arXiv:2602.10051v1 [math.GT] 10 Feb 2026

有理曲面上的无穷多个 Lefschetz 铅笔

SERAPHINA EUN BI LEE 和 CARLOS A. SERV´AN

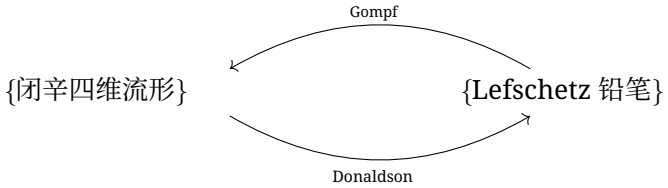
Abstract. 我们证明，任意具有 $\chi(X) < 0$ 的纤维曲面 X 都存在无穷多个两两不等价的 Lefschetz 铅笔，它们的亏格和基点数均固定。我们的证明通过部分共轭这一机制，在 X 的吹起 $X\#4\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上构造无穷多个两两不等价的 Lefschetz 纤维化，且纤维类保持不变。此外，存在一个与所有这类铅笔相容的辛形式 X，对于 $X\#4\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上的纤维化也同样如此。这是这一现象的首个实例，并推动了低维拓扑学 K3 问题列表中问题 4.98 在纤维曲面情形下的研究。

Contents

1. 引言 1 1.1. 定理 1.2 与1.3证明的路线图 3 1.2. 具有同胚总空间的 Lefschetz 纤维化 5 1.3. 先前工作 5 1.4. 问题 5 1.5. 论文结构 5 1.6. 致谢 6 2. Lefschetz 纤维化与映射类群 6 2.1. Lefschetz 铅笔、纤维化与单值化 6 2.2. 部分共轭 8 2.3. Torelli 群与 Johnson 同态 9 3. Matsumoto–Cadavid–Korkmaz Lefschetz 纤维化的部分共轭 9 4. 借助 Johnson 同态区分 Lefschetz 纤维化 12 5. 纤维曲面及其胀开 15 5.1. X_n 15的微分同胚类型5.2. 纤维曲面上的 Lefschetz 铅笔 16 6. 辛形式 19 6.1. （上）同调计算 20 6.2. (X_n, ω_n) 的 Gompf–Thurston 构造 24 6.3. 关于上同调类 $[\omega_n] \in H^2(X_n; \mathbb{R})$ 31 7. 无穷多个同胚的Lefschetz纤维化 32 附录 A. 映射类群(Σ_{2g}^4)中的计算 36 附录B. 命题 6.8 的证明 42 参考文献 48

1. Introduction

设 X 是一个闭辛四维流形。Donaldson [Don99]和 Gompf [Gom05]建立了 X 的拓扑性质与拓扑 *Lefschetz* 铅笔(X, f)之间的对应关系：任意辛四维流形都存在一个铅笔，而任意存在铅笔的四维流形都是辛流形。



这种对应关系在辛流形的研究中已被证明极为富有成效（例如 [DS03，Sti00，Ush06，FS04，BH16b，BK17，BH24，ABKP00，BHM23]）。然而，对于给定的辛流形，并不存在先验的典范 Lefschetz 铅笔 X。因此，一个基本的开放问题如下。

问题 1.1 （K3 [BKRar，问题 4.98]；参见 Baykur–Hayano [BH16b，问题 6.4]）。每个闭辛4-流形是否都容许具有相同纤维亏格的不等价 *Lefschetz* 铅笔 g，当 g 充分大时？无穷多个又如何？

在这项工作中，我们针对纤维曲面，或某个 $g \geq 0$上的 S^2-丛这一情形，推进了该问题的研究。特别是，我们首次给出了在同一个辛四维流形上存在无穷多个固定亏格且彼此不等价的铅笔的例子。

定理 1.2. 设 X是一个 $\chi(X) = 4-4g < 0$的纤维曲面。存在无穷多个两两不等价的亏格为 $2g$ 的 *Lefschetz* 铅笔 $\pi_n : X - B_n \to S^2$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，它们的基点数固定为 $|B_n| = 4$，且正则纤维的同调类固定。存在一个定义在 X 上的辛形式 ω，使得对于所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\pi_n$ 的所有纤维的光滑部分都是(X, ω)中的辛子流形。

将不等价 Lefschetz 纤维化的互不相交的（-1）截面吹下，会得到不等价的 Lefschetz 铅笔（例如参见 [BH16a，推论 3。10]）。下述定理是定理 1.2 证明中的一个中间步骤。

定理 1.3. 设 X是一个纤维曲面，且 $\chi(X) = 4-4g < 0$。存在无穷多个两两不等价的 *Lefschetz* 纤维化 $\pi_n : X\#4\overline{\mathbb{CP}}^2 \to S^2$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其亏格为 $2g$，且正则纤维的同调类固定。存在一个辛形式 ω 定义在 $X\#4\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上，使得对于所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\pi_n$ 的所有纤维的光滑部分都是 $(X\#4\overline{\mathbb{CP}}^2, \omega)$中的辛子流形。

定理1.3 或许具有独立的研究价值，因为它首次构造出定义在固定光滑四维流形上、亏格相同且两两不等价的无穷多个 Lefschetz 纤维化。关于此前已知的有限多个此类 Lefschetz 纤维化的构造概述，请参见第1.3 节。

注 1.4（关于纤维亏格）。问题 1.1 的一个关键点在于，存在相同纤维亏格的不等价 Lefschetz 铅笔。否则，给定线丛的幂次不断增大，就会产生无穷多个 Lefschetz 铅笔。

定理 1.3 中的纤维化所出现的正则纤维的最小亏格为 4。目前已知的不等价但微分同胚的 Lefschetz 纤维化的最小亏格为 3，这归功于 Baykur–Hayano 的工作 [BH16b，定理 6。2]另一方面，潜在的亏格 2 实例的单值化受到一些限制；参见 [BH16b，备注 6。3]。定理 1.3 对 Baykur–Hayano 的问题 6.4 [BH16b] 给出了肯定答案，适用于纤维曲面（及其四次 blowup）的情形。

注 1.5（曲面上的曲面丛与映射环面的情形）。我们的结果凸显了 Lefschetz 纤维化与曲面丛之间的差异。F.E.A. Johnson [Joh99] 证明，若$\pi : M \to \Sigma_h$ 是一个以 Σ_h 为底空间、纤维为 Σ_g的丛，且满足 $g, h \geq 2$，那么将 M实现为一个满足 $g', h' \geq 2$、纤维为 $\Sigma_{g'}$的丛 $M \to \Sigma_{h'}$ 的全空间，只有有限种方式；而 Salter [Sal15] 构造了可容纳任意多个纤维化的四维流形。在三维情形下，对于固定的三维流形 Y，其曲面丛 $Y \to S^1$ 由 Thurston 范数 [Thu86]所支配。例如，Thurston 证明，任意不可约且无环面的三维流形，以 S^1 为底空间、纤维亏格固定的纤维化至多只有有限种。此外，纤维化的同构类由纤维的同调类决定 [Tis70，引理 1]。

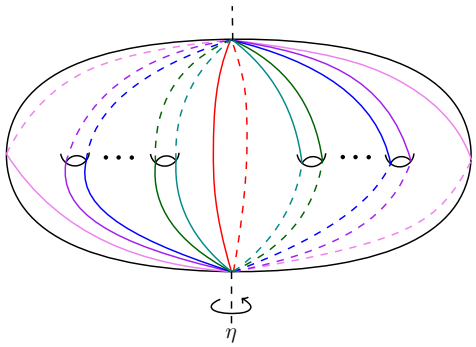


FIGURE 1. 亏格为 $2g$ 的 MCK Lefschetz 纤维化的消失圈与对合 η。

1.1. **定理 1.2 和1.3的证明路线图。** 本小节将简要概述定理 1.2 和 1.3的证明步骤。我们强调，光滑范畴中定理 1.2 和 1.3 的证明在第 5 节基本已经完成；参见推论 5.3 和5.8。

令 $g \geq 2$ 且 $X = \Sigma_g \times S^2 \# 4\overline{\mathbb{CP}^2}$。我们构造有理曲面上无穷多个不等价 Lefschetz 纤维化的起点，是 X 上的一个相当特殊的 Lefschetz 纤维化 $\pi\colon X \to S^2$ 称为（偶）Matsumoto–Cadavid–Korkmaz（MCK）Lefschetz 纤维化 [Ham17]。

Matsumoto–Cadavid–Korkmaz Lefschetz 纤维化。 MCK 纤维化由对合 η 在 Σ_{2g} 上的一个分解诱导，该对合有两个不动点。其消失圈和对合η 见图 1。Matsumoto 最初描述了这种 Lefschetz 纤维化 [Mat96，命题 4。2] 对于 $g = 1$，随后 Cadavid [Cad98] 和 Ko- rkmaz [Kor01]将其推广到高亏格。MCK 纤维化是许多有趣的 Lefschetz 纤维化实例的起点（例如 [Kor01， OS00a]）。它是一种超椭圆 Lefschetz 纤维化；对于满足 $b_2^+ = 1$ [Sti02， Bay16b]的流形，它具有亏格至少为 6 的纤维化中最少的奇异纤维数。就我们的目的而言，MCK 纤维化最重要的性质如下：

(1) 全空间微分同胚于 $\Sigma_g \times S^2 \# 4\overline{\mathbb{CP}^2}$。此外，全空间在部分共轭作用下保持不变，这些共轭由 *Torelli* 群 $\mathcal{I}_{2g} \trianglelefteq$ 映射类群(Σ_{2g}) 中的元素所作。（这在很大程度上依赖于 Liu [Liu96] 的结果；详见第 5 节）。(2) 它是一个超椭圆 Lefschetz 纤维化。

我们的构造随后如下进行：从 MCK 纤维化 $\pi\colon X \to S^2$ 出发，我们找到一个合适的映射类 $f \in \mathcal{I}_{2g}$，并对幂 f^n 施行部分共轭，从而得到一个纤维化族 $\{\pi_n\colon X_n \to S^2\}$。现在我们简要描述部分共轭构造。

在 Lefschetz 纤维化集合中导航。 设 (X, π) 是亏格为 h 的 Lefschetz 纤维化。Lefschetz 纤维化研究之所以大获成功，很大程度上是因为它们具有简单的组合描述，即映射类群(Σ_h) 中由右手 Dehn 扭转给出的恒等映射的分解 [Mat96，Kas80]。从这个角度看，下述称为 部分共轭 [Bay16a，Aur06]，的运算是十分自然的。设 W_1， W_2 为正 Dehn 扭转的乘积，使得

$$W_1 \cdot W_2 = 1 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_h).$$

设 $f \in$映射类群(Σ_h) 是一个与 W_2 交换的映射类。那么，由于对于任意右手德恩扭转 $T_c \in$映射类群(Σ_h)，都有 $fT_cf^{-1} = T_{f(c)}$，我们得到一个新的分解

$$W_1 \cdot W_2^f = 1 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_h)$$

由右手德恩扭转构成的 Mod(Σ_h) 中恒等元的分解，其中 W_2^f 表示对 W_2的因子进行 f共轭。这个新的分解定义了流形 X_f上的 Lefschetz 纤维化 (X_f, π_f)，该流形与原流形 X具有相同的签名和欧拉示性数。

注 1.6。 从拓扑学观点来看，部分共轭也可理解为一种切割与重新粘合操作；详见第2 节。由此，部分共轭是纤维和操作的一种推广。然而，我们在定理1.3的证明中构造的 Lefschetz 纤维化并非极小。特别是，我们所采用的部分共轭并非纤维和 [Ush06]。

注 1.7（部分共轭的有效性）。 设 G_{W_2} 为由词 W_2中出现的德恩扭转生成的群。若 $f \in G_{W_2}$，则 $(X_f,\ \pi_f)$ 与 $(X,\ \pi)$ 等价 [Aur05，引理 6]。因此，当 G_{W_2}“较小”时，部分共轭在改变纤维化的等价类方面更有效。

为了区分纤维化 $\pi_n : X_n \to S^2$ 的等价类，我们通过共轭来区分 π_n 的单值群。

单值群与 Johnson 同态。Lefschetz 纤维化的一个不变量是其单值群（的共轭类）；详情见第 2 节。设 G 是 (X,π) 的单值群，G_n 是 (X_n,π_n) 的单值群。令 $\mathcal{I}_{2g} \trianglelefteq \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g})$ 为 Torelli 群。若 G 和 G_n 在 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{2g})$ 中共轭，那么 $G \cap \mathcal{I}_{2g}$ 和 $G_n \cap \mathcal{I}_{2g}$ 在 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{2g})$ 中也共轭，因为 $\mathcal{I}_{2g}$ 是 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{2g})$ 的正规子群。因此，只需考虑在 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{2g})$ 的共轭作用下 $\mathcal{I}_{2g}$ 的子群。这个观察使我们可以将问题阿贝尔化：令 $H := H_1(\Sigma_{2g};\mathbb{Z})$，并且

$$\tau : \mathcal{I}_{2g} \to (\wedge^3 H)/H$$

是 *Johnson* 同态 [FM12，第 6 节。6]Johnson 同态 τ 是 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{2g})$-等变的，其中关于 $\mathcal{I}_{2g}$ 的共轭作用与诱导作用（$\wedge^3 H$）$/H$ 分别通过 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{2g})$ 作用在 H上的辛表示给出。因此，只需区分 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{2g})$-轨道在 $(\wedge^3 H)/H$中的情形，而（$X,\ \pi$）的超椭圆性大大简化了这一计算。

注 1.8。 我们在先前的工作 [LS24，引理 7.4]中采用了相同的思想。 $\mathcal{I}_{2g}$所扮演的角色由点推动子群 $\pi_1(\Sigma_g) \trianglelefteq \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,\ 1})$ 承担，而 τ 所扮演的角色则由阿贝尔化映射 $\pi_1(\Sigma_g) \to H_1(\Sigma;\mathbb{Z})$承担。

从纤维化到铅笔。 Hamada 通过为相应分解寻找其在 $\mathrm{Mod}(\Sigma^4_{2g})$ [Ham17]中的适当提升，证明了 MCK 纤维化具有四个不相交的（-1）-截面。为了将定理 1.3 与定理 1.2联系起来，我们寻找 $f \in \mathcal{I}_{2g}$ 的适当提升，并在 $\mathrm{Mod}(\Sigma^4_{2g})$ 中进行部分共轭，以保持这一数量的不相交（-1）-截面。此外，利用 Hamada [Ham17给出的两个不同提升，图 21]中的铅笔全空间可以是$\Sigma_g \times S^2$ 或 $\Sigma_g \tilde{\times} S^2$。四个不相交的（$-1$）-截面的存在也增进了我们对纤维同调类的理解。特别地，我们可以证明，我们的铅笔的所有纤维都是某个固定同调类的代表元（定理 6.3）。

备注 1.9。 在我们之前的工作中 [LS24] 我们通过部分共轭构造了 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,1})$ 中无穷多个不等价分解的例子，它们覆盖了 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ 中同一个恒等元分解。然而，这些分解并未与铅笔相关联：构造的出发点是一个具有截面的 Lefschetz 纤维化，该截面的自交数至多为 -2。事实上，我们在 [LS24] 中的方法对于自交数为 -1 的截面并不适用（见定理 5.9）。

纤维曲面上的辛结构。 为了完成定理 1.2 和定理 1.3的证明，我们借助 Lalonde–McDuff 对纤维曲面上辛结构的分类 [LM96]。特别地，只需构造与这些铅笔相容的上同调等价的辛形式。我们通过 Gompf–Thurston 构造实现这一点，并仔细选取与相应部分共轭相关联的粘合映射；详情见第 6 节。

注记 1.10. Lin–Wu–Xie–Zhang [LWXZ25，定理 1。5] 最近证明了，在负欧拉示性数的纤维曲面上，存在无穷多个同伦类的微分同胚辛形式。虽然我们证明了在一个极小纤维曲面上构造的所有辛形式彼此微分同胚，但尚无法判断它们是否同伦。

1.2. **全空间同胚的 Lefschetz 纤维化**。 在第 7 节中，我们展示了这些方法更广泛的适用性。从一个单连通的超椭圆 Lefschetz 纤维化出发，我们很容易构造出无穷多个不等价但同胚的 Lefschetz 纤维化。我们尚无法判断这些同胚的 4 维流形族是否彼此微分同胚。特别是，我们的构造为定理 1.3所述的同一现象提供了更多潜在实例。

1.3. 先前工作。尽管人们对 Lefschetz 铅笔和纤维化兴趣浓厚，问题 1.1 的一般情形仍远未解决。首批（已发表的）例子由 Park–Yun 给出：他们构造了至少具有两个不等价 Lefschetz 纤维化的流形 [PY09], , 方法是采用 Fintushel–Stern 的结手术操作 [FS04] ，并通过其单值群加以区分。（Park–Yun 还提到，Ivan Smith 在其学位论文中更早给出了一个例子：在 $T^2 \times \Sigma_2 \# 9\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上存在两个不等价的纤维化。）另请参阅 Park–Yun 的后续工作 [PY17] ，他们将这一构造推广，从而找到了任意多个彼此不等价但微分同胚的纤维化。后来，Baykur–Hayano 使用单值替换，在 Calabi–Yau K3 曲面的爆破上构造了两对不等价的 Lefschetz 铅笔 [BH16b, Theorem 6.2] ，其纤维在环境空间中同胚。Baykur 使用完全不同的方法证明，任意辛流形 X 在 X 的吹起上都至少存在两个不同的铅笔（按等价关系及纤维化 Luttinger 手术取模），而当 X 非有理或非纤维曲面时，则存在任意多个此类铅笔 [Bay16a, Bay19]。尽管取得了这些进展，用于区分纤维化的方法本质上仍是有限的：Park–Yun [PY17] 依靠有限图来区分单值群，而 Baykur 则用预先选定的吹起点数量来限制不等价铅笔的数目 [Bay16a]。Hamada [Ham17, Theorem 7]以及 Baykur–Hayano–Monden [BHM23, Theorem 6.4]也给出了更多不等价铅笔对的例子。

1.4. **问题**。 我们以一组由本文结果引出的问题结束本引言。

在 [Bay16a，注 3。5] Baykur 想知道，亏格为 $2g$ 的 $\Sigma_g \times S^2 \# 4\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上的 MCK 纤维化在等价和纤维化 Luttinger 手术意义下是否唯一。虽然我们无法确定所采用的部分共轭是否能通过一系列纤维化 Luttinger 手术得到，但我们的结果表明，在潜在的唯一性结论中，Luttinger 手术是必要的。更一般地，我们提出定理 1.1的以下加强版本：

问题 1.11。 是否存在一个 4-流形 X ，其上存在无穷多个不能通过一系列部分共轭相互关联的 *Lefschetz* 纤维化？

寻找更多族的无穷多个不等价但微分同胚的 Lefschetz 纤维化，一个可行的起点或许是确定第 7 节所述例子的微分同胚类型。

问题 1.12. 这些 4维流形 Z_n 与 Z_m 是否对所有 n、$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$均微分同胚，其中 $\pi_n\colon\ Z_n \to S^2$ 是定理 7.3中构造的 *Lefschetz* 纤维化？

最后，我们指出，本文构造了非超椭圆 Lefschetz 纤维化的无限族，它们具有偶亏格（从亏格 4 开始），并留下如下未决问题。

问题 1.13. 是否存在无穷多个亏格为奇、且全空间彼此微分同胚的不等价 *Lefschetz* 纤维化？亏格为2的情形呢？

问题 1.14. 是否存在无穷多个亏格固定且全空间微分同胚的不等价双曲型 *Lefschetz* 纤维化？

1.5. **论文结构**。 在第2节中，我们回顾 Lefschetz 纤维化和曲面映射类群所需的背景知识。在第3节中，我们详细介绍 Matsumoto–Cadavid–Korkmaz (MCK) Lefschetz 纤维化 $\pi\colon\ X \to S^2$ 并定义其扭曲版本$\{\pi_n\colon\ X_n \to S^2\}$。在第 4 节中，我们展示如何利用 Johnson 同态作为检测 Lefschetz 纤维化是否不等价的工具。特别地，我们证明纤维化族 $\{\pi_n\colon\ X_n \to S^2\}$两两不等价。第 5 节给出了定理 1.2 和 1.3在光滑范畴中的证明。第 6 节描述了与 ω_n 相容的辛形式 $\pi_n\colon\ X_n \to S^2$ ，并且

完成定理 1.2 和 1.3的证明。在第7节中，我们介绍一族新的例子，它们是全空间同胚的两两不等价的 Lefschetz 纤维化。附录 A 包含在 Mod(Σ_{2g}^4) 及相关映射类群中的一些常规计算。特别地，其中包含定理3.3的证明。附录 B包含定理6.8的证明，该定理使我们能够为部分共轭构造中使用的粘合映射找到合适的代表元。

1.6. **致谢**。 我们感谢导师 Benson Farb 在整个项目过程中给予我们持续的支持和宝贵的指导，并感谢他对本稿早期版本提出的大量意见。我们还要感谢 Inan¸c Baykur 与我们就 Lefschetz 纤维化等广泛主题进行了许多富有见地的讨论，尤其感谢他向我们介绍 Auroux 的研究 [Aur05]，这些研究促成了我们当前工作的最初关键构想；也感谢他建议我们将关于 Lefschetz 纤维化的初步结果进一步拓展为构造无穷多个辛 Lefschetz 铅笔。我们还感谢 Baykur 与我们分享了 [BKRar，问题 4。98]。我们感谢 Faye Jackson 和 Nick Salter 对早期稿件提出意见，改进了文章的表述。第一作者感谢 Francesco Lin 建议考虑由 Torelli 群元素进行部分共轭；感谢 Tye Lidman 和 Lisa Piccirillo 与我们讨论部分共轭所产生的 Lefschetz 纤维化的微分同胚类型；也感谢 Denis Auroux 与我们讨论 Lefschetz 纤维化和辛曲面。第二作者感谢 Mohammed Abouzaid 和 Danny Calegari 与我们讨论辛吹下。

2. Lefschetz fibrations and mapping class groups

本节回顾 Lefschetz 纤维化与映射类群之间的关系，以及研究它们的一些工具。

2.1. **Lefschetz 铅笔、纤维化与单值化**。 设 M^4 是一个闭的、定向的光滑 4-流形。若存在某个非空有限集 $B \subseteq M$，以及有限多个临界点 $p_1, \ldots, p_r \in M - B$，使得光滑映射 $\pi\colon M - B \to S^2$ 满足

(a) 对每个基点 $p \in B$，存在其附近的光滑定向相容坐标图 $U \cong \mathbb{C}^2$ 和一个微分同胚 $S^2 \cong \mathbb{CP}^1$，使得 π 具有如下形式

$$\pi(z, w) = [z : w] \in \mathbb{CP}^1,$$

and

(b) 对每个临界点 p_i，存在其附近的光滑定向相容坐标图 $U_i \cong \mathbb{C}^2$ 和 $\pi(p_i)$ 附近的光滑定向相容坐标图 $V_i \cong \mathbb{C}$，使得 π 具有如下形式

$$\pi(z, w) = z^2 + w^2.$$

Lefschetz 纤维化是一个光滑满射映射 $\pi\colon M \to S^2$，具有有限多个临界点p_1、.....、$p_r \in M$，且每个临界点都满足上述 (b)。我们假设 π在其临界点集合 $\{p_1, \ldots, p_r\}$ 上是单射，并且 Lefschetz 纤维化是相对极小的，即 π 的任何纤维都不包含嵌入的 (-1)-球面。Lefschetz 纤维化 $\pi\colon M \to S^2$ 的亏格是任意正则纤维 $\pi^{-1}(b)$的亏格，$b \in S^2$。若存在微分同胚 $\Phi\colon M_1 \to M_2$ 和 $\varphi\colon S^2 \to S^2$，使得下图交换，则称两个 Lefschetz 纤维化 $\pi_1\colon M_1 \to S^2$ 和 $\pi_2\colon M_2 \to S^2$ 等价：

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\Phi} & M_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ S^2 & \xrightarrow{\varphi} & S^2 \end{array}$$

选取一个正则值 $b \in S^2$ 以及一个微分同胚 $\Phi_b\colon \pi^{-1}(b) \xrightarrow{\sim} \Sigma_g$，即可确定 Lefschetz 纤维化 $\pi\colon M \to S^2$ 的单值表示，它是一个群反同态

$$\rho : \pi_1(S^2 - \{q_1, \ldots, q_r\}, b) \to \mathrm{Mod}(\Sigma_g),$$

其中 $q_1,\dots,q_r \in S^2$ 表示 π 的奇异值（参见 [GS99，第 291]页）。单值表示 ρ 具有如下特征：对于任意环路 $\gamma \in \pi_1(S^2-\{q_1,\dots,q_r\},b)$ 以及任意 $\varphi \in$ 微分同胚群 $^+(\Sigma_g$，它表示映射类 $\rho(\gamma$，存在一个 Σ_g- 丛之间的同构，其底空间为 S^1

$$\Phi : \gamma^* M \to M_\varphi := \Sigma_g \times [0,1]/((\varphi(x),0)\sim(x,1))$$

在 π 沿 γ 的拉回与映射环面 M_φ之间。将 γ 视为映射 $[0,1]\to S^2-\{q_1,\dots,q_r\}$，且满足 $\gamma(0)=\gamma(1)=b$，则 Φ 在$(\gamma^*\pi)^{-1}(0)=\pi^{-1}(b)\to\Sigma_g\times\{0\}$ 上的限制与单值表示定义中所选取的等同 $\Phi_b:\pi^{-1}(b)\to\Sigma_g$ 相一致。

若 $\gamma_i \in \pi_1(S^2-\{q_1,\dots,q_r\},b)$是由围绕$q_i$的一条小逆时针环路经 $S^2-\{q_1,\dots,q_r\}$中的一条路径连接到 b而得到的环路，则单值化 $\rho(\gamma_i)$是关于消失圈 ℓ_i的右手德恩扭转$T_{\ell_i}\in$ 映射类群(Σ_g)，即 Σ_g 中某条本质简单闭曲线的同伦类。再额外选取生成元 $\gamma_1,\dots,\gamma_r\in\pi_1(S^2-\{q_1,\dots,q_r\},b)$，使得 $\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_r=1$，则单值表示确定一个单值化分解，即映射类群$(\Sigma_g)$中具有如下形式的一个关系

$$T_{\ell_r}\dots T_{\ell_1}=1\in \mathrm{Mod}(\Sigma_g).$$

更一般地，可以考虑任意映射类 $h\in$ Mod$(\Sigma_{g,\,n}^m)$ 的正分解，即仅由右手德恩扭转 $T_\ell\in$ Mod$(\Sigma_{g,\,n}^m)$ 构成的 h 的分解。若 Mod$(\Sigma_{g,\,n}^m)$ 中的两个 h 正分解可通过以下两类操作组成的序列相互关联，则称它们为赫尔维茨等价：

(a) （初等变换）对任意 $1\le i\le r-1$,

$$T_{\ell_r}\dots T_{\ell_{i+1}}T_{\ell_i}\dots T_{\ell_1}\leftrightarrow T_{\ell_r}\dots(T_{\ell_{i+1}}T_{\ell_i}T_{\ell_{i+1}}^{-1})T_{\ell_{i+1}}\dots T_{\ell_1}.$$

(b) （整体共轭）对任意与 $h\in$ Mod$(\Sigma_{g,\,n}^m)$ 可交换的 $f\in$Mod$(\Sigma_{g,\,n}^m)$

$$T_{\ell_r}\dots T_{\ell_1}\leftrightarrow (fT_{\ell_r}f^{-1})\dots(fT_{\ell_1}f^{-1}).$$

下述定理通过 Lefschetz 纤维化的单值化分解的赫尔维茨等价类，刻画其等价类。

定理 2.1（Kas [Kas80], Matsumoto [Mat96]）. 设 $g\ge 2$。存在一个双射

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{genus-g Lefschetz fibrations, up}\\ \textit{to equivalence}\end{array}\right\}\xrightarrow{\sim}\left\{\begin{array}{c}\textit{positive factorizations of the identity in}\\ \mathrm{Mod}(\Sigma_g)\textit{, up to Hurwitz equivalence}\end{array}\right\}$$

由单值化分解给出。

这个双射立即给出判断两个 Lefschetz 纤维化是否不等价的如下判据。

推论 2.2. 设 $g\ge 2$，并设 $\pi_1: M_1\to S^2$ 和 $\pi_2: M_2\to S^2$ 是亏格为 g 的 *Lefschetz* 纤维化，分别具有单值表示 ρ_1 和 ρ_2。若像 $\mathrm{im}(\rho_1)$ 和 $\mathrm{im}(\rho_2)$ 作为映射类群 Mod(Σ_g) 的子群并不共轭，那么 *Lefschetz* 纤维化 π_1 和 π_2 不等价。

加入 Lefschetz 纤维化的不相交截面数据，可在单值化侧得到更精细的信息。固定 Lefschetz 纤维化$\pi: M\to S^2$的 n个不相交截面 $\sigma_1,\dots,\sigma_n: S^2\to M$。取 π相对于截面 $\sigma_1,\dots,\sigma_n$在 Mod(Σ_g^n) 中的单值化分解（其中第 i个边界分支 δ_i 对应于 $\pi^{-1}(b)$中第 i个截面 $\sigma_i(b)$的邻域边界），由此得到一个提升

$$T_{\tilde{\ell}_r}\dots T_{\tilde{\ell}_1}=T_{\delta_1}^{a_1}\dots T_{\delta_n}^{a_n}\in\mathrm{Mod}(\Sigma_g^n)$$

在封盖与遗忘˜同态 Mod$(\Sigma_g^n)\to$ Mod(Σ_g) 下，π的单值化分解 $T_{\ell_r}\dots T_{\ell_1}=1\in$Mod$(\Sigma_g)$。对所有 $1\le i\le r$，本质简单闭曲线 $\ell_i\subseteq\Sigma_g^n$ 在 Σ_g 中与 ℓ_i 同伦（在封住边界分支之后），且 $a_i\in\mathbb{N}$ 满足 $-a_i=[\sigma_i(S^2)]^2$，其中 $[\sigma_i(S^2)]^2$ 表示 $\sigma_i(S^2)$ 在 M [Smi01，引理 2.3] 中的自交数。仅考虑截面 σ_1，…，σ_n 本身，而不考虑它们在 M 中的正规邻域，我们得到一个类似的提升

$$T_{\hat{\ell}_r}\dots T_{\hat{\ell}_1}=1\in\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n})$$

在遗忘映射 Mod($\Sigma_{g,n}$) →Mod(Σ_g) 下的单值化分解 $T_{\ell_r}\dots T_{\ell_1}=1\in$Mod($\Sigma_g$)。反之，如上所述，将 π 在 Mod(Σ_g) 中的单值化分解提升到 Mod(Σ_g^n) 或 Mod($\Sigma_{g,n}$) 的任意提升，都会给出 n 条不相交截面 $\sigma_1,\dots,\sigma_n$： $S^2\to M$，它们属于 π： $M\to S^2$，自交数分别为 $-a_1,\dots,-a_n$。

对任意 Lefschetz 铅笔 π： $M-B\to S^2$ 的基点集合 B （含 $n=|B|$）进行爆破，可得到相应的 Lefschetz 纤维化 π： $M\#n\mathbb{CP}^2\to S^2$，它具有 n 个不相交截面 σ_1，.....， σ_n，其自交数为 -1。反过来，对 Lefschetz 纤维化 $\pi: M\to S^2$，将任意一组 n 个（-1）截面 σ_1，.....， σ_n 吹下，可在 N 上得到 Lefschetz 铅笔结构（其中 $M\dashrightarrow N$ 是该吹下映射，因此 $M\cong N\#n\mathbb{CP}^2$）。若存在微分同胚 Φ： $M_1\to M_2$ 和 φ： $S^2\to S^2$，使得 $\Phi(B_1)=B_2$，且下图可交换，则两个 Lefschetz 铅笔 π_1： $M_1-B_1\to S^2$ 和 π_2： $M_2-B_2\to S^2$ 称为等价：

$$\begin{array}{ccc} M_1-B_1 & \xrightarrow{\Phi} & M_2-B_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ S^2 & \xrightarrow{\varphi} & S^2 \end{array}$$

通过考察两个 Lefschetz 铅笔所对应的 Lefschetz 纤维化，可以判断它们是否不等价：

命题 2.3 (参见 Baykur–Hayano [BH16a]，推论 3.10])。 设 $\pi_1: M_1-B_1\to S^2$ 和 $\pi_2: M_2-B_2\to S^2$ 是满足 $n=|B_1|=|B_2|$的 ***Lefschetz*** 铅笔。若分别与 ***Lefschetz*** 铅笔 $M_1\#n\mathbb{CP}^2\to S^2$和 $M_2\#n\mathbb{CP}^2\to S^2$对应的 ***Lefschetz*** 纤维化 π_1 和 π_2 不等价，则 ***Lefschetz*** 铅笔 π_1 和 π_2 也不等价。

2.2. **部分共轭**。 从旧的恒等元正分解出发，在 Mod($\Sigma_{g,n}$) 中构造新的恒等元正分解的一种方法是采用部分共轭。给定某个正分解

$$T_{\tilde{\ell}_r}\dots T_{\tilde{\ell}_{i+1}}T_{\tilde{\ell}_i}\dots T_{\tilde{\ell}_1}=1\in \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n}) \tag{1}$$

˜以及任意一个与映射类 $T_{\tilde{\ell}_i}\dots T_{\tilde{\ell}_1}$ 在 Mod($\Sigma_{g,n}$) 中对易的 $f\in$Mod($\Sigma_{g,n}$)，我们构造一个新的正分解

$$T_{\tilde{\ell}_r}\dots T_{\tilde{\ell}_{i+1}}(\tilde{f}T_{\tilde{\ell}_i}\tilde{f}^{-1})\dots(\tilde{f}T_{\tilde{\ell}_1}\tilde{f}^{-1})=1\in \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n}). \tag{2}$$

现在，我们用 Lefschetz 纤维化和截面来描述这一操作。令 $\pi: M\to S^2$ 表示具有截面 $\sigma_1,\dots,\sigma_n: S^2\to M$ 且对应于单值化分解 (1) 的 Lefschetz 纤维化。令 $b\in S^2$ 表示 π 所选取的正则值，并令 $q_1,\dots,q_r\in S^2$ 表示 π 的奇异值，使得 q_i 对所有 $1\le i\le r$均对应于消失圈 $\tilde{\ell}_i$。于是，我们可以将基底 S^2写成两个圆盘 $S^2=D_1\cup_\partial D_2$ 的并，其中 $D_i\cong D^2$，且

(a) 基点 $b\in S^2$ 包含于 $\partial D_1=\partial D_2$ 中；(b) 所选生成元 $\gamma_1,\dots,\gamma_i$ 和奇异值 $q_1,\dots,q_i$ 包含于 D_1 中，而所选生成元 $\gamma_{i+1},\dots,\gamma_r$ 和奇异值 $q_{i+1},\dots,q_r$ 包含于 D_2 中；并且 (c) 基于基点的环路 $(\partial D_1,b)$ 的方向可以选定，使其作为 $\pi_1(S^2-\{q_1,\dots,q_r\},b)$ 的元素，

$$[\partial D_1]=\gamma_1\dots\gamma_i.$$

Let

$$\rho:\pi_1(S^2-\{q_1,\dots,q_r\},b)\to \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n})$$

表示与 π 和 σ_1，.....， σ_n相对应的单值表示。那么（c）意味着

$$\rho([\partial D_1])=T_{\tilde{\ell}_i}\dots T_{\tilde{\ell}_1}\in \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,n}).$$

换言之，若 $\tilde{\eta}\in$Diff$^+$($\Sigma_{g,n}$) 是 $T_{\tilde{\ell}_i}\dots T_{\tilde{\ell}_1}\in$Mod($\Sigma_{g,n}$) 的任意一个代表元，则存在一个 Σ_g-丛的同构，其底空间为 S^1

$$\pi^{-1}(\partial D_1)\to M_{\tilde{\eta}}=(\Sigma_g\times[0,1])/((\tilde{\eta}(x),0)\sim(x,1))$$

它将截面 σ_i 映射到截面 s_i： $S^1 \to M_{\tilde{\eta}}$ 该截面由 $\Sigma_{g,n}$ 的标记点 p_i 定义，并由η固定。

令 $\varphi \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma_{g,\ n})$ 为 $\tilde{f} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,\ n})$ 的任意代表元。由于 $\tilde{f}$ 和 $T_{\tilde{\ell}_i} \dots T_{\tilde{\ell}_1}$ 在 $\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,\ n})$ 中可交换，存在一个同伦 $\varphi_t : \Sigma_{g,\ n} \times [0,1] \to \Sigma_{g,\ n}$，满足 $\varphi_0 = \varphi$ 和 $\varphi_1 = \tilde{\eta}^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\eta}$。此同伦诱导出一个 Σ_g-丛的同构 $\mathcal{F} : M_{\tilde{\eta}} \to M_{\tilde{\eta}}$

$$\mathcal{F} : (x,t) \mapsto (\varphi_t(x), t)$$

它对所有 $1 \le i \le n$ 都固定每个截面 s_i： $S^1 \to M_{\tilde{\eta}}$。在同一识别 $\pi^{-1}(\partial D_i) \to M_{\tilde{\eta}}$ 下，也用 $\mathcal{F}$ 表示相应的映射$\pi^{-1}(\partial D_1) \to \pi^{-1}(\partial D_2)$。于是 π 诱导出一个新的 Lefschetz 纤维化

$$\pi^{-1}(D_1) \cup_{\mathcal{F}:\pi^{-1}(\partial D_1) \to \pi^{-1}(\partial D_2)} \pi^{-1}(D_2) \to S^2 \tag{3}$$

具有 n个由截面 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ 诱导的截面 π。由此得到的 Lefschetz 纤维化及其截面的单值化分解为 (2)，相对于原有的识别

$$\Phi_b : (\pi^{-1}(b), \sigma_1(b), \dots, \sigma_n(b)) \to \Sigma_{g,n},$$

将 b 视为 ∂D_2中的一个点。

2.3. Torelli 群与 Johnson 同态。 设 $g \ge 2$。*Torelli* 群 $\mathcal{I}_g \le \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ 是辛表示的核

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_g) \to \mathrm{Aut}(H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})) \cong \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}).$$

我们将通过一个满群同态来研究 Torelli 群

$$\tau : \mathcal{I}_g \to \left(\wedge^3 H_1(\Sigma_g)\right) / H_1(\Sigma_g)$$

称为 ***Johnson*** 同态 [Joh80] (另见 [FM12，第 6 节。6])。这里，包含 $H_1(\Sigma_g) \hookrightarrow \wedge^3 H_1(\Sigma_g)$ 定义为

$$c \mapsto \left(\sum_{i=1}^{g} a_i \wedge b_i \right) \wedge c$$

其中 $a_1,\ b_1, \dots, a_g,\ b_g \in H_1(\Sigma_g)$ 是任意一个标准辛基。

τ的一个重要性质是其自然性：对于任意的 $h \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ 和任意的 $f \in \mathcal{I}_g$,

$$\tau(hfh^{-1}) = h_*(\tau(f)) \tag{4}$$

其中在右侧，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ 通过辛表示作用于 $\left(\wedge^3 H_1(\Sigma_g)\right) / H_1(\Sigma_g)$，该辛表示为[FM12，见公式（6.1）]。下面记述自然性的一个简单但重要的推论：

推论 2.4. 固定一个超椭圆对合 $\iota \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$，并令 $\mathrm{SMod}(\Sigma_g)$ 表示 Σ_g的超椭圆映射类群，即 ι 在$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ 中的中心化子。存在一个包含

$$\mathrm{SMod}(\Sigma_g) \cap \mathcal{I}_g \le \ker(\tau).$$

此推论由自然性以及以下事实得出： ι 在无挠阿贝尔群 $\wedge^3 H_1(\Sigma_g)/H_1(\Sigma_g)$ 上诱导取负映射。

3. Partial conjugations of the Matsumoto–Cadavid–Korkmaz Lefschetz fibration

在本节中，我们通过对 Matsumoto–Cadavid–Korkmaz (MCK) Lefschetz 纤维化进行部分共轭，构造亏格$2g$ Lefschetz 纤维化 π_n： $X_n \to S^2$ 对每个 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 以及所有 $g \ge 2$。稍后我们将证明，纤维化 π_n 两两不等价（第 4 节），四维流形 X_n 两两微分同胚（第 5 节），且两两辛同胚（第 6 节）。

要定义亏格为 $2g$ 的 MCK Lefschetz 纤维化，首先考虑图 2 所示曲线的同伦类。沿这些曲线的德恩扭转构成了一个重要对合$[\eta] \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g})$ 的分解，其中 $\eta \in$ 微分同胚群$^+(\Sigma_{2g})$ 表示图 2 所示的二阶微分同胚。

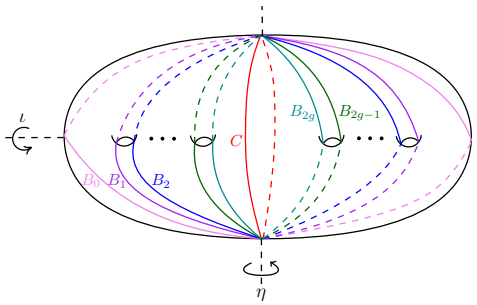


FIGURE 2. 亏格为 $2g$的 MCK Lefschetz 纤维化的消失圈、对合 η以及超椭圆对合 ι。

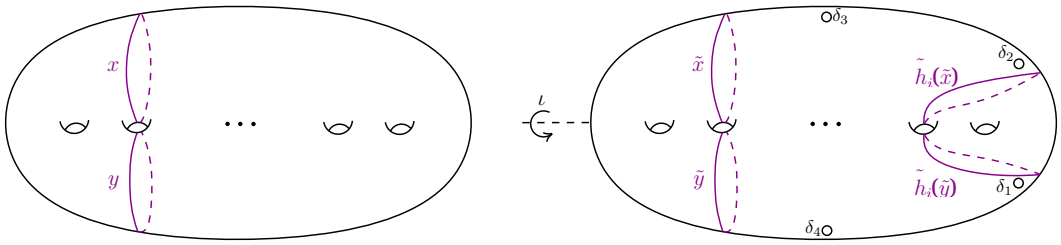


FIGURE 3. 左：用于定义 $f \in \mathcal{I}_{2g}$的曲线；右： $\tilde{x}$的提升， $\tilde{y}$ 的 x， y 到Σ^4_{2g} 及其在 $\tilde{h}_i \in \mathrm{Mod}(\Sigma^4_{2g}$下的像（定义见引理3.4 ，适用于 $i = 1$和2（参见引理A.6）。作用于 ι 的超椭圆对合 Σ^4_{2g} 会置换边界分支。

定理 3.1 (Cadavid [Cad98，定理 5.1。1], Korkmaz [Kor01，定理 3。4])。 设

$$h := T_{B_0} T_{B_1} \dots T_{B_{2g}} T_C \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g}).$$

于是 $h = [\eta]$。特别地， $h^2 = 1 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g})$。

Wi引理 3.1 现已具备条件，可以定义亏格为 2 的 MCK Lefschetz 纤维化 g.

定义 3.2. 亏格为 $2g$ 的*Matsumoto–Cadavid–Korkmaz Lefschetz* 纤维化 （或*MCK Lefschetz* 纤维化）是指 Lefschetz 纤维化 $\pi_0 \colon X_0 \to S^2$ ，其单值化分解为

$$T_{B_0} T_{B_1} \dots T_{B_{2g}} T_C T_{B_0} T_{B_1} \dots T_{B_{2g}} T_C = 1 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g}).$$

Hamada [Ham17]构造了多组由四个互不相交的（−1）截面组成的 MCK Lefschetz 纤维化截面组。本文将考虑 [Ham17] 中给出的两组截面。

定理 *3.3*（*Hamada* [*Ham17*，第 *3.4.1–3.4.2*] 节）。对于 $i = 1$， 令 *2*、B^i_0、*1*、B^i_1、*1*、*. . .*、B^i_{2g}、*1*、C^i_1 以及 B^i_0、*2*、B^i_1、*2*、*. . .*、B^i_{2g}、*2*、C^i_2 为 Σ^4_{2g} 中如图 *4* 所示的曲线的同伦类。则

$$T_{B^i_{0,1}} T_{B^i_{1,1}} \dots T_{B^i_{2g,1}} T_{C^i_1} T_{B^i_{0,2}} T_{B^i_{1,2}} \dots T_{B^i_{2g,2}} T_{C^i_2} = T_{\delta_1} T_{\delta_2} T_{\delta_3} T_{\delta_4} \in \mathrm{Mod}(\Sigma^4_{2g}).$$

为了使论述完整并方便读者，我们在附录 A 中证明定理 3.3 ，并由此推导定理 3.1 。下面的引理通过部分共轭和定理 $T_{\delta_1} T_{\delta_2} T_{\delta_3} T_{\delta_4} \in$映射类群$(\Sigma^4_{2g})$，为每个 $n \in \mathbb{Z}$ 构造一个正分解。3.3。

引理 *3.4.* 设 B^i_0*,1*, B^i_1*,1*, *. . .*,B^i_{2g}*,1*, C^i_1 和 B^i_0*,2*, B^i_1*,2*, *. . .*, B^i_{2g}*,2*, C^i_2 是 $i = 1, 2$ 中如图 *4* 所示的曲线同伦类，并设 $\tilde{x}, \tilde{y}$ 是 Σ^4_{2g} 中如图 *3* 右侧所示的曲线同伦类。设

$$\tilde{h}_i := T_{B^i_{0,2}} T_{B^i_{1,2}} \dots T_{B^i_{2g,2}} T_{C^i_2} \in \mathrm{Mod}(\Sigma^4_{2g}).$$

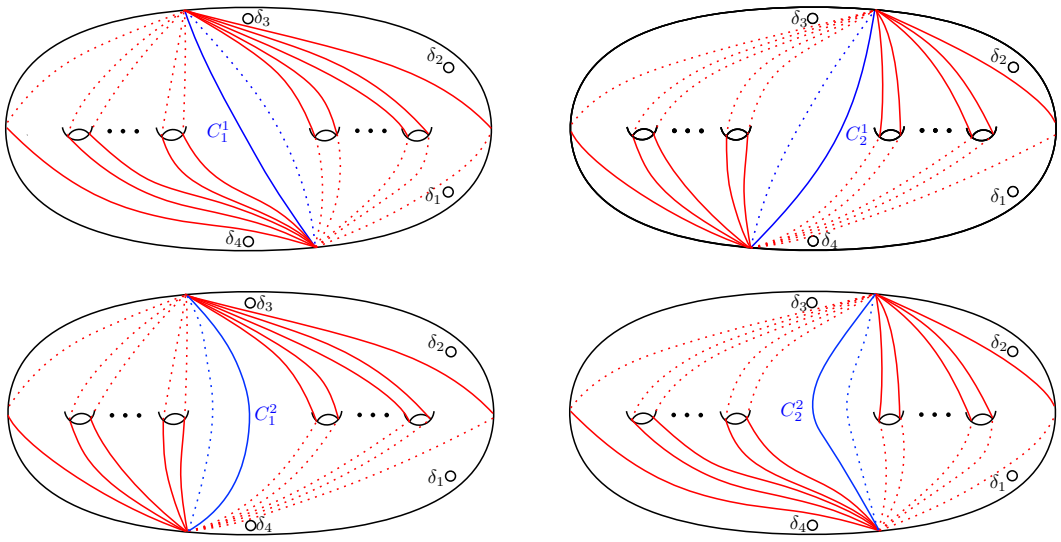


FIGURE 4. Hamada [Ham17]发现的亏格为 $2g$ toΣ_{2g}^4 的 MCK Lefschetz 纤维化的消失圈的提升。 Σ_{2g}^4 的四个边界分支记为 δ_1、 δ_2、 δ_3、 δ_4。左上: B_0^1,1, . . . , B_{2g}^1,1, C_1^1; 右上: B_0^1,2, . . . , B_{2g}^1,2, C_2^1; 左下: B_0^2,1, . . . , B_{2g}^2,1, C_1^2; 右下: B_0^2,2, . . . , B_{2g}^2,2, C_2^2

Then

$$\tilde{f} := T_{\tilde{x}}T_{\tilde{y}}^{-1}T_{\tilde{h}_1(\tilde{x})}T_{\tilde{h}_1(\tilde{y})}^{-1} = T_{\tilde{x}}T_{\tilde{y}}^{-1}T_{\tilde{h}_2(\tilde{x})}T_{\tilde{h}_2(\tilde{y})}^{-1} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g}^4)$$

并且对于任意 $n \in \mathbb{Z}$， 以及对于 $i = 1,2$,

$$T_{B_{0,1}^i}T_{B_{1,1}^i}\dots T_{B_{2g,1}^i}T_{C_1^i}T_{\tilde{f}^n(B_{0,2}^i)}T_{\tilde{f}^n(B_{1,2}^i)}\dots T_{\tilde{f}^n(B_{2g,2}^i)}T_{\tilde{f}^n(C_2^i)} = T_{\delta_1}T_{\delta_2}T_{\delta_3}T_{\delta_4} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g}^4).$$

证明。 首先，注意到 $T_{\tilde{h}_1(\tilde{x})} = T_{\tilde{h}_2(\tilde{x})}$ 以及 $T_{\tilde{h}_1(\tilde{y})} = T_{\tilde{h}_2(\tilde{y})}$ 在映射类群(Σ_{2g}^4)中，由引理 A.6(a)可知，从而得到所需的第一个等式。此外,

$$\tilde{f} = T_{\tilde{x}}T_{\tilde{y}}^{-1}T_{\tilde{h}_i(\tilde{x})}T_{\tilde{h}_i(\tilde{y})}^{-1} = T_{\tilde{h}_i(\tilde{x})}T_{\tilde{h}_i(\tilde{y})}^{-1}T_{\tilde{x}}T_{\tilde{y}}^{-1}$$

其中第二个等式由引理 A.6(a)得出。现在计算可得

$$\tilde{f}\tilde{h}_i = T_{\tilde{h}_i(\tilde{x})}T_{\tilde{h}_i(\tilde{y})}^{-1}T_{\tilde{x}}T_{\tilde{y}}^{-1}\tilde{h}_i = \tilde{h}_iT_{\tilde{x}}T_{\tilde{y}}^{-1}\tilde{h}_i^{-1}T_{\tilde{x}}T_{\tilde{y}}^{-1}\tilde{h}_i = \tilde{h}_iT_{\tilde{x}}T_{\tilde{y}}^{-1}T_{\tilde{h}_i^{-1}(\tilde{x})}T_{\tilde{h}_i^{-1}(\tilde{y})}^{-1} = \tilde{h}_i\tilde{f},$$

其中最后一个等式由引理 A.6(b)得出。最后，该引理由定理3.3以及˜ ˜这一事实得出： h_j 和 f 彼此可交换。□

通过应用封闭与遗忘同态 Mod$(\Sigma_{2g}^4) \to \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g})$，我们现在用 Mod$(\Sigma_{2g}$来重新表述引理 3.4)。考虑图 x、 $y \subseteq \Sigma_{2g}$ 中所示的曲线 3 ，并定义

$$f := T_xT_y^{-1}T_{h(x)}T_{h(y)}^{-1} \in \mathcal{I}_{2g},$$

这里注意到 f 属于 Torelli 群 $\mathcal{I}_{2g}$ ，因为 f 是两个边界对映射的复合 $T_xT_y^{-1}$，并且$T_{h(x)}T_h^{-1}{}_{(y)}$。因此，以下推论可由引理3.4立即得出。

推论 3.5。设 $g \geq 2$。对于任意 $n \in \mathbb{Z}$,

$$T_{B_0}T_{B_1}\dots T_{B_{2g}}T_CT_{f^n(B_0)}T_{f^n(B_1)}\dots T_{f^n(B_{2g})}T_{f^n(C)} = 1 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g}).$$

最后，我们利用推论 3.5 来定义我们关注的 Lefschetz 纤维化。

定义 3.6。令 $g \geq 2$。对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，令 $\pi_n : X_n \to S^2$ 表示亏格为 $2g$、单值化分解为

$$T_{B_0}T_{B_1}\dots T_{B_{2g}}T_C T_{f^n(B_0)}T_{f^n(B_1)}\dots T_{f^n(B_{2g})}T_{f^n(C)} = 1 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g}).$$

4. Distinguishing Lefschetz fibrations via the Johnson homomorphism

本节的目标是证明以下定理。

定理 4.1。对于任意 $n \neq m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，*Lefschetz* 纤维化 $\pi_n : X_n \to S^2$ 和 $\pi_m : X_m \to S^2$ 不等价。

证明的主要思路是通过研究 2.2 中单值表示的像来应用推论 π_n 与 Torelli 群 $\mathcal{I}_{2g}$ 的交集。因此，对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，考虑以下各群。

$$\begin{aligned} G_n &:= \langle T_{B_0}, T_{B_1}, \dots, T_{B_{2g}}, T_C, T_{f^n(B_0)}, T_{f^n(B_1)}, \dots, T_{f^n(B_{2g})}, T_{f^n(C)} \rangle, \\ G_n^{\mathcal{I}} &:= G_n \cap \mathcal{I}_{2g}, \\ A_n &:= \langle [T_{B_i}^{-1}, f^n], [T_C^{-1}, f^n] : 0 \leq i \leq 2g \rangle. \end{aligned}$$

根据构造，G_n 是 π_n 的单值表示 $X_n \to S^2$的像。我们还指出，A_n 是 $G_n^{\mathcal{I}}$的子群。为此，对于任意曲线 $c = C$ 或某个 $0 \leq i \leq 2g$，写作 B_i，使得

$$T_c^{-1}T_{f^n(c)} = [T_c^{-1}, f^n] = (T_c^{-1}f^n T_c)f^{-n}.$$

第一个等式表明，A_n的每个生成元 $[T_c^{-1}, f^n]$ 都是 G_n的元素。第二个等式表明，每个 $[T_c^{-1}, f^n]$ 都是 $\mathcal{I}_{2g}$的元素，因为 f^{-n}和 $T_c^{-1}f^n T_c$都是 $\mathcal{I}_{2g}$的元素。

下文中，我们通过 Johnson 同态（参见第 τ（$G_n^{\mathcal{I}}$）研究 $G_n^{\mathcal{I}}$ 的像。2.3

$$\tau : \mathcal{I}_{2g} \to \left(\wedge^3 H\right)/H, \qquad H := H_1(\Sigma_{2g}).$$

为此，我们首先用 $G_0^{\mathcal{I}}$ 和 A_n来描述 $G_n^{\mathcal{I}}$。

引理 4.2。对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\mathcal{I}_{2g}$的子群满足以下等式

$$G_n^{\mathcal{I}} = \langle G_0^{\mathcal{I}},\, kA_nk^{-1} : k \in G_0 \rangle.$$

*Pr*证明。回想 $A_n \leq G_n^{\mathcal{I}}$ 以及 $G_0 \leq G_n$。因此，只需证明包含关系 n

$$G_n^{\mathcal{I}} \leq \langle G_0^{\mathcal{I}},\, kA_nk^{-1} : k \in G_0 \rangle.$$

根据构造，Mod(Σ_{2g})的子群满足以下等式

$$G_n = \langle G_0,\, A_n \rangle.$$

任取 $k \in G_n^{\mathcal{I}} \leq G_n$ 并写成

$$k = \ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \dots \ell_s m_s$$

对某个 $\ell_i \in G_0$，$m_i \in A_n$，其中 $1 \leq i \leq s$。将恒等式 $ab = (aba^{-1})a$ 反复应用于给定的 k 的分解，可写成

$$k = \left(\prod_{i=1}^{s} r_i m_i r_i^{-1}\right) r$$

对某些 $r \in G_0$ 和 $r_1, \dots, r_s \in G_0$。由于每个 $m_i \in A_n$ 都包含在 $\mathcal{I}_{2g}$ 中，且 k 包含在 $\mathcal{I}_g$ 中，因此映射类 r 包含在 $\mathcal{I}_{2g}$ 中，进而包含在 $G_0^{\mathcal{I}}$ 中。□

下面的引理利用引理 $\tau(G_n^{\mathcal{I}})$ 给出了像 4.2 的初步描述。另一个关键工具是 Johnson 同态的自然性（4），并结合了 $G_0^{\mathcal{I}}$ 是超椭圆的这一事实。

引理 4.3。对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在子群的包含关系

$$\tau(G_n^{\mathcal{I}}) \leq n\left(\wedge^3 H\right)/H.$$

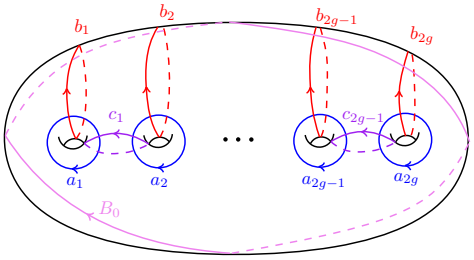


FIGURE 5. H中的一些同调类

证明。 对于任意 $\ell \in G_n^{\mathcal{I}}$，根据引理 4.2

$$\ell = \ell_1(k_1 h_1 k_1^{-1})\ell_2(k_2 h_2 k_2^{-1}) \dots \ell_s(k_s h_s k_s^{-1})$$

对于某个 $\ell_i \in G_0^{\mathcal{I}}$， $k_i \in G_0$，以及 $h_i \in A_n$ 对于 $1 \le i \le s$。将 τ 应用于两边（并利用自然性（4））可得

$$\tau(\ell) = \left(\sum_{i=1}^{s} \tau(\ell_i)\right) + \left(\sum_{i=1}^{s} k_i \cdot \tau(h_i)\right).$$

另一方面，回顾一下， G_0 的每个生成元都是超椭圆的（见图 2），因此 $G_0^{\mathcal{I}}$ 包含于超椭圆映射类群 $\mathrm{SMod}(\Sigma_{2g})$ 中。由推论 2.4， $\tau(\ell_i) = 0$ 对所有$1 \le i \le s$均成立。

由于对于所有 $1 \le i \le s$， h_i 都是 A_n 的一个元素，并且每个 k_i 都保持子群$n\left(\wedge^3 H\right)/H$ 不变，现在只需证明 $\tau(A_n)$ 包含于 $n\left(\wedge^3 H\right)/H$。为此，注意对于任意 $k \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g})$

$$\tau([k^{-1}, f^n]) = \tau(k^{-1} f^n k) - \tau(f^n) = n\left(\tau(k^{-1} f k) - \tau(f)\right) \in n\left(\wedge^3 H\right)/H. \qquad \square$$

为了进一步分析像 $\tau(G_n^{\mathcal{I}})$，我们需要验证 $(\wedge^3 H)/H$ 中的某些元素非零且本原。为此，我们记录以下代数引理。

引理 4.4. 设 $k \ge 2$，且 $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k$ 是 $H_1(\Sigma_k)$ 的辛 $\mathbb{Z}$-基。设对所有 $1 \le i \le k$， $\gamma_{2i-1} := \alpha_i$ 且 $\gamma_{2i} := \beta_i$。集合

$$\{\gamma_i \wedge \gamma_j \wedge \gamma_\ell : 1 \le i < j < \ell \le 2k,\ (i,j,\ell) \ne (i, 2k-1, 2k),\ (1,2,2k-1),\ (1,2,2k)\}$$

构成自由阿贝尔群 $\left(\wedge^3 H_1(\Sigma_k)\right)/H_1(\Sigma_k)$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。

证明。令

$$\omega := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \wedge \beta_i = \sum_{i=1}^{k} \gamma_{2i-1} \wedge \gamma_{2i} \in \wedge^2 H_1(\Sigma_k).$$

楔积 ω 与辛基的选取无关，因此包含映射 $H_1(\Sigma_k) \hookrightarrow \wedge^3 H_1(\Sigma_k)$ 为

$$c \mapsto \omega \wedge c.$$

群 $\wedge^3 H_1(\Sigma_k)$ 是无挠的，且有一个 $\mathbb{Z}$-基

$$\{\gamma_i \wedge \gamma_j \wedge \gamma_\ell : 1 \le i < j < \ell \le 2k\}.$$

集合

$$\{\gamma_i \wedge \gamma_j \wedge \gamma_\ell : 1 \le i < j < \ell \le 2k,\ (i,\ j,\ \ell) \ne (i,\ 2k-1,\ 2k),\ (1,\ 2,\ 2k-1),\ (1,\ 2,\ 2k)\} \cup \{\omega \wedge \gamma_i : 1 \le i \le 2k\}$$

是 $\wedge^3 H_1(\Sigma_k)$ 的另一个 $\mathbb{Z}$-基。为此，注意到新基的大小与旧基相同，而且旧基的每个元素都可以用这个新基表示，因为

$$\gamma_i \wedge \gamma_{2k-1} \wedge \gamma_{2k} = \omega \wedge \gamma_i - \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{2j-1} \wedge \gamma_{2j} \wedge \gamma_i \qquad \text{for } 1 \le i \le 2k-2,$$

$$\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_{2k-1} = \omega \wedge \gamma_{2k-1} - \sum_{j=2}^{k-1} \gamma_{2j-1} \wedge \gamma_{2j} \wedge \gamma_{2k-1},$$

$$\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_{2k} = \omega \wedge \gamma_{2k} - \sum_{j=2}^{k-1} \gamma_{2j-1} \wedge \gamma_{2j} \wedge \gamma_{2k}.$$

由于 $\{\omega \wedge \gamma_i \colon 1 \le i \le 2k\}$ 是 $H_1(\Sigma_k) \le \wedge^3 H_1(\Sigma_k)$ 的 $\mathbb{Z}$-基，因此商空间 $\left(\wedge^3 H_1(\Sigma_k)\right)/H_1(\Sigma_k)$ 是无挠的。此外， $\mathbb{Z}$ 的张成空间

$$\{\gamma_i \wedge \gamma_j \wedge \gamma_\ell : 1 \le i < j < \ell \le 2k,\ (i,j,\ell) \ne (i, 2k-1, 2k),\ (1,2,2k-1),\ (1,2,2k)\}$$

同构地映射到商空间 $\wedge^3 H_1(\Sigma_k) \to \left(\wedge^3 H_1(\Sigma_k)\right)/H_1(\Sigma_k)$，因而构成该商空间的 $\mathbb{Z}$-基。□

下面的引理通过对 Johnson 同态进行更详细的计算，细化了我们对 $\tau(G_n^{\mathcal{I}})$ 的描述。在证明中，我们使用图 5 中的记号来计算 $\left(\wedge^3 H\right)/H$。

引理 4.5. 存在一个本原的 $v \in \left(\wedge^3 H\right)/H$，使得对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$， nv 都包含于 $\tau(G_n^{\mathcal{I}})$ 中。

证明。令

$$v := \tau([T_{B_0}^{-1}, f]).$$

为证明对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$， nv 都包含于 $\tau(G_n^{\mathcal{I}})$，回想 $A_n \le G_n^{\mathcal{I}}$，并计算得

$$\tau([T_{B_0}^{-1}, f^n]) = \tau(T_{B_0}^{-1} f^n T_{B_0}) - \tau(f^n) = n(\tau(T_{B_0}^{-1} f T_{B_0}) - \tau(f)) = nv.$$

剩下要证明 v 是本原的。首先，注意到

$$\tau(T_x T_y^{-1}) = a_1 \wedge b_1 \wedge b_2 = a_1 \wedge b_1 \wedge c_1,$$

其中，第一个等式由 [FM12，第 195-196] 页得出，第二个等式则是因为$b_2 = b_1 + c_1$ 作为 H中的元素。因此，

$$\begin{aligned} \tau(f) &= \tau(T_x T_y^{-1}) + \tau(T_{h(x)} T_{h(y)}^{-1}) \\ &= \tau(T_x T_y^{-1}) + h \cdot \tau(T_x T_y^{-1}) \qquad \text{by naturality (4) of } \tau \\ &= a_1 \wedge b_1 \wedge c_1 + (-a_{2g}) \wedge (-b_{2g}) \wedge c_{2g-1}. \end{aligned}$$

现在在 $\left(\wedge^3 H\right)/H$ 中计算

$$\begin{aligned} v &= \tau(T_{B_0}^{-1} f T_{B_0}) - \tau(f) \\ &= T_{B_0}^{-1}\left(a_1 \wedge b_1 \wedge c_1 + a_{2g} \wedge b_{2g} \wedge c_{2g-1}\right) - \left(a_1 \wedge b_1 \wedge c_1 + a_{2g} \wedge b_{2g} \wedge c_{2g-1}\right) \quad \text{by naturality (4) of } \tau \\ &= \left(a_1 \wedge (b_1 - B_0) \wedge c_1 + a_{2g} \wedge (b_{2g} - B_0) \wedge c_{2g-1}\right) - \left(a_1 \wedge b_1 \wedge c_1 + a_{2g} \wedge b_{2g} \wedge c_{2g-1}\right) \\ &= \left(a_1 \wedge c_1 + a_{2g} \wedge c_{2g-1}\right) \wedge B_0. \end{aligned}$$

在此处及本证明的其余部分中，我们也用 B_0 表示 B_0的同调类，其定向如图5所示。

存在一个辛基 α_1， β_1，…， α_{2g}， β_{2g}，属于 $H_1(\Sigma_{2g})$，且满足

$$\alpha_1 = -a_1,\ \beta_1 = c_1,\ \alpha_2 = -a_{2g},\ \beta_2 = c_{2g-1},\ \alpha_3 = B_0.$$

由引理 4.4可知，集合 $\{a_1 \wedge c_1 \wedge B_0,\ a_{2g} \wedge c_{2g-1} \wedge B_0\}$ 可以补充为 $\mathbb{Z}$ 的一个基底，其中 $\left(\wedge^3 H_1(\Sigma_{2g})\right)/H_1(\Sigma_{2g})$。因此，总和 $a_1 \wedge c_1 \wedge B_0 + a_{2g} \wedge c_{2g-1} \wedge B_0$ 是本原的。□

以下命题构成了定理4.1证明中的主要计算工具。

命题 4.6。 若 $n \neq m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，则 G_n 和 G_m 作为 映射类群(Σ_{2g}) 的子群并不共轭。

证明。 假设存在 $k \in$映射类群(Σ_{2g})，使得

$$kG_nk^{-1} = G_m \leq \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g}).$$

由于 $\mathcal{I}_{2g}$ 是映射类群(Σ_{2g})中的正规子群，这意味着

$$kG_n^{\mathcal{I}}k^{-1} = G_m^{\mathcal{I}} \leq \mathcal{I}_{2g}.$$

由4的自然性 τ 以及引理 4.3,

$$\tau(G_m^{\mathcal{I}}) = k \cdot \tau(G_n^{\mathcal{I}}) \leq n\left(\wedge^3 H\right)/H.$$

由引理 4.5，存在一个本原类 $v \in \left(\wedge^3 H\right)/H$ 使得 mv 包含于 $n\left(\wedge^3 H\right)/H$；换言之， n 整除 m。 由对称性， m 也整除 n，即 $n = m$。 □

本节的主定理现在可直接得出。

定理的证明 *4.1*。 若 $n \neq m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，则 G_n 与 G_m 在 Mod(Σ_{2g}) 的子群意义下不共轭。根据构造， G_n 和 G_m 分别是单值表示 ρ_n) 和 im(ρ_m) 的像 im(ρ_n 和 ρ_m ，分别对应于 π_n 和 π_m 。由推论 2.2， π_n 和 π_m 是两个不等价的 Lefschetz 纤维化。 □

5. Ruled surfaces and their blowups

本节的目标是确定第 π_n 节 Lefschetz 纤维化的微分同胚类型：$X_n \to S^2$ 第 3 节的（命题 5.2）。此外，我们还将确定第 3 节中发现的四个（ X_n ）截面之一的 -1吹下的微分同胚类型（命题 5.6）。

5.1. 微分同胚类 的微分同胚类型 X_n。

我们首先计算 X_n 的代数拓扑不变量。 .

引理 5.1. 对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$\sigma(X_n) = -4, \quad \chi(X_n) = 8 - 4g, \quad b_1(X_n) = 2g, \quad b_2^+(X_n) = 1, \quad b_2(X_n) = 6$$

证明。 根据 Korkmaz的计算 [Kor01，第 5], 节中的结果可知，当 $n = 0$时，该引理成立，即 MCK Lefschetz 纤维化 π_0： $X_0 \to S^2$。（事实上，Korkmaz 确定了 X_0在 $g \geq 3$时的微分同胚类型；另见命题 5.2。）

要计算 $\sigma(X_n)$ 在 $n \geq 1$ 时，考虑单值化分解为 $Z \to D^2$ 的 Lefschetz 纤维化
tion

$$T_{B_0} \dots T_{B_{2g}} T_C \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g}).$$

那么 X_n 是将两份 Z 沿边界通过某个微分同胚$\partial Z \to \partial Z$ （该微分同胚随 n而变化）粘合而成的，对任意 $n \geq 0$ （参见第 2.2 节）。根据 Novikov 可加性,

$$\sigma(X_n) = 2\sigma(Z) = \sigma(X_0) = -4$$

对所有 $n \geq 0$。

要计算所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的 $\chi(X_n)$，注意 π_n： $X_n \to S^2$ 有（$4g + 4$）个消失圈，并且

$$\chi(X_n) = 4 - 8g + (4g + 4) = 8 - 4g.$$

要计算 b_1（X_n），对于 $n \geq 1$，首先回想一下，引理3.4 中给出的 $T_{\delta_1}T_{\delta_2}T_{\delta_3}T_{\delta_4}$ $\in$映射类群（Σ_{2g}^4）的正分解，是推论3.5 中给出的Σ_{2g}映射类群（）中恒等元正分解的提升，该分解定义了 Lefschetz 纤维化 π_n，因此 π_n： $X_n \to S^2$ 存在截面。因此,

$$H_1(X_n) \cong H_1(\Sigma_{2g})/\mathbb{Z}\{[B_0], \dots, [B_{2g}], [C], [f^n(B_0)], \dots, [f^n(B_{2g})], [f^n(C)]\}.$$

由于 f^n 在 $H_1(\Sigma_{2g})$ 上的作用是平凡的，这意味着对于所有 $n \geq 1$， $b_1(X_n) = b_1(X_0) = 2g$。

最后，通过求解方程组来计算 $b_2^+(X_n)$ 和 $b_2(X_n)$

$$8-4g=\chi(X_n)=1-2g+(b_2^+(X_n)+b_2^-(X_n))-2g+1,$$
$$-4=\sigma(X_n)=b_2^+(X_n)-b_2^-(X_n).$$ □

Liu 的一个定理表明， X_n 其代数拓扑不变量[Liu96]。

命题 5.2。 对于任意 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，四维流形 X_n 与 $(\Sigma_g\times S^2)\#4\mathbb{CP}^2$ 微分同胚，也与$(\Sigma_g\tilde{\times}\overline{S^2})\#4\mathbb{CP}^2$ 微分同胚。

证明。 根据 Gompf–Thurston 构造，四维流形 X_n 具有一个辛形式。令 M_n为一个极小辛四维流形，使得 $M_n\#k\mathbb{CP}^2$ 与 X_n 微分同胚。由于 $b_2(X_n)=6$以及 $\overline{b_2^+}(X_n)=1$ 根据引理 5.1，存在一个界 $0\leq k\leq 5$。根据引理 5.1，

$$\sigma(M_n)=-4+k,\quad \chi(M_n)=8-4g-k,\quad b_1(M_n)=2g,\quad b_2^+(M_n)=1.$$

那么，因为 $g\geq 2$,

$$c_1^2(M_n)=2\chi(M_n)+3\sigma(M_n)=4-8g+k\leq 9-8g<0.$$

Liu 定理 [Liu96，定理 A] 表明 M_n 是无理有理曲面。因此 M_n 是一个S^2-丛，底空间为 Σ_g因为 $b_1(M_n)=2g$，即 M_n与 $\Sigma_g\times S^2$ 或 $\Sigma_g\tilde{\times}S^2$微分同胚，并且 $k=4$根据欧拉示性数的考虑可知 $(\Sigma_g\times S^2)\#\mathbb{CP}^2$ 与 $(\Sigma_g\tilde{\times}S^2)\#\mathbb{CP}^2$ 微分同胚，命题得证。□

一个直接推论是定理1.3的光滑部分。

推论 5.3。设 X 是一个纤维曲面，且 $\chi(X)=4-4g<0$。存在无穷多个不等价的 *Lefschetz* 纤维化 $X\#4\mathbb{CP}^2\to S^2$，其亏格为 $2g$。

证明。 根据假设， $X=\Sigma_g\times S^2$ 或 $\Sigma_g\tilde{\times}S^2$ 与 $g\geq 2$。根据命题 5.2，对所有 $X_n\cong X\#4\mathbb{CP}^2$，存在微分同胚 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。根据定理 4.1，亏格为 π_n： $X\#4\mathbb{CP}^2\to S^2$的 Lefschetz 纤维化 $2g$ 对于所有 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$均两两不等价。 □

5.2. **纤维曲面上的 Lefschetz 铅笔**。 本节通过研究 X_n 在吹下某些不相交的（-1）-截面之后的拓扑，证明定理 1.2 。

定义 5.4。 固定任意 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。对于 $i=1$ 或 2，令 $\sigma_{1,i}^n$、 $\sigma_{2,i}^n$、 $\sigma_{3,i}^n$、 $\sigma_{4,i}^n$ 表示 -1个不相交的（ π_n ）-截面： $X_n\to S^2$ 它们由正分解（引理 3.4）定义

$$T_{B_{0,1}^i}T_{B_{1,1}^i}\dots T_{B_{2g,1}^i}T_{C_1^i}T_{\tilde{f}^n(B_{0,2}^i)}T_{\tilde{f}^n(B_{1,2}^i)}\dots T_{\tilde{f}^n(B_{2g,2}^i)}T_{\tilde{f}^n(C_2^i)}=T_{\delta_1}T_{\delta_2}T_{\delta_3}T_{\delta_4}\in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g}^4) \tag{5}$$

其中曲线 $B_{0,1}^i,\dots,B_{2g,1}^i,C_1^i,B_{1,2}^i,\dots,B_{2g,2}^i,C_2^i$ 在 Σ_{2g}^4 中如图 4所示。

与命题 5.2 的证明类似，设 M_n^i 表示通过吹下 X_n 中的 (-1)-截面 $\sigma_{1,i}^n$、$\sigma_{2,i}^n$、$\sigma_{3,i}^n$ 以及 $\sigma_{4,i}^n$ 所得到的四维流形。

引理 5.5. 设

$$Q_{M_n^i}:H_2(M_n^i;\mathbb{Z})\times H_2(M_n^i;\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}$$

表示 M_n^i 的交叉形式。格 $(H_2(M_n^i)\,Q_{M_n^i})$在 $i=1$ 时为偶，在 $i=2$ 时为奇。

证明。 首先，我们确定 M_n^i 的交叉形式。吹下 $X_n\to M_n^i$ 将格 $(H_2(X_n)\;Q_{X_n})$ 分解为一个正交直和

$$(H_2(X_n),Q_{X_n})\cong(H_2(M_n^i),Q_{M_n^i})\oplus(\mathbb{Z}\{\sigma_{1,i}^n,\sigma_{2,i}^n,\sigma_{3,i}^n,\sigma_{4,i}^n\}).$$

考虑可约奇异纤维 $F\subseteq X_n$，即 π_n 中对应于消失圈 C_1^i 的纤维，而该消失圈出现在 π_n 的单值化分解中，如（5）。则 F 是两个亏格为g 的曲面 F_1 与 F_2横截地相交一次所成的并，并且

$$Q_{X_n}([F_1],[F_1])=Q_{X_n}([F_2],[F_2])=-1,\qquad Q_{X_n}([F_1],[F_2])=1.$$

下面，我们确定格（$H_2(M_n^i)$ $Q_{M_n^i}$）的奇偶性，它依赖于指标 i。注意，$H_2(M_n^i)$ 对于 $i=1$ 与2两者都是无挠的，这是因为 $H_2(X_n)$ 是无挠的，由命题5.2。

(1) 若 $i=1$，则对于某个 α_1，$\alpha_2 \in H_2(M_n^1)$

$$[F_1] = \alpha_1 - [\sigma_{4,1}^n], \qquad [F_2] = \alpha_2 - [\sigma_{1,1}^n] - [\sigma_{2,1}^n] - [\sigma_{3,1}^n]$$

作为 $H_2(X_n)$ 中的同调类，关于上文给出的正交和分解（至多可能置换 F_1，F_2 的指标）。那么，由于截面 $\sigma_{j,1}^n$ 的自交数为 -1,

$$Q_{M_n^1}(\alpha_1,\alpha_1) = 0, \qquad Q_{M_n^1}(\alpha_2,\alpha_2) = 2, \qquad Q_{M_n^1}(\alpha_1,\alpha_2) = 1.$$

在 $\mathbb{Z}$-张成的子空间 $\mathbb{Z}\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 上的限制是幺模的。此外，$H_2(M_n^1) \cong \mathbb{Z}^2$作为一个群由引理 5.1 生成，因此 $\mathbb{Z}\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 在 $H_2(M_n^1)$ 中具有有限指数。这两个事实共同推出 $\mathbb{Z}\{\alpha_1,\alpha_2\} = H_2(M_n^1)$。因此，格 $(H_2(M_n^1)\ Q_{M_n^1})$ 是偶的，因为 $Q_{M_n^1}(\alpha_j,\alpha_j)$ 对 $j=1$ 和 2 都是偶的。

(2) 若 $i=2$，则 $[F_1] \in H_2(X_n)$ 与截面 $\sigma_{1,2}^n$，$\sigma_{2,2}^n$，$\sigma_{3,2}^n$，$\sigma_{4,2}^n$ 正交，因此在上述正交和分解下，$[F_1]$ 包含于 $H_2(M_n^2)$ 中，并且

$$Q_{M_n^2}([F_1],[F_1]) = -1.$$

由于 $H_2(M_n^2)$ 中存在一个具有奇自交数的元素，格 $(H_2(M_n^2)\, Q_{M_n^2})$ 是奇的。□

下面的命题利用 Liu 定理 [Liu96，定理 A] 以及 M_n^i 交叉形式的奇偶性来确定其微分同胚类型。

命题 5.6。存在微分同胚

$$M_n^i \cong \begin{cases} \Sigma_g \times S^2 & \text{if } i=1, \\ \Sigma_g \tilde{\times} S^2 & \text{if } i=2. \end{cases}$$

证明。对于 $i=1$、2，(-1)-截面 $\sigma_{1,i}^n$、$\sigma_{2,i}^n$、$\sigma_{3,i}^n$、$\sigma_{4,i}^n$ 两两不交。由 Gompf–Thurston 构造 [GS99，定理 10.2.18]，，存在 X_n 上的辛形式，使截面$\sigma_{1,i}^n$、$\sigma_{2,i}^n$、$\sigma_{3,i}^n$、$\sigma_{4,i}^n$ 成为辛子流形。将这些截面吹下后，可在 M_n^i 上得到辛形式。利用引理 5.1，计算得

$$\sigma(M_n^i) = 0, \quad \chi(M_n^i) = 4-4g, \quad b_2^+(M_n^i) = 1, \quad b_1(M_n^i) = 2g, \quad b_2(M_n^i) = 2, \quad c_1^2(M_n^i) = 8-8g.$$

因此，$c_1^2(M_n^i) < 0$，因为 $g \geq 2$。

设 N_n^i 为极小辛流形，使得 M_n^i 是 N_n^i 的辛吹起。如果 M_n^i 不是极小的，那么由于 $b_2^-(M_n^i) = 1$，我们可以计算得

$$b_2^+(N_n^i) = b_2 = 1, \qquad c_1^2(N_n^i) = 9-8g < 0.$$

根据 Liu 定理 [Liu96, Theorem A]，N_n^i 是无理有理曲面，这与 $\sigma(N_n^i) \neq 0$矛盾。因此，M_n^i 是一个极小辛 4 维流形，Liu 定理 [Liu96, Theorem A] 适用于该流形，即 M_n^i 是一个满足 $b_1(M_n^i) = 2g$ 的无理有理曲面。这意味着 M_n^i 与 $\Sigma_g \times S^2$ 或 $\Sigma_g \tilde{\times} S^2$微分同胚。由于 $\Sigma_g \times S^2$ 具有偶交叉形式，而 $\Sigma_g \tilde{\times} S^2$具有奇交叉形式，引理 5.5 给出了所需结论。□

With 命题 5.6，我们能够在纤维曲面上定义所关注的 Lefschetz 铅笔 s.

定义 5.7。对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$和 $i=1$，2，令 $B_n^i \subseteq M_n^i$ 表示四个截面$\sigma_{1,i}^n$, $\sigma_{2,i}^n$, $\sigma_{3,i}^n$和 $\sigma_{4,i}^n$ 在吹下 $X_n \to M_n^i$下的像。令

$$\pi_{n,i} : M_n^i - B_n^i \to S^2$$

表示由 Lefschetz 纤维化 π_n： $X_n \to S^2$诱导的 Lefschetz 铅笔。

下面的推论证明了定理 1.2 的光滑部分。

推论 5.8 。设 X 是一个带有 $\chi(X) = 4-4g < 0$ 的纤维曲面。存在无穷多个两两不等价的价的 *Lefschetz* 笔铅 $B \to S^2$，其亏格为 $2g$，且 $\#B = 4$。

证明。根据假设，$X = \Sigma_g \times S^2$ 或$\Sigma_g \tilde{\times} S^2$ 满足 $g \geq 2$。根据命题5.6，存在 $i \in \{1,2\}$使得 X 与 M_n^i 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$微分同胚。我们可以假设 $B_n^i = B$ 在这些微分同胚下对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$都成立。

由于 Lefschetz 纤维化 $\pi_n \colon X_n \to S^2$ 根据定理 4.1 两两不等价，命题 2.3 表明，若 $n \neq m$，则铅笔 $\pi_{n,\ i} \colon X - B \to S^2$ 和 $\pi_{m,\ i} \colon X - B \to S^2$ 是不等价的 Lefschetz 铅笔。□

注记 5.9（与 [LS24] 的比较）。在 [LS24 的推论 1.5、注记 3 中，4] 我们构造了一个纤维和不可约的 Lefschetz 纤维化 $M_g \to S^2$，适用于每个亏格 $g \geq 2$，且该纤维化拥有无穷多个同调不同、自交数相同的截面。人们或许希望将这些截面吹下，从而得到无穷多个两两不等价的 Lefschetz 铅笔。然而，这要求这些截面的自交数为 -1。Li [Li99 的推论 3] 表明，任何包含无穷多个由光滑嵌入球面表示且自交数为-1 的同调类的闭辛四维流形，都是有理或带状的；另一方面，所构造的辛流形 M_g 既非有理也非带状，因为 $b_2^+(M_g) \geq 2$ [LS24 的命题 66]。

即使不考虑上文的具体例子 $\pi \colon M_g \to S^2$，[LS24] 的构造总能得到自交数为 $[\sigma]^2 \leq -2$ 的截面 σ。下文将借助 Smith[Smi01] 的一个想法，研究映射类群 Mod($\Sigma_{g,1}$) 在 $\partial\mathbb{H}^2 \cong S^1$ 上的作用，并证明这一上界。

令 $p \in \Sigma_{g,1}$ 表示标记点，并固定一个 $\tilde{p} \in \mathbb{H}^2$ 在 $p \in \Sigma_{g,1}$ 下的提升，其中覆盖映射为$\mathbb{H}^2 \to \Sigma_g$。存在一个定义良好的同态 [FM12，第 5.5 节。4]

$$\partial : \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,1}) \hookrightarrow \mathrm{Homeo}^+(\partial\mathbb{H}^2)$$

其中，$\partial h \in$ Homeo$^+(\partial\mathbb{H}^2)$ 是由任意代表元 $\varphi \in$ Diff$^+(\Sigma_g,1)$ 的提升 $\tilde{\varphi} \in$ Diff$^+(\mathbb{H}^2,\tilde{p})$ 所诱导的同胚。对于任意德恩扭转 $T_\ell \in$Mod(Σ_g,1)，同胚 ∂T_ℓ 固定 $\partial\mathbb{H}^2$ 中可数多个点，并使 $\partial\mathbb{H}^2$ 中所有其他点沿顺时针方向移动 [Smi01，命题 2.1]。

考虑任意由德恩扭转组成的序列 $T_{\ell_1}, \ldots, T_{\ell_r} \in$Mod($\Sigma_{g,1}$)，使得

$$T_{\ell_r} \ldots T_{\ell_1} = 1 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,1})$$

并令 $\pi \colon M \to S^2$ 和 $\sigma \colon S^2 \to M$ 分别表示与该正分解对应的 Lefschetz 纤维化和截面。由于每个 $\partial T_{\ell_i} \in$Homeo$^+(\partial\mathbb{H}^2)$ 都固定一些点，故同胚序列 $\partial T_{\ell_1}, \ldots, \partial T_{\ell_r}$具有定义良好的旋转数 $c \in \mathbb{N}$。根据 [Smi01，引理 2。3],旋转数 c 等于 $-[\sigma]^2$，其中 $[\sigma]^2$ 表示 σ的自交数。

考虑一个 Lefschetz 纤维化 $\pi \colon M \to S^2$ 以及截面 $\sigma_k \colon S^2 \to M$ 对于任意 $k \in \mathbb{Z}$ 在[LS24]中构造的。σ_k 的单值化分解形式为 [LS24，定理 2.1(b)]

$$T_{\ell_{r_1+r_2}} \ldots T_{\ell_{r_1+1}} T_{P_\gamma^k(\ell_{r_1})} \ldots T_{P_\gamma^k(\ell_1)} = 1 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,1})$$

对于某个点推映射类 $P_\gamma \in \pi_1(\Sigma_g, p) \trianglelefteq$映射类群($\Sigma_{g,1}$)，它与乘积 $T_{\ell_{r_1}} \ldots T_{\ell_1} \in$映射类群($\Sigma_{g,1}$) 可交换，使得对于某个 $1 \leq i \leq r_1$ 以及某个 $r_1 + 1 \leq j \leq r_1 + r_2$,

$$\hat{i}([\gamma], [\ell_i]) \neq 0 \qquad \text{and} \qquad \hat{i}([\gamma], [\ell_j]) \neq 0$$

其中 $\hat{}i$ 表示 Σ_g的（代数）交叉形式。特别地，$T_{\ell_i}(\gamma)$ 或 $T_{\ell_j}(\gamma)$ 的任何幂都不包含在 $\langle\gamma\rangle \leq \pi_1(\Sigma_g, p)$ 中。

∂P_γ 在 $\partial\mathbb{H}^2$ 上的同胚与 $\mathbb{H}^2 \to \Sigma_g$ [FM12, p. 150-151] 的一个甲板变换的作用一致，因此恰有两个不动点：一个吸引点 p_1 和一个排斥点 p_2。由于 P_γ与 $T_{\ell_{r_1}} \ldots T_{\ell_1}$ 可交换，同胚 $\partial(T_{\ell_{r_1}} \ldots T_{\ell_1})$ 和$\partial(T_{\ell_{r_1+r_2}} \ldots T_{\ell_{r_1+1}})$也必定固定每个点 p_1、$p_2 \in \partial\mathbb{H}^2$。由于 $T_{\ell_i} P_\gamma T_{\ell_i}^{-1}$ 的任何幂都不包含于 $\langle P_\gamma\rangle$中，同胚 $\partial(T_{\ell_i} P_\gamma T_{\ell_i}^{-1})$至少会移动点 p_1 或 p_2。换言之，∂T_{ℓ_i}至少会使点 p_1 或 p_2 顺时针移动；∂T_{ℓ_j}也同样如此。因此，序列 $\partial T_{\ell_1}, \ldots, \partial T_{\ell_{r_1}}$和 $\partial T_{\ell_{r_1}}, \ldots, \partial T_{\ell_{r_1+r_2}}$ 都会使点 p_1 绕 $\partial\mathbb{H}^2$ 顺时针移动至少一周。因此，序列 $\partial T_{\ell_1}, \ldots, \partial T_{\ell_{r_1+r_2}}$的旋转数 $c \in \mathbb{N}$ 至少为 2，且 $[\sigma_k]^2 = -c \leq -2$。

6. Symplectic forms

在本节中，固定 $g \geq 2$，并令 M^1和 M^2表示这些 4 维流形

$$M^1 := \Sigma_g \times S^2, \qquad M^2 := \Sigma_g \tilde{\times} S^2.$$

本节的目标是证明，定义 5.7 中的 Lefschetz 铅笔 $\pi_{n,\,i}\colon\ M_n^i - B_n^i \to S^2$ 对于所有 M^i，在某个微分同胚 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 下，$M_n^i \cong M^i$都关于 $M_n^i - B_n^i \to S^2$ 上的某个共同辛形式是辛的。

定理 6.1。设 $i = 1$ 或 $i = 2$。存在一个辛形式 ω 于 M^i 上，以及微分同胚$\Psi_n^i\colon\ M_n^i \to M^i$，使得对于所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\pi_{n,\,i}\colon\ M_n^i - B_n^i \to S^2$ 的所有纤维的不可约分支的光滑轨迹，都是 $(M_n^i, (\Psi_n^i)^*\omega)$ 的辛子流形。此外，$\pi_{n,\,i}$ 的正则纤维F_n 在 $H_2(M^i;\ \mathbb{Z})$ 中同调，即在 Ψ_n^i 下，

$$(\Psi_n^i)_*([F_n]) = (\Psi_m^i)_*([F_m]) \in H_2(M^i;\mathbb{Z})$$

对所有 $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。

关于 Lefschetz 纤维化的下述定理 $\pi_n\colon\ X \to S^2$ 也将由定理 6.1 的证明得出。

定理 6.2。在 $(\Sigma_g \times S^2)\#4\overline{\mathbb{CP}^2}$ 上存在一个辛形式 ω，并且对每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在微分同胚 $\Phi_n\colon X_n \to (\Sigma_g \times \overline{S^2})\#4\overline{\mathbb{CP}^2}$，使得 $\pi_n\colon X_n \to S^2$ 的所有纤维的不可约分支的光滑轨迹都是 $(X_n, \Phi_n^*\omega)$ 的辛子流形。此外，π_n 的正则纤维 F_n 在 $H_2((\Sigma_g \times S^2)\#4\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{Z})$ 中在 Φ_n 下均同调，即

$$(\Phi_n)_*([F_n]) = (\Phi_m)_*([F_m]) \in H_2((\Sigma_g \times S^2)\#4\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{Z})$$

对所有 $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。

我们先概述定理 6.1 和 6.2 的证明。

(1) 微分同胚 $\Phi_n\colon X_n \to M^i\#4\overline{\mathbb{CP}^2}$ 将正则纤维（实际上也将可约奇异纤维的不可约分支）映到同一个同调类，其存在性可由对定理 5.6 中所得微分同胚作更细致的分析得出。定理 6.3 完成了这一工作，依据的是 Liu [Liu96] 的研究，以及 Li–Li [LL97]关于纤维曲面的最小亏格计算。吹下后得到微分同胚 Ψ_n^i。**(2)** 由于 X_n 是纤维曲面的吹起，只需构造适当的辛形式 ω_n，使得 X_n上的 $[(\Phi_n^{-1})^*(\omega_n)] \in H^2(M^i\#4\overline{\mathbb{CP}^2};\ \mathbb{Z})$ 不依赖于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$；这由 Lalonde–McDuff [LM96] 和 McDuff [McD96]的研究可知。**(3)** 首先要通过 Gompf–Thurston 构造，在 X_0 中构造合适的辛形式 ω_0。将 X_0（具有四个截面 $\sigma_{1,i}^0, \sigma_{2,i}^0, \sigma_{3,i}^0, \sigma_{4,i}^0$）表示为两个纤维化的纤维和，它们分别定义在 S^2 的两个半球上，并沿赤道 E粘合；令 A 为 E的一个环带邻域。理解 $\pi_0^{-1}(A)$ 的（上）同调，有助于控制 ω_0 在 A上的取值。此外，我们构造 ω_0，使其在四个（-1）截面$\sigma_{1,i}^0$, $\sigma_{2,i}^0, \sigma_{3,i}^0, \sigma_{4,i}^0$ 附近为标准辛形式，从而确保吹下后的 M_0^i 中纤维仍为辛子流形。这些工作均在定理 6.9 和 6.10 中完成。**(4)** 最后，为了构造形式 ω_n，我们利用 X_n 通过部分共轭得到的描述：只需找出扭转映射类 $f \in \mathcal{I}_{2g}$ 的一个代表元 φ，使其诱导的丛辛同胚 $(\pi_0^{-1}(A)\ \omega_0|_A)$ 在截面 $\sigma_{1,i}^0$, $\sigma_{2,i}^0, \sigma_{3,i}^0, \sigma_{4,i}^0$附近作用为恒等元。事实上，我们在定理 6.8 中同时构造了 $\omega_0|_A$ 的“纤维部分”和 φ（并在后文作了讨论）。关键观察是，定理 3.3 和定理 3.4 中描述的映射类 $\tilde{h}_i \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g}^4)$ 是可约的。

6.1. **（上）同调计算。** 以下引理确定了 π_n 的各种纤维类和截面类的同调类： $X_n \to S^2$ 在 H_2（X_n；$\mathbb{Z}$）。我们还将指定一个上同调类 $[\nu_i] \in H^2(X_0;\ \mathbb{R})$，它将作为 Gompf–Thurston 构造辛形式 ω_0 于 X_0上的关键输入。下面回顾一下，$\sigma^n_{j,\ i}$：对于 $S^2 \to X_n$，以及对于 $1 \le j \le 4$，还有 $i = 1,\ 2$ 是定义 5.4 中指定的 -1-截面π_n。5.4。

引理 6.3. 对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，令 $F^n_1 \cup F^n_2$与 $F^n_3 \cup F^n_4$分别表示 π_n： $X_n \to S^2$ 中对应于消失圈 C^i_1 与 $\tilde{f}^n(C^i_2)$ 的两条可约奇异纤维。令 F^n_1、F^n_3与 F^n_2、F^n_4分别表示图 4中相应消失圈左侧与右侧所绘的不可约分支。令 F^n 表示 π_n的任意正则纤维。

(a) 对每个 $i = 1,\ 2$，存在一个微分同胚

$$\Phi^i_n : X_n \to M^i \# 4\overline{\mathbb{CP}^2}$$

使得

$$(\Phi^i_n)_*([F^n]) = (\Phi^i_0)_*([F^0]), \qquad (\Phi^i_n)_*([F^n_j]) = (\Phi^i_0)_*([F^0_j]), \qquad (\Phi^i_n)_*([\sigma^n_{j,i}]) = E_j$$

对所有 $1 \le j \le 4$，其中 E_1，……，$E_4 \in H_2$（$\overline{M^i}\#4\mathbb{CP}^2$；$\mathbb{Z}$）表示来自每个直和项 $\mathbb{CP}^2$的例外除子。

(b) 对于每个 $i = 1,\ 2$，同调类 $[F^n_1]$, $[F^n_2]$, $[\sigma^n_{1,i}]$, $[\sigma^n_{2,i}]$, $[\sigma^n_{3,i}]$和 $[\sigma^n_{4,i}]$张成 $H_2(X_n;\ \mathbb{R})$，即

$$H_2(X_n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}\{[F^n_1],[F^n_2],[\sigma^n_{1,i}],[\sigma^n_{2,i}],[\sigma^n_{3,i}],[\sigma^n_{4,i}]\} \cong \mathbb{R}^6.$$

(c) 对于每个 $i = 1,\ 2$，存在一个上同调类 $[\nu_i] \in H^2(X_0;\ \mathbb{R})$，使得

$$\langle [\nu_i],[F^0]\rangle = 1, \qquad \langle [\nu_i],[F^0_j]\rangle > 0, \qquad \langle [\nu_i],[\sigma^0_{j,i}]\rangle = 0$$

对于所有 $1 \le j \le 4$。

证明。固定 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 和 $i = 1,\ 2$。回顾命题 5.6，将 X_n 中的截面 $\sigma^n_{1,\ i}$,$\sigma^n_{2,\ i}$, $\sigma^n_{3,\ i}$和 $\sigma^n_{4,\ i}$ 吹下，可得到一个微分同胚

$$\Phi^i_n : X_n \to M^i \# 4\overline{\mathbb{CP}^2}$$

对于所有 $1 \le j \le 4$，都有 $(\Phi^i_n)([\sigma^n_{j,i}]) = E_j$。连通和结构确定了一个正交分解

$$H_2(M^i \# 4\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{Z}) \cong H_2(M^i;\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}\{E_1,E_2,E_3,E_4\}.$$

存在一个微分同胚 $M^i \to M^i$，其在 $H_2(M^i;\ \mathbb{Z})$ 上的作用为取负，依据 [LL97，定理 3]。因此，存在一个微分同胚 $\Psi^i \in$ 微分同胚群$^+(M^i\#4\overline{\mathbb{CP}^2})$，使得

$$\Psi^i_* = -\operatorname{Id} \oplus \operatorname{Id} : H_2(M^i;\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}\{E_1,E_2,E_3,E_4\} \to H_2(M^i;\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$$

由 [Wal64，引理 2]。

Lefschetz 纤维化的可约纤维的不可约分支自交数为 -1。由于F^n_1与 F^n_2横截相交于一点（同理，F^n_3与 F^n_4），

$$Q_{X_n}([F^n_j],[F^n_j]) = -1, \qquad Q_{X_n}([F^n_1],[F^n_2]) = Q_{X_n}([F^n_3],[F^n_4]) = 1, \tag{6}$$

对所有 $1 \le j \le 4$，且 $Q_{X_n}([F^n_j],\ [F^n_k]) = 0$对所有其他配对 $1 \le j,\ k \le 4$。交数$Q_{X_n}([F^n_j],\ [\sigma^n_{k,i}])$对于 $1 \le j,\ k \le 4$由图 4给出。利用这些交数计算，我们分别在每种情况下证明 (a)、(b)、(c) 以及 $i = 1$ 和 $i = 2$。

情形*1*： $i = 1$。*</style}*设 并考虑 。存在 ， α_2， α_3， $\alpha_4 \in H_2(M^1;\ \mathbb{Z})$，使得

$$(\Phi^1_n)_*[F^n_1] = \alpha_1 - E_4, \qquad (\Phi^1_n)_*[F^n_2] = \alpha_2 - E_1 - E_2 - E_3,$$
$$(\Phi^1_n)_*[F^n_3] = \alpha_3 - E_3, \qquad (\Phi^1_n)_*[F^n_4] = \alpha_4 - E_1 - E_2 - E_4.$$

那么（6）意味着

$$Q_{M^1}(\alpha_1,\alpha_1)=0,\qquad Q_{M^1}(\alpha_2,\alpha_2)=2,\qquad Q_{M^1}(\alpha_1,\alpha_2)=1.$$

令 $[\Sigma_g]$, $[S^2]\in H_2(M^1;\mathbb{Z})$ 表示各因子的同调类。满足所给交叉模式的同调类对 α_1, $\alpha_2\in H_2(M^1;\mathbb{Z})$ 只有

$$(\alpha_1,\alpha_2)=\pm([\Sigma_g],[\Sigma_g]+[S^2]),\pm([S^2],[\Sigma_g]+[S^2]).$$

对于 $1\le j\le 4$，将截面 σ_j^n,1 吹下后，微分同胚 Φ_n^1 诱导出一个微分同胚$M_n^1\to M^1=\Sigma_g\times S^2$，它将 $[F^n]\in H_2(M_n^1;\mathbb{Z})$ 映到 $\alpha_1+\alpha_2\in H_2(M^1;\mathbb{Z})$；这里我们也用$F^n\subseteq M_n^1$表示吹下 $X_n\to M_n^1$ 后正则纤维 $F^n\subseteq X_n$ 的像。由于 $F^n\subseteq M_n^1$ 是 M_n^1 上亏格为 $2g$ 的 Lefschetz 铅笔结构的纤维，因此存在一个辛形式定义在 M_n^1 上，使得F^n 成为辛子流形。[1] 根据辛 Thom 猜想的证明 [OS00b，定理 1.1],，$[F^n]\in H_2(M_n^1;\mathbb{Z})$ 的光滑最小亏格（因而 $\alpha_1+\alpha_2\in H_2(M^1;\mathbb{Z})$ 的光滑最小亏格）为$2g$。然而，根据 Li–Li [LL97，定理 1]的结果，$\pm(2[S^2]+[\Sigma_g])\in H_2(M^1;\mathbb{Z})$ 的光滑最小亏格为 g。因此，(α_1,α_2) 不等于 $\pm([S^2],[\Sigma_g]+[S^2])$。对 (α_3,α_4) 应用同样的论证，并注意到$[F^n]=[F_1^n]+[F_2^n]=[F_3^n]+[F_4^n]$，我们得出

$$(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_3,\alpha_4)=\pm([\Sigma_g],[\Sigma_g]+[S^2]).$$

在必要时用 $\Psi^1\circ\Phi_n^1$ 替换 Φ_n^1 后，

$$(\Phi_n^1)_*([F_j^n])=(\Phi_0^1)_*([F_j^0])$$

对所有 $1\le j\le 4$。这证明了 (a) 对 $i=1$。

类 α_1 和 α_2 构成 $H_2(M^1;\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^2$ 的一个 $\mathbb{R}$-基，因此

$$\{(\Phi_n^1)_*([F_1^n]),(\Phi_n^1)_*([F_2^n]),E_1,E_2,E_3,E_4\}$$

构成 $\mathbb{R}$-基 $H_2(M^1\#4\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{R})$。注意到 $(\Phi_n^1)_*([\sigma_{j,1}^n])=E_j$ 对所有 $1\le j\le 4$ 即可完成 (b) 关于 $i=1$ 的证明。

最后，令 $\beta\in H^2(M^1\#4\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{R})$ 为任意一个满足以下条件的类

$$\langle\beta,\alpha_1\rangle=\langle\beta,\alpha_3\rangle=\frac{1}{2},\qquad\langle\beta,\alpha_2\rangle=\langle\beta,\alpha_4\rangle=\frac{1}{2},\qquad\langle\beta,E_j\rangle=0\text{ for all }1\le j\le 4$$

该类存在是因为 α_1、α_2、E_1、……、E_4 在 $H_2(M^1\#4\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{R})$ 中线性无关。令 $[\nu_1]=(\Phi_0^1)^*(\beta)$，计算可得，对所有 $1\le j\le 4$，

$$\langle[\nu_1],[F_j^0]\rangle=\langle[\nu_1],[F_j^0]\rangle=\frac{1}{2},\qquad\langle[\nu_1],[F^0]\rangle=\langle[\nu_1],[F_1^0]+[F_2^0]\rangle=1,\qquad\langle[\nu_1],[\sigma_{j,1}^0]\rangle=0,$$

这证明了(c) 对于 $i=1$。

情形 2： $i=2$。设 $i=2$并考虑 $M^2=\Sigma_g\tilde{\times}S^2$。存在 α_1、α_2、α_3、$\alpha_4\in H_2(M^2;\mathbb{Z})$ 使得

$$(\Phi_n^2)_*[F_1^n]=\alpha_1,\qquad(\Phi_n^2)_*[F_2^n]=\alpha_2-E_1-E_2-E_3-E_4,$$
$$(\Phi_n^2)_*[F_3^n]=\alpha_3-E_3-E_4,\qquad(\Phi_n^2)_*[F_4^n]=\alpha_4-E_1-E_2,$$

于是（6）意味着

$$Q_{M^2}(\alpha_1,\alpha_1)=-1,\qquad Q_{M^2}(\alpha_2,\alpha_2)=3,\qquad Q_{M^2}(\alpha_1,\alpha_2)=1,$$
$$Q_{M^2}(\alpha_3,\alpha_3)=1,\qquad Q_{M^2}(\alpha_4,\alpha_4)=1,\qquad Q_{M^2}(\alpha_3,\alpha_4)=1.$$

[1]可以构造一个相容的辛形式 ω_n，使其在 X_n 截面附近为标准形式，并且与纤维化相容（见定理 6.10(1)）。M_n^1 上的微分形式是 ω_n [MP94第 5]节中所述对象的吹下。

令 $[\Sigma_g] \in H_2(M^2;\mathbb{Z})$ 表示自交数为 1 的 S^2-丛 $M^2 \to \Sigma_g$ 的一个截面的类，并令 $[S^2] \in H_2(M^2;\mathbb{Z})$ 表示纤维的类。满足所给交叉模式的类对仅有 α_1, $\alpha_2 \in H_2(M^2;\mathbb{Z})$ 和 α_3, $\alpha_4 \in H_2(M^2;\mathbb{Z})$

$$(\alpha_1,\alpha_2) = \pm([\Sigma_g]-[S^2], -3[\Sigma_g]+[S^2]),\ \pm([\Sigma_g]-[S^2],[\Sigma_g]+[S^2])$$
$$(\alpha_3,\alpha_4) = \pm([\Sigma_g],[\Sigma_g])$$

通过对 $1 \le j \le 4$ 对应的截面 σ_j^n 进行吹下，微分同胚 Φ_n^2 诱导出一个微分同胚 $M_n^2 \to M^2 = \Sigma_g \tilde{\times} S^2$，将 $[F_2^n]$ 映到 α_2；这里我们也用 $F_2^n \subseteq M_n^2$ 表示亏格为 g 的曲面 $F_2^n \subseteq X_n$ 在吹下 $X_n \to M_n^2$ 下的像。根据 Li–Li [LL97，定理 2]，$\pm(-3[\Sigma_g]+[S^2]) \in H_2(M^2;\mathbb{Z})$ 的光滑最小亏格为 $3g-1$。因此，$\alpha_2 \neq \pm(-3[\Sigma_g]+[S^2])$，因为 α_2 可由一个光滑的亏格为 g 的曲面表示，且对所有 $g \ge 2$ 都有 $g < 3g-1$。结合 $[F^n] = [F_1^n]+[F_2^n] = [F_3^n]+[F_4^n]$ 这一事实，我们得出

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \pm([\Sigma_g]-[S^2],[\Sigma_g]+[S^2],[\Sigma_g],[\Sigma_g]).$$

因此，经过可能的替换 Φ_n^2 为 $\Psi^2 \circ \Phi_n^2$，

$$(\Phi_n^2)_*[F_j^n] = (\Phi_0^2)_*[F_j^0]$$

对所有 $1 \le j \le 4$。这证明了 (a) 对于 $i = 2$。

类 α_1 和 α_2 构成 $H_2(M^2;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$的一个 $\mathbb{R}$-基，因此

$$\{(\Phi_n^2)_*[F_1^n], (\Phi_n^2)_*[F_2^n], E_1, E_2, E_3, E_4\}$$

构成 $\mathbb{R}$-基 $H_2(M^2\#4\overline{\mathbb{CP}}^2;\mathbb{R})$。注意到，对所有 $1 \le j \le 4$ $\Phi_n^2)_*[\sigma_{j,2}^n] = E_j$，即可完成 (b) 对于 $i = 2$ 的证明。

设 $\beta \in H^2(M^2\#4\overline{\mathbb{CP}}^2;\mathbb{R})$ 为任意一个满足下列条件的类：

$$\langle\beta,\alpha_1\rangle = \frac{1}{4}, \qquad \langle\beta,\alpha_3\rangle = \langle\beta,\alpha_4\rangle = \frac{1}{2}, \qquad \langle\beta,E_j\rangle = 0 \text{ for all } 1 \le j \le 4$$

它存在是因为 α_1, α_3, E_1, ..., E_4 在 $H_2(M^2\#4\overline{\mathbb{CP}}^2;\mathbb{R})$ 中线性无关。令 $[\nu_2] = (\Phi_0^2)^*(\beta)$，计算可得，对所有 $1 \le j \le 4$，均有

$$\langle[\nu_2],[F_1^0]\rangle = \frac{1}{4}, \qquad \langle[\nu_2],[F_2^0]\rangle = \frac{3}{4}, \qquad \langle[\nu_2],[F_3^0]\rangle = \langle[\nu_2],[F_4^0]\rangle = \frac{1}{2},$$
$$\langle[\nu_2],[F^0]\rangle = \langle[\nu_2],[F_1^0]+[F_2^0]\rangle = 1, \qquad \langle[\nu_2],[\sigma_{j,2}^0]\rangle = 0,$$

这就证明了(c) 对于 $i = 2$。 □

*Re*标记6.4（**封帽与遗忘点**）。回忆一下 Mod(Σ 中的映射类 $_{2g}^{4}$)

$$\tilde{h}_i = T_{B_{0,2}^i} T_{B_{1,2}^i} \dots T_{B_{2g,2}^i} T_{C_2^i}, \qquad \tilde{f} = T_{\tilde{x}} T_{\tilde{y}}^{-1} T_{\tilde{h}_i(\tilde{x})} T_{\tilde{h}_i(\tilde{y})}^{-1}$$

˜ ˜在引理 3.4 中定义。我们也用 h_i, $f \in \text{Mod}(\Sigma_{2g,\ 4})$ 表示同态 Mod(Σ_{2g}^4) →Mod($\Sigma_{2g,\ 4}$) 下的像；该同态通过用带一个标记点的圆盘封住 Σ_{2g}^4 的四个边界分支。在本节余下部分中，我们固定 $i = 1$ 或 $i = 2$，并在记号中省略其下标，即令

$$M := M^i, \quad [\nu] := [\nu_i] \in H^2(X_0;\mathbb{R}), \quad \sigma_j^n := \sigma_{j,i}^n \text{ for } 1 \le j \le 4, \qquad \tilde{h} := \tilde{h}_i \in \text{Mod}(\Sigma_{2g,4}).$$

有时，考虑像会更方便

$$\hat{h} \in \text{Mod}(\Sigma_{2g,2}) \tag{7}$$

˜的 $h \in$ 映射类群($\Sigma_{2g,4}$) 在遗忘映射 Mod($\Sigma_{2g,4}$) → Mod($\Sigma_{2g,2}$) 下的像；该映射遗忘标记点 ˆp_3, p_4。我们注意到，$h \in$ 映射类群($\Sigma_{2g,2}$) 与 i 无关，且其阶为 2；参见附录 A.5 中的推论 A。

回忆一下，Lefschetz 纤维化 π_0 由以下单值化分解定义

$$T_{B_0}T_{B_1}\dots T_{B_{2g}}T_C T_{B_0}T_{B_1}\dots T_{B_{2g}}T_C = 1 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g})$$

在定义 3.2 中。令 $q_{4g+4},\dots,q_1 \in S^2$ 表示 $\pi_0\colon X_0 \to S^2$ 的奇异值，它们分别对应消失圈 $B_0, B_1, \dots, B_{2g}, C, B_0, B_1, \dots, B_{2g}, C$。令 $\gamma_1,\dots,\gamma_{4g+4} \in \pi_1(S^2 - \{q_1,\dots,q_{4g+4}\}, b)$ 为所选生成元，其中每个 γ_i 都是围绕 q_i 的环路，由此得到上述关于 π_0 的单值化分解。

如第 2.2 节所述，写作 $S^2 = D_1 \cup_\partial D_2$，使得基点 $b \in S^2$ 包含于 $E := \partial D_1$并且环路 γ_1、…、γ_{2g+2}包含于 D_1，环路 γ_{2g+3}、……、γ_{4g+4}包含于D_2，且

$$[E] = \gamma_1 \dots \gamma_{2g+2} \in \pi_1(S^2 - \{q_1,\dots,q_{4g+4}\}, b).$$

换句话说，存在一个在 S上的 Σ_{2g}-丛同构

$$\pi_0^{-1}(E) \xrightarrow{\sim} M_\eta$$

对于任意代表元 $\eta \in$微分同胚群$^+(\Sigma_{2g})$ $h = T_{B_0}T_{B_1}\dots T_{B_{2g}}T_C \in$映射类群$(\Sigma_{2g})$（参见定理 3.1）。

我们先记录$\pi_0^{-1}(E)$的同调的一个初等计算。

引理 6.5。设 $\eta \in$ 微分同胚群$^+(\Sigma_{2g})$ 是一个阶为2 的微分同胚，代表 $h \in$ 映射类群(Σ_{2g})。对于任意一组简单闭曲线 $\ell_1,\dots,\ell_{2g} \subseteq \Sigma_{2g}$，它们共同构成 $\mathbb{R}$的一组 $H_1(\Sigma_{2g};\mathbb{R})^{\langle\eta\rangle}$基，其同调类

$$[\Sigma_{2g}],\quad [T_{\ell_1}],\dots,[T_{\ell_{2g}}]$$

构成一个 $\mathbb{R}$-基，其中 $[\Sigma_{2g}]$ 表示 $M_\eta \to S^1$ 的纤维类，而 T_{ℓ_i} 是环

$$T_{\ell_i} = \ell_i \times [0,1] \cup \eta(\ell_i) \times [0,1]$$

对每个 $i = 1$、……、$2g$。特别是，

$$H_2(M_\eta;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2g+1}.$$

证明。我们首先证明 $H_1(\Sigma_{2g};\ \mathbb{R})^{\langle\eta\rangle}$ 是 $2g$维的。考虑定理 $h \in$ 3.1 中对 Σ_{2g}Mod() 的描述，即图2所示对合的映射类。该描述表明，对所有 $1 \le i \le g$，都有

$$h(a_i - a_{2g+1-i}) = a_i - a_{2g+1-i}, \qquad h(a_i + a_{2g+1-i}) = -(a_i + a_{2g+1-i}),$$
$$h(b_i - b_{2g+1-i}) = b_i - b_{2g+1-i}, \qquad h(b_i + b_{2g+1-i}) = -(b_i + b_{2g+1-i}),$$

其中同调类 a_i、$b_i \in H_1(\Sigma_{2g};\ \mathbb{Z})$ 如图 5所示。集合

$$\{a_i - a_{2g+1-i},\ a_i + a_{2g+1-i},\ b_i - b_{2g+1-i},\ b_i + b_{2g+1-i} : 1 \le i \le g\}$$

是 $\mathbb{R}(\Sigma_{2g};\mathbb{R})$ 的一个 H_1-基，因此

$$H_1(\Sigma_{2g};\mathbb{R})^{\langle h\rangle} = \mathbb{R}\{a_i - a_{2g+1-i},\ b_i - b_{2g+1-i} : 1 \le i \le g\} \cong \mathbb{R}^{2g}.$$

接下来，我们计算 $H_2(M_\eta;\mathbb{R})$。考虑双重覆盖

$$p : \Sigma_{2g} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to M_\eta$$

它是 $\Sigma_{2g} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上如下二阶作用的商空间

$$\eta_0 : (x,t) \mapsto \left(\eta(x), t + \frac{1}{2}\right) \in M_\eta = (\Sigma_{2g} \times [0,1])/((\eta(x),0) \sim (x,1)).$$

通过转移，限制映射

$$p_* : H_2(\Sigma_{2g} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{R})^{\langle\eta_0\rangle} \to H_2(M_\eta;\mathbb{R})$$

是一个同构。固定子空间 $H_2(\Sigma_{2g} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{R})^{\langle\eta_0\rangle}$ 具有一个 $\mathbb{R}$-基

$$\{[\Sigma_{2g}], [\ell_i \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}] : 1 \le i \le 2g\}.$$

计算得出 $p_*([\Sigma_{2g}]) = [\Sigma_{2g}] \in H_2(M_\eta;\mathbb{R})$ 和

$$p_*([\ell_i \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}]) = [T_{\ell_i}] \in H_2(M_\eta;\mathbb{R}).$$

□

利用引理 6.5，以下引理计算了由包含诱导的上同调映射$\pi_0^{-1}(E) \hookrightarrow X_0$。

引理 6.6. 令 $\iota : \pi_0^{-1}(E) \hookrightarrow X_0$ 表示包含。 $\iota^* \colon H^2(X_0;\mathbb{R}) \to H^2(\pi_0^{-1}(E);\mathbb{R})$的像是 $\mathbb{R}\{\mathrm{PD}([\sigma(E)])\}$，其中 $\sigma : S^2 \to X_0$ 是 $\pi_0 \colon X_0 \to S^2$的任意截面。

证明。 将 $X_0 = Y_1 \cup_{\pi_0^{-1}(E)} Y_2$ 写作

$$Y_1 = \pi_0^{-1}(D_1), \quad Y_2 = \pi_0^{-1}(D_2).$$

由于 Y_i 是一个亏格为$2g$ 的 Lefschetz 纤维化，其定义在 D^2 上，对每个 $i = 1, 2$，因此它是有限个 2-手柄的并$D^2 \times D^2$ 粘接到 $\Sigma_{2g} \times D^2$上，每个手柄的粘接区域为 $D^2 \times S^1$ [GS99，第 8 节。2]。存在一个形如

$$H^2(\sqcup_{j=1}^m D^2 \times S^1) \to H^3(Y_i) \to H^3(\Sigma_{2g} \times D^2) \oplus H^3(\sqcup_{j=1}^m (D^2 \times D^2))$$

对于某个 $m \geq 0$，这意味着对每个 $i = 1, 2$。此外，$H^3(Y_i;\mathbb{R}) = 0$，$H^3(X_0;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2g}$，因为根据命题 5.2，$X_0$ 与 $(\Sigma_g \times S^2)\#4\overline{\mathbb{CP}}^2$ 微分同胚；并且根据引理 6.5，$H^2(\pi_0^{-1}(E);\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2g+1}$。将这三项计算与关于 $X_0 = Y_1 \cup_{\pi_0^{-1}(E)} Y_2$ 的 Mayer–Vietoris 序列结合，可得

$$H^2(X_0;\mathbb{R}) \xrightarrow{(j_1)^* \oplus (j_2)^*} H^2(Y_1;\mathbb{R}) \oplus H^2(Y_2;\mathbb{R}) \xrightarrow{(k_1)^* - (k_2)^*} \underbrace{H^2(\pi_0^{-1}(E);\mathbb{R})}_{\cong \mathbb{R}^{2g+1}} \to \underbrace{H^3(X_0;\mathbb{R})}_{\cong \mathbb{R}^{2g}} \to 0$$

其中 $j_i \colon Y_i \hookrightarrow X_0$ 和 $k_i \colon \pi_0^{-1}(E) \hookrightarrow Y_i$ 是 $i = 1$的包含映射，2，且满足 $\iota = j_i \circ k_i$ 对 $i = 1, 2$。因此，$(k_1)^*$ 的像（从而 ι^* 的像）至多是一维的。

注意到

$$\iota^*(\mathrm{PD}([\sigma(S^2)])) = \mathrm{PD}([\sigma(E)]),$$

其中，PD([$\sigma(S^2)$]) 和 PD([$\sigma(E)$]) 分别表示 $[\sigma(S^2)]$and $[\sigma(E)]$ 在 X_0 和 $\pi_0^{-1}(E)$ 中的庞加莱对偶。类 PD([$\sigma(E)$]) 非零（例如，因为 $\sigma(E)$ 与纤维 F 在 $\pi_0^{-1}(E)$ 中横截相交一次），因此 PD([$\sigma(E)$]) 张成了 ι^* 的像，即

$$\mathrm{im}(\iota^*) = \mathbb{R}\{\mathrm{PD}([\sigma(E)])\} \subseteq H^2(\pi_0^{-1}(E);\mathbb{R}). \qquad \square$$

6.2. **Gompf–Thurston 构造**(X_n，ω_n)。本小节旨在证明以下命题，该命题构造了 X_n 上一个合适的辛形式 ω_n。以下构造的一个关键点是，对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，上同调类 $[\omega_n] \in H^2(X_n;\mathbb{R})$ 都能得到良好控制。

命题 6.7。对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，令 $F_1^n \cup F_2^n$和 $F_3^n \cup F_4^n$表示 π_n的两个可约奇异纤维：$X_n \to S^2$，其中 F_1^n，F_2^n，F_3^n，F_4^n表示引理6.3中定义的不可约分支。对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在一个 ω_n 上的辛形式 X_n，满足以下性质：

(a) π_n：$X_n \to S^2$ 的各纤维的不可约分支的光滑部分都是(X_n, ω_n)的辛子流形。*(b)* 对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 以及所有 $1 \leq j \leq 4$，

$$\langle [\omega_n], [F_j^n] \rangle = \langle [\omega_0], [F_j^0] \rangle.$$

特别地，$\langle [\omega_n], [F_j^n] \rangle$ 与 n无关。

(c)（截面附近的标准情形）对每个 $1 \leq j \leq 4$，存在 σ_j^n（S^2）的开管状邻域N_j^n，使得 $\pi_n|_{N_j^n}$：$N_j^n \to S^2$ 同构于典范线丛$\pi_L \colon L \to \mathbb{CP}^1$，该同构由保定向微分同胚 $\phi_j^n \colon N_j^n \to L$实现。此外，对于足够小的邻域 σ_j^n（S^2）$\subseteq V_j^n \subseteq N_j^n$，

$$\omega_n|_{V_j^n} = (\phi_j^n)^*(a_j \pi_{\mathbb{C}^2}^* \omega_{\mathbb{C}^2} + \pi_L^* \omega_{S^2})$$

其中 $\pi_{\mathbb{C}^2}\colon L\to\mathbb{C}^2$ 是标准吹下映射，$\omega_{\mathbb{C}^2}$ 是$\mathbb{C}^2$上的标准辛形式，ω_{S^2} 是 S^2上的 *Fubini–Study* 形式，且 a_j 是某个不依赖于 n的正常数。特别地，所有截面 σ_j^n 都是辛的，并且

$$\langle[\omega_n],[\sigma_j^n(S^2)]\rangle=\pi$$

与 n 无关。

为了在$\pi_0^{-1}(E)\subseteq X_0$ 周围以及每个截面 σ_j^n周围显式构造合适的微分形式，我们需要找到单值化 $h\in\mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,2})$ 和 $h\in\mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,4})$ 的良好代表元微分同胚，以及共轭映射类 $f\in\mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,4})$ 的相容代表元。以下命题实现了这一点，其证明见附录B。

命题 6.8。设 α、β、γ 和 δ 是 $\Sigma_{2g,4}$ 中分别代表同伦类 $\tilde{x}$、$\tilde{y}$、$h(\tilde{x})$ $h(\tilde{y})$ 的互不相交曲线。存在

- 一个单位面积辛形式 θ 在 Σ_{2g} 上，
- (Σ_{2g},θ) 的辛同胚 $\varphi\in$ 微分同胚群$^+(\Sigma_{2g,4})$ 和 $\hat{\eta}\in$ 微分同胚群$^+(\Sigma_{2g,2})$，其 $[\varphi]=\tilde{f}\in$ 映射类群$(\Sigma_{2g,4})$，$[\hat{\eta}]=\hat{h}\in$映射类群$(\Sigma_{2g,2})$，以及 $\hat{\eta}^2=Id_{\Sigma_{2g,2}}$，
- 一个同伦 $\kappa_t\colon\Sigma_{2g,2}\times[0,1]\to\Sigma_{2g,2}$ 与 $\kappa_0=\mathrm{Id}_{\Sigma_{2g,2}}$，
- 由 $W=W_\alpha\sqcup W_\beta\sqcup W_\gamma\sqcup W_\delta$ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 在 $\Sigma_{2g,4}$中的管状邻域构成的不交并，以及
- 由 $O=O_1\sqcup O_2\sqcup O_3\sqcup O_4$ p_1,p_2,p_3 和 p_4的邻域构成的不交并

满足以下性质：

(a) 辛同胚 φ 的支集包含于 W，即

$$\varphi|_{\Sigma_{2g,4}-W}=\mathrm{Id}\,|_{\Sigma_{2g,4}-W}.$$

(b) 辛同胚 φ 与$\hat{\eta}$ 可交换，即

$$\varphi\circ\hat{\eta}=\hat{\eta}\circ\varphi.$$

(c) 微分同胚 $\tilde{\eta}:=\hat{\eta}\circ\kappa_1$ 逐点固定 O，并满足

$$[\tilde{\eta}]=\tilde{h}\in\mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,4}).$$

(d) 对所有 $t\in[0,1]$

$$\kappa_t(O)\cap W=\emptyset.$$

特别地，$W\cap O=\emptyset$。

赤道附近的同构 *E.* 在本节余下部分，固定命题 6.8 的记号。设 $N\cong E\times(-2,2)$ 为 E 在 S^2 中与 π_0 的奇异值集合不相交的一个管状邻域。收缩 N得到另一个管状邻域 $A\cong E\times(-1,1)$，即 E 在 S^2中的管状邻域。

由 $\tilde{\eta}\in$微分同胚群$^+(\Sigma_{2g,4})$所固定的四个标记点 p_1,p_2,p_3,p_4按下式对 $1\le i\le 4$ 定义了 $M_{\tilde{\eta}}\times(-2,2)\to S^1\times(-2,2)$的截面 $\tilde{s}_i$

$$\tilde{s}_i:(t,s)\mapsto((p_i,t),s)\in M_{\tilde{\eta}}\times(-2,2),\tag{8}$$

其中我们回顾，映射环面 $M_{\tilde{\eta}}$ 等同于

$$M_{\tilde{\eta}}=(\Sigma_{2g,4}\times[0,1])/((\tilde{\eta}(x),0)\sim(x,1)).$$

存在一个 $S^1\times(-2,2)$上的 Σ_{2g}-丛同构

$$\tilde{\mathcal{G}}:\pi_0^{-1}(N)\to M_{\tilde{\eta}}\times(-2,2)\tag{9}$$

它将 π_0 的每个截面 σ_i、$1\le i\le 4$ 映为 $M_{\tilde{\eta}}\times(-2,2)\to S^1\times(-2,2)$的截面 $\tilde{s}_i$。

同伦 $\kappa_t\colon\Sigma_{2g,2}\times[0,1]\to\Sigma_{2g,2}$ 定义了一个 Σ_{2g}-丛映射

$$\mathcal{K}:M_{\tilde{\eta}}\times(-2,2)\to M_{\tilde{\eta}},$$
$$((x,t),s)\mapsto(\kappa_t(x),t).$$

ˆ 最后，将 Σ_{2g}-丛映射 $\mathcal{G}$ 定义为以下复合

$$\hat{\mathcal{G}} := \mathcal{K} \circ \tilde{\mathcal{G}} : \pi_0^{-1}(N) \to M_{\hat{\eta}} \tag{10}$$

由于 κ_t 对所有 $t \in [0,1]$都固定点 p_1， p_2，映射 ˆ $\mathcal{G}$ 分别将 π_0 的截面 σ_1 和 σ_2 映射到 $M_{\hat{\eta}} \to S^1$ 的截面 $\hat{s}_1$ 和 $\hat{s}_2$ ，其中，$\hat{s}_i$ 是由点 p_i 定义的截面，该点被 ˆ$\eta \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma_{2g,\ 2})$ 对 $i = 1,\ 2$ 固定。

在投影 $\mathrm{pr}_1 : \Sigma_{2g} \times \mathbb{R} \to \Sigma_{2g}$ 下， $\theta \in \Omega^2(\Sigma_{2g})$ 的拉回 $\mathrm{pr}_1^*\theta$ 在 $\Sigma_{2g} \times \mathbb{R} \to M_{\hat{\eta}}$的 ˆ 甲板变换下保持不变，因此在 $M_{\hat{\eta}}$ 上诱导出一个闭2-形式 θ，其在每个 $M_{\hat{\eta}} \to S^1$的纤维上限制为辛形式 θ。

ˆ 为了在 Gompf–Thurston 构造中使用微分形式 θ，我们必须确定它在 $H^2(M_{\hat{\eta}};\mathbb{R})$ 中的上同调类。

ˆ**引理 6.9.** 微分形式 θ 的上同调类为

$$[\hat{\theta}] = \mathrm{PD}([\hat{s}_1(S^1)]) \in H^2(M_{\hat{\eta}};\mathbb{R}).$$

ˆ ˆ 证明. 为了确定类 $[\theta]$，我们在 $H_2(M_{\hat{\eta}};\ \mathbb{R})$ 上计算 $[\theta]$。取简单闭曲线 $\ell_1, \ldots, \ell_{2g} \subseteq \Sigma_{2g}$，使它们共同张成 $H_1(\Sigma_{2g};\mathbb{R})^{\langle\hat{\eta}\rangle}$。我们可以假设每条曲线 ℓ_i 都与标记点 $p_1 \in \Sigma_{2g}$ 不相交，该点由 ˆη 固定，并定义截面 $\hat{s}_1 : S^1 \to M_{\hat{\eta}}$。对于每个 ˆ$1 \le i \le 2g$，考虑引理 6.5 中的环面 T_{ℓ_i}。我们断言，对所有$1 \le i \le 2g$， θ 在 T_{ℓ_i} 上均为零。事实上， $T_{\ell_i} \subseteq M_{\hat{\eta}}$ 是

$$\ell_i \times \mathbb{R} \subseteq \Sigma_{2g} \times \mathbb{R}$$

在覆盖 $\Sigma_{2g} \times \mathbb{R} \to M_{\hat{\eta}}$ 下的像。由于 $\mathrm{pr}_1(\ell_i \times \mathbb{R}) = \ell_i \subseteq \Sigma_{2g}$ 是一维的，

$$(\mathrm{pr}_1^*\theta)|_{\ell_i \times \mathbb{R}} = 0.$$

ˆ ˆ 因此 $\theta|_{T_{\ell_i}} = 0$ 也成立，因为 $\mathrm{pr}_1^*\theta$ 在 $\Sigma_{2g} \times \mathbb{R} \to M_{\hat{\eta}}$作用下下降到 θ，而 $\ell_i \times \mathbb{R}$ 下降到 T_{ℓ_i}。换言之，

$$\langle [\hat{\theta}], [T_{\ell_i}] \rangle = 0$$

对所有 $1 \le i \le 2g$ 均成立。

另一方面，

$$\langle [\hat{\theta}], [\Sigma_{2g}] \rangle = \int_{\Sigma_{2g}} \hat{\theta}|_{\Sigma_{2g}} = \int_{\Sigma_{2g}} \theta = 1$$

对 $M_{\hat{\eta}} \to S^1$ 的任意纤维 Σ_{2g}，均成立。

现在我们分析 $\mathrm{PD}([\hat{s}_1(S^1)])$ 在 $H_2(M_{\hat{\eta}};\mathbb{R})$ 上的取值。注意，对于所有 $1 \le i \le 2g$， $T_{\ell_i} \subseteq M_{\hat{\eta}}$ 与 $\hat{s}_1(S^1) \subseteq M_{\hat{\eta}}$ 不相交，因为 $p_1 \in \Sigma_{2g}$ 与 $\ell_i \subseteq \Sigma_{2g}$ 不相交。因此，

$$\langle \mathrm{PD}([\hat{s}_1(S^1)]), [T_{\ell_i}] \rangle = 0$$

对所有 $1 \le i \le 2g$ 均成立。

同样，对于任意纤维 Σ_{2g}， Σ_{2g} 与 $\hat{s}_1(S^1)$ 恰好正向相交一次，因为 $\hat{s}_1$ 是一个截面。因此，

$$\langle \mathrm{PD}([\hat{s}_1(S^1)]), [\Sigma_{2g}] \rangle = 1.$$

最后，引理 6.5 表明类 $[T_{\ell_1}]$、.....、$[T_{\ell_{2g}}]$ 和 $[\Sigma_{2g}]$ 构成 $H_2(M_{\hat{\eta}};\ \mathbb{R})$ 的一组基。微分形式 $[\hat{\theta}]$ 和 $\mathrm{PD}([\hat{s}_1(S^1)])$ 在 $H_2(M_{\hat{\eta}};\ \mathbb{R})$ 的这组基上相等，并且

$$[\hat{\theta}] = \mathrm{PD}([\hat{s}_1(S^1)]) \in H^2(M_{\hat{\eta}};\mathbb{R}).$$ □

下面，我们首先在 X_0 上构造一个辛形式，使其在 $\pi_0^{-1}(E)$ 的某个邻域上的限制与映射 $\varphi \in \mathrm{Symp}(\Sigma_{2g},\theta)$ 良好相容；该映射将在部分共轭构造中用于构造 X_n。为使我们的构造也能与辛收缩程序良好配合，我们在截面附近标准化我们的辛形式。

命题 6.10（Gompf–Thurston 构造，用于 $\pi_0\colon X_0 \to S^2$）。存在一个辛形式ω_0，定义在 X_0 上，使得 $\pi_0\colon X_0 \to S^2$ 的纤维的不可约分支的光滑部分，以及 $\pi_0\colon X_0 \to S^2$ 的截面 σ_1^0、σ_2^0、σ_3^0、σ_4^0，都是 $(X_0,\ \omega_0)$ 的辛子流形。此外，ω_0满足以下性质。

(1)（截面附近的标准形式）对于每个 $1 \le j \le 4$，令 U_j 为 σ_j^0 的互不相交邻域。于是，存在 σ_j^0 的开管状邻域 $N_j \subset U_j$，使得 $\pi_0|_{N_j}\colon N_j \to S^2$ 通过保定向微分同胚 $\phi_j\colon N_j \to L$ 与典范线丛 π_L 同构。此外，对于充分小的邻域 $\sigma_j^0 \subseteq N_j' \subseteq N_j$，

$$\omega_0|_{N_j'} = \phi_j^*(a_j\pi_{\mathbb{C}^2}^*\omega_{\mathbb{C}^2} + \pi_L^*\omega_{S^2})$$

其中，$\pi_{\mathbb{C}^2}\colon L \to \mathbb{C}^2$ 是标准吹下映射，$\omega_{\mathbb{C}^2}$ 是 $\mathbb{C}^2$ 上的标准辛形式，ω_{S^2} 是 S^2 上的 ***Fubini–Study*** 形式，而 a_j 是某个正实数。

(2)（标准扭转区域上的形式）ω_0 在 $\pi_0^{-1}(A) - \bigcup_{j=1}^4 N_j$ 上的限制具有如下形式

$$\omega_0|_{\pi_0^{-1}(A)-\bigcup_{j=1}^4 N_j} = \varepsilon\hat{\mathcal{G}}^*\hat{\theta}|_{\pi_0^{-1}(A)-\bigcup_{j=1}^4 N_j} + \pi_0^*\omega_A$$

对于某个 $\varepsilon > 0$ 以及 $A \subseteq S^2$上的某个辛形式 ω_A。

证明。回顾一下，在引理 6.3(c) 中选取了一个类 $[\nu] \in H^2(X_0;\mathbb{R})$，使得 $[\nu] \in H^2(X_0;\mathbb{R})$ 与 π_0 的所有纤维的不可约分支正向配对：$X_0 \to S^2$，并且对于 π_0 的任意光滑纤维 F，都有 $\langle[\nu],[F]\rangle = 1$。给定这样一个类 $[\nu]$，Gompf–Thurston 构造（[GS99，定理 10.2.18] 的证明，或 [Gom05，定理 2.7]）给出 X_0 上的一个闭2-形式 ζ，满足 $[\zeta] = [\nu]$，使得

(a) 对于 S，π_0 的任意纤维的不可约分支的光滑轨迹是辛的；(b) 对于 π_0 的任意临界点 $p \in X_0$ 以及某些坐标图 $U_p \subseteq \mathbb{C}^2$ 和 $V_{\pi_0(p)} \subseteq \mathbb{C}$，在这些坐标图上，$\pi_0$ 具有形式 $(z,w) \mapsto z^2 + w^2$，且限制 $\zeta|_{U_p}$ 是标准辛形式$dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$。

此外，回想一下，$[\nu] \in H^2(X_0;\ \mathbb{R})$是在引理 6.3(c) 中选取的，使得 $\langle[\nu],\ [\sigma_j^0]\rangle = 0$对所有$1 \le j \le 4$。

步骤 *1*：将环带上的形式标准化。我们将用形式 $\hat{\mathcal{G}}^*\hat{\theta}$ 修改 E 的管状邻域 $N \subseteq S^2$ 上的微分形式 ζ。令 $V_0 := N$。对每个 $i = 1,\ 2$，考虑 S^2 中的开圆盘 $V_i := D_i - (\bar{A} \cap D_i)$。于是

$$S^2 = V_0 \cup V_1 \cup V_2$$

是 S^2 的一个开覆盖。令 $\{\rho_0,\rho_1,\rho_2\}$ 为从属于该开覆盖的单位分解。对每个 $i = 0,\ 1,\ 2$，在 V_i 上考虑闭 2-形式 ξ_i，其定义如下：

$$\xi_0 := \hat{\mathcal{G}}^*\hat{\theta}, \qquad \xi_1 = \zeta|_{\pi_0^{-1}(V_1)}, \qquad \xi_2 = \zeta|_{\pi_0^{-1}(V_2)}.$$

Then

$$[\xi_1] = [\nu|_{\pi_0^{-1}(V_1)}] \in H^2(\pi_0^{-1}(V_1);\mathbb{R}) \qquad \text{and} \qquad [\xi_2] = [\nu|_{\pi_0^{-1}(V_2)}] \in H^2(\pi_0^{-1}(V_2);\mathbb{R})$$

根据 Gompf–Thurston 构造。另一方面，由引理 6.6，$[\nu|_{\pi_0^{-1}(E)}] = a\,\mathrm{PD}([\sigma_1^0(E)]) \in H^2(\pi_0^{-1}(E);\mathbb{R})$，其中某个 $a \in \mathbb{R}$；并且 $a = 1$，因为对于任意属于 $\pi_0^{-1}(E)$ 的纤维 F，都有 $\langle[\nu|_{\pi_0^{-1}(E)}],[F]\rangle = 1$。由引理 6.9，

$$[(\hat{\mathcal{G}}^*\hat{\theta})|_{\pi_0^{-1}(E)}] = \mathrm{PD}([\sigma_1^0(E)]) \in H^2(\pi_0^{-1}(E);\mathbb{R})$$

因为 $\hat{\mathcal{G}}$ 将截面 $\sigma_1^0(E)$ 映射到 $M_{\hat{\eta}}$ 的截面 $\hat{s}_1(S^1)$。最后，因为 $H^2(\pi_0^{-1}(E);\mathbb{R}) \cong H^2(\pi_0^{-1}(N);\ \mathbb{R})$，

$$[\xi_0] = [\nu|_{\pi_0^{-1}(V_0)}] \in H^2(\pi_0^{-1}(V_0);\mathbb{R}).$$

对于每个 $i = 0,\ 1,\ 2$，都存在一个定义在 $\pi_0^{-1}(V_i)$ 上的 1-形式 β_i，使得

$$\xi_i = \nu|_{\pi_0^{-1}(V_i)} + d\beta_i.$$

定义 ξ 上由下式给出的闭2-形式 X_0

$$\xi := \nu + \sum_{i=0}^{2} d((\rho_i \circ \pi_0)\beta_i) = \sum_{i=0}^{2} d(\rho_i \circ \pi_0) \wedge \beta_i + (\rho_i \circ \pi_0)\xi_i.$$

我们断言， ξ 在 π_0任意纤维的不可约分支的光滑部分 S 上限制为辛形式。为此，注意到对于每个 $i = 0$, 1， 2， $d(\rho_i \circ \pi_0)$ 在 S 上消失，因此

$$\xi|_S = \sum_{i=0}^{2} (\rho_i \circ \pi_0)\xi_i|_S.$$

若 $S \subseteq \pi_0^{-1}(V_i)$，则根据 Gompf–Thurston 构造，对于 $i = 1$，2， $\xi_i|_S$ 是辛的。对于 $i = 0$，回顾一下，按构造，微分形式 $\hat{}\theta$ 在 $M_{\tilde{\eta}} \to S^1$ 的每个纤维上限制为辛形式。由于 $\hat{}\,\mathcal{G}$ 将 $\pi_0^{-1}(N)$ 的一个纤维 $\to N$ 微分同胚地映到 $M_{\tilde{\eta}} \to S^1$ 的一个纤维上，拉回 $\hat{}\,\mathcal{G}^*\hat{}\theta$ 在 $\pi_0^{-1}(N)$ 的纤维 $\to N$ 上仍然是辛的。因此， $\xi|_S$ 在 S 上是辛的，因为它是 S上的体积形式的正线性组合。

步骤 *2*：在截面附近进行标准化。 注意， π_0： $X_0 \to S^2$ 在每个截面 σ_j^0上都是浸没。因此，对足够小的管状邻域 $N_j \subseteq U_j$ ，取 σ_j^0，其限制映射 $\pi_0|_{N_j}$： $N_j \to S^2$同构于[2] 上的秩为 2 的向量丛 S^2。由于 $[\sigma_j^0]^2 = -1$，存在一个 $\mathbb{C}$-线丛同构 ϕ_j： $N_j \to L$。定义

$$\lambda_j := (\phi_j^{-1})^* \xi|_{N_j} \in \Omega^2(L).$$

由于 ϕ_j 在纤维上保持定向，微分形式 λ_j 在 π_L 的纤维方向上与 L的标准复结构 i 相容： $L \to \mathbb{CP}^1$。令

$$L(1) := \{v \in L : |\pi_{\mathbb{C}^2}(v)|^2 \leq 1\}$$

其中 $|\cdot|$ 表示与 $\omega_{\mathbb{C}^2}$相容的标准 K¨ahler 度量 $\omega_{\mathbb{C}^2}$。以下是 McDuff–Polterovich 的一个引理的改写 [MP94，引理 5.5.B]。

引理 6.11 (参见 McDuff–Polterovich [MP94，引理 5.5.B])。 存在一个2-形式 $\lambda_j' \in \Omega^2(L(1))$满足以下性质：

(1) λ_j' 在 $L(1)$边界附近与 λ_j 一致。*(2)* $\lambda_j' = c_j \pi_{\mathbb{C}^2}^* \omega_{\mathbb{C}^2}$ 在 π_L 零截面附近： $L \to \mathbb{CP}^1$ ，其中 $c_j > 0$为某个常数。*(3)* λ_j' 在 π_L 的纤维方向上压制 i： $L \to \mathbb{CP}^1$。

证明。这与 [MP94，引理 5.5.B]中的计算相同；为完整起见，我们回顾一下证明。令 $B(r) \subseteq \mathbb{C}^2$ 表示 $\mathbb{C}^2$ 中半径为 r 的开球，其度量由与 $\omega_{\mathbb{C}^2}$相容的 K¨ahler 度量给出。根据 McDuff–Polterovich [MP94，引理 5.5.B 的证明]，，存在一个 K¨ahler 微分形式 τ_k ，定义在B上，并且在 $B(1)$的边界附近满足 $\tau_k = \varepsilon^2 \omega_{\mathbb{C}^2}$ ，同时在 $B(\varepsilon/(2k))$上满足 $\tau_k = k^2 \omega_{\mathbb{C}^2}$ ，对任意 $k > 1$和 $0 < \varepsilon < 1$均成立。

由于 $[\xi] = [\nu] \in H^2(X_0; \mathbb{R})$，并且根据引理 6.3(c) 中 ν 的构造， $\langle [\xi|_{N_j}], [\sigma_j^0] \rangle = 0$，微分形式 $\lambda_j \in \Omega^2(L)$ 是恰当的，且对于某个 $\beta_j \in \Omega^1(L)$，有 $\lambda_j = d\beta_j$ 。令 $0 < \varepsilon < 1$满足： $\lambda_j - \varepsilon^2 \pi_{\mathbb{C}^2}^* \omega_{\mathbb{C}^2}$ 在 π_L 的纤维方向上驯服 i： $L(1) \to \mathbb{CP}^1$。考虑一个凸起函数ρ： $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ，其支集包含于 $B(1) \subseteq \mathbb{C}^2$ ，满足在 $0 \in B(1)$附近 $\rho \equiv 1$ ，并且在 $\partial B(1)$附近 $\rho \equiv 0$ 。定义ρ_k： $L \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为 $\rho_k(z) = \rho((2k/\varepsilon)\pi_{\mathbb{C}^2}(z))$。此外，定义

$$\lambda_j' = \lambda_j + \pi_{\mathbb{C}^2}^*(\tau_k - \varepsilon^2 \omega_{\mathbb{C}^2}) - d(\rho_k \beta_j).$$

当 $k \gg 1$ 足够大时，引理成立。 □

[2]事实上， $N_j \to S^2$可以选为与丛 $TF \to \sigma_j^0$同构，其中 $TF \subset TU_j$是 π_0的纤维的子丛 *parallel*。

由于 U_j 互不相交，由此可知我们可以仅在 $\bigsqcup_{j=1}^4 N_j$ 上修改 ξ，使得 ξ 在纤维上保持辛，并且

$$\xi|_{N_j'} = \phi_j^*(c_j \pi_{\mathbb{C}^2}^* \omega_{\mathbb{C}^2})$$

在足够小的邻域 $\sigma_j^0 \subseteq N_j' \subseteq N_j$ 上。

步骤 *3*：完成证明。令 ω_{S^2} 为 S^2上的 Fubini–Study 形式。对于任意足够小的 $\varepsilon > 0$，

$$\omega_0 = \varepsilon\xi + \pi_0^* \omega_{S^2}$$

是辛的，并且截面 σ_j^0 由紧致性可知是辛的 [GS99，命题 10.2。20]。此外，ω_0 在任意纤维的光滑轨迹 S 上限制为辛形式，π_0 因为 $\varepsilon\xi$ 是如此，且$\pi_0^*\omega_{S^2}|_S = 0$。在每个截面 σ_j^0附近，

$$\omega_0|_{N_j'} = \varepsilon\xi|_{N_j'} + \pi_0^*\omega_{S^2}|_{N_j'} = \varepsilon\phi_j^*(c_j\pi_{\mathbb{C}^2}^*\omega_{\mathbb{C}^2}) + \phi_j^*(\pi_L^*\omega_{S^2})$$

最后一个等号成立是因为 $\pi_L \circ \phi_j = \pi_0$ 限制在 N_j'上。由此证明了 (1)，其中 $a_j = \varepsilon c_j$。最后，注意到 $\rho_1|_A = \rho_2|_A \equiv 0$ 和 $\rho_0|_A \equiv 1$，因为 A 与 V_1 和 V_2均不相交。因此，

$$\xi|_{\pi_0^{-1}(A)} = \xi_0|_{\pi_0^{-1}(A)} = \hat{\mathcal{G}}^*\hat{\theta}|_{\pi_0^{-1}(A)},$$

ˆ ˆ 因此 $\omega_0|_{\pi_0^{-1}(A)-\bigcup_{j=1}^4 N_j} = \varepsilon\mathcal{G}^*\theta|_{\pi_0^{-1}(A)-\bigcup_{j=1}^4 N_j} + \pi_0^*\omega_A$ 其中 $\omega_A := \omega_{S^2}|_A$。这证明了 (2)。 □

命题 *6.7* 的证明。我们将通过部分共轭构造（第 2.2 节）在 ω_n X_n 上构造一个恰当的辛微分形式。

步骤 1：显式构造 $\pi_n : X_n \to S^2$ 和 $\sigma_j^n : S^2 \to X_n$。为了找到部分共轭构造中使用的粘合微分同胚，考虑辛同胚 $\varphi \in$ 辛同胚群$(\Sigma_{2g}, \theta)^{\sim}$，它固定四个标记点 p_1, p_2, p_3, p_4，且其在映射类群 $[\varphi] = f \in$ 映射类群$(\Sigma_{2g},4)$ 中的对应元素由命题 6.8 给出。回忆一下，存在圆盘邻域 O_j，分别围绕每个 p_j，在这些邻域上，φ 和 $\tilde{\eta}$ 的作用均为平凡。在$\tilde{}$中，特别地，对每个 $1 \le j \le 4$，集合 $O_j \times [0,1] \times (-2,2)$ 给出截面$\tilde{s}_i$：$E \times (-2,2) \to M_{\tilde{\eta}} \times (-2,2)$ 在式（8）中定义的邻域 O_j。

利用同伦 κ_t 命题6.8中得到的，构造一个新的同伦

$$\kappa_t^{-1} \circ \varphi \circ \kappa_t : \Sigma_{2g,4} \times [0,1] \to \Sigma_{2g,4},$$

其中注意到，对于所有的 $t \in [0,1]$，$\kappa_t^{-1} \circ \varphi \circ \kappa_t$在 O_1, O_2, O_3, O_4上作用平凡，因为对所有的 $t \in [0,1]$ 和所有的 $1 \le j \le 4$，$\kappa_t(O_j)$ 均不包含在 φ 的支集中。此外，在 $t = 0, 1$ 处计算得

$$\kappa_0^{-1} \circ \varphi \circ \kappa_0 = \mathrm{Id}_{\Sigma_{2g}}^{-1} \circ \varphi \circ \mathrm{Id}_{\Sigma_{2g}} = \varphi$$
$$\kappa_1^{-1} \circ \varphi \circ \kappa_1 = (\hat{\eta} \circ \tilde{\eta})^{-1} \circ \varphi \circ (\hat{\eta} \circ \tilde{\eta}) = \tilde{\eta}^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\eta},$$

其中最后一个等式利用了 ˆη 与 φ 可交换这一事实。这个同伦诱导出一个 Σ_{2g}-丛自同构

$$\tilde{\mathcal{F}} : M_{\tilde{\eta}} \times (-2,2) \to M_{\tilde{\eta}} \times (-2,2)$$
$$((x,t),s) \mapsto ((\kappa_t^{-1} \circ \varphi \circ \kappa_t(x), t), s)$$

$\tilde{}$，它逐点固定每个截面 $\tilde{s}_j$ 的每个邻域 O_j，其中 $\tilde{s}_j$ 是 $M_{\tilde{\eta}} \times (-2,2)$ 的截面。

回顾在（$\tilde{\mathcal{G}}$：$\pi_0^{-1}(N) \to M_{\tilde{\eta}} \times (-2,2)$ 中固定的同构9）。定义丛同构$\mathcal{F}$：$\pi_0^{-1}(N) \to \pi_0^{-1}(N)$，定义为 $\tilde{\mathcal{F}}$，使用如下识别 $\tilde{\mathcal{G}}$

$$\mathcal{F} := \tilde{\mathcal{G}}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{G}} : \pi_0^{-1}(N) \to \pi_0^{-1}(N).$$

根据构造，$\mathcal{F}$ 固定每个截面 σ_j^0：$\pi_0^{-1}(N) \to \pi_0^{-1}(N)$，其中 $1 \le j \le 4$。

设 $U_1 := D_1 \cup A \subseteq S^2$ 和 $U_2 := D_2 \cup A \subseteq S^2$ 是覆盖 S^2 的两个开圆盘，使得

$$U_1 \cap U_2 = A.$$

通过将任意 $x \in \pi_0^{-1}(A) \subseteq \pi_0^{-1}(U_1)$与 $\mathcal{F}^n(x) \in \pi_0^{-1}(A) \subseteq \pi_0^{-1}(U_2)$相识别，构造 Lefschetz 纤维化

$$\pi_n : X_n := \pi_0^{-1}(U_1) \cup_{\mathcal{F}^n:\pi_0^{-1}(A)\to\pi_0^{-1}(A)} \pi_0^{-1}(U_2) \to S^2$$

其中 π_n 定义为在每个 π_0 上与 $\pi_0^{-1}(U_1)$ 相同， $\pi_0^{-1}(U_2)$。令 σ_j^n为 π_n 的截面，其定义为在每个 σ_j^0 上与 U_1相同， U_2，其中 $1 \le j \le 4$。根据部分共轭构造（第 2.2 节），Lefschetz 纤维化 π_n及截面 σ_1^n、……、σ_4^n具有式（5）所给出的单值化分解，如所需。

步骤 2：~~的一个公共邻域 σ_j^n：~~ 通过 $\mathcal{G}$ 这些邻域 O_j 在每个 $1 \le j \le 4$ 上诱导出截面 σ_j^0 在 $\pi_0^{-1}(A)$ 上的邻域 $\mathfrak{O}_j$，其中 $\mathcal{F}$ 的作用是平凡的。根据定理 6.10(1)，对于每个 $1 \le j \le 4$，都存在一个管状邻域 $N_j|_{\pi_0^{-1}(A)} \subset \mathfrak{O}_j$，它位于 σ_j^0 上方，且辛形式 ω_0 在 σ_j^0附近是标准的。特别地，对于所有 n 和 $1 \le j \le 4$， N_j 嵌入到 X_n 中；将此自然嵌入记为 g_j^n: $N_j \to X_n$。此外，注意到 $\pi_n \circ g_j^n = \pi_0$，因此 g_j^n是一个丛映射。将 N_j 在 X_n中的嵌入副本记为 N_j^n。

步骤 3：构造 ω_n 于 X_n上。考虑辛形式

$$\omega_0|_{\pi_0^{-1}(U_1)} \in \Omega^2(\pi_0^{-1}(U_1)), \qquad \omega_0|_{\pi_0^{-1}(U_2)} \in \Omega^2(\pi_0^{-1}(U_2))$$

在命题6.10中找到的。我们断言

$$\omega_n := \begin{cases} \omega_0|_{\pi_0^{-1}(U_1)} & \text{on } \pi_0^{-1}(U_1) \subseteq X_n \\ \omega_0|_{\pi_0^{-1}(U_2)} & \text{on } \pi_0^{-1}(U_2) \subseteq X_n \end{cases}$$

是 X_n 上一个良定义的辛形式。只需验证 ω_n 在 $\pi_0^{-1}(A)$ 上良定义，即

$$\mathcal{F}^*\omega_0|_{\pi_0^{-1}(A)} = \omega_0|_{\pi_0^{-1}(A)}.$$

这由定理 6.8、定理 6.10(2)以及 $\mathcal{F}$ 的定义得出。

步骤 4：将 ω_n 限制到 π_n 的纤维上。 π_n 的任一纤维包含于 $\pi_0^{-1}(U_1) \subseteq X_n$ 或 $\pi_0^{-1}(U_2) \subseteq X_n$ 中。因此，对任意 S，即 π_n 的任一纤维的不可约分支的光滑轨迹，

$$\omega_n|_S = \omega_0|_S$$

从而 S 是 (X_n, ω_n) 的辛子流形，依据命题 6.10。此外，限制到分支 F_1^n、 F_2^n、 F_3^n以及 F_4^n，即 π_n 的可约纤维的那些分支时，

$$\langle [\omega_n], [F_j^n] \rangle = \int_{F_j^n \subseteq X_n} \omega_n|_{F_j^n} = \int_{F_j^0 \subseteq X_0} \omega_0|_{F_j^0} = \langle [\omega_0], [F_j^0] \rangle.$$

这就完成了(a) 和(b)的证明。

步骤 5：在截面 ω_n 附近限制 σ_j^n。由于 $\mathcal{F}$ 在 $N_j|_{\pi_0^{-1}(A)}$ 上作用平凡，因此

$$g_j^n : (N_j, \omega_0) \to (N_j^n, \omega_n)$$

是一个辛同胚。对于每个 $1 \le j \le 4$，令 ϕ_j： $N_j \to L$为定理6.10(1)中得到的微分同胚，使得对于 $\sigma_j^0(S^2)$， $\subseteq N_j' \subseteq N_j$有

$$\omega_0|_{N_j'} = \phi_j^*(a_j \pi_{\mathbb{C}^2}^* \omega_{\mathbb{C}^2} + \pi_L^* \omega_{S^2}).$$

映射 $\phi_j^n := \phi_j \circ (g_j^n)^{-1}$是所需的同构 $N_j^n \to L$，其中 $V_j^n := g_j^n(N_j')$，使得 ω_n在 σ_j^n附近为标准形式。注意，在 ϕ_j^n下，截面 σ_j^n对应于 L的零截面，我们将其记作 S。因此， σ_j^n是辛的，并且

$$\langle [\omega_n], [\sigma_j^n(S^2)] \rangle = \langle [\omega_{S^2}], [S] \rangle = \pi.$$

这就完成了(c)的证明。 □

6.3. 关于上同调类 $[\omega_n] \in H^2(X_n;\mathbb{R})$。 最后，我们结合前面各小节的结果，确定上同调类 $[\omega_n] \in H^2(X_n;\mathbb{R})$。

引理 6.12. 对于所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在一个微分同胚

$$\Phi_n : X_n \to M\#4\overline{\mathbb{CP}^2}$$

满足以下性质。

(a) 在同调上，

$$(\Phi_n)_*[\sigma_j^n] = E_j \qquad and \qquad (\Phi_n)_*([F^n]) = (\Phi_0)_*([F^0]) \in H_2(M\#4\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{Z})$$

对于所有 $1 \leq j \leq 4$，其中 E_1、……、$E_4 \in H_2(M\#4\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{Z})$ 表示来自每个直和项 $\overline{\mathbb{CP}^2}$ 的例外除子，而 F^n 表示 $\pi_n : X_n \to S^2$的任意一个正则纤维。

(b) 上同调类 $(\Phi_n^{-1})^*([\omega_n])$ 与 n 无关，即

$$(\Phi_n^{-1})^*([\omega_n]) = (\Phi_0^{-1})^*([\omega_0]) \in H^2(M\#4\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{R}).$$

证明。 对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，令 Φ_n为引理 6.3 中得到的微分同胚。令 $F_1^n \cup F_2^n$和 $F_3^n \cup F_4^n$表示 π_n 的两个可约奇异纤维： $X_n \to S^2$，其中 F_1^n， F_2^n， F_3^n，以及 F_4^n表示引理 6.3 中定义的不可约分支。根据 Φ_n 的构造，

$$(\Phi_n)_*([F_j^n]) = (\Phi_0)_*([F_j^0]), \qquad (\Phi_n)_*([\sigma_j^n]) = (\Phi_0)_*([\sigma_j^0]) = E_j$$

对所有 $1 \leq j \leq 4$ 均成立。还可推出

$$(\Phi_n)_*([F^n]) = (\Phi_n)_*([F_1^n] + [F_2^n]) = (\Phi_0)_*([F_1^0] + [F_2^0]) = (\Phi_0)_*([F^0])$$

正如所需。

由命题 6.7，

$$\langle (\Phi_n^{-1})^*([\omega_n]), (\Phi_n)_*([F_j^n])\rangle = \langle [\omega_n], [F_j^n]\rangle = \langle [\omega_0], [F_j^0]\rangle = \langle (\Phi_0^{-1})^*([\omega_0]), (\Phi_0)_*([F_j^0])\rangle$$
$$\langle (\Phi_n^{-1})^*([\omega_n]), (\Phi_n)_*([\sigma_j^n])\rangle = \langle [\omega_n], [\sigma_j^n]\rangle = \langle [\omega_0], [\sigma_j^0]\rangle = \langle (\Phi_0^{-1})^*([\omega_0]), (\Phi_0)_*([\sigma_j^0])\rangle$$

对于每个 $1 \leq j \leq 4$。由引理 6.3(b)，上同调类 $(\Phi_n^{-1})^*([\omega_n])$ 和 $(\Phi_0^{-1})^*([\omega_0])$ 在 $H_2(M\#4\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{R})$ 上相同，因此

$$(\Phi_n^{-1})^*([\omega_n]) = (\Phi_0^{-1})^*([\omega_0]) \in H^2(M\#4\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{R}). \qquad \square$$

定理 *6.1*和 *6.2* 的证明。 由命题 6.7，纤维的不可约分支的光滑部分以及 σ_1^n， σ_2^n， σ_3^n和 σ_4^n 的截面 π_n： $X_n \to S^2$ 都是（X_n， ω_n）中的辛子流形。令 Φ_n： $X_n \to M\#4\overline{\mathbb{CP}^2}$ 为引理 6.12 中得到的微分同胚，使得

$$(\Phi_n^{-1})^*([\omega_n]) = (\Phi_n^{-1})^*([\omega_0]) \in H^2(M\#4\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{R})$$

and

$$(\Phi_n)_*([F^n]) = (\Phi_0)_*([F^0])$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 均成立。由于每个 σ_1^n、 σ_2^n、 σ_3^n 和 σ_4^n 都是自交数为 -1 的辛子流形，微分形式 ω_n 在 σ_1^n、 σ_2^n、 σ_3^n 和 σ_4^n 的吹下 M_n 上诱导出一个辛形式（我们也记作 ω_n）。也将诱导出的 Lefschetz 铅笔记为 π_n： $M_n - B_n \to S^2$。注意，由于每个 ω_n 在每个截面 σ_j^n 附近都是标准的（见定理 6.7(c)），我们可以确保 π_n 的纤维的不可约分支的光滑部分是辛子流形 [（MP94，第 5] 节）。

令 $F_n \subset M_n$ 表示 π_n的一个正则纤维。由于 Φ_n 将 $[\sigma_j^n]$ 映至 E_j，它诱导出一个微分同胚Ψ_n： $M_n \to M$，使得

$$(\Psi_n^{-1})^*([\omega_n]) = (\Psi_0^{-1})^*([\omega_0]) \in H^2(M;\mathbb{R})$$

and

$$(\Psi_n)_*([F_n]) = (\Psi_n)_*([F_m]) \in H_2(M;\mathbb{Z})$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。Lalonde–McDuff 的工作 [LM96，定理 1。1] 表明，纤维曲面上的上同调等价的辛形式彼此微分同胚，因此微分形式相等：

$$(\Psi_n^{-1})^*\omega_n = (\Psi_0^{-1})^*\omega_0$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 在可能先复合 Ψ_n 一个 M的微分同胚后。任何M保持辛形式的上同调类不变的微分同胚，在 $H_2(M;\mathbb{Z})$ 上的作用都是恒等元（参见 [LL97，定理 3]），因此等式

$$(\Psi_n)_*([F_n]) = (\Psi_n)_*([F_m]) \in H_2(M;\mathbb{R})$$

仍然成立。令

$$\omega = (\Psi_0^{-1})^*\omega_0$$

由此完成定理 6.1 的证明。

回顾命题 6.7 的构造可知，截面 σ_j^n和 σ_j^0 在（X_n，ω_n）和（X_0，ω_0）中的面积相等，对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$均如此，即

$$\langle [\omega_n], [\sigma_j^n] \rangle = [\omega_0], [\sigma_j^0] \rangle.$$

根据 McDuff 的研究，纤维曲面的辛吹起由例外除子的面积决定，且在同伦意义下唯一 [McD96，推论 1。3]。因此，

$$(\Phi_n^{-1})^*\omega_n = (\Phi_0^{-1})^*\omega_0$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 作为辛形式的情形，在必要时于 $M\#4\overline{\mathbb{CP}^2}$ 上与一个微分同胚（同伦于恒等映射）复合 Φ_n。最后，令

$$\omega = (\Phi_0^{-1})^*\omega_0$$

这就完成了定理 6.2中辛部分的证明。 □

最后，定理 1.2 和1.3 也可立即作为推论得出。

定理 *1.2* 的证明。若 X是一个 $\chi(X) < 0$ 纤维曲面，则它微分同胚于 $M^1 = \Sigma_g \times S^2$或 $M^2 = \Sigma_g \tilde{\times} S^2$，其中 $g \geq 2$。令 $i = 1$或 $i = 2$，使得 $X \cong M^i$，并采用定理6.1中的记号。对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$\pi_{n,i} \circ (\Psi_n^i)^{-1} : M^i - \Psi_n^i(B_n^i) \to S^2$$

都是亏格为 $2g$ 、有四个基点且与 ω 相容的 Lefschetz 铅笔，其正则纤维在 $H_2(M^i;\mathbb{Z})$ 中均彼此同调。 □

定理的证明 *1.3*。若 X是具有 $\chi(X) < 0$的纤维曲面，则它微分同胚于 $M^1 = \Sigma_g \times S^2$或 $M^2 = \Sigma_g \tilde{\times} S^2$（对 $g \geq 2$），且 $X\#4\overline{\mathbb{CP}^2}$ 微分同胚于 $(\Sigma_g \times S^2)\#4\overline{\mathbb{CP}^2}$（两种情形皆然）。固定定理 6.2的记号。对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$\pi_n \circ \Phi_n^{-1} : (\Sigma_g \times S^2)\#4\overline{\mathbb{CP}^2} \to S^2$$

都是亏格为 $2g$ 、与 ω 相容的 Lefschetz 纤维化，其正则纤维在 $H_2((\Sigma_g \times S^2)\#4\overline{\mathbb{CP}^2};\mathbb{Z})$ 中全都同调。□

7. Infinitely many homeomorphic Lefschetz fibrations

我们关于无穷多个两两不等价的 Lefschetz 纤维化的构造，也可应用于纤维曲面之外的情形。在本节中，我们通过如下例子展示这种灵活性：对每个亏格 $g \geq 3$，都存在无穷多个两两不等价但两两同胚的 Lefschetz 纤维化。

考虑图中所示曲线的同伦类 c_1，……，$c_{2g} \subseteq \Sigma_g^1$如图 6所示。令 δ表示 Σ_g^1的边界。

引理 7.1（链关系 [FM12，命题 4。12]）。对于任意 $g \geq 2$,

$$(T_{c_1} \dots T_{c_{2g}})^{4g+2} = T_\delta \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g^1).$$

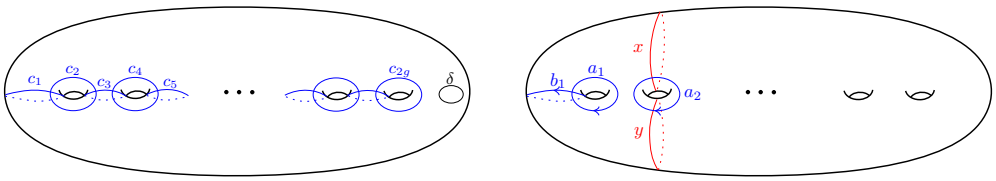


FIGURE 6. 左： Σ_g^1中的一串曲线；右：同调曲线 x， $y \subseteq \Sigma_g$ 以及同调类 a_1， a_2， $b_1 \in H_1\left(\Sigma_g; \mathbb{Z}\right)$

.

设 $f = T_x T_y^{-1} \in$映射类群(Σ_g) 是一个亏格为 1 的边界对，其中 x， $y \subseteq \Sigma_g$如图6所示。将引理 7.1 给出的分解通过 f^n 对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$进行共轭，可得

$$\left(T_{f^n(c_1)} \ldots T_{f^n(c_{2g})}\right)^{4g+2} = T_\delta \in \operatorname{Mod}(\Sigma_g^1).$$

将上述结果与引理7.1的分解结合起来，我们定义亏格为g 的 Lefschetz 纤维化π_n： $Z_n \to S^2$。

定义7.2。 令 $g \geq 3$。对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，令 π_n： $Z_n \to S^2$ 表示亏格为 g 的 Lefschetz 纤维化，其单值化分解为

$$\left(T_{c_1} \ldots T_{c_{2g}}\right)^{2(4g+2)} \left(T_{f^n(c_1)} \ldots T_{f^n(c_{2g})}\right)^{4g+2} = 1 \in \operatorname{Mod}(\Sigma_g).$$

注意，对于所有由下述单值化分解提升到映射类群 $\operatorname{Mod}(\Sigma_g^1)$ 所确定的 π_n： $Z_n \to S^2$ ，它都有一个自交数为 -3 的截面： π_n

$$\left(T_{c_1} \ldots T_{c_{2g}}\right)^{2(4g+2)} \left(T_{f^n(c_1)} \ldots T_{f^n(c_{2g})}\right)^{4g+2} = T_\delta^3 \in \operatorname{Mod}(\Sigma_g^1). \tag{11}$$

以下定理是本节的主要结果。

定理 7.3。 对于每个 $g \geq 3$，都存在亏格为 g 的 *Lefschetz* 纤维化 π_n： $Z_n \to S^2$ 对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得 π_n 和 π_m 在 $n \neq m$ 时不等价，并且 Z_n 与

$$(6g^2 - 2g + 1)\mathbb{CP}^2 \# (18g^2 + 10g + 1)\overline{\mathbb{CP}^2}$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 均成立。

与第 4 节类似，对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，考虑以下群

$$\begin{aligned}
\hat{G}_n &:= \left\langle T_{c_i}, T_{f^n(c_i)} : 1 \leq i \leq 2g \right\rangle, \\
\hat{G}_n^{\mathcal{I}} &:= G_n \cap \mathcal{I}_g, \\
\hat{A}_n &:= \left\langle [T_{c_i}^{-1}, f^n] : 1 \leq i \leq 2g \right\rangle.
\end{aligned}$$

本节中我们用带帽记号表示群，以区别于第 4 节中的群。与第 4 节一样，我们先研究 $\tau(G_n^{\mathcal{I}})$ 在 $G_n^{\mathcal{I}}$ 经 Johnson 同态映射后的像。令 a_1， a_2， b_1 如图 6 所示，并定义

$$w := a_1 \wedge a_2 \wedge b_1 \in \left(\wedge^3 H\right)/H$$

其中 $H := H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$。

引理 7.4 （参见引理 4.2、4.3 和 4.5）。 对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，像 $\tau(\hat{}\, G_n^{\mathcal{I}})$ 包含于

$$\langle \operatorname{Mod}(\Sigma_g) \cdot (nw) \rangle \leq n \left(\wedge^3 H\right)/H,$$

由映射类群(Σ_g)对 $nw \in \left(\wedge^3 H\right)/H$的轨道生成的群。此外，类 nw 非零，且包含于 $\tau(\hat{}\, G_n^{\mathcal{I}})$中。

证明。 对于任意 $i \neq 4$，注意到 $[T_{c_i}^{-1}, f^n] = 1$，因为 c_i与 x和 y不相交。因此，

$$\hat{A}_n = \langle [T_{c_4}^{-1}, f^n] \rangle.$$

根据 [FM12，第 195-196]，

$$\tau(f) = \tau(T_x T_y^{-1}) = a_1 \wedge b_1 \wedge b_2,$$

并利用4的自然性计算 τ 即可

$$\tau([T_{c_4}^{-1}, f^n]) = n(T_{c_4}^{-1} \cdot \tau(f) - \tau(f)) = n(a_1 \wedge b_1 \wedge T_{c_4}^{-1}(b_2) - a_1 \wedge b_1 \wedge b_2) = n(a_1 \wedge a_2 \wedge b_1) = nw.$$

由于 $[T_{c_4}^{-1}, f^n]$包含于 $\hat{}\, G_n^{\mathcal{I}}$，类 nw包含于 $\tau(\hat{}\, G_n^{\mathcal{I}})$ 中。 $nw \neq 0$这一事实源于自由阿贝尔群 $\left(\wedge^3 H_1 \text{的 } \mathbb{Z}(\Sigma_g)\right)/H_1(\Sigma_g)$ 基 w的存在，该基包含 nw，见引理 4.4。

另一方面，引理 4.2 的证明表明， $\mathcal{I}_g$的子群存在子群相等关系

$$\hat{G}_n^{\mathcal{I}} = \langle \hat{G}_0^{\mathcal{I}}, k[T_{c_4}^{-1}, f^n]k^{-1} : k \in \hat{G}_0 \rangle.$$

$\hat{}\, G_0$ 的每个生成元都是超椭圆的，因此 $\hat{}\, G_0^{\mathcal{I}}$ 包含于超椭圆映射类群 $\mathbf{SMod}(\Sigma_g)$ 中。由推论 2.4可知，$\hat{}G_0^{\mathcal{I}}$包含于 $\ker(\tau)$ 中；再由 τ的自然性（4），

$$\tau(\hat{G}_n^{\mathcal{I}}) = \langle \hat{G}_0 \cdot \tau([T_{c_4}^{-1}, f^n]) \rangle \leq \langle \mathrm{Mod}(\Sigma_g) \cdot (nw) \rangle. \qquad \square$$

以下非共轭性结果构成了命题 7.证明的主要部分。 6.

命题 7.5 （参见命题4.6）**：** 若 $n \neq m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，则 $\hat{}\, G_n$ 和 $\hat{}\, G_m$ 作为 映射类群(Σ_g)的子群并不共轭。

证明。 假设存在 $k \in$ 映射类群(Σ_g)，使得 $k\hat{}G_n k^{-1} = \hat{}G_m$ 作为映射类群(Σ_g) 的子群。由于 $\mathcal{I}_g$ 是映射类群(Σ_g) 的正规子群，这意味着 $k\hat{}G_n^{\mathcal{I}}k^{-1} = \hat{}G_m^{\mathcal{I}}$ 作为 $\mathcal{I}_g$的子群。由 τ 的自然性（4）以及引理 7.4，

$$\tau(\hat{G}_m^{\mathcal{I}}) = k \cdot \tau(\hat{G}_n^{\mathcal{I}}) \leq \langle \mathrm{Mod}(\Sigma_g) \cdot (nw) \rangle$$

由引理 7.4可知，类 mw 非零且包含于 $\tau(\hat{}\, G_m^{\mathcal{I}})$。由于 w 是本原的（定理 4.4），这意味着 n 整除 m。由对称性， m 也整除 n，即 $n = m$。 $\square$

用 4.6 中的命题以 π_n 的单值化来重述： $Z_n \to S^2$ 可得以下命题。

命题 7.6。 对于任意 $n \neq m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，*Lefschetz* 纤维化 $\pi_n : Z_n \to S^2$ 和 $\pi_m : Z_m \to S^2$不等价。

证明。 若 $n \neq m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，则 $\hat{}\, G_n$ 和 $\hat{}\, G_m$ 作为映射类群 $\mathbf{Mod}(\Sigma_g)$ 的子群并不共轭。根据构造，$\hat{}\, G_n$ 和 $\hat{}\, G_m$ 分别是单值表示 ρ_n) 和 ρ_m) 的像 im(ρ_n 和 ρ_m，它们分别对应于 π_n： $Z_n \to S^2$ 和 π_m： $Z_n \to S^2$。由推论 2.2， π_n 和 π_m 是不等价的 Lefschetz 纤维化。 $\square$

还需证明流形 Z_n 两两同胚。为此，我们计算 Z_n的代数拓扑不变量。

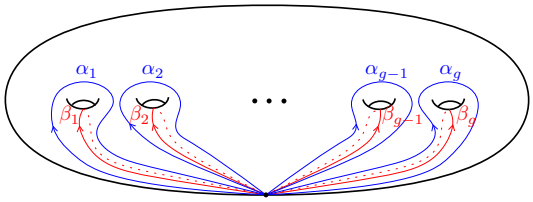
引理 7.7. 对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，流形 Z_n 是单连通的，并且

$$b_2^+(Z_n) = 6g^2 - 2g + 1, \qquad b_2^-(Z_n) = 18g^2 + 10g + 1.$$

证明。 由于 $\pi_n : Z_n \to S^2$ 存在一个截面，因此有一个同构

$$\pi_1(Z_n) \cong \pi_1(\Sigma_g)/N(c_1, \ldots, c_{2g}, f^n(c_1), \ldots, f^n(c_{2g}))$$

其中， $N(c_1, \ldots\ldots, f^n(c_{2g}))$ 表示由 π_n 的消失圈正规生成的 $\pi_1(\Sigma_g)$ 的子群： $Z_n \to S^2$。另一方面，令 α_i， $\beta_i \in \pi_1(\Sigma_g)$（ $1 \leq i \leq g$），作为 $\pi_1(\Sigma_g)$ 的生成元，如下所示：



环路 $\alpha_i \in \pi_1(\Sigma_g)$ 对所有 $1 \le i \le g$ 都与 c_{2i} 自由同伦，环路 $\beta_1 \in \pi_1(\Sigma_g)$ 与 c_1 自由同伦，而环路 $\beta_i^{-1}\beta_{i+1} \in \pi_1(\Sigma_g)$ 对所有 $1 \le i \le g-1$ 都与 c_{2i+1} 自由同伦。因此，

$$N(c_1, \dots, c_{2g}) = N(c_1, \dots, c_{2g}, f^n(c_1), \dots, f^n(c_{2g})) = \pi_1(\Sigma_g),$$

并且对所有 $n \ge 0$， Z_n 都是单连通的。

π_n 中有 $12g(2g+1)$ 个消失圈： $Z_n \to S^2$，因此

$$\chi(Z_n) = 4 - 4g + 12g(2g+1) = 24g^2 + 8g + 4.$$

换言之， $b_2(Z_n) = 24g^2 + 8g + 2$。

在 $n = 0$的情形下，Lefschetz 纤维化 π_0： $Z_0 \to S^2$ 是超椭圆的，且具有 $12g\ (2g+1)$ 个非分离消失圈。因此，由 [End00，定理 4.4(2)、4.8]，

$$\sigma(Z_0) = -\left(\frac{g+1}{2g+1}\right)(12g(2g+1)) = -12g(g+1).$$

为计算 $n \ge 1$ 的 $\sigma(Z_n)$，考虑具有单值化分解的 Lefschetz 纤维化 $Z' \to D^2$ 和 $Z'' \to D^2$

$$(T_{c_1} \dots T_{c_{2g}})^{2(4g+2)} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g), \qquad (T_{f^n(c_1)} \dots T_{f^n(c_{2g})})^{4g+2} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$$

分别。于是 Z_n 由 Z' 与 Z'' 沿其边界通过某个微分同胚$\partial Z' \to \partial Z''$（该微分同胚随 n而变化）对任意 $n \ge 0$（参见第 2.2节）。由 Novikov 可加性，

$$\sigma(Z_n) = \sigma(Z') + \sigma(Z'') = \sigma(Z_0) = -12g(g+1)$$

对所有 $n \ge 0$。最后，对所有 $n \ge 0$ 计算可得

$$b_2^+(Z_n) = \frac{b_2(Z_n) + \sigma(Z_n)}{2} = 6g^2 - 2g + 1, \qquad b_2^-(Z_n) = \frac{b_2(Z_n) - \sigma(Z_n)}{2} = 18g^2 + 10g + 1. \quad \square$$

由 Freedman 定理 [Fre82]， Z_n 的代数拓扑不变量决定了其同胚类型。

命题 7.8。 对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，流形 Z_n 同胚于

$$(6g^2 - 2g + 1)\mathbb{CP}^2 \# (18g^2 + 10g + 1)\overline{\mathbb{CP}^2}.$$

证明。 由引理 7.7，

$$\sigma(Z_n) = -12g(g+1), \qquad b_2(Z_n) = 24g^2 + 8g + 2$$

对所有 $n \ge 0$。特别地，交叉形式 Q_{Z_n} 的秩 $b_2(Z_n)$ 和签名 $\sigma(Z_n)$ 仅取决于 g ， 与 n 无关。

为了确定 Q_{Z_n}的奇偶性，回想一下， π_n 对于所有 -3 ，均有由（11）给出的自交数为 $n \ge 0$的截面。换言之，对于所有 Q_{Z_n} ，交叉形式 $n \ge 0$都是奇的。由于 Q_{Z_n} 是不定且幺模的， [GS99，定理 1.221]表明

$$Q_{Z_n} \cong (6g^2 - 2g + 1)\langle 1\rangle \oplus (18g^2 + 10g + 1)\langle -1\rangle.$$

最后，Freedman 定理 [Fre82，定理 1。5] 指出，单连通光滑四维流形的同胚类型由其交叉形式决定。由于 Z_n 对所有 $n \ge 0$ 均为单连通，这由引理 7.7可知，Freedman 定理意味着 Z_n 与.....同胚

$$(6g^2 - 2g + 1)\mathbb{CP}^2 \# (18g^2 + 10g + 1)\overline{\mathbb{CP}^2}$$

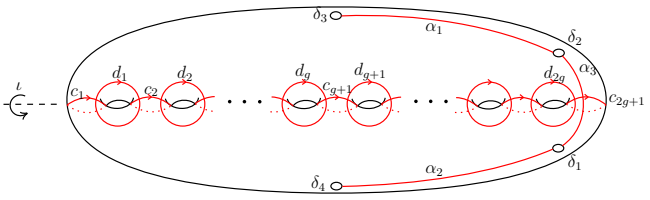


FIGURE 7. 填充曲线和弧，以及超椭圆对合 ι。

对所有 $n \geq 0$。 □

结合命题 7.8 和 7.6 即可完成主定理的证明。

定理 7.3的证明。 对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，流形 Z_n 同胚于 $(6g^2-2g+1)\mathbb{CP}^2\#(18g^2+10g+1)\overline{\mathbb{CP}^2}$，根据命题 7.8。若 $n \neq m$，则 Lefschetz 纤维化 $\pi_n : Z_n \to S^2$ 和$\pi_m : Z_m \to S^2$ 根据命题 7.6是不等价的。 □

APPENDIX A. CALCULATIONS IN 映射类群(Σ_{2g}^4)

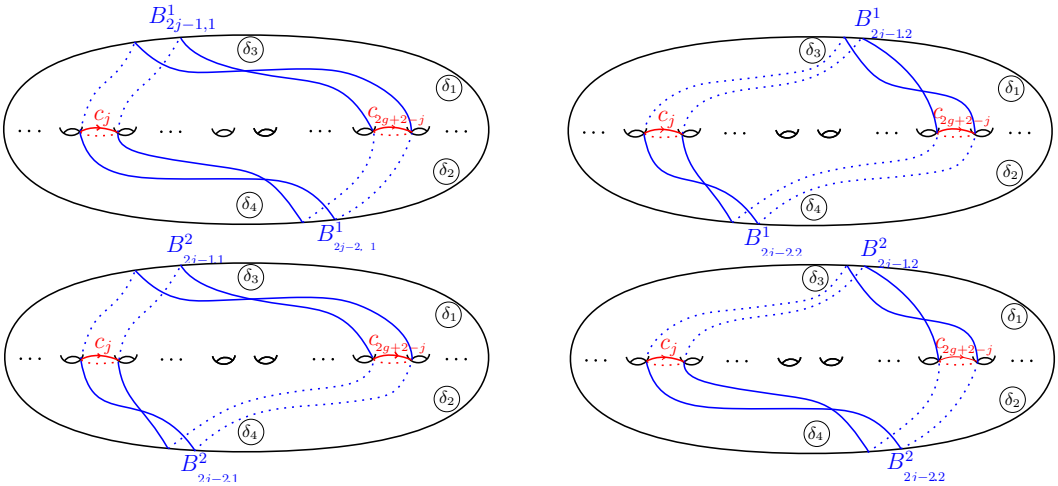
在本附录中，我们汇集了映射类群(Σ_{2g}^4)、映射类群(Σ_{2g},2) 以及映射类群(Σ_{2g}) 中的一些常规计算，其中包括定理 3.1 和 3.3 的证明。对于 $i = 1$、2，考虑图 4 所示的曲线 B^i_j、$_k$ 以及 C^i_1、C^i_2。设 c_1，……，c_{2g+1} 与 d_1，……，d_{2g} 表示图 7 所示的 Σ_{2g}^4 中曲线的同伦类。设 α_1、α_2、α_3 表示图 7 所示的 Σ_{2g}^4 中弧的同伦类。

下面两个引理计算作用于曲线 c_j 和 d_j 的 Dehn 扭转的复合。

引理 A.1. 对于 $1 \leq j \leq 2g+1$ 和 $i = 1, 2$，存在定向曲线的同伦类等式

$$(T_{B^i_{0,1}} T_{B^i_{1,1}} \dots T_{B^i_{2g,1}} T_{C^i_1})(T_{B^i_{0,2}} T_{B^i_{1,2}} \dots T_{B^i_{2g,2}} T_{C^i_2})(c_j) = c_j, \qquad T_{B^i_{0,2}} T_{B^i_{1,2}} \dots T_{B^i_{2g,2}} T_{C^i_2}(c_j) = c_{2g+2-j}.$$

证明。 假设 $j \neq g+1$。曲线 $B^i_{2j-2,k}$ 与 $B^i_{2j-1,k}$（对应于 $k, i = 1, 2$ 以及 c_j、c_{2g+2-j}）如下所示：



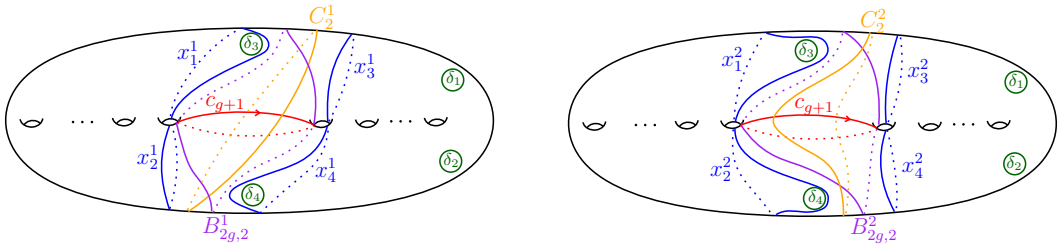
直接计算表明，作为定向曲线的同伦类，

$$T_{B^i_{2j-2,2}} T_{B^i_{2j-1,2}}(c_j) = c_{2g+2-j}, \qquad T_{B^i_{2j-2,1}} T_{B^i_{2j-1,1}}(c_{2g+2-j}) = c_j.$$

注意，若 $\ell \neq 2j-2, 2j-1$，曲线 c_j 和 c_{2g+2-j} 与曲线 $B^i_{\ell,k}$ 及 C^i_1, C^i_2 不相交，并且作为定向曲线的同伦类计算为：

$$T_{B^i_{0,2}} T_{B^i_{1,2}} \dots T_{B^i_{2g,2}} T_{C^i_2}(c_j) = c_{2g+2-j}$$
$$T_{B^i_{0,1}} T_{B^i_{1,1}} \dots T_{B^i_{2g,1}} T_{C^i_1} T_{B^i_{0,2}} T_{B^i_{1,2}} \dots T_{B^i_{2g,2}} T_{C^i_2}(c_j) = T_{B^i_{0,1}} T_{B^i_{1,1}} \dots T_{B^i_{2g,1}} T_{C^i_1}(c_{2g+2-j}) = c_j.$$

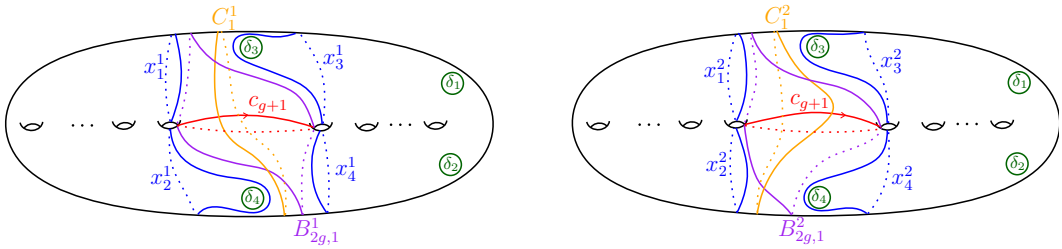
情形 $j = g+1$ 可由灯笼关系 [FM12命题 5.1] 得出。曲线 $B^i_{2g,2}$ 和 C^i_2 如下图所示：



对于 $i = 1, 2$，利用图示曲线 x^i_1、x^i_2、x^i_3、x^i_4 计算可得

$$T_{B^i_{2g,2}} T_{C^i_2}(c_{g+1}) = T_{B^i_{2g,2}} T_{C^i_2} T_{c_{g+1}}(c_{g+1}) = T_{x^i_1} T_{x^i_2} T_{x^i_3} T_{x^i_4}(c_{g+1}) = c_{g+1}$$

其中第二个等式由灯笼关系 $T_{B^i_{2g,2}} T_{C^i_2} T_{c^i_{g+1}} = T_{x^i_1} T_{x^i_2} T_{x^i_3} T_{x^i_4}$ 得出。曲线 $B^i_{2g,1}$ 和 C^i_1 如下图所示：



对于 $i = 1, 2$，利用图示曲线 x^i_1、x^i_2、x^i_3、x^i_4 计算可得

$$T_{B^i_{2g,1}} T_{C^i_1}(c_{g+1}) = T_{B^i_{2g,1}} T_{C^i_1} T_{c_{g+1}}(c_{g+1}) = T_{x^i_1} T_{x^i_2} T_{x^i_3} T_{x^i_4}(c_{g+1}) = c_{g+1}$$

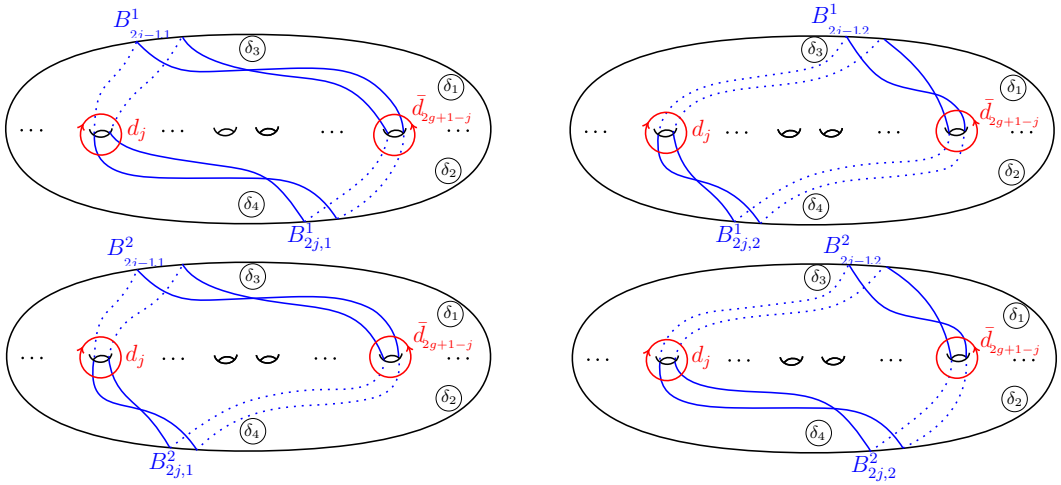
其中第二个等式由灯笼关系 $T_{B^i_{2g,1}} T_{C^i_1} T_{c_{g+1}} = T_{x^i_1} T_{x^i_2} T_{x^i_3} T_{x^i_4}$ 得出。最后，注意到若 $\ell \neq 2g$，则 c_{g+1} 和 $B^i_{\ell,k}$ 不相交，并计算

$$T_{B^i_{0,2}} T_{B^i_{1,2}} \dots T_{B^i_{2g,2}} T_{C^i_2}(c_{g+1}) = c_{g+1}$$
$$T_{B^i_{0,1}} T_{B^i_{1,1}} \dots T_{B^i_{2g,1}} T_{C^i_1} T_{B^i_{0,2}} T_{B^i_{1,2}} \dots T_{B^i_{2g,2}} T_{C^i_2}(c_{g+1}) = T_{B^i_{0,1}} T_{B^i_{1,1}} \dots T_{B^i_{2g,1}} T_{C^i_1}(c_{g+1}) = c_{g+1}. \quad \square$$

引理 A.2. 对于 $1 \leq j \leq 2g$ 和 $i = 1, 2$，定向曲线的同伦类相等

$$(T_{B^i_{0,1}} T_{B^i_{1,1}} \dots T_{B^i_{2g,1}} T_{C^i_1})(T_{B^i_{0,2}} T_{B^i_{1,2}} \dots T_{B^i_{2g,2}} T_{C^i_2})(d_j) = d_j, \qquad T_{B^i_{0,2}} T_{B^i_{1,2}} \dots T_{B^i_{2g,2}} T_{C^i_2}(d_j) = \bar{d}_{2g+1-j}.$$

证明。考虑曲线 $B^i_{2j-1,k}$、$B^i_{2j,k}$，对于 k，$i = 1, 2$ 以及 d_j、$\bar{d}_{2g+1-j}$ 如下所示：



直接计算表明

$$T_{B^i_{2j-1,2}}T_{B^i_{2j,2}}(d_j)=\bar{d}_{2g+1-j},\qquad T_{B^i_{2j-1,1}}T_{B^i_{2j,1}}(\bar{d}_{2g+1-j})=d_j.$$

注意，曲线 d_j 和 d_{2g+1-j} 与曲线 $B^i_{\ell,\ k}$ 不相交；若 $\ell\neq 2j-1$，$2j$ 则计算

$$T_{B^i_{0,2}}T_{B^i_{1,2}}\dots T_{B^i_{2g,2}}T_{C^i_2}(d_j)=\bar{d}_{2g+1-j}$$
$$T_{B^i_{0,1}}T_{B^i_{1,1}}\dots T_{B^i_{2g,1}}T_{C^i_1}T_{B^i_{0,2}}T_{B^i_{1,2}}\dots T_{B^i_{2g,2}}T_{C^i_2}(d_j)=T_{B^i_{0,1}}T_{B^i_{1,1}}\dots T_{B^i_{2g,1}}T_{C^i_1}(\bar{d}_{2g+1-j})=d_j.\quad\square$$

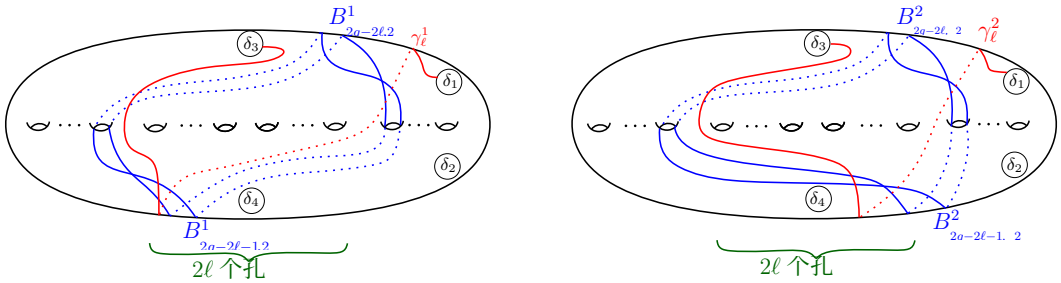
˜ ˜现在我们计算 $h_i(\alpha_1)$和 $h_i(\alpha_2)$。

引理 A.3. 对于 $i=1$，2和 $j=1$，2，

$$(T_{B^i_{0,1}}T_{B^i_{1,1}}\dots T_{B^i_{2g,1}}T_{C^i_1})(T_{B^i_{0,2}}T_{B^i_{1,2}}\dots T_{B^i_{2g,2}}T_{C^i_2})(\alpha_j)=T_{\delta_1}T_{\delta_2}T_{\delta_3}T_{\delta_4}(\alpha_j)$$

作为 Σ^4_{2g}中的弧的同伦类。

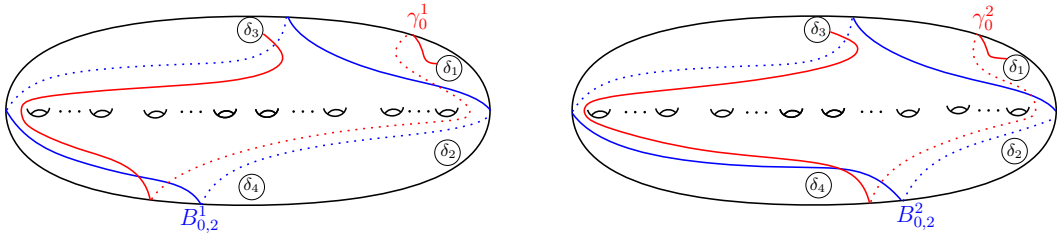
证明。 我们先考虑弧 α_1。对于每个 $i=1$，2以及任意 $0\leq\ell\leq g$，考虑下图所示的弧 γ^i_ℓ：



直接计算 表明， Σ^4_{2g} 中弧的同伦类满足以下等式 ：

(a) $\gamma^i_0=T_{C^i_2}(\alpha_1)$, and
(b) $T_{B^i_{2g-2\ell-1}}T_{B^i_{2g-2\ell}}(\gamma^i_\ell)=\gamma^i_{\ell+1}$ for all $0\leq\ell\leq g-1$.

特别地，通过归纳法可得 $\gamma^i_g=T_{B^i_{1,2}}T_{B^i_{2,2}}\dots T_{B^i_{2g,2}}T_{C^i_2}(\alpha_1)$；弧 γ^i_g和曲线 $B^i_{0,2}$如下图所示。



利用上述结果，直接计算可得

$$T_{B_{0,2}^i}(\gamma_g^i) = T_{B_{0,2}^i} T_{B_{1,2}^i} \dots T_{B_{2g,2}^i} T_{C_2^i}(\alpha_1) = T_{\delta_1} T_{\delta_2} T_{\delta_3} T_{\delta_4}(\alpha_1).$$

由于 $T_{\delta_1} T_{\delta_2} T_{\delta_3} T_{\delta_4}(\alpha_1)$ 与 $B_{j,\,1}^i$ 不相交，并且对所有 $0 \le j \le 2g$， C_1^i

$$(T_{B_{0,1}^i} T_{B_{1,1}^i} \dots T_{B_{2g,1}^i} T_{C_1^i})(T_{B_{0,2}^i} T_{B_{1,2}^i} \dots T_{B_{2g,2}^i} T_{C_2^i})(\alpha_1) = T_{\delta_1} T_{\delta_2} T_{\delta_3} T_{\delta_4}(\alpha_1).$$

对于弧 α_2，考虑超椭圆对合 $\iota \in$ 微分同胚群$^+(\Sigma_{2g},\ \delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta_3 \cup \delta_4)$，其中 $\iota(\delta_1) = \delta_2$和 $\iota(\delta_3) = \delta_4$ 如图 7所示。于是 $\iota(\alpha_1) = \alpha_2$。

(a) 若 $i = 1$，则对任意 $0 \le j \le 2g$，同伦类有如下等式： $\iota(B_{j,\,1}^1) = B_{j,\,2}^1$ 以及$\iota(C_1^1) = C_2^1$。因此，

$$\begin{aligned} T_{B_{0,1}^1} \dots T_{B_{2g,1}^1} T_{C_1^1} T_{B_{0,2}^1} \dots T_{B_{2g,2}^1} T_{C_2^1}(\alpha_2) &= \iota^2 (T_{B_{0,1}^1} \dots T_{B_{2g,1}^1} T_{C_1^1} T_{B_{0,2}^1} \dots T_{B_{2g,2}^1} T_{C_2^1})(\iota\alpha_1) \\ &= \iota (T_{B_{0,2}^1} \dots T_{B_{2g,2}^1} T_{C_2^1} T_{B_{0,1}^1} \dots T_{B_{2g,1}^1} T_{C_1^1})(\alpha_1) \\ &= \iota (T_{B_{0,2}^1} \dots T_{B_{2g,2}^1} T_{C_2^1})(\alpha_1) \\ &= T_{\delta_1} T_{\delta_2} T_{\delta_3} T_{\delta_4}(\alpha_2). \end{aligned}$$

(b) 若 $i = 2$，则对任意 $0 \le j \le 2g$，同伦类有如下等式： $\iota(B_{j,\,1}^2) = B_{j,\,1}^2$，$\iota(B_{j,\,2}^2) = B_{j,\,2}^2$， $\iota(C_1^2) = C_1^2$，以及 $\iota(C_2^2) = C_2^2$。因此，

$$\begin{aligned} T_{B_{0,1}^2} \dots T_{B_{2g,1}^2} T_{C_1^2} T_{B_{0,2}^2} \dots T_{B_{2g,2}^2} T_{C_2^2}(\alpha_2) &= \iota^2 (T_{B_{0,1}^2} \dots T_{B_{2g,1}^2} T_{C_1^2} T_{B_{0,2}^2} \dots T_{B_{2g,2}^2} T_{C_2^2})(\iota\alpha_1) \\ &= \iota (T_{B_{0,1}^2} \dots T_{B_{2g,1}^2} T_{C_1^2} T_{B_{0,2}^2} \dots T_{B_{2g,2}^2} T_{C_2^2}(\alpha_1)) \\ &= T_{\delta_1} T_{\delta_2} T_{\delta_3} T_{\delta_4}(\alpha_2). \end{aligned}$$

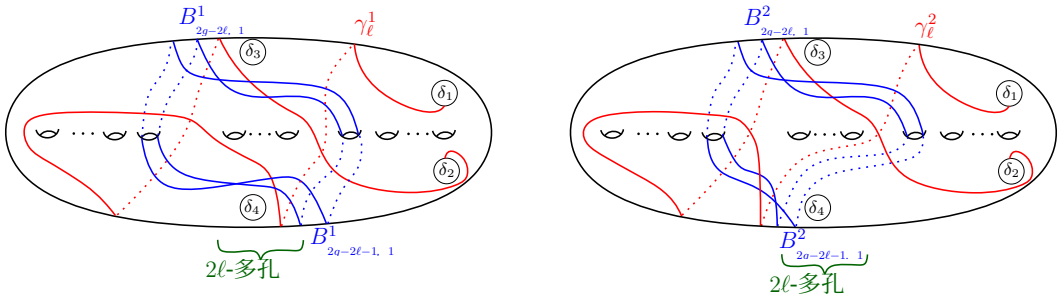
□

引理 A.4。对于 $i = 1,\ 2$，

$$(T_{B_{0,1}^i} T_{B_{1,1}^i} \dots T_{B_{2g,1}^i} T_{C_1^i})(T_{B_{0,2}^i} T_{B_{1,2}^i} \dots T_{B_{2g,2}^i} T_{C_2^i})(\alpha_3) = T_{\delta_1} T_{\delta_2} T_{\delta_3} T_{\delta_4}(\alpha_3)$$

作为 Σ_{2g}^4中的弧的同伦类。

证明。对于每个 $i = 1,\ 2$ 以及任意 $0 \le \ell \le g-1$，考虑下图所示的 Σ_{2g}^4 中的弧 γ_ℓ^i：



直接计算表明，以下弧的同伦类等式成立：

(a) $T_{C_1^i} T_{B_{0,2}^i}(\alpha_3) = \gamma_0^i$，(b) $T_{B_{2g-2\ell-1,1}^i} T_{B_{2g-2\ell,1}^i}(\gamma_\ell^i) = \gamma_{\ell+1}^i$ 对每个 $0 \le \ell \le g-1$ 都成立，并且

(c) $T_{B^i_{0,1}}(\gamma^i_g) = T_{\delta_1}T_{\delta_2}(\alpha_3)$.

结合这些事实（以及 α_3 与曲线 $B^i_{1,2},\dots,B^i_{2g,2},C^i_2$ 不相交这一事实），可得

$$T_{B^i_{0,1}}(T_{B^i_{1,1}}T_{B^i_{2,1}}\dots T_{B^i_{2g,1}})(T_{C^i_1}T_{B^i_{0,2}})(T_{B^i_{1,2}}\dots T_{B^i_{2g,2}}T_{C^i_2})(\alpha_3) = T_{\delta_1}T_{\delta_2}(\alpha_3).$$

注意到 α_3 与 δ_3 和 δ_4 不相交，即可得出证明。 □

下文将证明定理 3.3。我们的证明不同于 Hamada 的原始证明，而更类似于 Gurtas 对 [Gur04定理 2.0 的证明。1]然而请注意，我们版本的定理 3.3并未复现 Hamada 的研究 [Ham17]中的全部计算。

定理 *3.3* 的证明。考虑曲线 c_1、……、c_{2g+1}、d_1、……、d_{2g} 以及弧 α_1、α_2、α_3，如图 7 所示；这些曲线和弧填充了 Σ^4_{2g}，并满足 Alexander 方法的条件 [FM12，命题 2。8]。令

$$k_i := T^{-1}_{\delta_1}T^{-1}_{\delta_2}T^{-1}_{\delta_3}T^{-1}_{\delta_4}T_{B^i_{0,1}}T_{B^i_{1,1}}\dots T_{B^i_{2g,1}}T_{C^i_1}T_{B^i_{0,2}}T_{B^i_{1,2}}\dots T_{B^i_{2g,2}}T_{C^i_2} \in \mathrm{Mod}(\Sigma^4_{2g}).$$

由引理 A.1 和A.2，曲线的定向同痕类满足以下等式

$$k_i(c_j) = c_j, \qquad k_i(d_j) = d_j$$

对所有 j。根据引理 A.3 和 A.4，$k_i(\alpha_j) = \alpha_j$ 对于 $j = 1,\ 2,\ 3$。这两条事实结合起来意味着，映射类 k_i 固定了由$\bigcup_{j=1}^{2g+1} c_j \cup \bigcup_{j=1}^{2g} d_j \cup \bigcup_{j=1}^{3} \alpha_j$确定的图中的每个顶点和每条边（包括其定向）。因此，Alexander 方法 [FM12，命题 2。8] 表明$k_i = 1 \in$ 映射类群(Σ^4_{2g})，对于 $i = 1,\ 2$ 均成立。 □

同样，利用 Alexander 方法，我们推得定理 3.1。

定理 3.1 的证明。考虑图 7 中所示的曲线 $c_1,\dots,c_{2g+1},d_1,\dots,d_{2g}$，在包含 $\Sigma^4_{2g} \hookrightarrow \Sigma_{2g}$ 下，该包含是通过用圆盘封闭四个边界分支实现的。在此包含下，对于所有$0 \le j \le 2g$ 和 $i = 1,2$，曲线 B^i_j，1 和B^i_j,2 的像都同伦于 Σ_{2g} 中的曲线 B_j；而对于 $i =$1,2，曲线 C^i_1 和 C^i_2 的像都同伦于Σ_{2g} 中的曲线 C。根据引理 A.1 和 A.2，

$$T_{B_0}\dots T_{B_{2g}}T_C(c_j) = c_{2g+2-j}, \qquad T_{B_0}\dots T_{B_{2g}}T_C(d_j) = \bar{d}_{2g+1-j}$$

对所有 j 作为曲线的定向同痕类。因此，该映射类

$$[\eta]T_{B_0}\dots T_{B_{2g}}T_C \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g})$$

在由$\bigcup_{j=1}^{2g+1} c_j \cup \bigcup_{j=1}^{2g} d_j$确定的图上作用为恒等元。由于这些曲线 $c_1,\dots,c_{2g+1},d_1,\dots,d_{2g}$ 填满了 Σ_{2g}，并满足 Alexander 方法的条件 [FM12，命题 2。8],因此可应用该方法证明

$$[\eta]T_{B_0}\dots T_{B_{2g}}T_C = 1 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g}).$$

Fi最后，注意到 $[\eta]$ 的阶为 2，因为 η 的阶为 2 且不同伦于恒等映射 . □

ˆ我们还记录定理 3.3 的一个推论，该推论研究映射类 $h \in$映射类群$(\Sigma_{2g,2})$，其首次定义于 (7)。

推论 A.5。对于 $i =$1,2，回顾映射类

$$\tilde{h}_i = T_{B^i_{0,2}}T_{B^i_{1,2}}\dots T_{B^i_{2g,2}}T_{C^i_2} \in \mathrm{Mod}(\Sigma^4_{2g})$$

如引理 *3.4*中定义。设

$$\hat{h}_1, \hat{h}_2 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,2})$$

分别表示在封闭与遗忘同态下 $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in \mathrm{Mod}(\Sigma^4_{2g})$ 的像

$$\mathrm{Mod}(\Sigma^4_{2g}) \to \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,2})$$

该映射分别用一个带有标记点 p_1, p_2, p_3, p_4 的圆盘封闭 Σ_{2g}^4 的每个边界分支 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ ˆ ˆ，然后遗忘两个标记点 p_3, p_4。于是 $h_1 = h_2 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,2})$，且其阶为 2。

证明。考虑曲面的包含映射

$$\Sigma_{2g}^4 \hookrightarrow \Sigma_{2g,2}$$

通过分别给每个边界分支 δ_1、δ_2 粘上一个带标记点 p_1的圆盘 p_2，并给每个边界分支 δ_3、δ_4 粘上一个圆盘 Σ_{2g}^4。现在我们取Σ_{2g}^4 中的曲线同伦类，并考察它们在Σ_{2g}中的像2 在此包含映射下的像。由图 4可见，曲线的同伦类满足以下等式

$$B_{j,1}^1 = B_{j,2}^1 = B_{j,1}^2 = B_{j,2}^2 \subseteq \Sigma_{2g,2}$$

对所有 $0 \le j \le 2g$ 和

$$C_1^1 = C_2^1 = C_1^2 = C_2^2 \subseteq \Sigma_{2g,2}.$$

换言之，

$$T_{B_{j,1}^1} = T_{B_{j,2}^1} = T_{B_{j,1}^2} = T_{B_{j,2}^2} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,2}), \qquad T_{C_1^1} = T_{C_2^1} = T_{C_1^2} = T_{C_2^2} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,2})$$

对所有 $0 \le j \le 2g$。因此，在映射类群 Mod($\Sigma_{2g,\ 2}$) 中有如下等式

$$\hat{h}_1 = T_{B_{0,2}^1} T_{B_{1,2}^1} \dots T_{B_{2g,2}^1} T_{C_2^1} = T_{B_{0,2}^2} T_{B_{1,2}^2} \dots T_{B_{2g,2}^2} T_{C_2^2} = \hat{h}_2 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,2}).$$

上面曲线同伦类的等式也表明

$$\hat{h}_1 = T_{B_{0,1}^1} T_{B_{1,1}^1} \dots T_{B_{2g,1}^1} T_{C_1^1} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,2}).$$

ˆ ˆ 现在来证明 h_1 （因此 h_2）的阶为 2。利用定理3.3 计算可得

$$\hat{h}_1^2 = \left(T_{B_{0,1}^1} T_{B_{1,1}^1} \dots T_{B_{2g,1}^1} T_{C_1^1}\right) \left(T_{B_{0,2}^1} T_{B_{1,2}^1} \dots T_{B_{2g,2}^1} T_{C_2^1}\right) = 1 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,2}). \qquad \square$$

最后，以下引理对于第3节中 MCK Lefschetz 纤维化的部分共轭构造至关重要。

引理 A.6. 对于 $i = 1,2$，回顾映射类

$$\tilde{h}_i = T_{B_{0,2}^i} T_{B_{1,2}^i} \dots T_{B_{2g,2}^i} T_{C_2^i} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g}^4)$$

如引理 3.4中所定义。

(a) 曲线 $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{h}_i(\tilde{x})$以及 $\tilde{h}_i(\tilde{y})$在 Σ_{2g}^4 中两两不相交，且如图 3所示。特别地，

$$\tilde{h}_1(\tilde{x}) = \tilde{h}_2(\tilde{x}), \qquad \tilde{h}_1(\tilde{y}) = \tilde{h}_2(\tilde{y}).$$

(b) 曲线同伦类 $\tilde{h}_i(\tilde{x}) = \tilde{h}_i^{-1}(\tilde{x})$ 与 $\tilde{h}_i(\tilde{y}) = \tilde{h}_i^{-1}(\tilde{y})$相等。

˜ ˜证明。令 $\tilde{z}$ 和 $\tilde{w}$ 分别为图 3 中标记为 $h_i(\tilde{x})$ 和 $h_i(\tilde{y})$ 的曲线同伦类。首先注意，对于任意 $j > 3$，$B_{j,2}^i$ 和 C_2^i 均与 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{z}$ 不相交，且两者皆为 $i = 1,2$。因此，

$$\tilde{h}_i(\tilde{x}) = T_{B_{0,2}^i} T_{B_{1,2}^i} T_{B_{2,2}^i} T_{B_{3,2}^i}(\tilde{x}), \qquad \tilde{h}_i(\tilde{z}) = T_{B_{0,2}^i} T_{B_{1,2}^i} T_{B_{2,2}^i} T_{B_{3,2}^i}(\tilde{z})$$

对于两者 $i = 1,2$。直接计算可得

$$T_{B_{0,2}^i} T_{B_{1,2}^i} T_{B_{2,2}^i} T_{B_{3,2}^i}(\tilde{x}) = \tilde{z}, \qquad T_{B_{0,2}^i} T_{B_{1,2}^i} T_{B_{2,2}^i} T_{B_{3,2}^i}(\tilde{z}) = \tilde{x}$$

对于两者 $i = 1,2$。这证明了 (a) 和 (b) 对于 $\tilde{x}$。

为简化 $\tilde{y}$ 的计算，请注意，超椭圆对合 ι (如图右侧所示3) 的作用为

$$\iota(\tilde{x}) = \tilde{y}, \qquad \iota(\tilde{z}) = \tilde{w}.$$

令 $\tilde{g}_i := \iota^{-1} \tilde{h}_i \iota$，计算得

$$\tilde{h}_i(\tilde{y}) = \iota \tilde{g}_i(\tilde{x}), \qquad \tilde{h}_i(\tilde{w}) = \iota \tilde{g}_i(\tilde{z}).$$

现在分别计算 $i=1$ 和 $i=2$。对于 $i=1$，从图 4 中可以看出

$$\iota(B^1_{j,2}) = B^1_{j,1}, \qquad \iota(C^1_2) = C^1_1$$

对所有 $0 \le j \le 2g$。因此，

$$\tilde{g}_1 = T_{B^1_{0,1}} T_{B^1_{1,1}} \dots T_{B^1_{2g,1}} T_{C^1_1} \in \mathrm{Mod}(\Sigma^4_{2g}).$$

定理3.3 表明

$$\tilde{g}_1\tilde{h}_1(\tilde{x}) = T_{\delta_1}T_{\delta_2}T_{\delta_3}T_{\delta_4}(\tilde{x}) = \tilde{x}, \qquad \tilde{g}_1\tilde{h}_1(\tilde{z}) = T_{\delta_1}T_{\delta_2}T_{\delta_3}T_{\delta_4}(\tilde{z}) = \tilde{z}.$$

现在 (a)对于 $\tilde{y}$ 成立，因为

$$\tilde{h}_1(\tilde{y}) = \iota\tilde{g}_1(\tilde{x}) = \iota\tilde{g}_1(\tilde{h}^2_1(\tilde{x})) = \iota\tilde{g}_1(\tilde{h}_1(\tilde{z})) = \iota(\tilde{z}) = \tilde{w},$$

其中第二和第三个等式由 (b) 和(a) 分别对于 $\tilde{x}$ 得出。为证明 (b) 对于 $\tilde{y}$成立，应用上文对 $\tilde{z}$所作的相同计算：

$$\tilde{h}^2_1(\tilde{y}) = \tilde{h}_1(\tilde{w}) = \iota\tilde{g}_1(\tilde{z}) = \iota\tilde{g}_1(\tilde{h}^2_1(\tilde{z})) = \iota\tilde{g}_1(\tilde{h}_1(\tilde{x})) = \iota(\tilde{x}) = \tilde{y},$$

因此 $\tilde{h}^{-1}_1(\tilde{y}) = \tilde{h}_1(\tilde{y})$。

对于 $i=2$，观察图 4 可知

$$\iota(B^2_{j,2}) = B^2_{j,2}, \qquad \iota(C^2_2) = C^2_2$$

对所有 $0 \le j \le 2g$ 均成立，因此

$$\tilde{g}_2 = \tilde{h}_2 \in \mathrm{Mod}(\Sigma^4_{2g}).$$

现在 (a)对于 $\tilde{y}$ 成立，因为

$$\tilde{h}_2(\tilde{y}) = \tilde{h}_2(\iota(\tilde{x})) = \iota\tilde{g}_2(\tilde{x}) = \iota\tilde{h}_2(\tilde{x}) = \iota(\tilde{z}) = \tilde{w},$$

˜其中第二个等式由 $\tilde{g}_2$ 的定义得出，第三个等式由 $\tilde{g}_2 = h_2$ 这一事实得出，第四个等式则由 (a) 对于 $\tilde{x}$ 得出。为证明 (b)对于 $\tilde{y}$，对 $\tilde{z}$应用上述相同的计算：

$$\tilde{h}^2_2(\tilde{y}) = \tilde{h}_2(\tilde{w}) = \tilde{h}_2(\iota(\tilde{z})) = \iota\tilde{g}_2(\tilde{z}) = \iota\tilde{h}_2(\tilde{z}) = \iota(\tilde{x}) = \tilde{y},$$

因此 $\tilde{h}^{-1}_2(\tilde{y}) = \tilde{h}_2(\tilde{y})$。 □

Appendix B. Proof of Proposition 6.8

本附录的目标是证明命题 6.8。本节始终采用注 6.4中的记号。由引理 A.6，在 $\Sigma_{2g,4}$中，曲线的同伦类满足以下等式

$$\tilde{h}^2(\tilde{x}) = \tilde{x}, \qquad \tilde{h}^2(\tilde{y}) = \tilde{y}.$$

因此，存在一个代表元 $\tilde{\eta}_0 \in$微分同胚群$^+(\Sigma_{2g,4})$，属于 $\tilde{h} \in$映射类群$(\Sigma_{2g,4})$，保持 $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ 中曲线的集合$\Sigma_{2g,4}$（参见 [FM12，第 13.2 节。2]）。

令 T_1, S, T_2 表示以下三个连通分支的闭包：

$$\Sigma_{2g,4} - (\alpha \sqcup \beta \sqcup \tilde{\eta}_0(\alpha) \sqcup \tilde{\eta}_0(\beta))$$

如图 8所示，其中我们将 $S \cong \Sigma^4_{2g-2,4}$ 视为一个具有四个标记点和四个边界分支的曲面。注意，$\tilde{\eta}_0$ 置换子集 T_1 和 T_2，并保持 S不变。此外，$\tilde{\eta}^2_0$ 保持每个子集 T_1、S和 T_2不变。

在下面的引理中，我们通过一个 $\tilde{\eta}_0$ 同伦，将其修改为新的微分同胚 $\tilde{\eta}_1 \in$微分同胚群$^+(\Sigma_{2g,4})^\circ$，其支集紧包含于 T_1，使得 $\tilde{\eta}_1$ 在 $T_1 \cup T_2$中除某些领圈邻域外均为 2 阶。引理B.1证明中的同伦和微分同胚如图9所示。

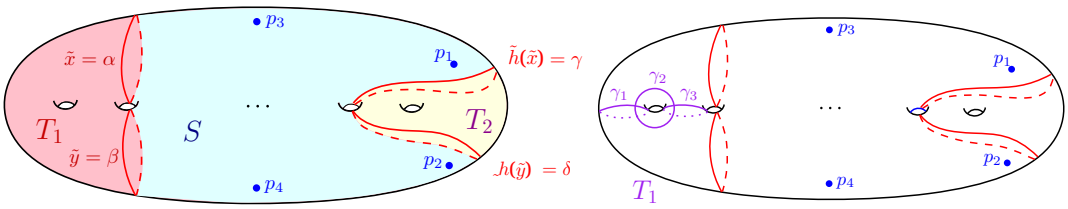


FIGURE 8. 左：曲线 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 在$\Sigma_{2g,\ 4}$ 将曲面分解为紧子曲面 T_1, S, T_2的并；右：曲线 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 填充 T_1°，且在$\tilde{}$同伦意义下由 h固定。

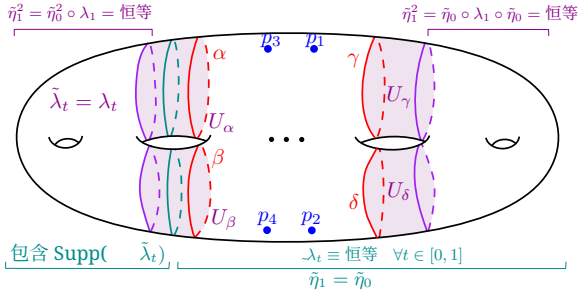


FIGURE 9. 引理 $\tilde{\eta}_1$ 证明中的构造微分同胚$\tilde{}$及同伦 λ_t 的支集示意图B.1

引理 B.1 (对 $T_1 \cup T_2$的修改)。 存在 α和 β 各自的领圈邻域 $U_\alpha \subseteq T_1$ 和 $U_\beta \subseteq T_1$，以及一个微分同胚 $\tilde{\eta}_1 \in$ 微分同胚群$^+(\Sigma_{2g,\ 4})$，满足 $[\tilde{\eta}_1] = \tilde{h} \in$映射类群$(\Sigma_{2g,\ 4})$，使得

$$\tilde{\eta}_1^2|_{T_1-(U_\alpha \sqcup U_\beta)} = \mathrm{Id}\,|_{T_1-(U_\alpha \sqcup U_\beta)}$$

并且满足

$$\tilde{\eta}_1|_{S\cup T_2} = \tilde{\eta}_0|_{S\cup T_2}.$$

特别地，$\tilde{\eta}_1$ 置换子集 T_1, S和 T_2，且 $\tilde{\eta}_1^2$ 保持每个子集不变

$$T_1 - (U_\alpha \sqcup U_\beta), \quad U_\alpha, \quad U_\beta, \quad S, \quad T_2 - (U_\gamma \sqcup U_\delta), \quad U_\gamma, \quad U_\delta$$

其中 $U_\gamma := \tilde{\eta}_1(U_\alpha)$ 以及 $U_\delta := \tilde{\eta}_1(U_\beta)$。

证明。考虑图8所示的 T_1 中的曲线 γ_1、γ_2、γ_3。根据引理 A.1（针对同伦类 $[\gamma_1] = c_1$ 和 $[\gamma_2] = c_2$）及 A.2（针对同伦类 $[\gamma_2] = d_1$），对于每个 $i = 1$、2、3，曲线 $\tilde{\eta}_0^2(\gamma_i)$ 在 Σ_{2g},4 中同伦于 γ_i。根据 FM12，引理 3.16],，对于每个 $i = 1$、2、3，曲线 $\tilde{\eta}_0^2(\gamma_i)$ 也同伦于 γ_i，位于 T_1 中。

。 。 °考虑内部 T_1 中的 T_1。曲线 γ_1、γ_2、$\gamma_3 \subseteq T_1$ 共同填满 T_1。根据 Alexander 方法[FM12，命题 2.8],

$$[\tilde{\eta}_0^2|_{\mathring{T}_1}] = 1 \in \mathrm{Mod}(\mathring{T}_1).$$

令 λ_t： $\mathring{T}_1 \times [0,1] \to \mathring{T}_1$ 表示一个同伦，其满足 $\lambda_0 = \mathrm{Id}_{\mathring{T}_1}$ 和 $\lambda_1 = \tilde{\eta}_0^{-2}|_{\mathring{T}_1}$。任取 α 和 β 的领圈邻域 U_α、U_β，它们位于 T_1 中。根据同伦延拓定理 [Hir94，定理 8.1.4],

~ ~，存在一个同伦 λ_t： $\Sigma_{2g,\ 4} \times [0,1] \to \Sigma_{2g,\ 4}$，满足 $\lambda_0 = \mathrm{Id}_{\Sigma_{2g,\ 4}}$，使得

$$\tilde{\lambda}_t|_{T_1-(U_\alpha \sqcup U_\beta)} = \lambda_t|_{T_1-(U_\alpha \sqcup U_\beta)}$$

~ °并且使得 λ_t 在 T_1 中是紧支撑的。最后，令

$$\tilde{\eta}_1 := \tilde{\eta}_0 \circ \tilde{\lambda}_1.$$

˜ ˚由于 λ_t 的支集位于 T_1 中，

$$\tilde{\eta}_1|_{S\cup T_2} = \tilde{\eta}_0 \circ \tilde{\lambda}_1|_{S\cup T_2} = \tilde{\eta}_0|_{S\cup T_2}.$$

最后，

$(\tilde{\eta}_0 \circ \tilde{\lambda}_1)^2|_{T_1 - (U_\alpha \sqcup U_\beta)} = (\tilde{\eta}_0 \circ \tilde{\lambda}_1)|_{T_2} \circ (\tilde{\eta}_0 \circ \lambda_1)|_{T_1 - (U_\alpha \sqcup U_\beta)} = \tilde{\eta}_0|_{T_2} \circ \tilde{\eta}_0^{-1}|_{T_1 - (U_\alpha \sqcup U_\beta)} = \mathrm{Id}_{T_1 - (U_\alpha \sqcup U_\beta)}$ 如所需。 □

在下面的引理中，我们将子曲面 $S \subseteq \Sigma_{2g,\,4}$ 视为具有四个˚边界分支的紧子曲面（由 α，β，γ，δ构成），其中包含四个标记点 p_1，p_2，p_3，p_4。令 $\mathring{S}$表示 S的内部；特别地，S 有四个穿孔（由 S的四个边界分支构成）。下文用 $\mathrm{Diff}^+(\mathring{S},\ p_1,\ p_2)$ 或 $\mathrm{Mod}(\mathring{S},\ p_1,\ p_2)$ 分别表示 S 上固定每个点 p_1，p_2的微分同胚群或映射类群。

引理 B.2 (在 S 中的修改)。存在一个阶为2 的微分同胚 $\psi \in$微分同胚群$^+(\mathring{S}, p_1, p_2)$，使得

$$[\psi] = [\tilde{\eta}_1|_{\mathring{S}}] \in \mathrm{Mod}(\mathring{S}, p_1, p_2).$$

证明。回忆一下，$\tilde{\eta}_1 \in$微分同胚群$^+(\Sigma_{2g,\,4})$ 保持子曲面 $S \subseteq \Sigma_{2g}$，并固定 $\Sigma_{2g,\,4}$ 中的每个标记点p_1，p_2，p_3，p_4。我们断言，限制映射 $\tilde{\eta}_1^2|_{\mathring{S}} \in$微分同胚群$^+(\mathring{S},\ p_1,\ p_2)$ 满足

$$[\tilde{\eta}_1^2|_{\mathring{S}}] = 1 \in \mathrm{Mod}(\mathring{S}, p_1, p_2).$$

由推论 A.5，$[\tilde{\eta}_1^2] = 1 \in$ 映射类群$(\Sigma_{2g},2)$。对于任意一条与 α, β, γ 或 δ 在 Σ_{2g},2 中不同伦的曲线 $\gamma_0 \subseteq \mathring{S}$，曲线 $\tilde{\eta}_1^2(\gamma_0)$ 在 Σ_{2g},2 中同伦于 γ_0。根据 [FM12，引理 3.16]，$\tilde{\eta}_1^2(\gamma_0)$ 与 γ_0 在˚下也同伦，其中同伦的支集在 S 内，并且在所有时刻固定 p_1, p_2 t。将 Alexander 方法 [FM12，命题 2.8] 应用于 $\mathring{S}$ 的一组填充曲线及其在 $\tilde{\eta}_1^2$ 下的像，我们得出

$$[\tilde{\eta}_1^2|_{\mathring{S}}] = 1 \in \mathrm{Mod}(\mathring{S}, p_1, p_2)$$

根据 Nielsen 实现定理 [FM12，定理 7。1]，存在一个微分同胚 $\psi \in$微分同胚群$^+(\mathring{S},\ p_1,\ p_2)$ 的阶为 2，使得

$$[\psi] = [\tilde{\eta}_1|_{\mathring{S}}] \in \mathrm{Mod}(\mathring{S}, p_1, p_2).$$ □

ˆ 利用前两个引理，我们现在构造一个二阶代表元 $\hat{\eta}$，它属于 $h \in$映射类群$(\Sigma_{2g,\,2})$，并且存在一条˜受控同伦，将其连接到 $h \in$ 映射类群$(\Sigma_{2g,\,4})$ 中的一个代表元。图 10展示了所得微分同胚 $\hat{\eta} \in$ 微分同胚群$^+(\Sigma_{2g,\,2})$ 及同伦 $\kappa_t : \Sigma_{2g,\,2} \times [0,1] \to \Sigma_{2g,\,2}$ 的示意图。

引理 B.3 （$\alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta$ 附近的修正）。存在

- 一个微分同胚 $\hat{\eta} \in$ 微分同胚群$^+(\Sigma_{2g,\,2})$，其阶为 2，并且 $[\hat{\eta}] = \hat{h} \in$映射类群$(\Sigma_{2g,\,2})$，
- 一个同伦 κ_t：$\Sigma_{2g,\,2} \times [0,1] \to \Sigma_{2g,\,2}$ 满足 $\kappa_0 = \mathrm{Id}_{\Sigma_{2g,\,2}}$，
- 互不相交的管状邻域 W_α、W_β、W_γ，以及 W_δ 分别属于 α、β、γ 和 δ 中的
- 互不相交的邻域 O_i 属于 p_i，对应于 $i = 1$、2、3、4

使得

(a) 微分同胚 $\hat{\eta} \circ \kappa_1$ 逐点固定 O_1、O_2、O_3、O_4，并且

$$[\hat{\eta} \circ \kappa_1] = \tilde{h} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,4}),$$

(b) 微分同胚 $\hat{\eta}$ 置换集合 W_α、W_β、W_γ 和 W_δ，其方式为

$$\hat{\eta}(W_\alpha) = W_\gamma, \qquad \hat{\eta}(W_\beta) = W_\delta,$$

and

(c) 对所有 $i = 1$、2、3、4 以及所有 $t \in [0,1]$,

$$\kappa_t(O_i) \cap (W_\alpha \sqcup W_\beta \sqcup W_\gamma \sqcup W_\delta) = \emptyset.$$

证明。 在此证明中，我们通过适当地拼接引理 B.1 和B.2中找到的阶为 2 的部分，构造 η 。

第 *0* 步：寻找适当的邻域，对象为 p_i。 由于 $\tilde{\eta}_1 \in$微分同胚群$^+(\Sigma_{2g,\,4})$，存在（应用 [Hir94，定理 8.3.1] 于每个标记点的足够小的邻域）

（1）一个同伦 $g_t : \Sigma_{2g,\,4} \to \Sigma_{2g,\,4}$，满足 $g_0 = \mathrm{Id}_{\Sigma_{2g,\,4}}$，且紧支撑包含于 S，并且（2）邻域 O_1，O_2，O_3，O_4，即 p_1，p_2，p_3，p_4 的邻域，使得 $O_i \subseteq \overline{S}$，$O_i$ 对所有 $i = 1, 2, 3, 4$ 都是紧的，并且 $O_i \cap O_j = \emptyset$ 对所有 $i \neq j$

使得 $\tilde{\eta}_1 \circ g_1$ 逐点固定每个 O_i。特别地

$$[\tilde{\eta}_1 \circ g_1|_{\mathring{S}}] = [\tilde{\eta}_1] \in \mathrm{Mod}(\mathring{S}, p_1, p_2).$$

因此，将 $\tilde{\eta}_1$ 替换为 $\tilde{\eta}_1 \circ g_1$ 后，我们可以在引理 B.2 中假设 $\tilde{\eta}_1$ 在每个 O_i 上$i = 1$、 2、 3和4 上均为平凡作用。

下文始终令 $\lambda_t : (S, p_1, p_2) \times [0, 1] \to (S, p_1, p_2)$ 为满足 $\lambda_0 = \mathrm{Id}_{\mathring{S}}$ 且 $(\tilde{\eta}_1|_{\mathring{S}}) \circ \lambda_1 = \psi$的同伦，这些对象由引理 B.2给出。

步骤 *1*：固定 $V \subseteq W$ 的两个管状邻域，$\alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta$。回忆一下，引理 B.1 中给出的$U_\alpha$、 U_β （ α、 β 在 T_1 中的领圈邻域）以及 U_γ、 U_δ （ γ、 δ 在 T_2 中的领圈邻域）。令 W_α 和 W_β 分别为 α 和 β 在 $\Sigma_{2g,4}$ 中的管状邻域，使得

$$\bar{U}_\alpha \subseteq W_\alpha, \qquad \bar{U}_\beta \subseteq W_\beta$$

并且圆盘 $\lambda_t^{-1}(O_i) \in S$ 与

$$(W_\alpha \cap \mathring{S}), \qquad (W_\beta \cap \mathring{S}), \qquad \psi(W_\alpha \cap \mathring{S}), \qquad \psi(W_\beta \cap \mathring{S})$$

对所有 $t \in [0, 1]$ 以及所有 $i = 1, 2, 3, 4$。（根据路径 $\lambda_t^{-1}(O_i)$的紧致性，存在这样的 W_α和 W_β。）然后令

$$W_\gamma := \psi(W_\alpha \cap \mathring{S}) \cup \tilde{\eta}_1(W_\alpha \cap T_1), \qquad W_\delta := \psi(W_\beta \cap \mathring{S}) \cup \tilde{\eta}_1(W_\beta \cap T_1).$$

根据 ψ 和 $\tilde{\eta}_1$的构造，开环带 W_γ 和 W_δ 分别是 γ 和 δ在 $\Sigma_{2g,\,4}$ 中的管状邻域，使得

$$\bar{U}_\gamma \subseteq W_\gamma, \qquad \bar{U}_\delta \subseteq W_\delta.$$

最后，令 W为 $\alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta$ 在 $\Sigma_{2g,\,4}$ 中的管状邻域，其定义为

$$W := W_\alpha \cup W_\beta \cup W_\gamma \cup W_\delta.$$

为明确指定 $V \subseteq W$，选取 α 和 β 在 S 中的领圈邻域 V_α、 V_β，使得

$$\bar{V}_\alpha \subseteq W_\alpha, \qquad \bar{V}_\beta \subseteq W_\beta$$

并令

$$V := (U_\alpha \cup V_\alpha) \cup (U_\beta \cup V_\beta) \cup (U_\gamma \cup \psi(V_\alpha \cap \mathring{S})) \cup (U_\delta \cup \psi(V_\beta \cap \mathring{S})) \subseteq W.$$

回想一下，$\tilde{\eta}_1(U_\alpha) = U_\gamma$和 $\tilde{\eta}_1(U_\beta) = U_\delta$，并且根据引理 B.1 中的构造，$\tilde{\eta}_1^2|_{T_1 \cup T_2}$ 在 $U_\alpha \sqcup U_\beta \sqcup U_\gamma \sqcup U_\delta$之外的部分作用为恒等元。因此，$\tilde{\eta}_1$同时保持 $W \cap (T_1 \cup T_2)$ 和 $V \cap (T_1 \cup T_2)$。另一方面，ψ 的阶为 2，因此 ψ同时保持 $W \cap S$和 $V \cap S$。参见图 10。

步骤 *2*：将 $\tilde{\eta}_1$ 在 S 上的同伦调整为具有 2 阶 且在 V之外。根据同伦延拓定理 [Hir94，定理 8.1.4]，存在一个同伦 $\tilde{\lambda}_t : \Sigma_{2g,\,2} \times [0, 1] \to \Sigma_{2g,\,2}$，满足 $\tilde{\lambda}_0 = \mathrm{Id}_{\Sigma_{2g,\,2}}$，使得

$$\tilde{\lambda}_t|_{\mathring{S} - (S \cap V)} = \lambda_t|_{\mathring{S} - (S \cap V)}$$

且使得 $\tilde{\lambda}_t$ 的紧支撑包含于 $\mathring{S} \subseteq \Sigma_{2g,\,2}$。特别地，对于所有 $t \in [0, 1]$ 以及所有 $i = 1, 2, 3, 4$，圆盘 $\tilde{\lambda}_t^{-1}(O_i) = \lambda_t^{-1}(O_i)$ 均包含于 $S - (S \cap W)$ 中。

Let

$$\tilde{\eta}_2 := \tilde{\eta}_1 \circ \tilde{\lambda}_1 \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma_{2g,2}).$$

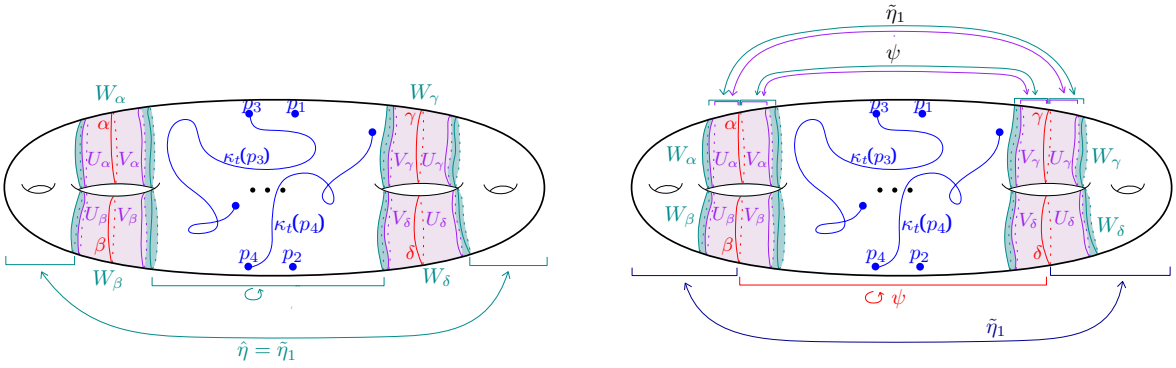


FIGURE 10. 左：引理 B.3 结论中的 2阶微分同胚 $\hat{\eta} \in$微分同胚群$^+(\Sigma_{2g,2})$ 及同伦 $\kappa_t : \Sigma_{2g,2} \times [0,1] \to \Sigma_{2g,2}$ 的示意图。在 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 的某些管状邻域 $W_\alpha, W_\beta, W_\gamma, W_\delta$ 之外，微分同胚 $\hat{\eta}$ 在 S 上限制为 ψ，在 $T_1 \sqcup T_2$ 上限制为 $\tilde{\eta}_1$。右：管状邻域 W 和 V 的选取，以及 ψ 和 $\tilde{\eta}_1$ 的作用。

我们断言， $\tilde{\eta}_2$ 保持这两个集合 V、 W 不变，且 $\tilde{\eta}_2^2$ 的支集包含于 V。为了说明$\tilde{\eta}_2^2$ 的支集包含于 V，我们分别考察 $T_1 \cup T_2$ 和 S。在 $T_1 \cup T_2$中，

$$\tilde{\eta}_2^2|_{(T_1 \cup T_2)-V} = \tilde{\eta}_1^2|_{(T_1 \cup T_2)-V} = \mathrm{Id}_{(T_1 \cup T_2)-V}$$

其中，第一个等式成立是因为 λ_1 在 S 中具有紧支撑，第二个等式则由引理 B.1 得出，因为 $(T_1 \cup T_2) \cap V = U_\alpha \sqcup U_\beta \sqcup U_\gamma \sqcup U_\delta$。在 S 中，

$$\tilde{\eta}_2^2|_{S-V} = (\tilde{\eta}_1 \circ \tilde{\lambda}_1)^2|_{S-V} = \psi^2|_{S-V} = \mathrm{Id}_{S-V},$$

其中，第二个等式成立是因为 $\lambda_1|_{S-V} = \lambda_1|_{S-V}$，第三个等式成立是因为$\psi \in$微分同胚群$^+(\mathring{S})$ 根据引理 B.2中的构造为 2阶。

要证明 $\tilde{\eta}_2$ 保持 V和 W不变，首先回顾 $W \cap (T_1 \cup T_2)$ 和 $V \cap (T_1 \cup T_2)$ 在 $\tilde{\eta}_1$作用下保持不变，并且 $\tilde{\eta}_1|_{T_1 \cup T_2} = \tilde{\eta}_2|_{T_1 \cup T_2}$。另一方面，注意到 $\tilde{\eta}_2|_{S-V} = \psi|_{S-V}$，并且根据构造， $W \cap \mathring{S}$和 $V \cap S$ 都在 ψ 作用下保持不变，其中用到了 W和 V。

步骤 *3*：在 W 中进行切割与粘贴。根据 [FM12、命题 2.4 和引理 3，17], 限制 $\tilde{\eta}_2^2|_{\bar{W}}$与 Id 拓扑同伦（相对于 ∂W）$_{\bar{W}}$，因为

$$[\tilde{\eta}_2^2] = [(\tilde{\eta}_1 \circ \tilde{\lambda}_1)^2] = [\tilde{\eta}_1^2] = \hat{h}^2 = 1 \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,2}),$$

其中最后一个等式由推论 A.5 得出。因此，存在一个拓扑同伦 μ_t : $(W_\alpha \sqcup W_\beta) \times [0,1] \to W_\alpha \sqcup W_\beta$ 相对于 $\partial(W_\alpha \sqcup W_\beta)$，满足 $\mu_0 = \mathrm{Id}_{\bar{W}_\alpha \sqcup \bar{W}_\beta}$，使得

$$\tilde{\eta}_2^{-1}|_{\bar{W}_\alpha \sqcup \bar{W}_\beta} \circ \mu_1 = \tilde{\eta}_2|_{\bar{W}_\alpha \sqcup \bar{W}_\beta} : \bar{W}_\alpha \sqcup \bar{W}_\beta \to \bar{W}_\gamma \sqcup \bar{W}_\delta.$$

有了同伦 μ_t，考虑映射

$$\hat{\eta} := \begin{cases} \tilde{\eta}_2 & \text{on } \Sigma_{2g,2} - (\bar{W}_\alpha \sqcup \bar{W}_\beta) \\ \tilde{\eta}_2^{-1} & \text{on } \bar{W}_\alpha \sqcup \bar{W}_\beta. \end{cases}$$

映射 $\hat{\eta}$ 是光滑的，因为 $\tilde{\eta}_2^{-1}|_{\Sigma_{2g,\,2}-V} = \tilde{\eta}_2|_{\Sigma_{2g,\,2}-V}$ 根据步骤 2 的构造，因为 $\Sigma_{2g,\,2} - V$ 包含 $\partial(W_\alpha \sqcup W_\beta$ 的一个开邻域10。

将 $\tilde{\mu}_t : \Sigma_{2g,\,2} \times [0,1] \to \Sigma_{2g,\,2}$ 在 $W_\gamma \sqcup W_\delta$ 外定义为恒等元，从而得到 μ_t 的延拓，这是 $\Sigma_{2g,\,2}$ 的拓扑同伦，且满足 $\tilde{\mu}_0 = \mathrm{Id}_{\Sigma_{2g,\,2}}$。因此，

$$[\hat{\eta}] = [\hat{\eta} \circ \tilde{\mu}_1] = [\tilde{\eta}_2] = \hat{h} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,2}).$$

此外，我们断言 $\hat{\eta}$ 的阶为 2。由于 $\tilde{\eta}_2^2$ 的支集包含于 $V \subseteq W$ 中，只需验证 $\hat{\eta}^2|_W = \mathrm{Id}_W$，而这由构造可知确实成立。此外，$\hat{\eta}$ 置换 W 的各个分支，这是因为 $\tilde{\eta}_2$ 也如此，并且

$$\hat{\eta}(W_\alpha) = \tilde{\eta}_2(W_\alpha) = W_\gamma, \qquad \hat{\eta}(W_\beta) = \tilde{\eta}_2(W_\beta) = W_\delta.$$

我们已经证明 $\hat{\eta}$ 满足引理陈述中列出的所有预期性质 a.

步骤 4：寻找同伦 κ_t。考虑 $\hat{\eta} \circ \tilde{\lambda}_1^{-1} \in$ 微分同胚群$^+(\Sigma_{2g,\,2})$。注意，$\hat{\eta} \circ \tilde{\lambda}_1^{-1}$逐点固定邻域 O_i，其中 $i = 1, 2, 3, 4$：对于任意 $x \in O_i$,

$$(\hat{\eta} \circ \tilde{\lambda}_1^{-1})(x) = (\tilde{\eta}_2 \circ \tilde{\lambda}_1^{-1})(x) = (\tilde{\eta}_1 \circ \tilde{\lambda}_1)(\tilde{\lambda}_1^{-1}(x)) = \tilde{\eta}_1(x) = x,$$

其中，第一个等式成立是因为根据 W 的构造，$\tilde{\lambda}_1^{-1}(O_i)$ 不包含于 $\bar{W}$，而最后一个等式成立是因为根据步骤 0，$\tilde{\eta}_1$ 逐点固定 O_i。这表明 $\hat{\eta} \circ \tilde{\lambda}_1^{-1}$是微分同胚群$^+(\Sigma_{2g,\,4})$中的一个元素，并且对 $i = 1, 2, 3, 4$，逐点固定每个 O_i。

拓扑同伦 $\tilde{\lambda}_1 \circ \tilde{\mu}_t \circ \tilde{\lambda}_1^{-1}$: $\Sigma_{2g,\,2} \times [0,1] \to \Sigma_{2g,\,2}$ 固定了这两个点 p_3，p_4 对所有$t \in [0,1]$都成立，因为 $\tilde{\mu}_t$ 在 $W_\gamma \sqcup W_\delta$之外是恒等元。因此，

$$[\hat{\eta} \circ \tilde{\lambda}_1^{-1}] = [(\hat{\eta} \circ \tilde{\lambda}_1^{-1}) \circ (\tilde{\lambda}_1 \circ \tilde{\mu}_1 \circ \tilde{\lambda}_1^{-1})] = [(\hat{\eta} \circ \tilde{\mu}_1) \circ \tilde{\lambda}_1^{-1}] = [(\tilde{\eta}_1 \circ \tilde{\lambda}_1) \circ \tilde{\lambda}_1^{-1}] = [\tilde{\eta}_1] = \tilde{h}$$

作为映射类群 Mod$(\Sigma_{2g,\,4})$ 中的映射类。最后，令

$$\kappa_t := \tilde{\lambda}_t^{-1} : \Sigma_{2g,2} \times [0,1] \to \Sigma_{2g,2}$$

由此得证。 □

现在我们汇集上述引理，以证明本附录的主要命题。

命题 6.8 的证明。沿用引理 B.3 陈述中的记号。设 $W = W_\alpha \sqcup W_\beta \sqcup W_\gamma \sqcup W_\delta$ 和 $O = O_1 \sqcup O_2 \sqcup O_3 \sqcup O_4$。微分同胚 $\hat{\eta}$ 和 $\tilde{\eta}$ 以及引理 B.3 中找到的同伦 κ_t 满足条件 $[\hat{\eta}] = h \in$ Mod$(\Sigma_{2g},2)$，以及条件 (c) 和 (d)。因此，只需构造所需的辛形式 θ 和辛同胚 $\varphi \in$ Diff$^+(\Sigma_{2g},4)$，使得$[\varphi] = f \in$ Mod$(\Sigma_{2g},4)$满足 (a) 和 (b)。

设 θ_α 为 $W_\alpha \subseteq \Sigma_{2g}$ 上的辛形式，并设 $\varphi_\alpha \in$ 辛同胚群$(W_\alpha, \theta_\alpha)$ 为关于 α 的紧支撑右手德恩扭转。（例如，我们可以取 $\theta_\alpha = d\theta \wedge dt$，其中 θ、t 是 $W_\alpha \cong S^1 \times (0,1)$ 的两个坐标，且 $\varphi_\alpha(\theta, t) = (\theta - \rho(t),\, t)$，其中 $\rho\colon (0,1) \to [0, 2\pi]$ 是一个光滑递增函数，在 $t = 0$ 附近取 $\rho \equiv 0$，在 $t = 2\pi$ 附近取 $\rho \equiv 2\pi$。）类似地，设 θ_β 为 $W_\beta \subseteq \Sigma_{2g}$ 上的辛形式，并设 $\varphi_\beta \in$ 辛同胚群(W_β, θ_β) 为关于 β 的紧支撑右手德恩扭转。

此外，我们在 W_δ 和 W_γ 中如下定义类似的辛形式和 Dehn 扭转

$$\varphi_\gamma := \hat{\eta} \circ \varphi_\alpha \circ \hat{\eta}, \qquad \theta_\gamma := \hat{\eta}^* \theta_\alpha,$$
$$\varphi_\delta := \hat{\eta} \circ \varphi_\beta \circ \hat{\eta}, \qquad \theta_\delta := \hat{\eta}^* \theta_\beta.$$

此处回顾引理B.3 指出，$\hat{\eta}(W_\alpha) = W_\gamma$ 以及$\hat{\eta}(W_\beta) = W_\delta$ 由构造可得。

有了上述辛形式，设 θ 是 Σ_{2g} su 上的一个辛形式 ch tha t

$$\hat{\eta}^* \theta = \theta, \qquad \theta|_{W'_\alpha} = \theta_\alpha, \quad \theta|_{W'_\beta} = \theta_\beta, \quad \theta|_{W'_\gamma} = \theta_\gamma, \quad \theta|_{W'_\delta} = \theta_\delta.$$

此处 W'_α、W'_β、W'_γ、W'_δ分别是 W_α、W_β、W_γ、W_δ的适当开子集，且每个子集都包含 φ_α、φ_β、φ_γ 和 φ_δ 各自的支集。寻找这样的微分形式 θ 的一种方法是，先用单位分解论证将微分形式θ_α、θ_β、θ_γ和 θ_δ 延拓到整个 Σ_{2g} 上，然后在 $\langle \hat{\eta} \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的作用下对此微分形式进行平均化。现在令

$$\varphi := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\gamma \circ \varphi_\delta^{-1}.$$

那么，由于 φ_α、φ_β、φ_γ和 φ_δ 都支集于 W，φ 也支集于 W，因此 φ 满足 （a）。因为作为 Mod$(\Sigma_{2g,\,4})$ 的元素，

$$[\varphi_\alpha] = T_x, \quad [\varphi_\beta] = T_y, \quad [\varphi_\gamma] = T_{\tilde{h}(x)}, \quad [\varphi_\delta] = T_{\tilde{h}(y)},$$

˜因此，映射类也满足等式 $[\varphi] = f \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{2g,\,4})$，正如所需。

要证明 φ 保持微分形式 θ，只需在 W 上验证，而 W 包含 φ 的支集。在 $W_\alpha \sqcup W_\beta$ 上，φ 保持 θ，因为

$$(\varphi^*\theta)|_{W_\alpha} = \varphi_\alpha^*\theta_\alpha = \theta_\alpha, \qquad (\varphi^*\theta)|_{W_\beta} = (\varphi_\beta^{-1})^*\theta_\beta = \theta_\beta.$$

在 $W_\gamma \sqcup W_\delta$ 上，φ 保持 θ，因为

$$(\varphi^*\theta)|_{W_\gamma} = \varphi_\gamma^*\theta_\gamma = (\hat{\eta}\varphi_\alpha\hat{\eta})^*(\hat{\eta}^*\theta_\alpha) = \hat{\eta}^*\varphi_\alpha^*\theta_\alpha = \hat{\eta}^*\theta_\alpha = \theta_\gamma,$$
$$(\varphi^*\theta)|_{W_\delta} = (\varphi_\delta^{-1})^*\theta_\delta = (\hat{\eta}\varphi_\beta^{-1}\hat{\eta})^*(\hat{\eta}^*\theta_\beta) = \hat{\eta}^*(\varphi_\beta^{-1})^*\theta_\beta = \hat{\eta}^*\theta_\beta = \theta_\delta.$$

最后，要验证 $\hat{}\eta$ 和 φ 可交换，计算

$\hat{}\eta \circ \varphi = \hat{}\eta \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\gamma \circ \varphi_\delta^{-1}) = \hat{}\eta \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\gamma \circ \varphi_\delta^{-1}) \circ \hat{}\eta^2 = (\varphi_\gamma \circ \varphi_\delta^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ \hat{}\eta = \varphi \circ \hat{}$这就完成了 (b) 的证明。 □

References

[ABKP00] J. Amor´os、F. Bogomolov、L. Katzarkov 和 T. Pantev。具有任意基本群的辛 Lefschetz 纤维化。 *J. Differential Geom.*, 54(3):489–545，2000。附录由 Ivan Smith 撰写。网址：http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214339791。[Aur05] Denis Auroux。Lefschetz 纤维化的稳定分类。 *Geom. Topol.*, 9 203 217, 2005 doi:10.2140/ : –。。[Aur06] Denis gt.2005.9.203
Auroux。映射类群分解与辛四维流形：一些未决问题。载于*Problems on mapping class groups and related topics*，第 *Proc. Sympos. Pure Math.*卷第74卷，123–132页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006。 doi:10.1090/pspum/074/2264537。[Bay16a] R. ¨Inan ¸ 4 *J.* c *Symplectic Geom.* 14 3 671 686, 2016 doi:10.4310/JSG.2016.v14.n3.a2
Baykur。Lefschetz 纤维化的不等价性及辛流形的手术等价。 , （）：–。。[Bay16b] R. ¨Inan.c Baykur。Lefschetz 纤维化的极小性与纤维和分解。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144 5 2275 2284, 2016 doi:10.1090/proc/12835 （）：–。。[Bay19] R. ¨ Inan ¸ *Breadth in contemporary* c Baykur。有理曲面 *topology* 102 *Proc. Sympos. Pure Math.* 21 28 2019
与纤维曲面上的不等价 Lefschetz 纤维化。载于，第卷，第 – 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，。doi:10.1090/pspum/102/02。[BH16a] R. ¨Inan.c Baykur 和 Kenta Hayano。Lefschetz 纤维化及其多截面的 Hurwitz 等价。载于*Real and complex singularities*，第 *Contemp. Math.*卷第675卷，1–24页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2016。 doi:10.1090/conm/675。[BH16b] R. ¨Inan.c Baykur 和 Kenta Hayano。Lefschetz 纤维化的多截面与辛四维流形的拓扑。 *Geom. Topol.*，20(4):2335–2395，2016。 doi:10.2140/gt.2016.20.2335。[BH24] R. ¨Inan
J. Eur. Math. Soc. c Baykur 和 Noriyuki *(JEMS)* ¸ 26 8 2837 2895, 2024 doi:10.4171/jems/1326
Hamada。具有任意签名的 Lefschetz 纤维化。， （）：–。。[BHM23] R. ¨Inan.c Baykur、Kenta Hayano 和 Naoyuki Monden。解链手术与辛四维流形的拓扑。 *Math. Z.*，303(3):论文编号77，32页，2023。 doi:10.1007/s00209-023-03204-x。[BK17] R. ¨Inan.c Baykur 和 Mustafa Korkmaz。小型 Lefschetz 纤维化与异乎寻常的四维流形。 *Math. Ann.*, 367 3 4 1333 1361, 2017 doi:10.1007/s00208-016-1466-2 (-) : –。。[BKRar] R. ¨ Inan ¸ *K3: A New Problem List in Low-Dimensional* c Baykur、Robion *Topology* 295 *Mathematical Surveys and Monographs*
C. Kirby 和 Daniel Ruberman。，第卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2026年（即将出版）。[Cad98] Carlos Alberto Cadavid。 *On a remarkable set of words in the mapping class group*。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，1998。博士论文，德克萨斯大学奥斯汀分校。网址：https://getaway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri:pqdiss:9936983 。[Don99] S. K. Donaldson。
辛流形上的 Lefschetz 铅笔。 *J. Differential Geom.*，53(2):205–236，1999。网址：http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214425535。[DS03] Simon Donaldson 和 Ivan Smith。辛四维流形上的 Lefschetz 铅笔与正则类。*Topology*，42(4):743–785，2003。 doi:10.1016/S0040-9383(02)00024-1。[End00] Hisaaki Endo。Meyer 签名余循环与超椭圆纤维化。 *Math. Ann.*，316(2):237–257，2000。doi:10.1007/s002080050012。[FM12] Benson Farb 和 Dan Margalit。 *A primer on mapping class groups* 49 *Princeton Mathematical* ，第卷。普林斯顿大学 *Series* 出版社，普林斯顿，新泽西州， 2012。[Fre82] Michael Hartley Freedman。四维流形的拓扑。 *J. Differential Geometry*，17(3):357–453，1982。网址： http://projecteuclid.org.ezp-prod1.hul.harvard.edu/euclid.jdg/1214437136。

[FS04] Ronald Fintushel 和 Ronald J. Stern。具有相同 Seiberg-Witten 不变量的单连通四维流形族。 *Topology*，43(6):1449–1467，2004。 doi:10.1016/j.top.2004.03.002。[Gom05] Robert E. Gompf。局部全纯映射产生辛结构。 *Comm. Anal. Geom.*，13(3):511–525，2005。网址： http://projecteuclid.org/euclid.cag/1126023501。[GS99] Robert E. Gompf 和 Andr´ as I. Stipsicz。 *4-manifolds and Kirby calculus* 20 *Graduate Studies in Mathematics* 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州， 1999 。 doi:10.1090/gsm/020。[Gur04] Yusuf Ziya Gurtas。映射类群中若干新对合的正德恩扭转表达式，2004。网址： https://arxiv.org/abs/math/0404310， arXiv:math/0404310。[Ham17] Noriyuki Hamada。Matsumoto-Cadavid-Korkmaz Lefschetz 纤维化的截面，

2017 https:// 。网址： ， 。[Hir94] arxiv.org/abs/1610.08458 arXiv:1610.08458
Morris W. Hirsch。 *Differential topology*，第 *Graduate Texts in Mathematics*卷第33卷。Springer-Verlag，纽约，1994。1976年原版的修订重印本。[Joh80] Dennis Johnson。映射类群的一个阿贝尔商群 $\mathcal{I}_g$。 *Math. Ann.*，249(3):225–242，1980。网址： https://doi-org.ezp-prod1.hul.harvard.edu/10.1007/BF01363897， doi:10.1007/BF01363897。[Joh99] F. E. A. Johnson。群扩张的刚性定理。 *Arch. Math. (Basel)*，

73 2 81 89, 1999 doi: （）：–。。[Kas80] A. 10.1007/s000130050371
Kas。关于 Lefschetz 纤维化相关的把手体分解。 *Pacific J. Math.*，89 104，1980 1 89（）：–。网址： http://projecteuclid.org.ezp-prod1.hul.harvard.edu/euclid.pjm/1102779371。[Kor01] Mustafa Korkmaz。具有 Lefschetz 纤维化的非复光滑四维流形。 *Internat. Math. Res. Notices*，（3）：115–128，2001。 doi:10.1155/S107379280100006X。[Li99] Tian-Jun Li。辛四维流形中的光滑嵌入球面。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，127(2):609–613，1999。 doi:10.1090/S0002-9939-99-04457-3。[Liu 96] Ai-Ko Liu。一般墙穿越公式、Gompf 猜想及其应用的一些新应用。*Mathematical Research Letters*，3(5):569–585，1996。[LL97] Bang-He Li 和 Tian-Jun Li。在 S^2丛上的最小亏格嵌入。 *Math. Res. Lett.*，4(2-

3 379 394, 1997 https://doi-org.ezp-prod1.hul.harvard.edu/10.4310/MRL.1997.v4.n3.a7 doi: ）：–。网址： ， 。[LM 10.4310/MRL.1997.v4.n3.a7
96] Fran ¸ *search Letters* 3 6 769 778, 1996 4 *Mathematical Re-* cois Lalonde 和 Dusa McDuff。辛流形的分类。， （）：–。[LS24] Seraphina Eun Bi Lee 和 Carlos A. Serv´an。具有无穷多个截面的 Lefschetz 纤维化，2024。网址： https://arxiv.org/abs/2409.15265， arXiv:2409.15265。[LWXZ25] Jianfeng Lin、Weiwei Wu、Yi Xie 和 Boyu Zhang。Dax 不变量、灯泡与辛结构的同痕，2025。网址： https://arxiv.org/abs/2501.16083， arXiv:2501.16083。[Mat96] Yukio Matsumoto。二重曲面 Lefschetz 纤维化——一种拓扑学方法。载于 *Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995)* 123 148 1996 ，第–页。World Sci. Publ.，里弗埃奇，新泽西州， 。[McD96] Dusa McDuff。从辛变形到同伦。 *arXiv preprint dg-ga/9606004*，1996。[MP94] Dusa McDuff 和 Leonid Polterovich。辛填充与代数几何。 *Invent. Math.*，

115 3 405 434, 1994 doi:10.1007/BF01231766 （）：–。附录由 Yael Karshon 撰写。[OS00a] Burak Ozbagci 和 Andr´as I. Stipsicz。具有亏格二 Lefschetz 纤维化的非复光滑四维流形。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，128(10):3125–3128，2000。 doi:10.1090/S0002-9939-00-05390-9。[OS00b] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。辛 Thom 猜想。 *Ann. of Math. (2)*，151(1):93–124，2000。doi:10.2307/121113。[PY09] Jongil Park 和 Ki-Heon Yun。结手术四维流形上的非同构 Lefschetz 纤维化。 *Math. Ann.*，

345 3 581 597, 2009 doi:10.1007/s00208-009-0366-0 （）：–。。[PY17] J ongil Park 和 Ki-Heon Yun。通过 Stallings 扭转在结手术

4 *Michigan* 流形上的 Lefschetz 纤维 *Math. J.* 66 3 481 498, 2017 doi:10.1307/mmj/1497513628
化。， （）：–。。[Sal15] Nick Salter。具有任意多个纤维化的曲面上的曲面丛。 *Geom. Topol.*，19 2923，2015 5 2901（）：–。 doi:10.2140/gt.2015.19.2901。[Smi01] Ivan Smith。几何单值与双曲圆盘。 *Q. J. Math.*，

52 2 217 228, 2001 doi:10.1093/ （）：–。。[Sti00] Andr qjmath/52.2.217
´ 128 6 1845 1851, as I. Stipsicz。某些

2000 doi:10.1090/S0002-9939-99-05172-2
Lefschetz 纤维化的陈数。 *Proc. Amer. Math. Soc.*， （）：–。。[Sti02] Andr´as I. Stipsicz。具有 $b_2^+ = 1$的流形上的 Lefschetz 纤维化的奇异纤维。 *Topology Appl.*，117(1):9–21，2002。 doi:10.1016/S0166-8641(00)00105-X。[Thu86] William P. Thurston。三维流形同调的一个范数。 *Mem. Amer. Math. Soc.*，59(339):i–vi及99–130，1986。[Tis70] D. Tischler。关于某些叶状流形纤维化到 S^1 *Topology* 9 153 154, 1970 doi:10.1016/ 。 ，：–。。[Ush06] 0040-9383(70)90037-6
Michael Usher。极小性与辛和。 *Int. Math. Res. Not.*，第49857号文章，17页，2006。doi:10.1155/IMRN/2006/49857。[Wal64] C. T. C. Wall。 4 39 131 140, 1964 https: 流形的微分同胚。 *J. London Math. Soc.*，：–。网址： ， 。 //doi-org.ezp-prod1.hul.harvard.edu/10.1112/jlms/s1-39.1.131 doi:10.1112/jlms/s1-39.1.131

Department of Mathematics, Harvard University
Email address: slee@math.harvard.edu

Department of Mathematics, University of Chicago
Email address: cmarceloservan@uchicago.edu