理解几何 1-平面性的关键在于 Thomassen 的拉直刻画：当且仅当 1-平面嵌入中不含 B-或 W-构型时，该嵌入才可以拉直（见图 1）。这一结果最初由 Eggleton [13], 提出猜想，后由 Thomassen 于 1988 [28], 证明，之后 Hong 等人又重新发现了这一结果 [19], ；他们还证明，可以在线性时间内检测给定嵌入中的 B/W 构型，从而为几何 1-平面性提供了 NP 证书。对于 2-平面嵌入，目前尚无拉直刻画；而且任何此类刻画都必然是无限的 [28]。对于 3-平面嵌入，在某种自然意义下，不存在此类刻画 [22]。如果放宽拓扑等价的要求，只保留 1-平面嵌入中的交叉对集合，则存在另一种刻画 [20]。

值得一提的是，Thomassen 的刻画促成了两项算法应用。首先，每个三连通 1-平面图都存在一种绘图：除外面上的一条弯曲边外，其余部分均为直线 [3]。其次，IC-平面图（即存在一种嵌入、其中只有独立边发生交叉的 1-平面图）可以在线性时间内绘制为直线图 [6]。

除了识别问题和具体的绘图算法外，直线绘图还有一种定量视角。直线局部交叉数$\mathrm{lcr}(\cdot)$ 衡量用直线边绘制一个图所需的每边交叉数 [25]。对于所有完全图 [2] 以及大多数完全二部图 [1]，其精确值均已确定。

最后，在近期一项平行且独立开展的研究中，Cabello 等人 [7] 研究了将 1-平面性（及其几何变体）限制为仅允许某些交叉类型的情形，其中交叉类型由两条相交边的端点所诱导的子图定义。他们刻画了哪些交叉类型子集对应的问题可以通过以树宽为参数的固定参数算法求解，以及哪些子集对应的问题即使在路径宽度为常数的图上仍然是 NP-困难的。特别是，对于本文所研究的不限交叉类型的问题——几何 1-平面性（即允许所有交叉类型）——他们的结果意味着该问题是困难的。这自然引出了一个问题：对于比树宽限制更严格的结构参数（例如树深度），该问题的表现如何?

1.1 贡献

作为我们的首个结果，我们得到：

定理 1. 设 G 是一个有 n 个顶点且树深度至多为 d 的图。那么，几何 *1*-平面性可在以下时间内判定

$$\mathcal{O}\big(2^{2^{2^{2^{\mathcal{O}(d)}}}} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}\big).$$

在推导树深度-固定参数可处理算法时，基本思路是：给定一个顶点集，移除该集合后图会断开（有时称为调节集），将仅通过该集合与剩余图相连的连通分支数量限制在一个仅取决于树深度的函数范围内。

对于拓扑 1-平面性，Bannister、Cabello 和 Epp- stein [4] 的算法基本考虑了两种情形：首先，如果调节集至少有三个顶点，那么每个连通分支都会诱导出一个与调节集相连的“爪”图 $K_{1,3}$。由于有界树深度意味着路径长度有界，因此每个爪的大小也有界。因此，这类连通分支过多就会导致交叉过多，与 1-平面性相矛盾。其次，如果调节集的大小为二，同样根据路径长度有界这一事实，可以证明，若这类连通分支超过某个数量，那么调节集中的顶点必须绘制在同一个共享区域中，也就是说，可以在它们之间画一条无交叉线。这样，实例就分解为相互独立的实例：如果能将每个连通分支绘制成使两个调节集顶点位于同一区域，就可以将它们“粘合”回去。无需考虑调节集大小为一的情形，因为在拓扑情形中，通过一个简单的“粘合”论证，可以分别处理每个双连通分支（即每个块）。

粘合的正确性取决于一个重要假设：对于拓扑 1-平面绘图，外部区域的选择无关紧要。也就是说，通过适当选择子图形的外部区域，总能将两个 1-平面绘图在一个共享顶点处粘合，而不产生新的交叉。对于几何 1-平面性，外部区域的这种选择自由则不复存在。事实上，Thomassen 的拉直刻画 [28] 对外部区域的选择很敏感。

由于我们不能假设图具有双连通性，因此算法分两个阶段进行。

(i) 在块内部，我们沿着树深度分解处理图。*3*-调节器情形 与拓扑情形中的处理方式相同。对于*2*-调节器，我们在每个节点自底向上处理，并根据子节点共有的双顶点附着对它们分组。我们只保留数量较少的基准子节点，以确保任何有效解都必须将这两个附着顶点放在同一个共享区域内。对于其余子节点，我们通过穷举判断哪些子节点允许绘制，使这两个顶点位于外部 区域；这些部分可以“粘合”——通过对 Thomassen 刻画的一项非平凡应用，它们总能重新插入而不产生新的交叉——因此我们将其舍弃。如果其余（非外部）部分过多，就会有某条边被迫出现多于一次交叉，这与 1-平面性矛盾；否则，剩余部分的数量有界。这种自底向上的筛选将每个块内部的顶点数限制在一个关于树深度的函数范围内。

(ii) 跨越各块，我们再次自底向上处理块割树。在一个割点处，我们检查每个子节点子图（即该子节点下方各块的并集），并通过穷举判断哪些子图可以绘制成使割点位于外部区域；这些子图可在该割点处拼接，因此可以安全删除。如果剩余的非外部子节点过多，那么就不可能存在 1-平面绘图，因此我们拒绝该实例。通过这一处理，我们可以限制块割树的最大度。由于路径的长度有界，块割树的高度也有界。总之，这使我们能够仅根据树深度来限制块的数量（而每个块中的顶点数量也有界）。

对于下一组结果，我们考虑一个与树深度不可比较的参数——反馈边数，也称为循环数。首先，我们考虑拓扑 1-平面性。Bannister、Cabello 和 Eppstein 针对反馈边数核所采用的技术，可以得到一个大小为$\mathcal{O}((3\ell)!)$的核，其中 ℓ 是反馈边数。其基本思路是将输入图分解为 $\mathcal{O}(\ell)$ 条度为 2 的路径，并证明在任何假设解中，一旦交叉数超过某个阈值，就能找到一种连续交叉的局部构型，将其重新绘制以减少交叉数。因此，通过缩短度为 2 的路径，使其长度不超过该阈值，就能得到一个核。他们还证明，在这种策略下，该核大小是最优的 [4, 引理 10]。

我们通过一种全局而非局部的重新绘制论证打破这一障碍。我们还将输入图分解为 2 度路径。随后，我们按长度对这些路径排序，并观察到，当间隔足够大时，会出现性质上的转变：长 路径足够长，可以与短 路径任意交互；而通过应用纽结理论中的基础工具*Reidemeister* 变换，任意两条长路径都可以重新绘制，使它们至多相交一次 [24]。然后，我们将长路径缩短到仍符合“长”路径条件的最少边数，从而得到核。利用递归界，以及一项使我们能够假设最短路径长度有界的观察，我们为 1-平面性得到一个含 $\mathcal{O}(\ell \cdot 8^{\ell})$ 条边的核。

此外，尽管指数中的底数更大，我们运用 Thomassen 刻画，将这一核推广到了几何情形。

定理 2. 以反馈边数 ℓ 为参数的 *1*-平面性问题存在一个具有 $\mathcal{O}(\ell \cdot 8^{\ell})$ 条边的核。采用相同参数化的几何 *1*-平面性问题存在一个具有 $\mathcal{O}(\ell \cdot 27^{\ell})$ 条边的核。

作为直接推论（推论 1），我们在相同参数化下，为k-平面性得到一个改进的核，其边数为 $\mathcal{O}(\ell \cdot 8^{\ell})$，从而优于 Gima、Kobayashi 和 Okada [16]此前给出的、大小为 $\mathcal{O}((3\ell)!)$的最佳已知核。

我们的方法也可扩展到几何 k-平面性，但代价是核大小更大。由于缺乏针对具有 $k > 1$ 的 k-平面性的拉直刻画，我们给出一种直接的重新绘制论证：我们根据短路径对图进行三角剖分，并在每个三角形内重新绘制长路径，使交叉数较少。因此，我们得到：

定理 3。 几何 k-平面性以反馈边数 ℓ 为参数时，存在一个含有 $\mathcal{O}\big(2^{\mathcal{O}(3^{\ell}\text{对数}\,\ell)}\big)$ 条边的核。

最后，我们证明，这些结果在通常的参数层级下基本是紧的：即使在非常受限的情形下，几何 1-平面性仍然是 NP完全的。[1] 我们给出一种新的、基于装箱问题的归约，并证明：

定理4。 对于路径宽度至多为 *15* 或反馈顶点数至多为 *48* 的实例，几何 *1*-平面性仍然是NP-完全问题。

对于带宽这一参数，我们注意到，将每条边替换为一个常数规模的构件，只会使带宽呈二次增长。结合 Schaefer [26] 的一个已知归约，我们便可推广已知的有界带宽 1-平面性困难性结果 [4]:

定理5。 即使将实例限制为有界带宽，几何 *1*-平面性仍然是NP-完全问题。

2 预备知识

我们假设读者熟悉标准图论术语 [12]和参数化复杂性理论的基础知识 [9]。对于 $k \in \mathbb{N}$, $[k]$ 表示集合 $\{1, \ldots, k\}$。

图及其嵌入。 我们研究有限简单图。对于图G，我们用 $V(G)$和 $E(G)$分别表示其顶点集和边集。乔丹弧 是连续单射 $[0,1] \to \mathbb{R}^2$的像。

G 的嵌入是平面上的一种绘图，其中顶点为互不相同的点，每条边是其端点之间的一条乔丹弧，且各边仅在公共端点处或正常交叉处相交。一个 k-平面嵌入是一种嵌入

[1] Cabello 等人 [7]也通过平行且独立的研究证明，对于路径宽度有常数上界的图，几何 1-平面性是 NP-困难的，但没有明确给出该常数的具体上界。

其中每条边最多被交叉 k 次。在几何 嵌入中，每条边都画成一条直线。

嵌入 ε 的区域是 $\mathbb{R}^2$ 去掉所有边弧并集后所得的连通分支；无界区域称为外部区域。1-平面嵌入 ε 的平面化是通过将每个交叉点细分为一个新的 4 度虚拟顶点而得到的平面图，其相邻边称为半边。我们将非虚拟顶点称为真实顶点。因此， ε 的区域与平面化后的面一一对应。

定义 1。设 G 是一个图， a、 b 是 G 中两个不同的顶点。若存在 G 的几何 *1*-平面嵌入，使得 a 和 b 位于同一个共享区域中，即可以在二者之间画一条乔丹弧而不与任何边交叉，则称 G 为$(a$、 $b)$-共享几何 *1*-平面。若该共享区域无界，则称 G 为$(a$、 $b)$-外几何 *1*-平面。此外，若存在 G 的几何 *1*-平面嵌入，使得 a 位于外部区域，则称 G 为 a-外几何 *1*-平面。

交叉及其方向。 若两条独立边 $aa', bb' \in E(G)$ 在 1-平面嵌入 ε 中交叉，我们称 $\{aa', bb'\}$ 其为一个 (a, b)-交叉对。令 c 表示平面化中的虚拟顶点。 c的邻点的顺时针循环次序为 (b', a', b, a) 或 (a', b', a, b)。在前一种情况下，我们称交叉 (a, b)-左交叉；否则称为 (a, b)-右交叉 。接下来，我们用本文的术语正式定义 Thomassen 的 B- 构型和 W- 构型。

定义 2。 设 ε 是一个 *1*-平面嵌入。

– 一个 B-构型 由一条边 ab 和一个 (a, b)-交叉对 aa', bb' 组成，且由弧界定的两个区域（一个是外部区域，另一个是有界区域）中，端点 a', b' 均位于有界区域内。– 一个 W-构型 由两个 (a, b)-交叉对 aa', bb' 和 aa'', bb'' 组成，且由弧界定的两个区域中， a', a'', b', b'' 均位于有界区域内。

示意见图 1。Thomassen [28]证明，1-平面嵌入可以转化为在拓扑上等价（即保留所有顶点和交叉处边的循环顺序）的几何 1-平面嵌入，当且仅当该嵌入不含 B-和 W-构型。

3 基于树深度的固定参数可处理性

在本节中，我们推导定理 1。首先，在第 3.1 节中，我们给出将用于证明规则 I 和 II 安全性的引理，这些规则构成我们算法的阶段 I。在第 3.2 节中，我们定义规则 I 和 II，证明它们是安全的（引理 6），并且在穷尽应用这些规则后，最大块大小是有界的（引理 7）。然后，在第 3.3 节中，我们给出用于证明规则 III 安全性的引理，该规则构成我们算法的第二阶段。最后，在第 3.4 节中，我们定义规则 III，证明它是安全的（引理 10），并且在穷尽应用该规则后，块的最大数量是有界的（引理 11）。最后，我们得到定理 1。

3.1 阶段 I 的预备知识

Bannister、Cabello 和 Eppstein 证明了以下结果，尽管是以渐近形式给出的。为了得到用于规则 I 的 k 的显式界，我们给出另一种论证。

引理 1（改编自 [4, 引理 6，情形 $|S| \geq 3$]）。设 $G_1, \ldots, G_k$ 是连通图，它们的顶点集两两不相交，但 a、b、c 属于每个 G_i，并假设对于每个 i，$G_i - \{a, b, c\}$ 都是连通的。令 $G := \bigcup_{i=1}^{k} G_i$。若 G 的树深度至多为 d，且 $k \geq 2^{d+1} + 3$，则 G 不是 *1*-平面图。

证明。反设 ε 是 G 的一个 1-平面嵌入。对于每个 i，令 ε_i 为由 G_i 中连接 a、b、c 的边子集极小图所诱导的子图绘制。注意，这始终是一个细分后的 $K_{1,\,3}$。

固定互不相同的 p、q，并令 $H := \varepsilon_p \cup \varepsilon_q$。由于 $\mathrm{td}(G) \leq d$，H 中的每条简单路径长度都小于 2^d。注意，H 可以分解为一个圈和一条路径。因此，H 至多由 2^{d+1} 条边组成。

根据 Kuratowski 定理，其他每个子图绘制 $\varepsilon_\ell, \ell \notin \{p, q\}$ 都至少与 H 交叉一次。结合 $k \geq 2^{d+1} + 3$，这意味着 H中至少有 $2^{d+1} + 1$ 次交叉，而它最多只有 2^{d+1} 条边，这就产生了矛盾。□

接下来的四个引理（引理 2 至引理 5）将帮助我们证明规则 II 的安全性，该规则在第 3.2 节中定义。Bannister、Cabello 和 Eppstein 针对所有 1-平面嵌入证明了以下结论。因此，该结论尤其适用于几何绘图。我们用自己的术语将其重新表述为一个引理。更具体地说，他们证明了：如果如下引理中所述的 Gadmits a 1-平面嵌入，那么 a 和 b 位于同一个共享区域中。

引理 2 (改编自 [4, 引理 6，情形 $|S| = 2$]**)**。设 $G_1, \ldots, G_k$ 是定义在两两不相交顶点集上的连通图，唯一例外是，允许出现在多个 G_i 中的顶点只有两个不同的顶点 a, b。此外，设 $G := \bigcup_{i=1}^{k} G_i$，且其树深度为 d。如果 $k > 2^d$ 和 G 是几何 *1*-平面图，那么 G以及所有 G_i都是(a, b)-共享几何 *1*-平面图。

在证明引理 4 之前，我们记录 Thomassen 刻画的一个简洁推论。对于由 $(a,\ b)$-交叉对（以及可能存在的边 ab）构成的任意 1-平面嵌入，不含 B-和 W-构型等价于以下性质：来自 $(a,\ b)$-交叉对（以及可能存在的 ab）的边按照顺时针顺序围绕 a 呈现出模式 $L^*[M]R^*$（所有左侧交叉、可选的“中间”边 ab，然后是所有右侧交叉）；见图 2。

引理 3。设 ε 是由两个彼此孤立的顶点 a、b、可选的边 ab 以及一系列 $(a$、$b)$-交叉对的并集得到的一个 *1*-平面嵌入。

令 π_a 表示与 a *incident* 的边的顺时针循环次序，从 a 处外部区域之后的第一条边开始读取。通过书写，将 π_a 编码为字母表 $\{L, R, M\}$ 上的一个单词

– L 对于来自一个(a, b)-左交叉对的每条关联边，– R 对于来自一个(a, b)-右交叉对的每条关联边，以及

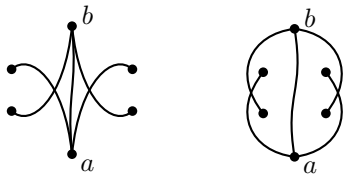

图 2. 引理 3 的示例。左：交叉序列为 LMR 的嵌入，不含 B- 和 W-构形。右：交叉序列为 RML 的嵌入，包含两个 B-构形和一个 W-构形。

– M 对于边 ab。

那么， ε 不含 B-构型和 W-构型，当且仅当 π_a 中的所有 L都连续出现，其后（如果存在）跟着单个 M，再后面是连续出现的所有 R；也就是说， π_a 可以写作 $L^*[M]R^*$，其中 $\cdot^*$ 表示出现零次或多次， $[\cdot]$表示至多出现一次。

证明。 以下所说的子词通常并非连续的。注意，由构造可知， π_a 中长度为二的每个子词都对应于 ε 中与 a 相邻的一个有界区域。我们证明该命题的逆否命题。

($\Rightarrow$)：假设 ε 包含一个 B 或 W 构形。如果它是 B，那么根据交叉边是 (a,b)-右交叉还是 (a,b)-左交叉， π_a 会包含 RM 或 ML 作为子词。类似地，如果它是 W，那么 π_a 包含 RL。在所有情况下，π_a 都不符合所需的模式。

($\Leftarrow$)：如果 π_a 偏离模式 $L^*[M]R^*$，则它包含以下某一个子词：RL、 RM、 ML 或 MM。子词 MM 不可能出现，因为边 ab 在 ε 中至多出现一次； RL 在 ε 中会产生一个 W 构形，而 RM, ML 都会在 ε 中产生一个 B 构形。□

现在我们可以证明引理 4；它与引理 2 一起，将证明规则 II 中删除步骤的正确性。

引理 4. 设 G_1、 G_2 是连通图，其顶点集除两个不同顶点 a、 b 外互不相交，而这两个顶点同时属于 G_1 和 G_2。此外，边 ab 至多属于 G_1、 G_2 之一。若 G_1 是 (a,b)- 共享几何 *1*- 平面，且 G_2 是 (a,b)- 外几何 *1*- 平面，则 $G_1 \cup G_2$ 是 (a,b)-共享几何 *1*-平面。

证明. 设 ε_1 是 G_1 的一个几何 1-平面嵌入，其中 a 和 b 共处于一个区域；再设 ε_2 是 G_2 的一个几何 1-平面嵌入，其中 a 和 b 位于外部区域。

令 ε_1' 为 ε_1 到所有属于某个 (a,b)-交叉对的边的限制，并在存在时连同 ab 。由于 ε_1 是几何的，根据 Thomassen [28]，它不含 B- 与 W-构型， ε_1' 亦然。因此引理 3 适用于 ε_1'，并且围绕 a的 (a,b)-对的顺时针顺序 π （按引理 3 中的定义表示为单词）具有形式 $L^*[M]R^*$。

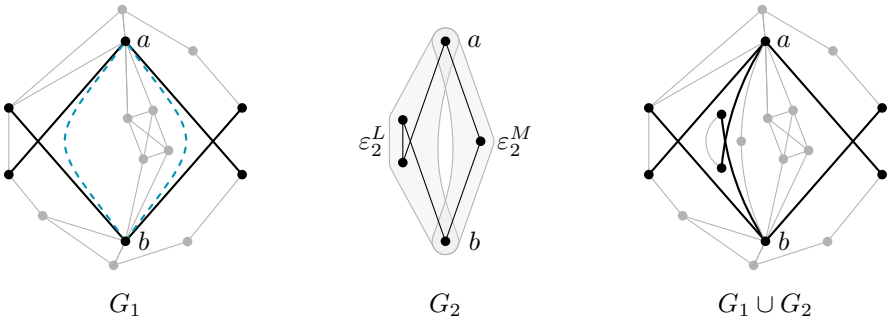

图 3. 引理 4 的示例。左： G_1 的嵌入 ε_1 以灰色显示，子嵌入 ε_1' 以粗黑线显示，视线以蓝色虚线表示。中：G_2的嵌入 ε_2 ，子嵌入 ε_2^L和 ε_2^M由灰色区域表示（子嵌入 ε_2^R为空）。右： $G_1 \cup G_2$的嵌入 ε ，子嵌入 ε' 以粗黑线显示。

视线位于 ε_1' 中。对于每个 (a,b)-左-交叉对 $\{aa', bb'\}$ 及其交叉点 c，存在一条从 a 到 b紧接在顺时针方向之后 aa' 、位于a的视线，它沿着 aa' 从 a到 c 的子线段与 bb' 从 c 到 b的子线段的拼接。对于每个 (a,b)-右-交叉对，存在一条视线紧接在顺时针方向之前 其边，位于 a。若 ab 存在，则存在视线紧接在之前 和紧接在之后 ab。注意，这些视线可延续至 ε_1。见图 3 的左部。

现在将 ε_2 划分为子图绘制 ε_2^L、 ε_2^M、 ε_2^R。将 ε_2 中每条（a、 b）-左侧交叉边的顶点标记为“左”，并将每条（a、 b）-右侧交叉边的顶点标记为“右”。若存在一条从 e 的某个端点出发、不经过 a、 b 而到达标记为“左”的顶点的路径，则将边 e 分配给子图绘制 ε_2^L。对称地定义子图绘制 ε_2^R。将所有剩余边分配给子图绘制 ε_2^M。这是定义良好的，因为若某条边同时被分配给 ε_2^L 和 ε_2^R，则意味着存在一条不经过 a、 b、从“左”顶点到“右”顶点的路径；这进而意味着 a、 b 不在 ε_2的外部区域中，与它们位于外部区域这一前提条件相矛盾。参见图 3 中间部分。

插入。 我们从 ε_1 开始，并在 a 与 b 之间适当的视线处插入 ε_2^L， ε_2^M， ε_2^R，从而构造出 $G_1 \cup G_2$ 的（不一定是几何的）嵌入 ε 。请注意，下文插入绘图时，我们采用纯拓扑方式进行，也就是说，插入的绘图通常不再是几何的。

如果 π 为空，我们利用 a与 b 在 ε_1 中共享一个区域，并将 ε_2 插入该区域（在这种情况下不需要分解后的绘图）。如果 π 包含 M，我们在紧邻之前 M ε_2^L、 ε_2^M 的视线处按顺序插入，并在之后 M ε_2^R的视线处插入。否则，我们选择一条位于所有 L 符号之后、但在所有 R 符号之前的视线，并按顺序插入 $\varepsilon_2^L, \varepsilon_2^M, \varepsilon_2^R$。由于 a 与 b 位于 ε_2 中的外部区域上（因而也位于 $\varepsilon_2^L, \varepsilon_2^M, \varepsilon_2^R$中），此过程不会引入任何新的交叉。因此， ε 从 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$继承1-平面性，并且 a, b 仍然至少共享一个区域。还需注意，插入该绘图中的所有边根据前提条件原本并不存在于 ε_1 中。参见图 3的右侧部分。

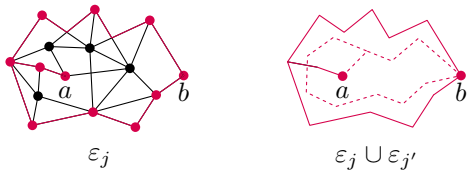

图 4. 引理 5 的示意图。左：嵌入 ε_j，其中套索形状以红色标出。右：ε_j 和 $\varepsilon_{j'}$ 的套索形状（以虚线绘制）必然相交。

设 ε' 为 ε 到所有(a,b)-交叉对的限制，若 ab 存在则一并包含。由构造可知，在引理 3的意义下，ε' 中围绕 a 的(a,b)-对的顺时针顺序仍为 $L^*[M]R^*$。因此，由引理 3，ε' 不含 B-配置与W-配置。

如果 ε 包含一个 B 或 W 构型，就必须包含来自 ε_1 和 ε_2两者的边，因为 ε_1 和 ε_2 是几何的，因此不含 B- 和 W-构型。根据 $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a,b\}$，任意混合的 W 都由两个 $(a,\ b)$-交叉对组成，而任意混合的 B 都由一个这样的交叉对和ab组成；在这两种情况下，该构型都位于 ε'中，这与 ε' 不含 B- 和 W-构型相矛盾。因此，ε 不含 B- 和 W-构型。

根据 Thomassen [28]，ε 在拓扑上等价于一个几何 1-平面嵌入（直线边在顶点和交叉处具有相同的旋转次序）。a 和 b 共享的区域在此变换下保持不变，因此 $G_1 \cup G_2$ 是（$a,\ b$）-共享几何 1-平面。□

最后，我们推导出一个引理，用以证明规则 II 中的拒绝情形是合理的。

引理 5. 设 $G_1, \ldots, G_k$ 是连通图，它们的顶点集两两不相交，但每个 G_i 都含有两个不同的顶点 a、b。此外，每个 G_i 都不是（$a,\ b$）-外几何 *1*-平面图，且至多有 m 条边。那么，如果 $k \geq 2m+3$，图 $\bigcup_{i=1}^{k} G_i$ 就不是几何 *1*-平面图。

证明。 为导出矛盾，假设存在 $\bigcup_{i=1}^{k} G_i$ 的一个几何 1-平面嵌入 ε。

对每个 $i \in [k]$，令 ε_i 表示 ε 在 G_i 上的限制。根据假设，在 ε_i 中，a 和 b 不可能同时位于外部区域。因此，至少存在 $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ 个嵌入 ε_i，其中不失一般性地，a 不位于外部区域。令 $I \subseteq [k]$ 为该子集的索引。

固定这样一个嵌入 ε_j，并考虑如下得到的“套索”形状：在 ε_j的平面化中，沿着一条从 a到外面的路径前进，然后沿着外面周围的圈行进。

在 ε_j的套索形状中，对应于“半边”的线段相对于 ε_j已经被交叉。对应于在 ε_j中未被交叉的边的线段至多还剩 m 条。

但请注意，每个 $\varepsilon_{j'}$ for $j' \in I \setminus \{j\}$ 形成的套索形状都必须至少与 ε_j 的套索相交一次（见图 4）。由于 $|I \setminus \{j\}| \geq \lceil k/2 \rceil - 1$ 和

$k \geq 2m+3$，可得 $\lceil k/2 \rceil - 1 \geq m+1 > m$。因此， ε_j的一条边在 ε中至少被交叉两次，这与 1-平面性矛盾。□

3.2 阶段 I：界定最大块大小

固定一个连通图 G。 G 的树深度分解是$V(G)$上的一棵有根树，其中对于每条边 $xy \in E(G)$， x， y 中的一个是另一个的祖先；有根树（以及任何有根子树）的深度 是根到叶路径上的最大顶点数。由于 G是连通的，我们在 $V(G)$上使用一棵深度为 d 的有根树T。对于 $v \in V(T)$，令 anc(v) 表示 T 中 v的祖先 集合（包括 v），令 desc(v)（即 v的后代 ）表示以 v 为根的子树中的顶点（包括 v）。记 $G_v := G[$ desc(v)], ，并令 anc(G_v) 表示 desc(v) 之外、且是 desc(v) 中至少一个顶点的祖先的顶点。我们不失一般性地假设，节点的每棵子树都与 anc(v) 中的某个顶点相邻（否则将该子节点提升为兄弟节点，这不会增加深度），并且每棵子树在 G中诱导一个连通子图（否则将其拆分为多个独立子节点，这同样不会增加深度）。

规则 I 令 $v \in V(T)$。如果存在 $X \subseteq \mathrm{anc}(v)$，使得 $|X| \geq 3$

$$\left|\{\, c \text{ child of } v \mid \mathrm{anc}(G_c) = X \,\}\right| \;\geq\; 2^{d+1} + 3,$$

则拒绝该实例。

规则 II 令 $v \in V(T)$，取不同的 a、 $b \in \mathrm{anc}(v)$，它们属于G中的同一个共享块。令

$$C \;:=\; \{\, c \text{ child of } v \mid \mathrm{anc}(G_c) = \{a, b\} \,\}.$$

如果 $|C| \leq 2^d + 1$，则不做任何操作。否则，若规则 *I* 和规则 *II* 均不适用于 v 的任何真后代：选择一个满足 $|C \setminus O| = 2^d+1$ 的溢出集 $O \subseteq C$；对每个 $c \in O$, 检验 G_c 是否为(a,b)-外几何 *1*-平面（通过穷举），如果是，则从 G 中删除 G_c，并移除由$\mathrm{desc}(c)$诱导的 T 子树；令 O' 表示 O中剩余的元素。记 $m := \max_{c \in O'} |E(G_c)|$。如果 $|O'| \geq 2m+3$，则拒绝该实例。

由上述引理可直接得到：

引理 6。 规则 *I* 和规则 *II* 是安全的。

证明。 若规则 I 对某个 $X \subseteq$ anc(v)及 $|X| \geq 3$触发，则由引理 1 可知该图不是 1-平面图，因此拒绝是正确的。

接下来考虑规则 II。对于固定的顶点对 $\{a, b\} \subseteq$，其中 v 为其祖先，令 C, O, O' 如规则中所述。根据构造，我们保留 $|C \setminus O| = 2^d+1$ 个附着于 $\{a, b\}$ 的子节点，不对其进行处理。因此，从 O 中删除任意顶点后，仍会有严格多于 2^d 个附着于 $\{a, b\}$ 的兄弟节点。因此，如果约化后的实例是几何 1-平面的，引理 2 便适用，并迫使 a 和 b 在整个嵌入中共享一个区域。给定这样的嵌入，根据引理 4，每个被删除的 (a, b)-外部几何 1- 平面子节点都可以重新插入。因此，删除它们是安全的。若删除后， $|O'| \geq 2m+3$ 中有 $m =$ max$_{c \in O'} |E(G_c)|$，则引理 5 排除了几何 1-平面嵌入，因此判定为不可行是正确的。□

引理 7. 穷尽地应用规则 *I* 和 *II* 后，令 N_ℓ 表示约化树深度分解中高度为 ℓ 的子树所含顶点数的最大值，这些子树诱导出一个双连通图。则

$$N_\ell \;=\; 2^{\,\mathcal{O}\left((d+\ell)\,3^{\ell}\right)}.$$

证明。设 v 是一个节点，其中 G_v 是双连通的，并令 $A :=\mathrm{anc}(v)$，因此 $|A| \le \ell+1$。v 的每个子节点 c 都满足 $\mathrm{anc}(G_c) = X \subseteq A$，且高度至多为 $\ell-1$，因此 $|V(G_c)| \le N_{\ell-1}$ 和 $|E(G_c)| \le \binom{N_{\ell-1}}{2}$。

集合 X 满足 $|X| \ge 3$。根据规则 I，对于每个这样的 X，至多有 $2^{d+1}+2$ 个子节点满足 $\mathrm{anc}(G_c) = X$。X 至多有 $2^{\ell+1}$ 种选择，因此这些总共贡献 $O(2^{\ell+d}\,N_{\ell-1})$ 个顶点。

集合 X 满足 $|X| = 2$。共有 $\binom{\ell+1}{2} = O(\ell^2)$ 对 $\{a,b\} \subseteq A$。固定一对，并令 $C := \{c : \mathrm{anc}(G_c) = \{a,b\}\}$。如果 $|C| \le 2^d+1$，则不会删除任何内容。否则，规则 II 选择一个溢出集 $O \subseteq C$，满足 $|C \setminus O| = 2^d+1$，删除 O 中满足 (a,b)-外几何 1-平面的那些 G_c，并令 O' 为剩余部分。如果 $|O'| \ge 2m+3$（其中 $m := \max_{c\in O'} |E(G_c)|$），则实例将被拒绝；因此 $|O'| \le 2m+2$。利用 $m \le \binom{N_{\ell-1}}{2}$，对于这一对，剩余子节点的数量至多为

$$(2^d+1) + (2m+2) \;\le\; 2^d + \left(N_{\ell-1}^2 - N_{\ell-1} + 3\right).$$

每个最多贡献 $N_{\ell-1}$ 个顶点，因此所有对的总贡献为 $O\left(\ell^2 N_{\ell-1}^3\right) + O\left(\ell^2 2^d N_{\ell-1}\right)$。

加入顶点 v 并结合两种情况，

$$N_\ell \;\le\; 1 \;+\; O\left(\ell^2 N_{\ell-1}^3\right) \;+\; O\left(2^{\ell+d} N_{\ell-1}\right) \;\le\; 2^{\,O(\ell+d)}\, N_{\ell-1}^3 \quad (\ell \ge 1,\; N_{\ell-1} \ge 2).$$

取 $\log_2$ 并展开，

$$\log_2 N_\ell \le 3\log_2 N_{\ell-1} + O(\ell+d) \;\Rightarrow$$
$$\log_2 N_\ell \le \textstyle\sum_{i=1}^{\ell} 3^{\ell-i}\, O(d+i) = O\left((d+\ell)\,3^{\ell}\right)$$

因此 $N_\ell = 2^{\,\mathcal{O}((d+\ell)\,3^{\ell})}$。 □

3.3 第二阶段的预备知识

接下来的两个引理与引理 4 和 5 相对应，确保在第 3.4 节中定义的规则 III 是安全的。

引理 8。 设 G_1、G_2 是连通图，其顶点集除共同包含的顶点 a 外互不相交，其中 a 同时属于 G_1 和 G_2。若 G_1 是几何 *1*-平面图，且 G_2 是 a-外几何 *1*-平面图，则 $G_1 \cup G_2$ 是几何 *1*-平面图。

证明。取 ε_1 的一个几何 1-平面嵌入 G_1，以及 G_2 的一个几何 1-平面嵌入，其中 a 位于外部区域。显然，可以（虽然会失去

直线性）将嵌入 ε_2 附接到 ε_1中的 a 处，使得从拓扑意义上看，两个嵌入各自保持不变，且不会产生新的交叉。将此称为 $G_1 \cup G_2$ ε的这个 1-平面嵌入。现在，假设 ε中存在一个 B-或 W-构型。 B-或 W-构型的平面化是 ε的平面化中的一个子图。它不可能仅包含在 ε_1 或ε_2 中，因为这两个嵌入都不含 B-和 W-构型。由于我们没有产生新的交叉，该嵌入构型的虚拟顶点必定出现在 ε_1 或 ε_2 中。但这样一来，平面化构型中的圈便会同时接触 G_1独有的顶点和 G_2独有的顶点。这是不可能的，因为 a 是 $G_1 \cup G_2$的割点。因此，根据 Thomassen [28]，可以将 ε 拉直，从而得到所需的嵌入。□

引理 9. 设 $G_1, \ldots, G_k$ 是顶点集两两不相交的连通图，但 a 属于每个 G_i。假设每个 G_i 都不是 a-外几何 *1*-平面图，且至多有 m 条边。若 $k \geq m+2$，则 $\bigcup_{i=1}^{k} G_i$ 不是几何 *1*-平面图。

证明。 应用引理 5 的套索论证，但稍作简化：我们可以假设所有套索都附着于 a。

3.4 第二阶段：界定块的数量

在穷尽地应用规则 I 和规则 II 后，考虑 G 的块割树，并以 G 的任意一个割点为根。

规则 III 设 v 是块割树中的一个割点。若 v 的所有后代割点均已处理，则此规则适用。设 C 为块割树中 v 的子节点集合；对于每个 $c \in C$，令 T_c 表示以 c 为根的子块割树。我们令 G_c 为 G 的诱导子图，该子图由 T_c 中所有块的并集构成。对于每个 $c \in C$，通过穷举检查 G_c 是否为 v-外几何 *1*-平面图。若是，则从实例中删除 G_c，并从块割树中删除 c。令 $C' \subseteq C$ 表示未被删除的子节点集合。记作 $m := \max_{c \in C'} |E(G_c)|$。若 $|C'| \geq m+2$，则拒绝该实例。

引理 8 和引理 9 直接推出：

引理 10。 规则 *III* 是安全的。

证明。 设 v 为已处理的割点， C 为其在块割树中的子节点， G_c 为规则 III 中对应于 $c \in C$ 的子图。若 G_c 是 v-外几何 1-平面图，则删除它是安全的：只要剩余实例是几何 1-平面图，就可根据引理 8 将 G_c 重新插入到 v 处。若删除后，剩余集合$C' \subseteq C$满足 $|C'| \geq m+2$，其中 $m = \max_{c \in C'} |E(G_c)|$，则图$\{G_c\}_{c \in C'}$ 是连通的，除 v外两两顶点不相交，没有一个是 v-外几何 1-平面图，且每个图至多有 m 条边；根据引理 9，它们的并非几何 1-平面图，因此拒绝该实例是正确的。□

引理 11。 穷尽地应用规则 *I* 至 *III* 后，块的总数至多为

$$\mathcal{O}\left(\left(2\binom{N_d}{2}\right)^{2^{\mathcal{O}(2^d)}}\right),$$

其中， N_d 是引理 7 给出的界，适用于在高度为 d 的树深度分解中诱导出双连通图的子树。

证明。 设 B_ℓ 是高度为 ℓ 的块割树的任意子树中块的最大数量，其中 $B_0 = 1$。每个子节点 c 至多贡献 $B_{\ell-1}$ 个块；由引理 7 可知，每个块至多有 N_d 个顶点，因此 $|E(G_c)| \le \binom{N_d}{2} B_{\ell-1}$。规则 III 将子节点数量限制为不超过这一边界加一，因此

$$B_\ell \;\le\; \left(\tbinom{N_d}{2} B_{\ell-1} + 1\right) B_{\ell-1} \;\le\; \left(2\tbinom{N_d}{2}\right) B_{\ell-1}^2,$$

根据归纳假设， $B_\ell \le \left(2\binom{N_d}{2}\right)^{2^\ell - 1}$。最后，块割树中长度为 k 的每条路径都对应于 G 中长度为 $\Omega(k)$ 的简单路径，而树深度 d 将 G 中简单路径的长度限制为 $< 2^d$；因此，块割树的高度为 $\mathcal{O}(2^d)$，代入 $\ell = \mathcal{O}(2^d)$ 即可得到所述界。□

最后，我们已经具备了推导定理 1 所需的全部条件。

定理 1。 设 G 是一个有 n 个顶点、树深度至多为 d 的图。那么，几何 *1*-平面性可以在以下时间内判定

$$\mathcal{O}\big(2^{2^{2^{2^{\mathcal{O}(d)}}}} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}\big).$$

证明。 我们可以分别处理 G 的每个连通分量，只需付出多项式级的额外开销，因此假设 G 是连通的。设 T 是 G 的一个深度为 d 的树深度分解。在 T 上自底向上遍历，并穷尽地应用规则 I 和规则 II。根据引理 7，每个块至多有

$$N_d \;=\; 2^{\mathcal{O}(d\,3^d)} \;\le\; 2^{2^{\mathcal{O}(d)}}$$

个顶点。

构建块割树，并穷尽地应用规则 III。根据引理 11，块的总数至多为

$$\left(2\tbinom{N_d}{2}\right)^{2^{\mathcal{O}(2^d)}}.$$

因此，得到的图至多有

$$S(d) \;\coloneqq\; N_d \cdot \left(2\tbinom{N_d}{2}\right)^{2^{\mathcal{O}(2^d)}} \;\le\; 2^{2^{\mathcal{O}(2^d)}}$$

顶点。

每当某条归约规则需要判定一个谓词（即规则 II 中的“(a,b)-外几何 1-平面”和规则 III 中的“v-外几何 1-平面”）时，根据 Thomassen 刻画 [28], ，该谓词属于 NP；又由于 NP $\subseteq$EXP,

对于含有 q 个顶点的输入，可以在 $2^{q^{\mathcal{O}(1)}}$ 时间内判定该谓词。这里 $q \leq S(d)$，而此类谓词求值的总次数是关于 n 的多项式。

在所有规则停止之后，剩余实例至多有 $S(d)$ 个顶点。由于几何 1-平面性属于 NP，最终实例可在时间 $2^{S(d)^{\mathcal{O}(1)}}$ 内判定。利用 $S(d) \leq 2^{2^{\mathcal{O}(2^d)}}$ 即可得到所声称的总体运行时间。□

4 经由反馈边数的核化

我们从推导定理 2 和推论 1 开始本节。设 G 是一个反馈边数为 $\ell \geq 1$ 的图。（对于 $\ell = 0$，该问题是平凡的。）我们指出，一个众所周知的事实是，G 的最优反馈边集，即一个集合 $F \subseteq E(G)$，满足 $|F| = \ell$，删除它可使 G 无环，可通过计算生成树在多项式时间内得到。不失一般性，我们可以假设G 没有度为1的顶点，因为迭代删除此类顶点显然不影响（几何）1-平面性。在图 H 中，2度路径是一条简单路径，其内部顶点在 H 中的度数均为二；注意这也包括长度为 1 的路径。我们如下定义 1-平面性的核 G' 以及几何 1-平面性的核 G'。由 [4, 引理 8], , G 的边集可分解为至多 $3\ell - 3$ 条极大 2 度路径。将这些路径按长度递增排序为 $P_1, P_2, \ldots, P_p$，其中 $p \leq 3\ell - 3$。对于 $i > 1$，若 $|E(P_i)| \geq p - 1 + \sum_{j=1}^{i-1} |E(P_j)|$，则称 P_i 为长的；若 $|E(P_i)| \geq 2(p - 1 + \sum_{j=1}^{i-1} |E(P_j)|)$，则称为极长的。我们首先描述如何得到 G'，即 1-平面性的核。若 P_1 的长度至少为 $p - 1$，则令 $G' := K_2$，这是一个平凡肯定实例。若没有 P_i 是长的，则令 $G' := G$。否则，设 j 是使 P_j 为长的最小下标。然后，将 G' 构造为所有满足 $i < j$ 的 P_i 的并集，连同所有对应于 $i \geq j$ 的 P_i，并缩短至长度 $|E(P_j)|$。几何 1-平面性的核 G' 可类似定义，只是用谓词“极长”代替“长”。

在以下引理中，我们证明：先应用第一类和第二类 Reidemeister 变换 [24]，然后——在几何情形下——应用 Thomassen 刻画 [28], ，即可将原图的一个解的绘图变换为核的一个解的绘图。具体而言，第一类变换会消除一条（非常）长路径的自交，而第二类变换会消除两条相互交叉的（非常）长路径之间的两个交叉。

引理 12. 设 G 是一个图，且 ε 是 G的一个 *1*-平面（分别为几何 *1*-平面）嵌入。将 $E(G)$ 划分为 s 条边，称为静态边，以及f 条极大 *2* 度路径，称为柔性路径，每条路径的长度至少为$s + f - 1$（分别为 $2 \cdot (s + f - 1)$）。令 G' 由 G 得到：将每条柔性路径缩短至长度 $s+f-1$（分别为 $2\cdot(s+f-1)$），同时保留其端点。则存在一个 G'的 *1*-平面（分别为几何 *1*-平面）嵌入。

证明。 我们首先证明非几何情形下的结论，然后将其推广到几何情形。

非几何情形。 我们先重新绘制灵活路径。对于每条灵活路径，考虑将其各条边对应的乔丹弧首尾连接后得到的曲线。我们将这些弧的集合称为灵活弧集。

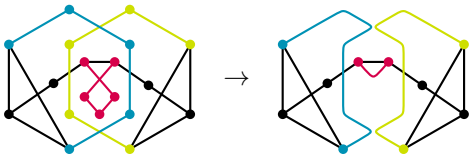

图 5. 引理 12 中绘图简化规则的示意图。左侧为原始绘图，右侧则将灵活路径表示为若尔当弧。静态边以黑色显示，灵活路径则用彩色表示。规则 I 应用于红色灵活路径，规则 II 应用于蓝色和绿色灵活路径。

我们对灵活弧穷尽地应用以下两条交叉消除规则，以减少它们之间的交叉总数，同时保持每条静态边是否被灵活弧交叉这一状态不变。

规则 I 每当灵活弧与自身交叉时，就通过移除环来缩短该弧。**规则 II** 每当两条灵活弧彼此交叉两次时，就交换两次交叉之间所围成的两段弧。

我们指出，规则 I 和规则 II 分别对应于纽结理论的基础性变换——第一类和第二类 Reidemeister 变换 [24]。

示例见图 5。规则 I 会使交叉总数减少一个，规则 II 则减少两个。因此，该过程必定终止。终止后，每条灵活弧都是简单的（即没有自交），且与任何其他灵活弧至多交叉一次。

在最坏情况下，每条灵活弧都可能与每条静态边相交一次。因此，每条灵活弧总共至多参与 $s + f - 1$ 次交叉。

我们现在按如下方式构造 ε' G' 的一个 1-平面嵌入。保留 ε 中由静态边诱导的嵌入。将简化后的灵活弧插入该嵌入中。然后，对于每条灵活弧，从起点到终点遍历它，并在每个交叉点之后立即插入一个细分顶点。如果还有未使用的额外细分顶点，可以任意放置。由此得到 G' 的一个有效 1-平面嵌入，完成证明的第一部分。

几何情形。我们采用类似的方法，这次从一个几何 1-平面嵌入开始。在消解交叉时，我们插入两个细分顶点，而不是一个——在交叉点两侧各插入一个。令 ε' 表示由此得到的 G' 的 1-平面嵌入。我们现在说明，ε' 不含 B 和 W 配置，因此可根据 Thomassen 刻画 [28] 将其拉直。不失一般性，假设我们无需插入任何“剩余”细分顶点，因为这些顶点可以在拉直步骤之后安全地插入。

只需证明 ε' 不包含任何接触缩短的灵活路径内部顶点的 B- 或 W-构型。否则，这样的构型将完全由静态边组成，这与以下事实矛盾：原始嵌入 ε 中由静态边诱导的子图绘制是几何 1-平面的，因此不含 B- 和 W-构型。

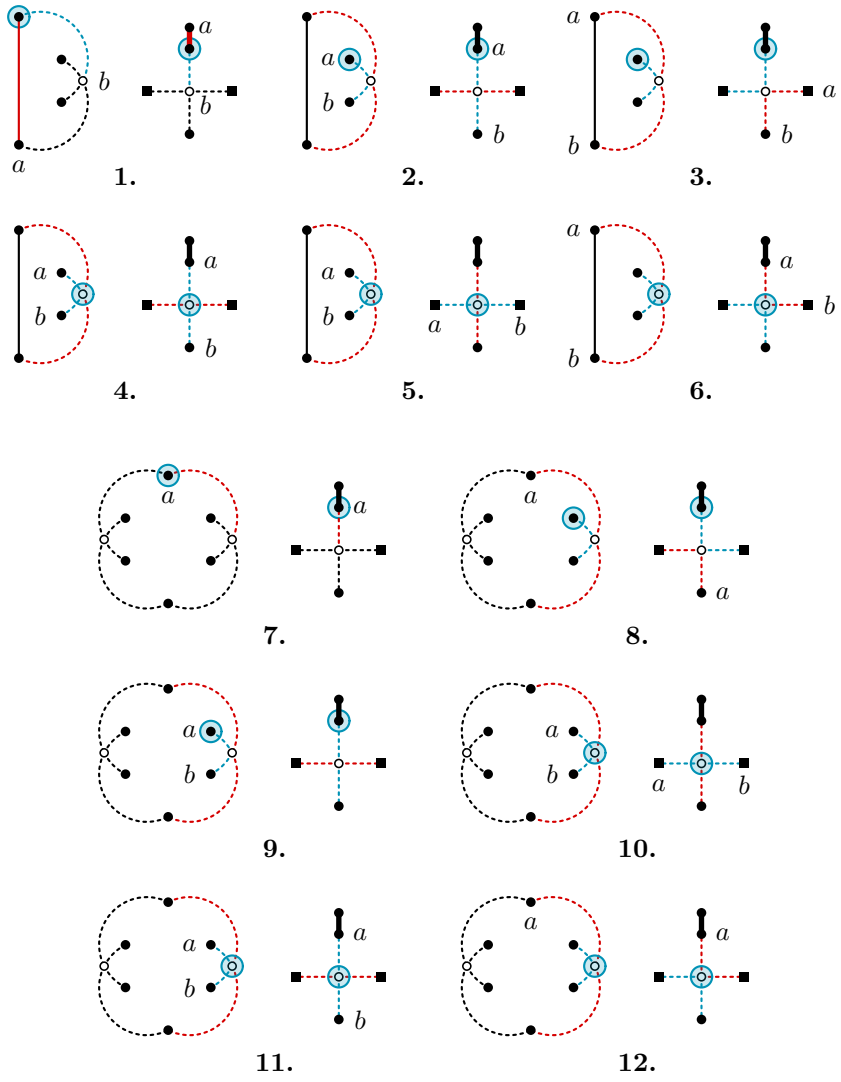

图 6。尝试将一个 W/B 配置嵌入 ε' 的平面化中、使柔性路径的一个内部顶点被触及的 12 种情况（忽略对称性）。每种情况下，左侧为 B 或 W 配置，右侧为 ε'的平面化的一个诱导子图，其中包含一个真实的柔性路径内部顶点，该顶点与一条无交叉边和一条交叉边相邻，而后者又被一条不属于该路径的边交叉。蓝色圆圈表示 B或 W配置中的真实顶点或虚拟顶点如何映射。真实顶点以实心圆盘表示，虚拟顶点以空心圆盘表示，与路径交叉的边的端点以方块表示。半边以虚线表示，无交叉边以粗线表示。红色/蓝色表示相应边的映射方式。

我们通过情形分析证明这一点；见图 6。我们考察 ε' 的平面化，并枚举（除去对称情况后）将 aB- 或 W-构型的平面化嵌入 ε' 的平面化中的所有方式，使得一条平面化柔性路径的某个内部顶点属于平面化的 B- 或 W-构型。在 12 种情形中，我们都将 B- 或 W- 构型中蓝色圈出的（虚拟或实际）顶点映射到柔性路径上相应类型的一个内部顶点。请注意，根据构造，每个这样的实际顶点都与一条无交叉边和一条半边相邻。

在情形 1 中，B-构型中与蓝色顶点相邻的蓝色半边只能映射到唯一选项，即端点标记为 b 的蓝色半边，因为柔性路径上的蓝色顶点只与一条半边相邻。这就迫使红色标记的边映射到端点标记为 a 的无交叉边。在 B-构型中，a 和 b 必须通过一条半边相连，但它们不在路径上。因此，所选的蓝色顶点无法与柔性路径的某个内部顶点相邻。

对于剩余的 11 种情况，我们采用类似的方法。每种情况下，我们都考虑一个 B-或 W-构型（真实或虚拟）中的顶点。在某些情况下，相邻边的映射与情况 1 中一样是确定的；在其他情况下，则有多种选择，我们在不同的情况中分别处理。

我们在每种情况下都如下导出矛盾：在情况 1、3 和 6 中，顶点 a 和 b 不相邻，但在 B-或 W-构型中却必须相邻。在情况 2、4、5 和 9–11 中，a 和 b 都必须位于 B-或 W-构型所界定的区域内，但映射强制其中只有一个位于该区域内。最后，在情况 7、8 和 12 中，顶点 a 应有两条相邻的半边，但实际上它只有一条（以及一条无交叉边）。□

现在我们来论证核化的“基本情形”。直观地说，如果最短路径足够长，我们就得到一个平凡肯定实例，因为此时可以将每条路径画成一条直线，并使路径的端点处于凸位置。

引理 13. *设图 G 被划分为 f 条度为 2 的路径，每条路径的长度至少为 $f-1$。那么，G 是几何 1-平面图。*

证明. 为获得认证画法，将 G 的顶点置于凸位置（例如圆的边界上），并在每条路径的首尾顶点之间画一条直线。接下来只需插入每条路径的细分顶点，从而得到 G 的正常画法。注意，每条直线与其他任一直线至多交叉一次。因此，每条路径都有足够的线段（$\geq f-1$）来承受至多 $f-1$ 次交叉，我们可以据此放置细分顶点。□

对每个核分别求解一个递推关系，可以界定其大小。我们分析最坏情况：最短路径太短，无法直接判定为不满足条件，而且没有路径特别长，因此不会发生缩短。

引理 14. *图 G' 至多有 $\mathcal{O}(\ell \cdot 8^{\ell})$ 条边，而 G' 至多有 $\mathcal{O}(\ell \cdot 27^{\ell})$。*

证明。 首先，我们界定 $|E(G')|$。最坏情况出现在每条 P_i 都恰好短一条边，以至于不能被视为长路径时（即没有缩短长路径的操作

），且第一条路径 P_1 恰好短一条边，以至于该过程无法将G 替换为平凡肯定实例。于是，我们有

$$|E(P_i)| = p - 2 + \sum_{j=1}^{i-1} |E(P_j)| \quad \text{for } 2 \le i \le p,$$
$$|E(P_1)| = p - 2.$$

Set

$$S_i \coloneqq \sum_{j=1}^{i} |E(P_j)|,$$

使得 $S_p = |E(G')|$。然后，重新整理可得

$$S_i = 2S_{i-1} + p - 2 \quad \text{for } 2 \le i \le p,$$
$$S_1 = p - 2.$$

解这个递推关系可得

$$S_i = (2^i - 1)(p - 2) \quad \text{for } 1 \le i \le p.$$

由于路径 p 的数量至多为 $3\ell - 3$，因此可得

$$|E(G')| = S_p \le \frac{(8^\ell - 8)(3\ell - 5)}{8} = \mathcal{O}(\ell \cdot 8^\ell).$$

为了界定 $|E(\overline{G'})|$，我们采用对称的方法，但使用谓词“非常长的路径”而非“长路径”。这样，我们得到

$$\begin{aligned} |E(\overline{G'})| &\le \tfrac{9}{2} - \tfrac{19}{2}\, 3^{3\ell-4} + \left(-3 + 2 \cdot 27^{\ell-1}\right) \ell \\ &= \mathcal{O}(\ell \cdot 27^\ell) \end{aligned}$$

□

结合上述引理可知，我们的核化是正确的：

引理 15。 G 是（几何）*1*-平面的，当且仅当 G' 是（分别地，$\overline{G'}$是）。

证明。（⇒）：假设 G 是1-平面的（分别地，几何1-平面的）。如果 $G' = K_2$，而当 P_1 的长度至少为 $p-1$时情况成立， G' 显然是1-平面的（分别地，几何1-平面的）。接下来，如果没有 P_i 很长（分别地，非常长），则有 $G' = G$（分别地，$G' = G$），命题显然成立。否则，令 j 为一条长（分别地，非常长）路径的最小索引。于是，我们可以将引理12应用于带有静态边 $\bigcup_{i=1}^{j-1} E(P_i)$ 和柔性路径 P_j、.....、 P_p的 G ，从而得到 G'是1-平面的（分别地，几何1-平面的）。

（⇐）：假设 G' 是 1-平面（分别地， $\overline{G'}$ 是几何 1-平面）。如果 P_1 的长度至少为 $p-1$，那么所有 p 路径的长度都至少达到这一数值。因此，根据引理 13， G是（几何）1-平面。接下来，如果没有 P_i 很长（分别地，非常长），那么我们有 $G = G'$（分别地， $G = G'$），结论显然成立。否则，注意到我们可以通过添加细分顶点，从 G' （分别地，G'）得到 G。由于我们可以在 G' （分别地， G'）的见证嵌入中添加细分顶点，同时保持（几何）1-平面性，因此 G 是 1-平面（分别地，几何 1-平面）。□

现在，我们已具备推导定理 2 所需的全部前提。1-平面性（以及更一般地，k-平面性）显然属于 NP。Hong 等人证明，几何 1-平面性也属于 NP。 [19]因此，这三个问题都是可判定的。我们在引理 15 中证明了核化的正确性，并在引理 14 中界定了所得实例 G' 和 G'的规模。因此，我们有：

定理 2. *以反馈边数 ℓ 为参数的 1-平面性问题存在一个具有 $\mathcal{O}(\ell \cdot 8^{\ell})$ 条边的核。采用相同参数化时，几何 1-平面性问题存在一个具有 $\mathcal{O}(\ell \cdot 27^{\ell})$ 条边的核。*

图 G 是 k-平面的，当且仅当将图 G 的每条边替换为一条包含 k 条边的路径后得到的图 G_k是 1-平面 [16]。由于 G_k 的反馈边数与 G相同，我们立即得到以下结论。

推论 1. *以反馈边数 ℓ 为参数的 k-平面性问题存在一个具有 $\mathcal{O}(\ell \cdot 8^{\ell})$ 条边的核。*

4.1 几何 k-平面性

现在，我们将该技术应用于几何 k-平面性。我们按照第 4 节开头的方式定义核，唯一的区别在于“长路径”的概念。（下文中的所有符号——包括路径 $P_1, \ldots, P_p$ 以及输入图 ℓ的反馈边数——均按第 4 节开头的定义。）

我们不采用文中定义的长路径（分别为很长路径），而是针对非常长的路径构造核。令 $s(i) := \sum_{j=1}^{i-1} |E(P_j)|$ for$i \in [p]$。我们称 P_i for $i > 1$ 为非常长的，当且仅当 $|E(P_i)| \geq (s(i)^2 + 3s(i) + 1) \cdot (2 + p - 1) + 1.$

为补充这一概念，我们需要一种新的重新绘制策略：将解的绘图划分为若干三角形，使每个三角形的内部仅包含非常长的路径，然后在每个三角形内将这些非常长的路径重新绘制，基本上绘制成直线。形式上，几何平面嵌入的受约束三角剖分是一个几何超嵌入，它具有相同的顶点集，且每个面都是一个三角形 [5]。

首先，我们给出一个界，说明需要多少个三角形。

引理16. *设 G 是一个含有 m 条边的 k-平面几何图，绘制在一个固定的三角区域 Δ内，且设 P 为该图的平面化（包括 Δ）。定义 $t(m)$ 为 P的受约束三角剖分中三角形的最大数量。那么*

$$t(m) \leq m^2 + 3m + 1.$$

证明。 $t(m)$这一数量是定义良好的，因为每个平面几何图都存在一个受约束三角剖分，例如参见 [8]。如果 P 具有 $N \geq 3$ 个顶点（包括原始端点、交点以及 Δ的三个角点），那么这些顶点上的任意极大平面直线图恰好有 $2N - 4$ 个面

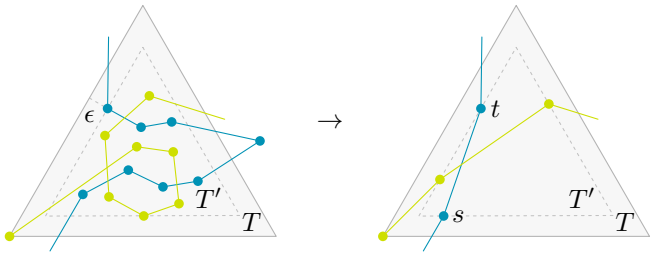

图 7. 引理 17 中重新绘制步骤的示例。柔性路径用蓝色和绿色绘制，三角剖分三角形 T 用灰色绘制，“收缩三角形” T' 以虚线轮廓表示。右侧的 s 和 t 仅为蓝色路径标注。

（例如参见 [12]），因此有 $2N-5$ 个三角形面。在几何绘图中，每对边至多交叉一次。因此， $N \le 2m + \binom{m}{2} + 3$。于是

$$t(m) \le 2N - 5 \le 2\big(2m + \tbinom{m}{2} + 3\big) - 5 = m^2 + 3m + 1.$$

现在我们可以给出重新绘制论证了。

引理 17. 设 G 是一个图， ε 是 G的几何 k-平面嵌入。将 $E(G)$ 划分为 s 条边，称为静态边，以及 f 条极大 *2* 度路径，称为柔性路径，每条路径的长度至少为$(s^2+3s+1)\cdot(2+f-1)+1$。令 G' 由 G 得到，方法是将每条柔性路径缩短至长度$(s^2+3s+1)\cdot(2+f-1)+1$，同时保留其端点。则存在 G'的几何 k-平面嵌入。

证明。 按照引理 16 的含义，为 ε 固定一个三角剖分，该三角剖分仅包含静态边，并添加一个包围所有静态边和柔性边的三角形。为了得到 G' 的所需绘图，我们将在三角剖分的每个三角形内部重新绘制 ε。请注意，根据构造，每个三角形的内部只能与柔性路径的边相交。

任意排列这些三角形的顺序。对于每个三角形 T，执行以下操作（示例见图 7）：令 ϵ 为从 T 的边界到 T 内部某个顶点或交叉的最小距离。如果 T 内没有顶点或交叉，则令 $\epsilon := \infty$，并继续处理下一个三角形。否则，令 T' 为将 T 的边界沿法线方向向内移动距离 ϵ 后得到的区域。

我们按如下方式重新绘制每条与 T' 相交的柔性路径 P。从 P 的一个端点开始，沿路径遍历至另一端点。令 s 为与 T' 的第一个交点，令 t 为与 T' 的最后一个交点。在点 s 和 t 处分割 P，删除它们之间的线段，并用一条直线连接 s 和 t。

接下来，我们在 T' 内插入细分顶点，以确保限制在 T' 内的绘图具有 1-平面性。由于 T' 是凸的，且每条柔性路径 P 都绘制为经过 T'、 P 的直线，因此它与其他每条柔性路径最多交叉一次。针对每个交叉，在 T' 内的 P 上添加一个细分顶点，以确保 T' 内具有 1-平面性。

包含静态边在内的整个绘图仍然是 k-平面的：在原始绘图中，静态边与一条固定的柔性路径交叉，当且仅当它们在简化后的绘图中交叉。收缩三角形内的柔性边与其他边最多交叉一次，而收缩三角形外的柔性边（可能缩短了）在重新绘制时没有增加交叉，因此仍然最多被交叉 k 次。

接下来，我们论证，重新绘制后，每条柔性路径 P 至多有 $(s^2+3s+1)\cdot(2+f-1)$ 个内部顶点。应用引理 16，在三角剖分的每个至多 $t(s)$ 个三角形 T 内部，根据构造，柔性路径在边界上至多有两个内部顶点，此外，若它与 T' 相交，则在 T' 内部至多还有 $f-1$ 个内部顶点；否则没有内部顶点。

因此，总体而言，在当前绘图中，柔性路径至多有 $(s^2+3s+1)\cdot(2+f-1)$ 个内部顶点，故其长度至多为 $(s^2+3s+1)\cdot(2+f-1)+1$。

最后，为了获得 G' 的正常画法，我们任意地为每条长度不足的柔性路径插入所需数量的细分顶点。□

我们的结果现在可类似于前面的核得出。

定理 3. 以反馈边数 ℓ 为参数的几何 k-平面性问题，存在一个包含 $\mathcal{O}\big(2^{\mathcal{O}(3^\ell \log \ell)}\big)$ 条边的核。

证明。 该核化的正确性与引理 15 的证明完全相同，只不过我们现在使用“非常非常长的路径”这一概念，并应用引理 17 而非引理 12，从原图的绘图中得到核的绘图。

显然，该核可以在多项式时间内计算出来；此外，几何 k-平面性问题属于 $\exists\mathbb{R}$，因此可在 $[27]$[2] 内判定。剩下的任务是界定核大小。定义 $S_i := \sum_{j=1}^{i} |E(P_j)|$，使得该核包含 S_p 条边。注意，$S_1 = \mathcal{O}(\ell)$、$p = \mathcal{O}(\ell)$ 和 $S_i = \mathcal{O}(S_{i-1}^2 \cdot p) = \mathcal{O}(S_{i-1}^3)$，其中 $1 < i \le p$。因此，该核至多包含 $\mathcal{O}(\ell^{\mathcal{O}(3^p)}) = \mathcal{O}(2^{\mathcal{O}(3^\ell \log \ell)})$ 条边。

5 下界

本节证明定理 4 和定理 5。对于带宽，我们将拓扑情形中的已知 NP-困难性 [4] 推广到几何情形。带宽上界路径宽度是标准结论，因此，在有界带宽下的困难性已经意味着在有界路径宽度下的困难性。然而，现有关于 1-平面性的有界带宽困难性结果并未给出具体常数。相比之下，我们的构造证明了路径宽度至多为 15 这一具体且较小的上界。

对于反馈顶点数，已知的拓扑情形下的困难性 [16]无法通过相同的途径转移（路径宽度对应的引理 21 并不成立），

[2] [27] 的作者并未明确证明归属性，而是隐含地陈述了这一主张。不过，通过给出一个合适的 $\exists\mathbb{R}$-句子，可以很容易地证明归属性；相关问题（例如 [10]中的几何厚度）也采用了这种做法。

而且也不清楚能否应用 Thomassen 刻画。因此，我们给出了一个来自装箱问题的新归约。

两个结果都将用到以下概念。双端边替换构件是一个图 H，它有两个指定的附着顶点 α，β。给定图中的一条边 uv，将其替换 uv 为 H，是指取一份 H 的新副本，记作 H_{uv}，并将其两个附着顶点分别与 u 和 v（顺序不限）识别为同一顶点。我们称顶点 $V(H_{uv}) \setminus \{u, v\}$ 和边 $E(H_{uv}) \setminus \{uv\}$ 为构件内部的。

5.1 反馈顶点数与路径宽度

图的反馈顶点数是使图变为无环图所需删除的最少顶点数。关于路径宽度的定义，请参见 [9]。

装箱问题。我们将从强 NP-困难的装箱问题 [15],归约而来。该问题询问：给定一个物品有限集合 U，其中每个物品$u \in U$的大小为 $s(u) \in \mathbb{Z}^+$，箱子容量为 $B \in \mathbb{Z}^+$，以及整数 $K > 0$，集合 U能否划分为互不相交的子集 U_1，U_2，.....，U_K，使得对所有 $i \in [K]$，$\sum_{u \in U_i} s(u) \leq B$。

不失一般性，假设 $K \geq 2$，因为 $K = 1$ 的情形是平凡的。此外，我们可以假设 $\sum_{u \in U} s(u) = K \cdot B$，也就是说，所有箱子都必须恰好装满。无需改变实例的可行性即可保证这一点：如果 $\sum_{u \in U} s(u) < K \cdot B$，我们可以添加 $K \cdot B - \sum_{u \in U} s(u)$ 个尺寸均为 1 的虚拟物品，从而得到一个等价实例；而如果 $\sum_{u \in U} s(u) > K \cdot B$，则该实例显然不可行。此外，我们可以假设最小物品尺寸满足 $\min_{u \in U} s(u) \geq K + 1$；否则，将所有物品尺寸和箱子容量 B 乘以 $(K + 1)$，即可满足这一条件，同时保持实例等价。

归约。 固定一个具有上述性质的装箱问题实例。我们按如下方式构造一个几何 1-平面性实例。首先取图 8 所示的三连通图，其中指定顶点为s、t、r_1^ℓ、r_2^ℓ、r_1^r、r_2^r，我们将其称为框架。从 K_6 的一个副本出发，选取两个不同的顶点构成一个双端边替换构件，并用这样的构件替换框架中的每一条边。

接下来，我们在 r_1^ℓ 和 r_2^ℓ 之间添加一条长度为 $|U| + K - 1$ 的路径，称为红色左路径；并在 r_1^r 和 r_2^r 之间添加一条长度为 $K \cdot B$ 的路径，称为红色右路径。然后，我们从 s 向红色右路径上的顶点添加 $K - 1$ 条紫色边，使右路径被划分为 K 条长度均为B 的子路径。对于每个项目 $u \in U$，我们创建 $K_{2,s(u)}$ 的一个全新副本，称之为与 u 对应的菱形 。我们在 s 和菱形二部划分中大小为 2 的部分的一个顶点之间添加一条边，并将该顶点称为菱形顶点 d_u；再将另一顶点与 t 合并。将 u 的菱形与边 sd_u 的并称为 u 的物品构件 。图 8 展示了一个示意图。

直观而言，附加了 K_6-构件的三连通框架构成了一道刚性屏障，基本上只能如图所示绘制；根据引理18，它不能被交叉。因此，剩余构件只能被迫绘制在框架内部。红色右路径被紫色边细分，

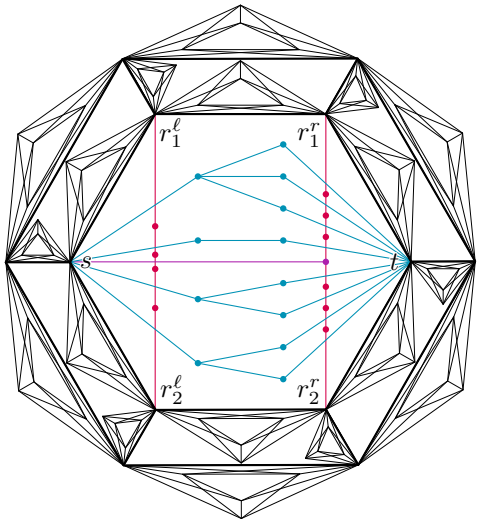

图 8. 针对一个装箱问题实例（U，K，B），其物品尺寸为 3、1、2、2，箱子数量为 $K = 2$，箱子容量为 $B = 4$，展示了我们归约的一个示例。所示的 G 绘图导出一个解：一个箱子装有尺寸为 3、1 的物品，另一个箱子装有尺寸为 2、2 的物品。为便于说明，我们没有 $\min_{u\in U} s(u) \geq K+1$，并且该实例的绘图未采用正确性证明反向部分中使用的精确样式。带有指定顶点 s，t，r_1^ℓ，r_2^ℓ，r_1^r，r_2^r 的框架图以粗黑线绘制，K_6 构件以黑色绘制，左右红色路径以红色绘制，紫色边以紫色绘制，物品构件以蓝色绘制。

表示各个箱子（每个箱子都是一条长度为 B的子路径）。红色左路径及必须与其交叉的紫色边，编码了每个物品构件所选择的箱子。

引理 18（改编自 [17, 引理 5。1]）。在K_6的任意 *1*-平面嵌入中，任意两个顶点之间都存在一条路径，使得该路径上的所有边均被交叉。

引理 19. 图 G 是几何 *1*-平面，当且仅当给定的装箱问题实例有解。

证明。 ($\Rightarrow$)：假设存在 G 的一个几何 1-平面嵌入 ε 。

框架构造所确保的性质。对于框架的每条边 uv，根据引理 18，我们可以在附着于 uv 的 K_6 中找到一条从 u 到 v 的路径，使得该路径的所有边都与此副本中的边 K_6 相交。

因此，通过为框架的每条边各取一条这样的路径而诱导出的 ε' 的子嵌入 ε 是平面的。注意，ε' 所对应的图按构造是一个三连通图的细分（图 8 所示的框架图）。因此，众所周知，ε' 的面是唯一确定的（除镜像外）。特别地，顶点 s、t、r_1^ℓ、r_2^ℓ、r_1^r、r_2^r 位于 ε'中的同一个面上，将其记为$R \subseteq \mathbb{R}^2$。此外，R 是 ε' 中唯一同时包含 s 和 t （分别为 r_1^ℓ和 r_2^ℓ、r_1^r 和 r_2^r）的面。

综上， G 中既不是框架边也不属于 K_6构件的所有边，都完全位于原始嵌入 ε 中的区域 R 内。

强制交叉。固定一个物品 $u \in U$，并考虑其菱形。至少有一条红色路径 完整穿过该菱形，这意味着它穿过菱形的 $\geq s(u)$ 条边：如果一条红色路径穿过边 sd_u，另一条红色路径就不能同样穿过sd_u，因此必须完整穿过该菱形。如果没有红色路径穿过边 sd_u，则两条红色路径都需要完整穿过该菱形。

我们证明右侧红色路径完整穿过所有菱形。假设对于某个物品 $u \in U$，左侧红色路径完整穿过 u 的菱形。由于 $s(u) \geq K+1$，这至少产生 $K+1$ 个交叉。对于物品 $u' \neq u$，每个物品构件显然也至少与左侧红色路径产生一个交叉。因此，左侧红色路径与物品构件至少有 $K+1+|U|-1 = |U|+K$ 个交叉，这是不可能的，因为它仅由 $|U|+K-1$ 条边组成。因此，对于每个 $u \in U$，左侧红色路径不会完整穿过 u 的菱形。根据上文，这意味着右侧红色路径完整穿过所有菱形，即它至少被 $\sum_{u\in U} s(u)$ 条物品构件边交叉。由于它由 $\sum_{u\in U} s(u)$ 条边组成，这意味着它的每条边都被一条物品构件边交叉。

因此，红色路径不能相互交叉。故每条紫色边都与左侧路径交叉。这也意味着左侧红色路径是交叉饱和的，因为有 $K-1$ 条紫色边，每个物品构件至少与左侧红色路径交叉一次，而左侧红色路径共有 $|U|+K-1$ 条边。

定义一个装箱问题。将区域 R 划分为开区域 R^ℓ，R^m，R^r，使得 R^ℓ（即左侧区域）以 s 为边界，R^m（即中间区域）以红色路径为界，而 R^r（即右侧区域）以 t 为边界。由于红色路径互不交叉，该划分是良定义的。

每个菱形顶点 d_u 都位于 R^m中：若菱形顶点 d_u 位于 R^r中，则边sd_u 将与两条红色路径都交叉，这是不可能的。若 d_u 位于 R^ℓ中，则左侧红色路径将完全穿过 u的菱形，而我们已看到这是不可能的。

这也意味着，左侧红色路径不仅被来自物品组件和紫色边的交叉饱和；更具体地说，每个交叉要么与一条紫色边相交，要么与一条形如 sd_u 的边相交，其中 $u \in U$。

将 R^m 划分为开区域 R_1^m、…、R_K^m，方法是从 R^m 中减去 $K-1$ 紫色边线段。由于所有紫色边都与左侧红色路径相交，因此这一定义良好。因此，对于 $u \in U$，每个菱形顶点 d_u 都恰好位于一个 R_i^m 中。设U_1、…、U_K为通过如下方式诱导的 U 的划分：若 d_u 位于 R_i^m 中，则将 $u \in U$ 赋给 U_i。

证明该装箱是一个解。我们断言，U_1、…、U_K 是装箱问题实例的一个解，即对于所有 $i \in [K]$，都有 $\sum_{u\in U_i} s(u) \leq B$。

设 $i \in [K]$。我们旨在证明 $\sum_{u\in U_i} s(u) \leq B$。设 $u \in U_i$。根据构造，d_u 位于 R_i^m 中。区域 R_i^m由两条紫色边、左侧红色路径和右侧红色路径围成。围成边界的紫色边与左侧红色路径交叉。左侧红色路径只与形如 $sd_{u'}$ 的边交叉，其中 $u' \in U$。因此，将 u 的菱形的边连到 t 的唯一途径是经过红色右路径，而其中恰有 B 条边位于 R_i^m 的边界上。由于我们知道每个菱形都会完整穿过红色右路径，因此 u 的菱形与红色右路径的这段部分至少交叉 $s(u)$ 次。

因此， U_i 中的项目总共会在红色右路径中界定 R_i^m 的长度为 B 的子路径上产生至少 $\sum_{u\in U_i} s(u)$ 次交叉。但由于这些 B 条边每条最多只能被交叉一次，我们便得到所需结论： $\sum_{u\in U_i} s(u) \leq B$。

($\Leftarrow$)：设 $U_1,\ldots,U_K$ 是装箱问题实例的一个解。我们按如下方式构造 G 的几何 1-平面嵌入 ε 。首先，如图 8 所示，绘制框架和 K_6构件。我们将两条红色路径都画成直线，但暂不确定细分顶点的位置；不过，右侧红色路径上与紫色边相邻的$K-1$ 细分顶点除外，我们将这些顶点放置在把从 r_1^r 到 r_2^r 的线段等分为 K 段后所得的位置上。

接下来，我们插入物品构件。对于每个 $i\in[K]$，考虑上文所述的第 i 个等长线段，并将其向左平移任意小的距离。

对于每个 $u\in U_i$，将顶点 d_u 放置在平移后的线段上一个彼此不同的（内部）点处。要绘制 u的菱形，考虑从 d_u 到 t的线段。注意，可以在这条线段周围任意窄的隧道内绘制该菱形，因此除了与右侧红色路径交叉之外，可以避免所有交叉。

最后，我们可以确定红色路径的细分顶点的位置。

左侧红色路径与所有 $K-1$ 紫色边以及每个 $sd_u\, u\in U$对应的边相交。由于左侧红色路径的长度为 $|U|+K-1$，我们可以将路径的细分顶点插入该直线上，使路径的每条边恰好与其相交一次。

对于右侧红色路径，我们需要将每个等距线段划分为 B段，从而确保右侧红色路径的总长度为 $K\cdot B$。根据构造，每个这样的等距线段都与 $\sum_{u\in U_i} s(u)$ 个 $=B$ 物品构件的边相交。因此，我们可以将细分顶点插入适当的位置，使右侧红色路径的每条边恰好与其相交一次。

总之，这就得到了所需的 G几何 1-平面嵌入。 □

由于从 G中删除 12 个框架顶点后，只剩下K_4、路径和星形图的不相交并集，因此我们有：

引理 20. G 的路径宽度为 ≤ 15 ，反馈顶点数为 ≤ 48。

证明。 从 G 中删除 12 个框架顶点后，得到若干星形图（源自物品组件）、路径（源自左右红色路径）以及若干 18 K_4（源自 K_6 构件）的不相交并。这个不相交并的路径宽度为 3，因此 G 的路径宽度至多为 $12+3=15$。此外，删除 12 个框架顶点后，再对每个 K_4 删除 2 个顶点，即可得到一个无环图。因此，G 的反馈顶点数至多为 $12+18\cdot 2=48$。□

该归约可在多项式时间内计算，因为装箱问题是强 NP-困难的 [15], ，也就是说，我们可以假设数值输入采用一元编码。最后，回顾一下，几何 1-平面性属于 NP [19]。因此，根据引理19和20，我们得到

定理4。 对于路径宽度至多为*15*或反馈顶点数至多为*48*的实例，几何 *1*-平面性仍然是NP完全问题。

5.2 带宽

设 G 是一个具有 n 个顶点的图。 G的带宽 记作 bw(G)，其定义为

$$\min\Big\{ \max_{uv\in E(G)} |\sigma(u)-\sigma(v)| \;\mid\; \sigma : V(G)\to[n] \text{ is a bijection}\Big\},$$

其中，我们将 $|\sigma(u)-\sigma(v)|$ 称为 σ 中 uv 的跨度。换言之，若能将图的顶点以整数坐标排列在一条直线上，使相邻顶点之间的距离至多为 b，则该图的带宽为 $\le b$。

支撑我们困难性结果的关键结构性洞见是，有界带宽在用常数大小的双端边替换构件替换边之后仍保持不变。

引理21。 设 G 是一个满足 $\mathrm{bw}(G) = b$ 的图， H 是一个具有 t 个顶点的双端边替换构件。设 G_H 是通过将 G 的每条边替换为 H 得到的。那么

$$\mathrm{bw}(G_H) \;\le\; (b+1)\big(1+(t-2)b\big).$$

证明。 固定 G 的一个带宽为 b 的顶点排序 σ。对每个 $x\in V(G)$，构造一列

$$C_x \;\coloneqq\; \{x\} \;\cup \bigcup_{\substack{xy\in E(G)\\ \sigma(x)<\sigma(y)}} \big(V(H_{xy})\setminus\{y\}\big).$$

按 $\sigma(x)$递增的顺序列出各列，并任意排列每列中的顶点，从而得到 $V(G_H)$的一个排序 $\sigma^\star$。

由于 σ 是 G的一个带宽为 b 的排序，因此每个 $x\in V(G)$至多有 b 个邻点 y满足 $\sigma(y) > \sigma(x)$。每条这样的边至多为 C_x贡献 $t-2$ 个构件内部顶点。因此，对于所有 $x\in V(G)$，

$$|C_x| \;\le\; c \;\coloneqq\; 1+(t-2)b.$$

G_H 中两个端点都位于同一列的任意边（所有不与较高索引端点关联的构件内部边）的跨度在 $\sigma^\star$中至多为 c。 G_H 在 $\sigma^\star$ 中的列间边仅包括某个 H_{uv} 中与较高索引端点 v关联的边。设 $u'v$ 为这样一条边，设 C_x 为包含 u'的列。由于 $|\sigma(v)-\sigma(x)|\le b$，端点 u',v 位于一个至多包含 $b+1$ 个连续列的块中，该块从 C_x 延伸至 C_v，每列至多包含 c 个顶点。因此， $u'v$ 在 $\sigma^\star$ 中的跨度至多为 $(b+1)c$。总之， G_H的每条边在 $\sigma^\star$中的跨度至多为 $\max\{c,(b+1)c\} = (b+1)c$，由此得到

$$\mathrm{bw}(G_H) \;\le\; (b+1)c \;=\; (b+1)\big(1+(t-2)b\big). \qquad \square$$

引理21使我们能够利用 Schaefer [26] 给出的从 1-平面性到几何 1-平面性的多项式时间归约，将有界带宽图的 1-平面性已知的 NP-困难性推广到几何情形。

定理5. 即使将实例限制为有界带宽，几何 *1*-平面性仍然是NP完全问题。

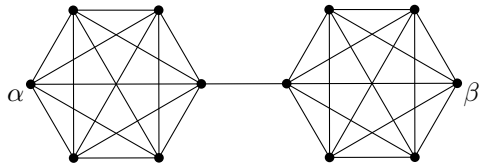

图 9. 在 Schaefer [26] 的几何 1-平面性 NP-困难性证明中使用的、带有附着顶点 α, β 的双端边替换构件。

证明. 存在一个从 1-平面性到几何 1-平面性的多项式时间归约：将输入图的每条边替换为图 9 [26,定理 2]所示的固定双端边替换构件即可。

此外，已知即使将 1-平面性限制在带宽至多为某个固定常数 c_1 [4, Theo- rem 4] 的图上，该问题仍然是 NP完全的。将上述归约应用于这一受限片段，并利用引理21，我们得到带宽由另一个常数 c_2界定的几何 1-平面性实例。因此，NP-困难性得以确立。最后，回顾几何 1-平面性属于 NP [19]。 □

6 结论

我们给出了一组全面的结果：一个以树深度为参数的几何 1-平面性固定参数算法；分别以反馈边数为参数、针对 1-平面性、 k-平面性和几何 1-平面性的次阶乘核；一个在相同参数化下针对几何 k-平面性的核；以及针对有界路径宽度、反馈顶点数和带宽的相匹配的 NP完全性结果。

我们将以反馈边数 ℓ 为参数的 k-平面性核从 $\mathcal{O}((3\ell)!)$ 改进到了 $\mathcal{O}(\ell \cdot 8^{\ell})$。是否存在多项式核?

自然的下一步是考察几何情形下 k-平面性的（参数化）复杂度。在拓扑情形中，对于树深度 $+k$ 和反馈边数而言，从 1 跃升到 k 微不足道：只需将每条边替换为一条长度为 k 的路径，即可将拓扑 k-平面性归约为 1-平面性，而这不会使这些参数膨胀 [16]。然而，在几何情形中，这远非易事；对于 $k \geq 2$, 目前尚无 Thomassen 刻画的类似结果，而且从某种自然意义上说，对于 $k \geq 3$ [22]，这样的刻画甚至不可能存在。针对反馈边数，我们避开了这一问题，并给出了一个不依赖此类刻画的论证。

对于树深度而言，这似乎颇具挑战性。作为第一步，对于三连通图，可以很容易地看出，以树深度为参数的几何 k-平面性$+k$ 属于固定参数可处理：只需进行类似规则 I 的处理，而且底层的计数论证也很容易推广。这种可处理性是否能以一致的方式扩展到一般图? （注意，对于遗传性质 [23]，总能保证存在非一致 固定参数可处理算法；特别是，对于每个固定的 k，(几何)k-平面性都是遗传的。）

更根本地说，对于 $k \geq 2$，几何 k-平面性的复杂度尚未得到充分理解。尽管几何 1-平面性属于 NP [19]，但已知在某个阶段（除非 NP $= \exists\mathbb{R}$），该问题甚至不再属于 NP，因为几何867-可平面性是 $\exists\mathbb{R}$-完全的 [27]。这种转变发生在何处？几何2-可平面性属于 NP 吗？

参考文献

1. Ábrego, B.M., Dondzila, K., Fernández-Merchant, S., Lagoda, E., Sajjadi, S., Sapozhnikov, Y.：关于Km, n的直线局部交叉数。J. Inf. Process. **25**, 542 542 2 550 2017 10 2197 25 – ( )。https://doi.org/ . /IPSJJIP. . . Ábrego, B.M., Fernández-Merchant, S.：kn 的直线局部交叉数。J. Comb. Theory A **151**, 131–145 (2017)。https://doi.org/10.1016/J.JCTA. 2017.04.003 3. Alam, M.J., Brandenburg, F.J., Kobourov, S.G.：3-连通1-平面图的直线网格绘图。载于：Wismath, S.K., Wolff, A. (编) Graph Drawing - 21 25, 2013, 2013, 23 8242, st International Symposium, GD Bordeaux, 法国, September - Revised Selected Papers。计算机科学讲义，vol. pp. 83 94 2013 10 1007 978 3 319 03841 4_8 – 。Springer ( )。https://doi.org/ . / - - - - . Bannister, M.J., Cabello, S., Eppstein, D.：1-平面性的参数化复杂性。《图算法与应用杂志》**22**(1), 23–49 (2018)。https://doi.org/10.7155/JGAA. 00457 5. de Berg, M., Cheong, O., van Kreveld, M.J., Overmars, M.H.：计算几何：算法与应用，第3版。Springer (2008)。https://doi.org/10 2 6 1007 978 3 540 77974 . / - - - - . Brandenburg, F.J., Didimo, W., Evans, W.S., Kindermann, P., Liotta, G., Montecchiani, F.：IC-平面图的识别与绘制。Theor. Comput. Sci.**636**, 1 16 2016 10 1016 2016 04 – ( )。https://doi.org/ . /J.TCS. . . 026 7. Cabello, S., Dobler, A., Fijavz, G., Hamm, T., Wagner, M.H.：受限交叉类型下1-平面性的二分性：以树宽为参数。载于：Chen, H., Hon, W., Tsai, M. (编) 第36届算法与计算国际研讨会，ISAAC 2025，中国台湾台南，2025年12月7日至10日。LIPIcs, vol. 359, pp. 16:1–16:15。达格斯图尔宫－莱布尼茨信息学中心 (2025)。https://doi.org/10.4230/LIPICS.ISAAC.2025.16, https://doi. org/10 16 8 4230 2025 . / LIPIcs.ISAAC. . . Chew, L.P.：约束德洛内三角剖分。Algorithmica **4**(1), 97–108 (1989 01553881 9 10 1007)。https://doi.org/ . /BF . Cygan, M., Fomin, F.V., Kowalik, L., Lokshtanov, D., Marx, D., Pilipczuk, M., Pilipczuk, M., Saurabh, S.：参数化算法。Springer (2015)。https: //doi.org/10 3 10 1007 978 3 319 21275 . / - - - - . Depian, T., Fink, S.D., Firbas, A., Ganian, R., Nöllenburg, M.：通往几何厚度易解性的路径。载于：Královic, R., Kurková, V. (编) SOFSEM 2025：计算机科学理论与实践——第50届计算机科学理论与实践当前趋势国际会议，布拉迪斯拉发，斯洛伐克共和国，2025年1月20日至23日，论文集，第一部分。计算机科学讲义，vol. 15538, pp. 209–224。Springer (2025)。https://doi.org/10. 1007/978-3-031-82670-2_1611. Didimo, W.：直线1-平面图绘图的密度。Inf. Process. Lett. **113**(7), 236–240 (2013)。https://doi.org/10.1016/J.IPL.2013.01.013

12. Diestel, R.: 《图论》，第4版，数学研究生教材，vol. 173。Springer (2012 2 13 10 1007 978 3 662 70107)。https://doi.org/ . / - - - - . Eggleton, R.B.: 图的直线绘图。Utilitas Mathematica **29**, 149–172 (1986) 14. Eiben, E., Ganian, R., Hamm, T., Klute, F., Nöllenburg, M.: 扩展部分预绘制的1-平面绘图。载于: Czumaj, A., Dawar, A., Merelli, E. (编) 第47届自动机、语言与编程国际学术讨论会，ICALP 2020，2020年7月11日至17日，萨尔布吕肯，德国（线上会议）。LIPIcs，vol. pp. : – : 。达格斯图尔宫－莱布尼茨信息学中心 (2020)。https://doi.org/10.4230/LIPICS.ICALP.2020.43 15. Garey, M.R., Johnson, D.S.: 《计算机与难解性：NP完全性理论指南》。W. H. Freeman (1979) 16. Gima, T., Kobayashi, Y., Okada, Y.: 1-平面性的结构参数化。载于: Graph Drawing and Network Visualization (GD 2025) (2025)，即将出版 17. Grigoriev, A., Bodlaender, H.L.: 可嵌入且每条边交叉次数较少的图的算法。Algorithmica **49**(1), 1–11 (2007)。https://doi.org/10.1007/S00453-007-0010-X 18. Hamm, T., Hlinený, P.: 部分预绘制交叉数的参数化。载于: Goaoc, X., Kerber, M. (编) 第38届计算几何国际研讨会，SoCG 2022，2022年6月7日至10日，柏林，德国。LIPIcs，vol. 224, pp. 46:1–46:15。达格斯图尔宫－莱布尼茨信息学中心 (2022)。https:// doi.org/10 46 19 4230 2022 . /LIPICS.SOCG. . . Hong, S., Eades, P., Liotta, G., Poon, S.: 1-平面图的Fáry定理。载于: Gudmundsson, J., Mestre, J., Viglas, T. (编) 计算与组合——第18届年度国际会议，COCOON 2012，澳大利亚悉尼，2012年8月20日至22日。论文集。计算机科学讲义，vol. 7434, pp. 335–346 2012 10 1007 978 3 642 32241 9_29 。20 1 Springer ( )。https://doi.org/ . / - - - - . Hong, S., Nagamochi, H.: 在线性时间内将-平面图重新嵌入为直线绘图。载于: Hu, Y., Nöllenburg, M. (编) 图绘制与网络可视化——第24届国际研讨会，GD 2016，希腊雅典，2016年9月19日至21日，修订精选论文。计算机科学讲义，vol. 9801, pp. 321–334。Springer (2016)。https://doi.org/10.1007/978 3 319 50106 2_25 - - - - . Kobourov, S.G., Liotta, G., Montecchiani, F.: 关于21-平面性的注释书目。Comput. Sci. Rev. **25**, 49–67 (2017)。https://doi.org/10.1016/J.COSREV.2017.06.002 22. Nagamochi, H.: 嵌入图的直线可绘制性。技术报告，应用数学与物理系技术报告 2013-005 . . . (2013) 23. Nešetřil, J., de Mendez, P.O.: 稀疏性——图、结构与算法，算法与组合丛书，vol. 28。Springer (2012)。https://doi.org/10.1007/ 978-3-642-27875-4 24. Reidemeister, K.: 纽结理论的初等论证。载于: 汉堡大学数学研讨会论文集。vol. 5, pp. 24–32。Springer (1927) 25. Schaefer, M.: 图交叉数及其变体：综述。组合学电子期刊 (2012 2713 26 10 37236)。https://doi.org/ . / . Schaefer, M.: 选取平面边；或者，绘制具有平面子图的图。载于: Duncan, C.A., Symvonis, A. (编) Graph Drawing——第22届国际研讨会，GD 2014，德国维尔茨堡，2014年9月24日至26日，修订精选论文。计算机科学讲义，vol. 8871, pp. 13–24。Springer (2014)。https://doi.org/10.1007/978-3-662-45803-7_2

27. Schaefer, M.：固定 k 时几何 k-平面性的复杂度。《图算法与应用杂志》**25**00548 28 1 29 41 2021 10 7155 ( ), – ( )。https://doi.org/ . /JGAA. . Thomassen, C.：图的直线绘图。《图论杂志》**12**(3), 335–341 (1988 年)。https://doi.org/10.1002/JGT.3190120306