arXiv:2602.09995v1 [math.OA] 10 Feb 2026

约化自由群 C-代数的非同构性

DAVID G 奥与斯里瓦察夫·昆纳瓦尔卡姆·埃拉亚夫 ALLI

ABSTRACT. 我们采用一种新方法，研究具有大量自由独立 Haar 酉元的 II_1 因子中的嵌入空间，并证明对于 $n \neq m$， $C_r^*(\mathbb{F}_n) \ncong C_r^*(\mathbb{F}_m)$。由此，我们以简短的新证明重现了 Pimsner 和 Voiculescu 的开创性结果。

谨以此文献给 *Julia Jing*，她是 *David Gao* 的姐姐，也是他最好的朋友。

1. 引言

1982年，Pimsner 和 Voiculescu [PV82] 证明了 $K_1(C_r^*(\mathbb{F}_n)) = \mathbb{Z}^n$。由此可知，只要 $n \neq m$，就有 $C_r^*(\mathbb{F}_n) \ncong C_r^*(\mathbb{F}_m)$；如今这已成为 C^*-代数理论中的基石性结果。然而，除这项工作（以及 Cuntz 的工作 [Cun83]，该工作也运用了 K_1）之外，据我们所知，此后文献中再未出现过对这一结果在概念上有所不同的证明。本文稍微弥补了这一空缺。我们转而在嵌入空间中开展研究，也就是将 C^*-代数 A 嵌入 II_1 因子 M的所有嵌入所构成的空间，并赋予其逐点算子范数拓扑。我们证明中的新意在于，在 II_1 因子内部工作，便自然获得了很大的灵活性，因为可用的投影很多。对 II_1 因子 M 的一项关键限制是：对于任意可分子集 $N \subset M$，都存在一个与$W^*(N)$自由独立的 Haar 酉元。这一点在超幂 [Pop95], 中可以做到；例如，当 I 不可数时，在自由群因子$L(\mathbb{F}_I)$中也可以做到。随后，我们可以运用 Araki、Smith 和 Smith 于1971年得到的结果 [ASS71]，该结果计算了 II_1因子的酉群在算子范数拓扑下的基本群。需要指出的是，我们的证明不涉及也不直接计算任何 K 理论，因此在概念上不同于 Pimsner-Voiculescu 或 Cuntz 的证明。不过，我们并不声称证明完全不涉及任何 K 理论的隐含因素，因为我们仍然在不同的情境中研究同伦意义下的路径。还需要指出的是，我们的证明正逢其时，因为它受到近期围绕自由群、超幂中的 C^*-自由独立、II_1 因子以及可缩性的一系列思想的启发 [Rob25, Jek25, KS25, AGKEP25]。

致谢。本研究是在 Brin 数学研究中心于 2026 年 2 月 4 日至 6 日举办的“算子代数近期进展”研讨会期间完成的。我们非常感谢该中心提供的富有启发性的学术环境。我们感谢 Adrian Ioana、Greg Patchell 和 Chris Schafhauser 进行的有益交流。我们也感谢 Dan Voiculescu 和 Narutaka Ozawa 的宝贵交流。

2. Proof of main result

我们固定一个 II_1 因子 M，它满足如下条件：对于任意可分的 $N \subset M$，都存在一个与 $W^*(N)$自由独立的 Haar 酉元 $u \in M$。重复这一过程可知，这意味着一个先验上更强的条件：对于任意可分的 $N \subset M$，都存在一列 Haar 酉元 $u_n \in M$，它们与 $W^*(N)$自由独立，且彼此自由独立。这种 M的一个例子是，对于任意不可数指标集 I，$M = L(\mathbb{F}_I)$。将 M 的子集视为拓扑空间时，除非另有说明，我们总是采用算子范数拓扑。将拓扑空间取某个幂时，例如M^I，我们默认该空间配备积拓扑。当 $n = \infty$时，对于满足 $1 \leq k \leq n$的指标 k，我们将其理解为 k遍历所有正整数，而不含 ∞。

定义 2.1. 对于一个 C^*-代数 A，令 $\mathrm{Emb}(A, M)$ 为所有嵌入$A \to M$的空间，并配备逐点算子范数收敛拓扑，即由度量族 $d_a(\pi_1, \pi_2) = \|\pi_1(a) - \pi_2(a)\|_\infty$ 所诱导的拓扑，其中a 遍历 A 的元素。

以下内容虽属基本，但我们仍将其写给读者。

引理 2.2. 设 $\{a_i\}_{i\in I}$为 A 的一组生成元。则映射 $\iota : \mathrm{Emb}(A, M) \ni \pi \mapsto (\pi(a_i))_{i\in I} \in M^I$ 是一个拓扑嵌入。

证明. ι 显然是连续的。我们需要证明它是一个拓扑嵌入，即需要证明：若网 $\pi_\lambda \in \mathrm{Emb}(A, M)$ 与 $\pi \in \mathrm{Emb}(A, M)$ 满足$\pi_\lambda(a_i) \to \pi(a_i)$，则对所有 $a \in A$ 有 $\pi_\lambda(a) \to \pi(a)$。事实上，设 $\varepsilon > 0$。由于$a \in A$ 与 $\{a_i\}_{i\in I}$ 生成 A，存在非交换多项式 P 使得$\|P(\{a_i\}_{i\in I}) - a\|_\infty < \varepsilon$。由于多项式对其变量连续，对充分大的 λ，我们有 $\|P(\{\pi_\lambda(a_i)\}_{i\in I}) - P(\{\pi(a_i)\}_{i\in I})\|_\infty < \varepsilon$。因此，对充分大的 λ，

$$\|\pi_\lambda(a) - \pi(a)\|_\infty \leq \|\pi_\lambda(a - P(\{a_i\}_{i\in I})\|_\infty + \|P(\{\pi_\lambda(a_i)\}_{i\in I}) - P(\{\pi(a_i)\}_{i\in I})\|_\infty + \|\pi(P(\{a_i\}_{i\in I} - a)\|_\infty < 3\varepsilon.$$

该断言得证。 □

注 2.3. 我们注意到，利用相同的论证，如果 $\mathrm{Emb}(A, M)$ 配备逐点强算子拓扑收敛拓扑，而 M 配备强算子拓扑，那么上述映射也是一个拓扑嵌入。

现在，固定某个 $2 \leq n \leq \infty$ 的 $A = C_r^*(\mathbb{F}_n)$。设 $\mathbb{F}_n$ 的自由生成元记为 $\{g_k\}_{1\leq k\leq n}$。定义映射 $\mathrm{Emb}(A, M) \ni \pi \mapsto (\pi(g_k))_{1\leq k\leq n} \in U(M)^n$；根据引理 2.2，该映射是一个拓扑嵌入。因此，我们将通过此嵌入把 $\mathrm{Emb}(A, M)$ 视为 $U(M)^n$ 的子空间。

我们需要以下引理：

引理 2.4. 对于任意可分的 $K \subset U(M)^n$，存在一个同伦 $\varphi : K \times [0, 1] \to U(M)^n$，使得：

(1) $\varphi(\cdot, 0)$ 是包含映射 $K \subset U(M)^n$; *(2)* $\varphi(K, 1) \subset \mathrm{Emb}(A, M)$;

(3) 若 $\vec{u} \in K \cap Emb(A, M)$，则对所有 $t \in [0,1]$，$\varphi(\vec{u}, t) \in Emb(A, M)$。

证明。由于 K 是可分的，存在 Haar 酉元 $\{u_k, v_k\}_{1\leq k\leq n}$，它们与 $W^*(K)$ 自由独立，且彼此自由独立。通过取对数，我们将 $u_k = e^{iA_k}$ 写成某个自伴 $A_k \in \{u_k\}''$，并将 $v_k = e^{iB_k}$ 写成某个自伴 $B_k \in \{v_k\}''$。现在，定义

$$\varphi((x_k)_{1\leq k\leq n}, t) = (e^{itA_k} x_k e^{itB_k})_{1\leq k\leq n}.$$

容易验证这是连续的，并且 $\varphi(\vec{x}, 0) = \vec{x}$。由于 A 具有唯一迹，$(x_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathrm{Emb}(A, M)$ 当且仅当 x_k 是自由独立的 Haar 酉元。利用这一点，以及 A_k，B_k 也与 $W^*(K)$ 自由独立且彼此自由独立，可以轻易推出 $\varphi(K, 1) \subset \mathrm{Emb}(A, M)$，并且 $\varphi(K \cap \mathrm{Emb}(A, M), [0,1]) \subset \mathrm{Emb}(A, M)$。□

以下是拓扑学中的一个简单引理：

引理 2.5。设我们有空间的包含 $X \subset Y$。假设对于任意紧子集 $K \subset Y$，存在一个同伦 φ_K：$K \times [0,1] \to Y$ 使得，

(1) $\varphi_K(\cdot, 0)$ 是包含映射 $K \subset Y$；*(2)* $\varphi_K(K, 1) \subset X$；
(3) 若 $p \in K \cap X$，则对于所有 $t \in [0,1]$，$\varphi_K(p, t) \in K$。

那么包含映射 $X \subset Y$ 是弱同伦等价。

证明。我们首先证明自然映射 $\pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ 是单射。事实上，假设 $[f] \in \pi_k(X)$ 满足：$f \sim$ 在 Y 中为常值。令 $\phi\colon S^k \times [0,1] \to Y$ 为从 f 到一个常值映射的同伦。然后考虑同伦 $\phi'\colon S^k \times [0,2] \to X$，

$$\phi'(p,t) = \begin{cases} \varphi_{\mathrm{Ran}(\phi)}(f(p), t) & , \text{ if } t < 1 \\ \varphi_{\mathrm{Ran}(\phi)}(\phi(p, t-1), 1) & , \text{ if } t \geq 1 \end{cases}.$$

那么，ϕ' 是 X 内从 f 到常值映射的一个同伦，由此可得 $[f] = 0$。

为证明满射性，我们首先注意到，对于任意 $p \in Y$，$\varphi_{\{p\}}(p, \cdot)$ 是一条从 p 到 X 中某一点的路径。因此，$\pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ 是满射。于是，对于 $k \geq 1$，当 $[f] \in \pi_k(Y)$ 时，我们不妨假设 $f(b) \in X$，其中 $b \in S^k$ 是基点。于是 $\varphi_{\mathrm{Ran}(f)}(f(\cdot)\ t)$ 是一个从 f 到映射 $S^k \to X$ 的同伦。虽然基点可能不同，我们只需注意到 $\varphi_{\mathrm{Ran}(f)}(f(b)\ \cdot)$ 是 X 中的一条路径，从 $f(b)$ 到 $\varphi_{\mathrm{Ran}(f)}(f(b), 1)$。□

结合引理 2.4 和引理 2.5，我们得到如下结论：

推论 2.6. 含入映射 $Emb(A, M) \subset U(M)^n$ 是弱同伦等价。

回顾 [ASS71] 中的以下结果：

定理 2.7。

(1)（[*ASS*71] 的定理 *2.8*）我们称以 $x \in U(M)$ 为基点的 $U(M)$ 中的环路，若其形式为 $[0,1] \ni t \mapsto xe^{2\pi itS} \in U(M)$，其中 $S \in M$ 是满足 $\sigma(S) \subset \mathbb{Z}$ 的自伴元，则称其为简单环路。于是，每个以 x 为基点的环路都与若干简单环路的连接同伦等价。此外，$\pi_1(U(M)) \ni [t \mapsto xe^{2\pi itS}] \mapsto \tau(S) \in \mathbb{R}$ 可扩张为 $\pi_1(U(M))$ 与 $\mathbb{R}$（加法群）之间的同构。

(2)（定理 *3.2* 和 *ASS*71] 中定理 *3.3* 的证明）存在一个普适常数 $\delta \in (0,1)$，满足以下条件：给定一个环路 $f : [0,1] \to U(M)$，只要 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ 是 $[0,1]$ 的一个划分，使得 $\|f(s) - f(t)\|_\infty < \delta$ 只要 $s,t \in [t_{j-1}, t_j]$，其中某个 $1 \le j \le n$，我们便可以定义 $I_\delta(f) = \sum_{j=1}^n \tau(\log(f(t_{j-1})^* f(t_j)))$（其中 $\log$ 是对数主值分支）。那么 $I_\delta(f)$ 与划分的选择无关，并且是一个完全同伦不变量。事实上，$\pi_1(U(M)) \ni [f] \mapsto \frac{1}{2\pi i} I_\delta(f) \in \mathbb{R}$ 与第 *(1)* 部分中的同构是同一个同构。

现在，假设对于某个 $2 \le n,\ m \le \infty$, $A = C_r^*(\mathbb{F}_n) \cong C_r^*(\mathbb{F}_m)$。根据推论 2.6，我们立即得到 $U(M)^n$ 和 $U(M)^m$ 具有相同的基本群。由于 $\pi_1(U(M)) = \mathbb{R}$，因此有 $\pi_1(U(M)^n) = \mathbb{R}^n$ 和 $\pi_1(U(M)^m) = \mathbb{R}^m$。然而，对于所有 $m,\ n,\ \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ 作为加法群，因此不能立即得到 $m = n$。不过，我们有如下结论：

定理 2.8。假设 $n < \infty$。那么，由上述论证得到的同构 $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ 关于乘积拓扑是连续的。

证明。根据关于 M 的条件，对于每个 $1 \le k \le n$，我们可以选取投影 $p_s^k \in M$ 和 $s \in [0,1]$，使得对于所有 k 和 s，$\tau(p_s^k) = s$；映射 $[0,1] \ni s \mapsto p_s^k \in M$ 对所有 k 都是强算子拓扑连续的；并且对于所有 k、k'、s 和 s'，只要 $k \ne k'$，p_s^k 就与 $p_{s'}^{k'}$ 自由独立。我们还可以选取自由独立的 Haar 酉元 x_j，使其对于 $1 \le j \le n$ 也与所有 p_s^k 自由独立。考虑映射 f：$[0,1] \times [0,1]^n \to U(M)^n$，其定义如下：

$$f(t, (s_k)_{1 \le k \le n}) = (x_k e^{2\pi i t p_{s_k}^k})_{1 \le k \le n}.$$

容易看出，f 是强算子拓扑连续的。此外，记 $f(\cdot, \vec{s})$ 为 $f_{\vec{s}}$。那么，$f_{\vec{s}}$ 都是算子范数拓扑下的连续环路。我们还注意到，f 的值域包含于 $\mathrm{Emb}(A, M)$ 中。根据定理 2.7 和推论 2.6 的 (1)，$[f_{\vec{s}}] = \vec{s} \in \mathbb{R}^n = \pi_1(\mathrm{Emb}(A, M))$。

现在，令 ι 为映射，它将视为 $U(M)^n$ 子集的 $\mathrm{Emb}(A, M)$ 与视为 $U(M)^m$ 子集的 $\mathrm{Emb}(A, M)$ 对应起来。注意，关于算子范数拓扑以及根据注 2.3 关于强算子拓扑，ι 是一个同胚。因此，$\iota \circ f : [0,1] \times [0,1]^n \to U(M)^m$ 是强算子拓扑连续的。

此外，固定 $1 \le j \le m$，并令 δ 为定理 2.7 的第 (2) 部分给出的普适常数。考察 ι 的定义，很容易看出它是一致连续的，即存在 $\varepsilon > 0$，使得只要 $\vec{x},\ \vec{y} \in \mathrm{Emb}(A,\ M)$ 被视为 $U(M)^n$ 的子集，且 $\|x_k - y_k\|_\infty < \varepsilon$ 对所有 $1 \le k \le n$ 都成立，我们就有 $\|\iota(\vec{x})_j - \iota(\vec{y})_j\|_\infty < \delta$。注意，

$$\|x_k e^{2\pi i t p_{s_k}^k} - x_k e^{2\pi i t' p_{s_k}^k}\|_\infty \le 2\pi |t - t'|$$

对所有 t、t'、$\vec{s}$ 和 k 都成立。因此，存在一个与 $\vec{s}\in[0,1]^n$ 无关的划分 $0=t_0<t_1<\cdots<t_d=1$，使得

$$\|[\iota\circ f_{\vec{s}}(t)]_j-[\iota\circ f_{\vec{s}}(t')]_j\|_\infty<\delta$$

每当 $t,\ t'\in[t_{\eta-1},t_\eta]$ 对某个 $1\le\eta\le d$ 成立时。这意味着，对于任意 $\vec{s}\in[0,1]^n$，

$$I_\delta([\iota\circ f_{\vec{s}}]_j)=\sum_{\eta=1}^{d}\tau(\log([\iota\circ f_{\vec{s}}(t_{\eta-1})]_j^*[\iota\circ f_{\vec{s}}(t_\eta)]_j)).$$

但这样一来，$\vec{s}\mapsto I_\delta([\iota\circ f_{\vec{s}}]_j)$ 就是连续的。根据定理 2.7 的第 (2) 部分，这意味着同构映射 $\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^m$ 在限制到 $[0,1]^n$ 时，相对于乘积拓扑是连续的，因此特别是在 0 处连续。由于该同构是加法群之间的同构，它必处处连续，证毕。□

由于连续加法映射 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 必为 $\mathbb{R}$-线性的，并且当 $n\neq m$ 时，$\mathbb{R}^n\ncong\mathbb{R}^m$ 作为 $\mathbb{R}$-线性空间与 $\mathbb{R}$ 线性相关，我们立即得到：

推论 2.9。若 $C_r^*(\mathbb{F}_n)\cong C_r^*(\mathbb{F}_m)$ 对于 $2\le n,\ m\le\infty$，则 $n=m$。

References

[AGKEP25] Tattwamasi Amrutam、David Gao、Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli 和 Gregory Patchell, *Strict comparison in reduced group C^*-algebras*, Inventiones Mathematicae **242** (2025)，第 3 期，639–657。MR 4978176[ASS71] Huzihiro Araki、Mi-Soo Bae Smith 和 Larry Smith, *On the homotopical significance of the type of von Neumann algebra factors*, Communications in Mathematical Physics **22**（1971年），71–88。[Cun83] Joachim Cuntz, *K-theoretic amenability for discrete groups*, 《纯粹与应用数学杂志》f¨, **344**（1983），180–195。[Jek25] David Jekel, *The unitary group of a II_1 factor is SOT-contractible*, Mathematische Annalen**393**（2025），第 3-4 期，3109–3117。MR 5007563[KS25] Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli 和 Christopher Schafhauser, *Negative resolution to the C^*-algebraic Tarski problem* 2025 2503 10505，arXiv 电子预印本（），arXiv：。.[Pop95] Sorin Popa, *Free-independent sequences in type II_1 factors and related problems*, Ast´erisque**232**（1995），187–202。[PV82] Mihai Pimsner 和 Dan-Virgil Voiculescu, *K groups of reduced crossed products by free groups* **8** 1982 1, 131 156，Journal of Operator Theory（），第 – 期。[Rob25] Leonel Robert, *Selfless* C*-*algebras*, Advances in Mathematics **478**（2025），论文编号 110409，共 28 页。MR 4924062

Department of Mathematical Sciences, UCSD, 9500 Gilman Dr, La Jolla, CA 92092, USA
Email address: weg002@ucsd.edu*URL*: https://sites.google.com/ucsd.edu/david-gao

Department of Mathematics, UMD, Kirwan Hall, Campus Drive, MD 20770, USA
Email address: sriva@umd.edu*URL*:
https://sites.google.com/view/srivatsavke/home