arXiv:2602.10055v1 [math.ST] 10 Feb 2026

友谊悖论指数的弱大数定律

Mingao Yuan[1]

[1]得克萨斯大学埃尔帕索分校数学科学系，得克萨斯州埃尔帕索，美国 电子邮件：myuan2@utep.edu

摘要：友谊悖论指数是一种网络汇总统计量，用于量化友谊悖论，即一个人的朋友往往比这个人拥有更多朋友的现象。本文利用马尔可夫不等式，推导随机几何图中友谊悖论指数的弱大数定律。随机几何图是一种广泛使用的网络模型，能够体现空间依赖和几何结构。对于节点在空间中均匀分布的均匀随机几何图，友谊悖论指数渐近等于 1/4。相反，在非均匀随机几何图中，节点分布不均匀会使该指数呈现不同的极限性质。在相对稀疏区域，友谊悖论指数仍渐近等于 1/4，与均匀情形相同。然而，在中等稀疏区域，该指数依概率收敛于 1/4，再加上一个显式依赖于节点分布的常数。最后，在相对稠密情形下，随着图规模增大，该指数发散至无穷大。我们的结果凸显了均匀情形与非均匀情形之间的鲜明差异。

MSC2020主题分类：60K35; 05C80。
关键词和短语：友谊悖论指数、随机几何图、大数定律。

1. 引言

社交网络中经常会出现友谊悖论：一个人联系对象的平均度总是高于其自身的度 [6, 14, 2, 11]。用图论术语来说，这意味着一个节点的邻居通常比该节点自身具有更高的度。为了量化这一现象，我们将节点的友谊悖论指数定义为其邻居的平均度与该节点自身度数之差。将这一局部量推广到整个网络后，平均友谊悖论指数便可作为衡量友谊悖论强度的全局指标 [2]。为简洁起见，本文将这一平均指数简称为友谊悖论。

友谊悖论是网络数据分析中的重要工具，可用于

降低基于调查的民意测验中的方差、高效估计幂律度分布，并快速检测疾病暴发 [12, 10, 13]。近期研究进一步将其推广到更复杂的结构，包括带属性的加权图 [5]。除实际应用外，还有多项研究探讨了随机图中友谊指数的理论性质。例如， [14] 对各种随机图模型中的预期友谊指数进行了定量分析，而 [16] 则专门刻画了稠密均匀随机几何图中该指数的渐近分布。

随机图是由随机过程形成顶点和边的图，用于建模现实世界的复杂网络。著名的 Erd˝os-R´enyi 模型通过以独立概率 p连接 n 个可能的节点对中的每一对来构造一个图。与 Erd˝os-R´enyi 随机图不同，随机几何图（RGG）是根据单位区间$[0, 1]$ 上的概率密度函数 $f(x)$ 随机放置节点，并将距离低于特定阈值的任意两个节点连接起来而生成的。由于其基于距离的构造，RGG 为建模经验数据 [9, 3, 7]中的空间依赖和几何结构提供了更现实的框架。

在本文中，我们利用马尔可夫不等式来建立随机几何图中友谊指数的弱大数定律。这项任务并不像表面上看起来那样简单。建立弱大数定律需要计算该指数的期望和方差；然而，由于 RGG 固有的边依赖，获得这些矩的简单闭式表达式在分析上是难以处理的。例如，由于友谊悖论由节点的度定义，RGG 中固有的边依赖甚至使得推导简单的度分布变得复杂。我们采用一种基于给定节点空间位置的条件期望的近似方法。

我们的结果表明，在节点均匀分布的均匀随机几何图中，友谊指数依概率收敛至 $1/4$。相反，在非均匀随机几何图中，非均匀的节点分布会导致不同的极限性质。在较稀疏的随机几何图中，友谊指数依概率收敛至 $1/4$，这与均匀情形下观察到的极限相同。对于中度稀疏随机几何图，友谊指数渐近等于 $1/4$ 加上一个取决于具体节点分布的常数。对于更稠密的随机几何图，随着图规模增大，友谊指数趋于无穷大。这些结果凸显了均匀随机几何图与非均匀随机几何图之间的根本差异。

本文其余部分安排如下。第2 节介绍基本概念和必要的引理。第3节推导友谊悖论均值的渐近表达式，而第4 节确立其渐近二阶矩。这些结果

最终汇集于第5节，我们在该节中利用马尔可夫不等式证明友谊悖论指数的弱大数定律。最后，第6 节给出了所有引理的详细证明。

记号：本文中，我们采用巴赫曼–朗道记号进行渐近分析。设 c_1、 c_2 为两个正常数。对于两个正数序列 a_n、 b_n，若 $c_1 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c_2$，记$a_n = \Theta(b_n)$；若 $\frac{a_n}{b_n} \leq c_2$，记 $a_n = O(b_n)$；若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$，则记 $a_n = o(b_n)$或 $b_n = \omega(a_n)$。设 X_n 为一列随机变量。$X_n = O_P(a_n)$表示 $\frac{X_n}{a_n}$ 依概率有界。 $X_n = o_P(a_n)$表示 $\frac{X_n}{a_n}$ 依概率收敛到零。记号$\sum_{i\neq j\neq k\neq l}$表示对满足 $i \neq j$、 $i \neq k$、 $i \neq l$、 $j \neq k$、 $j \neq l$、 $k \neq l$的指标 i、 j、 k、$l \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ 求和。 $I[E]$ 是事件 E的指示函数。 E^c 表示事件 E的补集。对于集合 B, $|B|$表示集合 B中元素的个数。对于函数 $g(x)$， $g^{(k)}(x)$表示 $g(x)$的 k阶导数。我们还用 $f'(x)$、$f''(x)$和 $f'''(x)$分别表示 $f(x)$的一阶、二阶和三阶导数。

2. 预备知识

设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是一个规模为 n 的无向图，其顶点集为 $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, n\}$，边集为 $\mathcal{E} \subseteq \{\{i, j\} : i, j \in \mathcal{V}, i \neq j\}$。邻接矩阵 A 定义如下：若 $\{i, j\} \in \mathcal{E}$，则 $A_{ij} = 1$；否则 $A_{ij} = 0$。节点 i 的度是与其相邻的边的数量，即 $d_i = \sum_j A_{ij}$。

友谊悖论是图的一个汇总统计量，用于衡量这一悖论的强度：平均而言，一个节点的邻居的度大于该节点本身的度 [6, 2]。接下来，我们介绍 [2] 中提出的友谊悖论。

定义 2.1。 设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是一个图。图 $\mathcal{G}$ 中节点 i 的友谊指数定义为 s

$$\Delta_i = \frac{1}{d_i} \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} A_{ij} d_j - d_i,$$

其中，当 $d_i = 0$ 时， $\Delta_i = 0$ 。 $\mathcal{G}$ 的友谊悖论定义为

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i. \tag{1}$$

当且仅当图是正则图时，友谊悖论为零（$d_i = d_j$ 对于所有相邻节点对）。在其他所有情况下，该值都严格大于零 [2]。此外， Δ_i 的最大值为 $n - 2$。

在随机图模型中，任意两个节点之间是否存在一条边由概率分布决定。研究最广泛的版本是 Erdős-Rényi 图，其中每条潜在边都以概率独立地被纳入 p。一个值得注意的变体——随机几何图——常用于对具有几何结构和依赖结构的复杂网络进行建模 [3, 7]。

定义 2.2. 设 $r_n \in [0, 0.5]$ 为一个实数，$f(x)$ 为定义在 $[0, 1]$上的概率密度函数。给定相互独立且服从 $f(x)$的随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，随机几何图（*RGG*）$\mathcal{G}_n(f, r_n)$ 定义如下：

$$A_{ij} = I[d(X_i, X_j) \leq r_n],$$

其中 $A_{ii} = 0$ 且 $d(X_i, X_j) =$最小值$\{|X_i - X_j|, 1 - |X_i - X_j|\}$。

在该模型中，n 个节点根据 $f(x)$ 随机分布在 $[0, 1]$ 上。如果两个节点之间的距离小于 r_n，则它们相连。这种设定使图能够表示具有空间几何结构和结构依赖关系的现实网络。

当 $f(x)$ 为均匀密度时，我们称 $\mathcal{G}_n(f, r_n)$ 为均匀随机几何图。相反，当 $f(x)$ 不是常数时，我们称该模型为非均匀随机几何图。目前的研究大多局限于均匀随机几何图 [4, 8, 7, 17, 18, 20]。然而，非均匀随机几何图近期受到关注，因为它们能够更好地拟合真实网络 [15, 9, 19]。

一般而言，由于边之间存在依赖关系，随机几何图（RGG）的分析复杂度高于 Erdős-Rényi 图。非均匀随机几何图的理论分析比均匀随机几何图更为复杂，尤其是对于友谊悖论这类网络统计量，因为它们是邻接矩阵的非多项式函数。造成这种复杂性的原因之一是，虽然随机几何图中的边通常彼此相关，但在均匀随机几何图中，与固定节点关联的边彼此独立 [20, 17]。然而，这一性质在非均匀情形下并不成立。例如，由于三角不等式以及节点之间共享的空间邻近性，边 A_{12}、A_{13} 和 A_{23} 在均匀和非均匀随机几何图中都存在相关性。但两者有一个关键区别：均匀随机几何图中的边 A_{12} 和 A_{13} 相互独立 [20, 17], ，而在非均匀随机几何图中则彼此相关。

以下　假设对于推导我们的主要结果至关重要　.

假设 *A1*。令 A 从 $\mathcal{G}_n(f, r_n)$ 中抽样。假设 $r_n = o(1)$、$nr_n = \omega(1)$ 和 $f(x) = g(x)$ $I[0 \leq x \leq 1]$，其中 $g(x)$ 满足 $g(x + 1) = g(x) = g(x - 1)$，对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均成立。此外，我们假设 $g(x)$ 有正下界且具有有界四阶导数。

在继续之前，我们简要讨论一下假设 A1，它是我们主要结果的基础。根据引理 2.3（如下所述），节点的期望度为 nr_n量级。条件$r_n = o(1)$ 和 $nr_n = \omega(1)$ 以及假设 A1 意味着网络既不过于稠密，也不过于稀疏。这类假设在网络数据分析中十分常见 [1, 7]。

条件 $f(x) = g(x)I[0 \le x \le 1]$ 满足 g 时，$g(x+1) = g(x) = g(x-1)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$均成立，这表明 $f(x)$ 是定义在周长为 1 的圆上的概率密度函数。该假设对于简洁地表示引理 2.3 中 (2)–(7) 的首项至关重要。若不满足这一假设，所得首项表达式将会复杂得难以处理。

假设 $g(x)$ 具有有界四阶导数是一项技术性要求。它使我们能够使用泰勒展开，确保引理 2.3 中 (2)–(7) 的条件期望余项为 $O(r_n^5)$ 或 $O(r_n^6)$，且余项与X_1无关。

假设 $g(x)$ 与零保持正距离，可确保引理 2.3 中条件期望的首项不会消失。这一假设对于分析处理至关重要。例如，它使我们能够用 d_i 的条件期望首项——$2(n-1)r_n f(X_i)$——来近似 Δ_i，如式 (2) 所推导，并确保该项不会消失。

假设 $f(x)$ 中对概率密度施加的条件A1 较为宽松且容易满足；例如，均匀密度和广泛使用的冯·米塞斯密度都满足这些条件。我们将在第5节中更详细地讨论这些情形。

下面，我们给出一系列引理，为建立弱大数定律奠定基础。此外，这些结果也为假设A1提供了依据。由于这些引理的证明相当冗长，因此推迟到第 6节给出。第一个引理给出了边和三角形等子图出现的条件概率的渐近表达式。这些量是计算友谊悖论的期望和方差所必需的。

为方便起见，我们定义若干记号。令 $\mu_i = \mathbb{E}[d_i \mid X_i]$。给定一个指标 $t \in \{1,2\}$，定义 $\bar{A}_{tl} = A_{tl} - \mathbb{E}[A_{tl}|X_t]$，$P_t = \sum_{j \ne k \ne t} T_{tjk}$，$Q_t = \sum_{j \ne k \ne t} S_{tjk}$，$R_t = \sum_{j \ne k \ne l \ne t} T_{tjk}\bar{A}_{tl}$，其中 $T_{tjk} = A_{tj}A_{jk} - A_{tj}A_{tk}$ 和 $S_{tjk} = A_{tj}A_{tk} - A_{tj}A_{jk}A_{kt}$。

引理 2.3。 在假设 *A1*下，我们有

$$\mathbb{E}[A_{12}|X_1] = 2r_n f(X_1) + \frac{f''(X_1)}{3} r_n^3 + O(r_n^5), \tag{2}$$

$$\mathbb{E}[A_{12}A_{13}|X_1] = 4r_n^2 f^2(X_1) + \frac{4r_n^4}{3} f(X_1)f''(X_1) + O(r_n^6), \tag{3}$$

$$\mathbb{E}[A_{12}A_{23}|X_1] = 4r_n^2 f^2(X_1) + \frac{r_n^4}{3}\big[4(f'(X_1))^2 + 6f(X_1)f''(X_1)\big] + O(r_n^6), \tag{4}$$

$$\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}|X_1] = 3r_n^2 f^2(X_1) + \frac{5r_n^4}{12}\big[(f'(X_1))^2 + 2f(X_1)f''(X_1)\big] + O(r_n^6), \tag{5}$$

$$\mathbb{E}[A_{12}A_{23}A_{24}|X_1] = \mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{34}|X_1] = \mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{14}|X_1] = 8r_n^3 f^3(X_1) + O(r_n^5), \tag{6}$$

$$\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}A_{34}|X_1] = \mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}A_{14}|X_1] = 6r_n^3 f^3(X_1) + O(r_n^5). \tag{7}$$

此处，余项 $O(r_n^5)$和 $O(r_n^6)$ 在式（2）-（7）中均不依赖于 X_1。

引理 2.3 对于近似计算 Δ_i 的期望和 $\mathcal{F}_n$的方差至关重要。更具体地说，它提供了近似条件期望所需的工具$\mathbb{E}[\Delta_1|X_1]$, $\mathbb{E}[\Delta_1^2|X_1]$以及 $\mathbb{E}[\Delta_1\Delta_2|X_1, X_2]$。

下一个引理给出了节点度低于期望度的概率上界。在假设A1 和引理2.3的条件下，该结果可直接由二项分布的 Chernoff 界得出。

引理 2.4。 设 $\delta \in (0,1)$ 为一个固定常数，且 $f(x) \geq \lambda > 0$ 对于某个常数 λ成立。在假设 *A1*下，我们有

$$\mathbb{P}(d_1 \leq \delta\lambda n r_n) \leq \exp\big(-cnr_n(1+o(1))\big),$$

其中， c 是一个正常数，取决于 δ 和 $f(x)$。

以下引理给出了节点度 d_1的高阶条件中心矩的上界。

引理 2.5。 在假设*A1*下，我们有

$$\mathbb{E}\left[(d_1 - \mu_1)^8\right] = O(n^4 r_n^4).$$

以下技术引理对于近似友谊悖论指数的均值和方差是必需的。

引理 2.6。 在假设 *A1*下，我们有

$$\mathbb{E}[P_1^2] = O\big(n^4 r_n^8 + n^3 r_n^3 + n^2 r_n^2\big), \tag{8}$$

$$\mathbb{E}[P_1^4] = O(n^8 r_n^{16} + n^7 r_n^8 + n^6 r_n^6). \tag{9}$$

引理 2.7。 在假设 *A1*下，我们有

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{P_1(d_1-\mu_1)^2}{d_1\mu_1^2}\right| I[d_1 \geq 1]\right] = o(1), \tag{10}$$

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{P_1^2(d_1-\mu_1)^4}{d_1^2\mu_1^4}\right| I[d_1 \geq 1]\right] = o(1). \tag{11}$$

引理 2.8。 在假设 *A1*下，我们有

$$\mathbb{E}[Q_1^2|X_1] = n^4 r_n^4 f^4(X_1) + O(n^3 r_n^3). \tag{12}$$

引理 2.9。 在假设 *A1*下，我们有

$$\mathbb{E}[R_1^2|X_1] = O(n^5 r_n^9 + n^4 r_n^4 + n^3 r_n^3). \tag{13}$$

引理 2.10。 在假设 *A1*下，我们有

$$\mathbb{E}\left[\frac{P_1 R_2}{\mu_1^2 \mu_2^2}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{P_2 R_1}{\mu_1^2 \mu_2^2}\right] = O\left(r_n^3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2 r_n^2}\right), \tag{14}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right] P_1 R_2}{\mu_1^2 \mu_2^2}\right] = O\left(n r_n^4 + r_n + \frac{1}{n r_n}\right), \tag{15}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{R_1 Q_2}{\mu_1^2 \mu_2^2}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{R_2 Q_1}{\mu_1^2 \mu_2^2}\right] = O\left(r_n^3 + \frac{1}{n r_n}\right). \tag{16}$$

引理 2.11。 在假设 *A1*下，我们有

$$\mathbb{E}\left[\frac{R_1 R_2}{\mu_1^2 \mu_2^2}\right] = O\left(n r_n^5 + r_n + \frac{1}{n r_n}\right). \tag{17}$$

引理 2.12。 在假设 *A1*下，我们有

$$\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right] P_1 P_2}{\mu_1^2 \mu_2^2}\right] = O(n r_n^5 + r_n), \tag{18}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{P_1 P_2}{\mu_1^2 \mu_2^2}\right] = O\left(r_n + \frac{1}{n r_n}\right), \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)^2 \mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right] \mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right] P_1 P_2}{\mu_1^2 \mu_2^2}\right] \\
&= \left(n\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[(A_{13}A_{34} - A_{13}A_{14})|X_1\right]}{\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]}\right]\right)^2 + O\left(r_n + \frac{1}{n} + n r_n^4\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

引理 2.13。 在假设 *A1*下，我们有

$$\mathbb{E}\left[\frac{Q_1 Q_2}{\mu_1^2 \mu_2^2}\right] = \left(\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[\left(A_{12}A_{13} - A_{12}A_{13}A_{23}\right)|X_1\right]}{\left(\mathbb{E}[A_{12}|X_1]\right)^2}\right]\right)^2 + O\left(\frac{1}{n r_n}\right).$$

引理 2.14。 在假设 *A1*下，有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right] P_1 Q_2}{\mu_1^2 \mu_2^2}\right] \\
&= n\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[(A_{13}A_{34} - A_{13}A_{14})|X_1]}{\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]}\right] \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[(A_{25}A_{26} - A_{25}A_{26}A_{56})|X_2]}{(\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right])^2}\right] + O\left(r_n + \frac{1}{n r_n}\right).
\end{aligned}$$

3. 友谊悖论的期望

利用引理2.3-引理 2.14，我们现在推导友谊悖论的弱大数定律。为应用马尔可夫不等式，我们首先确定友谊指数的均值和方差的渐近行为。作为初步步骤，本节给出友谊悖论指数的期望的渐近表达式。

友谊悖论指数的期望等价于 $\mathbb{E}[\Delta_1]$。计算该期望的主要障碍在于分母 d_1 中存在随机变量 Δ_1。虽然可以尝试通过全期望公式计算——$\mathbb{E}[\Delta_1] = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta_1 | d_1 = k]\mathbb{P}(d_1 = k)$——但这种方法需要进行涉及二项式系数的复杂求和。此外，固有的边依赖使得 $\mathbb{E}[\Delta_1 | d_1 = k]$ 和 $\mathbb{P}(d_1 = k)$ 的闭式表达在解析上难以求得。一种常用的启发式方法是用其均值 $\mathbb{E}[d_1]$近似分母 d_1，并假设由此产生的误差可以忽略。对于 Erd˝os-R´enyi 图，这种近似是有效的，因为度会集中，使得 $d_1 = \mathbb{E}[d_1] + O_P(\sqrt{\mathbb{E}[d_1]})$。然而，对于非均匀随机几何图，这种集中性并不成立，其度仅满足 $d_1 = \mathbb{E}[d_1] + O_P(\mathbb{E}[d_1])$。我们的分析表明，更稳健的策略是用条件期望 $\mathbb{E}[d_1 | X_1]$替代分母中的 d_1。随后，我们得到期望的渐近表达式，并证明近似误差可以忽略，如命题 3.1所述。

命题 3.1. 在假设*A1*下，我们有

$$\mathbb{E}[\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\Delta_1] = \frac{nr_n^3}{3} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \frac{1}{4} + o(1).$$

有趣的是，根据命题 3.1，友谊悖论的期望由节点分布通过其概率密度的导数所决定。当 $f(x$ 为均匀密度时，期望渐近为 $1/4$。否则，它可能趋近于任意正常数，或发散至无穷大。我们将在后面的章节中进行更详细的讨论

命题 3.1 的证明： 根据定义2.1，若 $d_1 = 0$，则 $\Delta_1 = 0$。因此，我们有 $\Delta_1 = \Delta_1 I[d_1 \geq 1]$ 且 $\mathbb{E}[\Delta_1] = \mathbb{E}[\Delta_1 I[d_1 \geq 1]]$。不难验证

$$\Delta_1 = \frac{P_1}{d_1} = \frac{\mu_1 P_1 - \bar{d}_1 P_1}{\mu_1^2} + \frac{P_1(d_1 - \mu_1)^2}{d_1 \mu_1^2} = \frac{2\mu_1 P_1 - d_1 P_1}{\mu_1^2} + \frac{P_1(d_1 - \mu_1)^2}{d_1 \mu_1^2}. \tag{21}$$

当 $d_1 = 0$, $A_{1j} = 0$ 对所有 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$。在这种情况下，$P_1 = d_1 = 0$。根据引理 2.7 以及条件期望的性质，我们有

$$\mathbb{E}[\Delta_1] = \mathbb{E}\left[\frac{2\mu_1 P_1 - d_1 P_1}{\mu_1^2} I[d_1 \geq 1]\right] + \mathbb{E}\left[\frac{P_1(d_1 - \mu_1)^2}{d_1 \mu_1^2} I[d_1 \geq 1]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{2\mu_1 P_1 - d_1 P_1}{\mu_1^2}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{P_1(d_1-\mu_1)^2}{d_1\mu_1^2} I[d_1 \geq 1]\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[(2\mu_1 P_1 - d_1 P_1)\middle| X_1\right]}{\mu_1^2}\right] + o(1). \tag{22}$$

接下来，我们计算式（22）中的期望。首先，我们计算条件期望。注意，$\mu_1 = \mathbb{E}[d_1|X_1] = (n-1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]$。直接计算可得：

$$d_1 P_1 = \sum_{j\neq k\neq l\neq 1} T_{1jk} A_{1l} + \sum_{j\neq k\neq 1} T_{1jk} - \sum_{j\neq k\neq 1} S_{1jk}, \tag{23}$$
$$2\mu_1 P_1 = 2(n-1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right] \sum_{j\neq k\neq 1} T_{1jk}. \tag{24}$$

对于 $j \neq k \neq l \neq 1$，在给定 X_1 的条件下，$T_{1jk} = A_{1j}A_{jk} - A_{1j}A_{1k}$ 和 A_{1l} 条件独立。对前面两个方程的两边在给定 X_1的条件下取期望，得到

$$\begin{aligned}
2\mathbb{E}\left[\mu_1 P_1 \mid X_1\right] &= 2(n-1)^2(n-2)\big(\mathbb{E}\left[A_{13}A_{34} \mid X_1\right] - \mathbb{E}\left[A_{13}A_{14} \mid X_1\right]\big)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right], \\
\mathbb{E}\left[d_1 P_1 \mid X_1\right] &= (n-1)(n-2)(n-3)\big(\mathbb{E}\left[A_{13}A_{34} \mid X_1\right] - \mathbb{E}\left[A_{13}A_{14} \mid X_1\right]\big)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right] \\
&\quad + (n-1)(n-2)\big(\mathbb{E}\left[A_{13}A_{34} \mid X_1\right] - \mathbb{E}\left[A_{13}A_{14} \mid X_1\right]\big) \\
&\quad - (n-1)(n-2)\big(\mathbb{E}\left[A_{13}A_{14} \mid X_1\right] - \mathbb{E}\left[A_{13}A_{14}A_{12} \mid X_1\right]\big).
\end{aligned}$$

然后，条件期望 $\mathbb{E}\left[(2\mu_1 P_1 - d_1 P_1)|X_1\right]$ 等于

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(2\mu_1 P_1 - d_1 P_1)|X_1\right] \\
&= (n+1)(n-1)(n-2)\big(\mathbb{E}\left[A_{13}A_{34} \mid X_1\right] - \mathbb{E}\left[A_{13}A_{14} \mid X_1\right]\big)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right] \\
&- (n-1)(n-2)\big(\mathbb{E}\left[A_{13}A_{34} \mid X_1\right] - \mathbb{E}\left[A_{13}A_{14} \mid X_1\right]\big) \\
&+ (n-1)(n-2)\big(\mathbb{E}\left[A_{13}A_{14} \mid X_1\right] - \mathbb{E}\left[A_{13}A_{14}A_{12} \mid X_1\right]\big).
\end{aligned}$$

根据方程（3）和引理 4）2.3，上述表达式的第二项等于

$$(n-1)(n-2)\big(\mathbb{E}\left[A_{13}A_{34} \mid X_1\right] - \mathbb{E}\left[A_{13}A_{14} \mid X_1\right]\big) = O(n^2 r_n^4),$$

其中，上界 $O(n^2 r_n^4)$ 不依赖于 X_1。根据引理 2的（2.3），$\mu_1 = 2(n-1)r_n f(X_1) + O(r_n^3)$。回顾一下，$r_n = o(1)$ 和 $f(x)$ 均与零保持正距离。因此可得

$$\frac{\mathbb{E}\left[(2\mu_1 P_1 - d_1 P_1)\middle| X_1\right]}{\mu_1^2} = n\frac{\mathbb{E}\left[A_{13}A_{34} \mid X_1\right] - \mathbb{E}\left[A_{13}A_{14} \mid X_1\right]}{\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]}$$

$$+\frac{\mathbb{E}\left[A_{13}A_{14}\mid X_1\right]-\mathbb{E}\left[A_{12}A_{23}A_{31}\mid X_1\right]}{\left(\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\right)^2}+o(1).$$

鉴于（22），我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Delta_1\right]=n\mathbb{E}&\left[\frac{\mathbb{E}[A_{12}A_{23}|X_1]-\mathbb{E}[A_{12}A_{13}|X_1]}{\mathbb{E}[A_{12}|X_1]}\right]\\&+\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[A_{12}A_{13}|X_1]-\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}|X_1]}{\left(\mathbb{E}[A_{12}|X_1]\right)^2}\right]+o(1).\end{aligned}\tag{25}$$

接下来，我们将计算下文（25）中的两个期望。根据假设 A1，$r_n=o(1)$，且 $f(x)$ 远离零，并具有有界四阶导数。因此，对于某个常数 c，$f(x)\geq c>0$；而 $f(X_1)$、$(f'(X_1))^2$ 以及 $f(X_1)f''(X_1)$ 均有界。由引理 2.3 的方程（2）、方程（3）、方程（4）和方程（5）可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[A_{13}A_{14}\mid X_1\right]-\mathbb{E}\left[A_{12}A_{23}A_{31}\mid X_1\right]}{\left(\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\right)^2}\right]&=\int_0^1\frac{r_n^2f^2(x_1)+O(r_n^4)}{4r_n^2f^2(x_1)+O(r_n^4)}f(x_1)dx_1+o(1)\\&=\frac{1}{4}+o(1),\end{aligned}\tag{26}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[A_{12}A_{23}|X_1]-\mathbb{E}[A_{12}A_{13}|X_1]}{\mathbb{E}[A_{12}|X_1]}\right]&=\int_0^1\frac{\frac{r_n^4}{3}\left[4(f'(x))^2+2f(x)f''(x)\right]+O(r_n^6)}{2r_nf(x)+O(r_n^3)}f(x)dx\\&=\frac{r_n^3}{3}\int_0^1\left[2(f'(x))^2+f(x)f''(x)\right]dx+o(1).\end{aligned}\tag{27}$$

通过分部积分，我们得到

$$\int_0^1 f(x)f''(x)dx=f(x)f'(x)\big|_0^1-\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx.$$

根据假设 A1，$f(x)=g(x)I[0\leq x\leq 1]$，其中 $g(x)$ 满足：对所有 $x\in\mathbb{R}$，$g(x+1)=g(x)=g(x-1)$。注意，$g'(x+1)=g'(x)=g'(x-1)$。于是，$f(1)=g(1)=g(0)=f(0)$，且$f'(1)=g'(1)=g'(0)=f'(0)$。因此，$f(x)f'(x)\big|_0^1=0$，并且

$$\int_0^1 f(x)f''(x)dx=-\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx.$$

由（27）可得

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[A_{12}A_{23}|X_1]-\mathbb{E}[A_{12}A_{13}|X_1]}{\mathbb{E}[A_{12}|X_1]}\right]=\frac{r_n^3}{3}\int_0^1(f'(x))^2dx+o(1).\tag{28}$$

结合式（25）至（28）即可完成命题3.1的证明。

□

4. 友谊悖论的方差

本节计算 Δ_1 的二阶矩以及交叉矩 $\mathbb{E}[\Delta_1\Delta_2]$ ，以刻画它们的渐近行为。这些量对于确定友谊悖论方差的渐近阶至关重要。正如引理2.6至2.11的证明所示，这一推导计算量很大，需要谨慎处理。

命题 4.1。 在假设 *A1* 下，我们有

$$\mathbb{E}\left[\Delta_1\Delta_2\right]+\frac{\mathbb{E}\left[\Delta_1^2\right]-\mathbb{E}\left[\Delta_1\Delta_2\right]}{n}=\left(\mathbb{E}\left[\Delta_1\right]\right)^2(1+o(1)).$$

命题 4.1给出了友谊悖论二阶矩的渐近阶。结合命题3.1，可得到弱大数定律，具体如下一节所示。

命题 4.1的证明： 我们分两步证明命题 4.1 ： 首先，我们求出 $\mathbb{E}[\Delta_1^2]$ 的上界，然后计算 $\mathbb{E}[\Delta_1\Delta_2]$。

步骤 1：求 $\mathbb{E}[\Delta_1^2]$ 的上界。 我们给出 $\mathbb{E}[\Delta_1^2]$ 的一个上界。根据定义 2.1，如果 $d_1=0$，那么 $\Delta_1=0$。于是 $\Delta_1^2=\Delta_1^2 I[d_1\geq 1]$。我们将求出 $\mathbb{E}[\Delta_1^2 I[d_1\geq 1]]$ 的上界。根据（23）和（24），不难验证

$$\begin{aligned}2\mu_1P_1-d_1P_1&=(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\sum_{j\neq k\neq 1}T_{1jk}+\sum_{j\neq k\neq 1}S_{1jk}-\sum_{j\neq k\neq 1}T_{1jk}-\sum_{j\neq k\neq l\neq 1}T_{1jk}\bar{A}_{1l}\\&=(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]P_1+Q_1-P_1-R_1.\end{aligned}\tag{29}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(\frac{2\mu_1P_1-d_1P_1}{\mu_1^2}\right)^2\middle|X_1\right]\\&\leq 4\frac{(n+1)^2\left(\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\right)^2\mathbb{E}[P_1^2|X_1]+\mathbb{E}[Q_1^2|X_1]+\mathbb{E}[P_1^2|X_1]+\mathbb{E}[R_1^2|X_1]}{\mu_1^4}.\end{aligned}\tag{30}$$

当 $d_1=0$， $A_{1j}=0$ 对所有 $j\in\{1,2,\ldots,n\}$。在这种情况下， $P_1=d_1=0$。由引理2.6、引理 2.8和引理 2.9可得

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{2\mu_1P_1-d_1P_1}{\mu_1^2}\right)^2 I[d_1\geq 1]\middle|X_1\right]=\mathbb{E}\left[\left(\frac{2\mu_1P_1-d_1P_1}{\mu_1^2}\right)^2\middle|X_1\right]=O(1+nr_n^3+n^2r_n^6).\tag{31}$$

结合（21）、（31）和引理 2.7 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta_1^2] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\Delta_1^2|X_1]\big] \\ &\le 2\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\frac{2\mu_1 P_1 - d_1 P_1}{\mu_1^2}\right)^2 I[d_1 \ge 1]\middle| X_1\right]\right] + 2\mathbb{E}\left[\left(\frac{P_1(d_1-\mu_1)^2}{d_1\mu_1^2}\right)^2 I[d_1 \ge 1]\right] \\ &= O(1 + nr_n^3 + n^2 r_n^6).\end{aligned}$$

根据命题 3.1，$(\mathbb{E}[\mathcal{F}_n])^2 = \Theta(1 + nr_n^3 + n^2 r_n^6)$。由此可得

$$\frac{\mathbb{E}[\Delta_1^2]}{n} = O\left(\frac{1}{n} + r_n^3 + nr_n^6\right) = o((\mathbb{E}[\mathcal{F}_n])^2). \tag{32}$$

步骤 2：求出 $\mathbb{E}[\Delta_1\Delta_2]$。接下来，我们求 $\mathbb{E}[\Delta_1\Delta_2]$的渐近表达式。根据定义2.1，若 $d_i = 0$，则 $\Delta_i = 0$。因此，$\Delta_1\Delta_2 = \Delta_1\Delta_2 I[d_1 \ge 1]I[d_2 \ge 1]$。此外，若 $d_i = 0$，则 $A_{ij} = 0$ 对所有 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$均成立。在这种情况下，$P_i = d_i = 0$。根据 (21)，$\Delta_1\Delta_2$ 等于

$$\begin{aligned}\Delta_1\Delta_2 = &\frac{2\mu_1 P_1 - d_1 P_1}{\mu_1^2}\frac{2\mu_2 P_2 - d_2 P_2}{\mu_2^2} + \frac{P_1(d_1-\mu_1)^2}{d_1\mu_1^2}\frac{P_2(d_2-\mu_2)^2}{d_2\mu_2^2} I[d_1 \ge 1]I[d_2 \ge 1] \\ &+ \frac{P_1(d_1-\mu_1)^2}{d_1\mu_1^2}\frac{2\mu_2 P_2 - d_2 P_2}{\mu_2^2} I[d_1 \ge 1] + \frac{2\mu_1 P_1 - d_1 P_1}{\mu_1^2}\frac{P_2(d_2-\mu_2)^2}{d_2\mu_2^2} I[d_2 \ge 1].\end{aligned}$$

根据柯西-施瓦茨不等式、方程（31）和引理 2.7，我们有 e

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}\left[\frac{P_1(d_1-\mu_1)^2}{d_1\mu_1^2}\frac{P_2(d_2-\mu_2)^2}{d_2\mu_1^2} I[d_1 \ge 1]I[d_2 \ge 1]\right]\right| \\ &\le \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\frac{P_1(d_1-\mu_1)^2}{d_1\mu_1^2}\right)^2 I[d_1 \ge 1]\right]\mathbb{E}\left[\left(\frac{P_2(d_2-\mu_2)^2}{d_2\mu_1^2}\right)^2 I[d_2 \ge 1]\right]} \\ &= o(1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}\left[\frac{P_1(d_1-\mu_1)^2}{d_1\mu_1^2}\frac{2\mu_2 P_2 - d_2 P_2}{\mu_2^2} I[d_1 \ge 1]\right]\right| \\ &\le \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\frac{P_1(d_1-\mu_1)^2}{d_1\mu_1^2}\right)^2 I[d_1 \ge 1]\right]\mathbb{E}\left[\left(\frac{2\mu_2 P_2 - d_2 P_2}{\mu_2^2}\right)^2\right]} \\ &= o(\sqrt{1 + nr_n^3 + n^2 r_n^6}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}\left[\frac{2\mu_1 P_1 - d_1 P_1}{\mu_1^2}\frac{P_2(d_2-\mu_2)^2}{d_2\mu_2^2} I[d_2 \ge 1]\right]\right| \\ &\le \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\frac{2\mu_1 P_1 - d_1 P_1}{\mu_1^2}\right)^2\right]\mathbb{E}\left[\left(\frac{P_2(d_2-\mu_2)^2}{d_2\mu_2^2}\right)^2 I[d_2 \ge 1]\right]}\end{aligned}$$

$$= o(\sqrt{1+nr_n^3+n^2r_n^6}).$$

由此可得

$$\mathbb{E}\left[\Delta_1\Delta_2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{2\mu_1 P_1 - d_1 P_1}{\mu_1^2}\frac{2\mu_2 P_2 - d_2 P_2}{\mu_2^2}\right] + o(\sqrt{1+nr_n^3+n^2r_n^6}). \tag{33}$$

Ne接下来，我们求得（33）中期望的主导项。回忆（29）中， t

$$2\mu_t P_t - d_t P_t = (n+1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_t\right] P_t + Q_t - P_t - R_t, \qquad t \in \{1,2\}.$$

经过直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\frac{2\mu_1 P_1 - d_1 P_1}{\mu_1^2}\frac{2\mu_2 P_2 - d_2 P_2}{\mu_2^2} \\
&= \frac{(n+1)^2\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right] P_1P_2}{\mu_1^2\mu_2^2} + \frac{Q_1Q_2}{\mu_1^2\mu_2^2} \\
&\quad + \frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right] P_1Q_2}{\mu_1^2\mu_2^2} + \frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right] P_2Q_1}{\mu_1^2\mu_2^2} \\
&\quad - \frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]}{\mu_1^2\mu_2^2}\left(P_1P_2 + P_1R_2\right) - \frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]}{\mu_1^2\mu_2^2}\left(P_1P_2 + P_2R_1\right) \\
&\quad - \frac{Q_1P_2 + Q_1R_2 + Q_2P_1 + Q_2R_1}{\mu_1^2\mu_2^2} + \frac{P_1P_2 + P_1R_2 + P_2R_1 + R_2R_1}{\mu_1^2\mu_2^2}.
\end{aligned} \tag{34}$$

我们首先证明（34）的最后四项阶数可忽略，然后推导其余各项的渐近表达式。由引理 2.12，对于 $t \in \{1,2\}$，有

$$\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_t\right]}{\mu_1^2\mu_2^2} P_1P_2\right] = O\left(r_n^2 + \frac{1}{nr_n} + nr_n^5\right),$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{P_1P_2}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] = O\left(\frac{1}{nr_n} + r_n\right). \tag{35}$$

根据引理 2.6、引理 2.8 、柯西–施瓦茨不等式以及以下假设$r_n = o$（1）和 $nr_n = \omega$（1），可得

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{P_2Q_1}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right] = O\left(\frac{1}{n^4r_n^4}\right)\mathbb{E}\left[|P_2Q_1|\right] = O\left(\frac{\sqrt{n^3r_n^5 + n^2r_n^2 + n^4r_n^8}}{n^2r_n^2}\right) = o(1), \tag{36}$$

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{P_1Q_2}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right] = O\left(\frac{1}{n^4r_n^4}\right)\mathbb{E}\left[|P_1Q_2|\right] = O\left(\frac{\sqrt{n^3r_n^5 + n^2r_n^2 + n^4r_n^8}}{n^2r_n^2}\right) = o(1). \tag{37}$$

根据引理 2.10 和引理 2.11，可得

$$\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]}{\mu_1^2\mu_2^2}P_1R_2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]}{\mu_1^2\mu_2^2}P_2R_1\right] = O\left(nr_n^4 + r_n + \frac{1}{nr_n}\right), \tag{38}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{P_1P_2 + P_1R_2 + P_2R_1 + R_2R_1}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] = O\left(nr_n^5 + r_n + \frac{1}{nr_n}\right). \tag{39}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{Q_1P_2 + Q_1R_2 + Q_2P_1 + Q_2R_1}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] = O\left(r_n + \frac{1}{nr_n}\right). \tag{40}$$

根据P 命题3.1，$(\mathbb{E}[\mathcal{F}_n])^2 = \Theta(1 + nr_n^3 + n^2r_n^6)$。结合（33）-（40）可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Delta_1\Delta_2\right] = \mathbb{E}&\left[\frac{(n+1)^2\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]P_1P_2}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]P_1Q_2}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\frac{Q_1Q_2}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]P_2Q_1}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] + o\big((\mathbb{E}[\mathcal{F}_n])^2\big).\end{aligned}$$

鉴于引理2.11、引理2.12 和引理2.13，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Delta_1\Delta_2\right] &= \left(n\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[(A_{13}A_{34} - A_{13}A_{14})|X_1\right]}{\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]}\right]\right)^2 + O\left(r_n + nr_n^4 + \frac{1}{nr_n}\right) \\ &\quad + 2n\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[(A_{13}A_{34} - A_{13}A_{14})|X_1]}{\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]}\right]\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[(A_{25}A_{26} - A_{25}A_{26}A_{56})|X_2]}{(\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right])^2}\right] \\ &\quad + \left(\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[\left(A_{12}A_{13} - A_{12}A_{13}A_{23}\right)|X_1\right]}{\left(\mathbb{E}[A_{12}|X_1]\right)^2}\right]\right)^2 + o(\sqrt{1 + nr_n^3 + n^2r_n^6}) \\ &= \left(\mathbb{E}\left[\Delta_1\right]\right)^2 + O\left(r_n + nr_n^4 + \frac{1}{nr_n}\right) + o(\sqrt{1 + nr_n^3 + n^2r_n^6}).\end{aligned}$$

由（32）和 $(\mathbb{E}[\Delta_1])^2 = (\mathbb{E}[\mathcal{F}_n])^2 = \Theta(1 + nr_n^3 + n^2r_n^6)$ 这一事实，我们得出

$$\mathbb{E}\left[\Delta_1\Delta_2\right] + \frac{\mathbb{E}\left[\Delta_1^2\right] - \mathbb{E}\left[\Delta_1\Delta_2\right]}{n} = \left(\mathbb{E}\left[\Delta_1\right]\right)^2(1 + o(1)).$$

那么命题4.1的证明就完成了。

□

5. 友谊悖论的弱大数定律

在本节中，我们基于命题3.1 和命题 4.1的结果，借助马尔可夫不等式建立友谊悖论的弱大数定律。

定理 5.1. 设假设 *A1* 成立。则对任意正常数 ϵ，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathcal{F}_n}{\mathbb{E}[\mathcal{F}_n]} - 1\right| > \epsilon\right) = 0, \tag{41}$$

其中，期望 $\mathbb{E}[\mathcal{F}_n]$ 具有以下渐近表达式：

$$\mathbb{E}[\mathcal{F}_n] = \frac{nr_n^3}{3}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \frac{1}{4} + o(1). \tag{42}$$

定理 5.1的证明： 注意，$\mathcal{F}_n$ 的二阶矩可表示如下：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathcal{F}_n^2\right] &= \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}\mathbb{E}\left[\Delta_i\Delta_j\right] + \frac{1}{n^2}\sum_i \mathbb{E}\left[\Delta_i^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\Delta_1\Delta_2\right] + \frac{\mathbb{E}\left[\Delta_1^2\right] - \mathbb{E}\left[\Delta_1\Delta_2\right]}{n}.\end{aligned}$$

根据命题 4.1，$\mathcal{F}_n$ 的方差满足：

$$\mathbb{E}[(\mathcal{F}_n - \mathbb{E}\left[\mathcal{F}_n\right])^2] = \mathbb{E}\left[\mathcal{F}_n^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[\mathcal{F}_n\right]\right)^2 = o\Big(\left(\mathbb{E}\left[\mathcal{F}_n\right]\right)^2\Big).$$

于是，对于任意正常数 ϵ，由马尔可夫不等式可得

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathcal{F}_n}{\mathbb{E}[\mathcal{F}_n]} - 1\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}[(\mathcal{F}_n - \mathbb{E}\left[\mathcal{F}_n\right])^2]}{\epsilon^2\left(\mathbb{E}\left[\mathcal{F}_n\right]\right)^2} = o(1).$$

命题3.1 给出了式（42）。由此定理5.1的证明完成。

□

根据定理5.1，友谊悖论 $\mathcal{F}_n$ 依概率收敛于其期望。定理5.1 展示了均匀随机几何图与非均匀随机几何图在性质上的显著差异。对于均匀随机几何图 $\mathcal{G}_n(f,\ r_n)$，其中 $f(x)$ 等于常数 1，友谊悖论渐近等于1 4，即

-

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{4} + o_P(1).$$

相比之下，对于非均匀随机几何图 $\mathcal{G}_n(f, r_n)$，友谊悖论 $\mathcal{F}_n$ 呈现出不同的行为，具体取决于图的稀疏性。在相对稀疏区域，其中$nr_n^3 = o(1)$，友谊悖论渐近等价于 1 4，与均匀情形的行为相似。在中等稀疏区域，其中 $nr_n^3 \to \lambda$ 对某个常数 $\lambda > 0$成立,- 友谊悖论收敛至 1 4 加上一个取决于 $f(x)$ 的导数的常数，如下所示：

-

$$\mathcal{F}_n = \frac{\lambda}{3}\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx + \frac{1}{4} + o_P(1).$$

如果 $f(x)$ 不是常数，这个极限就不同于 $_{14}$，后者是相对稀疏情形或均匀情形下的取值。在相对稠密区域 $nr_n^3 = \omega(1)$ 内，友谊悖论不再有上界，而是呈现出 nr_n^3量级的增长。

假设A1 并不具有限制性；均匀密度以及广泛使用的冯·米塞斯分布均满足这些条件。回顾一下，冯·米塞斯密度在 $[0,1]$ 上由下式给出

$$f(x) = g(x)I[0 \le x \le 1], \qquad g(x) = \frac{e^{\kappa \cos(2\pi x - \mu)}}{\mathcal{I}_0}, \tag{43}$$

其中 $\kappa \ge 0$、 $\mu \in [0,1]$以及

$$\mathcal{I}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\kappa\cos(x)}dx.$$

当 $\kappa = 0$时，该密度退化为 $[0,1]$上的均匀分布。随着 κ 增大，该分布越来越集中于均值 μ 附近。当 κ较大时，它渐近趋于均值为 μ 、方差为$\frac{1}{\kappa}$ 的正态分布。

函数 $g(x)$在(43)中是光滑的。其导数有界，且任意阶连续。此外，它以常数$(e^{\kappa}I_0(\kappa))^{-1}$为严格下界，从而保证密度在整个定义域内保持为正。鉴于余弦函数的周期为 2π，函数 $g(x)$满足边界条件$g(x+1) = g(x-1) = g(x)$，对所有 $x \in \mathbb{R}$成立。冯·米塞斯分布满足假设A1。

将定理 5.1 专门应用于冯·米塞斯分布，我们得到如下推论：

推论 5.2. 设 $f(x)$ 是由 *(43)* 给出的冯·米塞斯密度，且假设 *A1*成立。则

$$\mathcal{F}_n = nr_n^3\tau_f + \frac{1}{4} + o_P(1).$$

其中

$$\tau_f = \frac{4\pi^2\kappa^2}{3\mathcal{I}_0^2}\int_0^1 e^{2\kappa\cos(2\pi x-\mu)}\sin^2(2\pi x-\mu)dx. \tag{44}$$

式（44）中的积分在解析上难以求解。为展示 $\mathcal{F}_n$ 的极限值对分布参数的敏感性，我们计算了不同参数范围内 τ_f 的数值 κ 和 μ ，结果见表1。 τ_f 的值不随均值 μ变化。这一结果与随机几何图的几何结构以及 f（x）是圆上的密度这一假设在直觉上相符。由于距离度量具有平移不变性，且 g（x）是周期函数，改变均值方向 μ 不会改变边的联合分布。然而， τ_f 的值对集中参数 κ高度敏感。回想一下，当 $\kappa = 0$ 时，冯·米塞斯分布就是均匀分布。

当 κ较小时， τ_f 也较小；友谊指数的极限值更接近1/4，即均匀情形下的取值。当 κ较大时， τ_f 则显著增大。

TABLE 1τ_f的数值。

$(\kappa,\ \mu)$	(0.1, 0.1)	(0.5, 0.1)	(1.0, 0.1)	(5, 0.1)	(10, 0.1)
τ_f	0.0657	1.6439	6.5293	118.4242	352.3377
$(\kappa,\ \mu)$	(0.1, 0.3)	(0.5, 0.3)	(1.0, 0.3)	(5, 0.3)	(10, 0.3)
τ_f	0.0657	1.6439	6.5293	118.4242	352.3377
$(\kappa,\ \mu)$	(0.1, 0.5)	(0.5, 0.5)	(1.0, 0.5)	(5, 0.5)	(10, 0.5)
τ_f	0.0657	1.6439	6.5293	118.4242	352.3377

6. 引理证明

本节将详细证明这些引理。回顾以下记号： $\mu_i = \mathbb{E}[d_i \mid X_i]$,

$_A_{tl} = A_{tl} - \mathbb{E}[A_{tl}|X_t]$, $P_t = \sum_{j\neq k\neq t} T_{tjk}$, $Q_t = \sum_{j\neq k\neq t} S_{tjk}$, $R_t = \sum_{j\neq k\neq l\neq t} T_{tjk}A_{tl}$, 其中$T_{tjk} = A_{tj}A_{jk} - A_{tj}A_{tk}$ 且 $S_{tjk} = A_{tj}A_{tk} - A_{tj}A_{jk}A_{kt}$ 且 $t \in \{1, 2\}$。

6.1. 引理*2.3* 的证明

公式（2）—（5）已在 [21]中证明。我们只需证明（6）和（7）。

（6）的证明：首先，我们考察（6）中的第一个等式。根据（3）以及条件期望的性质，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A_{12}A_{23}A_{24}|X_1] &= \mathbb{E}[A_{12}\mathbb{E}[A_{23}A_{24}|X_1, X_2]|X_1] \\ &= (2r_n)^2\mathbb{E}[A_{12}f^2(X_2)|X_1] + \frac{4r_n^4}{3}\mathbb{E}[A_{12}f(X_2)f''(X_2)|X_1] + O(r_n^6). \quad (45)\end{aligned}$$

根据假设， $f(x)$具有有界四阶导数。由于区间 $[0, 1]$ 是紧致的，因此 f 及其二阶导数 f'' 在该定义域上一致有界。于是

$$\left|\frac{4r_n^4}{3}\mathbb{E}[A_{12}f(X_2)f''(X_2)|X_1]\right| \leq \frac{4r_n^4}{3}\mathbb{E}[A_{12}|f(X_2)f''(X_2)||X_1] = O(r_n^4)\mathbb{E}[A_{12}|X_1] = O(r_n^5). \quad (46)$$

此外 呃，式（45）中第一项的条件期望可以表示为 s

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A_{12}f^2(X_2)|X_1] &= I[r_n \leq X_1 \leq 1 - r_n]\int_{X_1-r_n}^{X_1+r_n} f^3(x)dx \\ &\quad + I[0 \leq X_1 \leq r_n]\left(\int_0^{X_1+r_n} f^3(x)dx + \int_{1-r_n+X_1}^1 f^3(x)dx\right)\end{aligned}$$

$$+ I[1 - r_n \le X_1 \le 1] \left(\int_{X_1 - r_n}^{1} f^3(x)dx + \int_{0}^{r_n + X_1 - 1} f^3(x)dx \right). \quad (47)$$

对于 $X_1 - r_n \le x \le X_1 + r_n$，我们有 $|x - X_1| \le r_n$。根据泰勒展开以及 $f(x)$ 具有有界四阶导数这一假设，我们有

$$\begin{aligned} \int_{X_1 - r_n}^{X_1 + r_n} f^3(x)dx &= \int_{X_1 - r_n}^{X_1 + r_n} \left[f^3(X_1) + 3f^2(X_1)f'(X_1)(x - X_1) + O(r_n^2) \right] dx \\ &= 2r_n f^3(X_1) + O(r_n^3). \end{aligned} \quad (48)$$

对于 $0 \le X_1 \le r_n = o(1)$，我们有 $-1 \le X_1 - r_n \le 0$。根据微积分中的变量替换，并假设 $f(x) = g(x)I[0 \le x \le 1]$，其中 $g(x)$ 满足 $g(x + 1) = g(x) = g(x - 1)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均成立，我们有

$$\begin{aligned} \int_{1 - r_n + X_1}^{1} f^3(x)dx &= \int_{1 - r_n + X_1}^{1} g^3(x)I[0 \le x \le 1]dx \\ &= \int_{X_1 - r_n}^{0} g^3(x + 1)I[0 \le x + 1 \le 1]dx \\ &= \int_{X_1 - r_n}^{0} g^3(x)dx. \end{aligned} \quad (49)$$

注意 $X_1 \in [0, r_n]$ 并且对于 $x \in [0, 2r_n] \subset [0, 1]$，$g(X_1) = f(X_1)$。然后根据（49）以及与（48）中类似的论证，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{0}^{X_1 + r_n} f^3(x)dx + \int_{1 - r_n + X_1}^{1} f^3(x)dx &= \int_{X_1 - r_n}^{X_1 + r_n} g^3(x)dx \\ &= 2r_n g^3(X_1) + O(r_n^3) \\ &= 2r_n f^3(X_1) + O(r_n^3). \end{aligned} \quad (50)$$

同理，对于 $1 - r_n \le X_1 \le 1$，我们有

$$\begin{aligned} &\int_{X_1 - r_n}^{1} f^3(x)dx + \int_{0}^{r_n + X_1 - 1} f^3(x)dx \\ &= \int_{X_1 - r_n}^{1} g^3(x)dx + \int_{1}^{r_n + X_1} g^3(x - 1)I[0 \le x - 1 \le 1]dx \\ &= \int_{X_1 - r_n}^{1} g^3(x)dx + \int_{1}^{r_n + X_1} g^3(x)dx \\ &= \int_{X_1 - r_n}^{r_n + X_1} g^3(x)dx \\ &= 2r_n g^3(X_1) + O(r_n^3) \\ &= 2r_n f^3(X_1) + O(r_n^3). \end{aligned} \quad (51)$$

将式（45）至（51）合并，可得式（6）中第一个条件期望的渐近表达式。

现在考虑（6）中的第二个条件期望。结合条件期望的性质和引理2.3，可以验证

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{34}|X_1] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{34}|X_1,X_2,X_3]|X_1]\\ &= \mathbb{E}[A_{12}A_{13}\mathbb{E}[A_{34}|X_3]|X_1]\\ &= \mathbb{E}[A_{12}A_{13}(2r_nf(X_3)+O(r_n^3))|X_1]\\ &= 2r_n\mathbb{E}[A_{12}A_{13}f(X_3)|X_1]+O(r_n^5)\\ &= 2r_n\mathbb{E}[A_{13}f(X_3)\mathbb{E}[A_{12}|X_1,X_3]|X_1]+O(r_n^5)\\ &= (2r_n)^2\mathbb{E}[A_{13}f(X_1)f(X_3)|X_1]+O(r_n^5)\\ &= (2r_n)^3f^3(X_1)+O(r_n^5).\end{aligned}$$

这里，最后一个等式可由与（47）-（51）中所用论证类似的论证得出。

最后，我们计算（6）中的第三个条件期望。不难看出

$$\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{14}|X_1] = (\mathbb{E}[A_{12}|X_1])^3 = (2r_n)^3f^3(X_1)+O(r_n^5).$$

（7）的证明：根据（2）和（5），（7）中的第二个条件期望很容易得到如下结果：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}A_{14}|X_1] &= \mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}|X_1]\mathbb{E}[A_{14}|X_1]\\ &= \left(3r_n^2f^2(X_1)+O(r_n^4)\right)\left(2r_nf(X_1)+O(r_n^3)\right)\\ &= 6r_n^3f^3(X_1)+O(r_n^5).\end{aligned}$$

现在考虑（7）中的第一个条件期望。不难验证

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}A_{34}|X_1] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}A_{34}|X_1,X_2,X_3]|X_1]\\ &= \mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}\mathbb{E}[A_{34}|X_3]|X_1]\\ &= 2r_n\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}f(X_3)|X_1]+O(r_n^5).\end{aligned}\tag{52}$$

我们通过考虑三种不同情形来计算（52）中的期望：$X_1 \in (r_n,\ 1-r_n)$，$X_1 \in (0,\ r_n)$，以及 $X_1 \in (1-r_n,\ 1)$。

假设 $X_1 \in (r_n, 1-r_n)$。在此条件下，事件 $\{A_{12}A_{13}A_{23}=1\}$ 以两种不同的构型发生：

(a) $X_2 \in (X_1, X_1+r_n)$与 $X_3 \in (X_1, X_1+r_n)$或 $X_3 \in (X_2-r_n, X_1)$；

(b) $X_2 \in (X_1 - r_n, X_1)$与 $X_3 \in (X_1 - r_n, X_1)$或 $X_3 \in (X_1, X_2 + r_n)$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}f(X_3)|X_1] = &\int_{X_1}^{X_1+r_n} f(x_2)dx_2 \left(\int_{X_1}^{X_1+r_n} f^2(x_3)dx_3 + \int_{x_2-r_n}^{X_1} f^2(x_3)dx_3\right) \\ &+ \int_{X_1-r_n}^{X_1} f(x_2)dx_2 \left(\int_{X_1-r_n}^{X_1} f^2(x_3)dx_3 + \int_{X_1}^{x_2+r_n} f^2(x_3)dx_3\right).\end{aligned} \tag{53}$$

通过对以 X_1 为中心的 $f(x_2)$ 和 $f^2(x_3)$ 进行四阶泰勒展开，很容易得出

$$\int_{X_1}^{X_1+r_n} f(x_2)dx_2 = f(X_1)r_n + \frac{f'(X_1)}{2}r_n^2 + \frac{f''(X_1)}{6}r_n^3 + O(r_n^4), \tag{54}$$

$$\int_{X_1}^{X_1+r_n} f^2(x_3)dx_3 = f^2(X_1)r_n + f(X_1)f'(X_1)r_n^2 + O(r_n^3). \tag{55}$$

当 $X_2 \in (X_1,\ X_1 + r_n)$ 和 $x_3 \in (X_2 - r_n,\ X_1)$ 时，我们有 $|X_1 - x_3| \le r_n$ 和 $|X_1 - X_2 + r_n| \le 2r_n$。于是

$$\int_{X_2-r_n}^{X_1} f^2(x_3)dx_3 = f^2(X_1)(X_1 - X_2 + r_n) - f(X_1)f'(X_1)(X_1 - X_2 + r_n)^2 + O(r_n^3).$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\int_{X_1}^{X_1+r_n} f(x_2)dx_2 \int_{X_2-r_n}^{X_1} f^2(x_3)dx_3 \\ &= f^2(X_1)(X_1 + r_n)\int_{X_1}^{X_1+r_n} f(x_2)dx_2 - f^2(X_1)\int_{X_1}^{X_1+r_n} x_2 f(x_2)dx_2 \\ &\quad - f(X_1)f'(X_1)\int_{X_1}^{X_1+r_n} f(x_2)(X_1 - x_2 + r_n)^2 dx_2.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}&f^2(X_1)(X_1 + r_n)\int_{X_1}^{X_1+r_n} f(x_2)dx_2 \\ &= f^3(X_1)(X_1 r_n + r_n^2) + \frac{f^2(X_1)f'(X_1)}{2}r_n^2(X_1 + r_n) + \frac{f''(X_1)f^2(X_1)(X_1 + r_n)}{6}r_n^3 + O(r_n^4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&f^2(X_1)\int_{X_1}^{X_1+r_n} x_2 f(x_2)dx_2 \\ &= f^3(X_1)X_1 r_n + \frac{f^2(X_1)f'(X_1)X_1 + f^3(X_1)}{2}r_n^2\end{aligned}$$

$$+\frac{2f^2(X_1)f'(X_1)+X_1f^2(X_1)f''(X_1)}{6}r_n^3+O(r_n^4).$$

and

$$f(X_1)f'(X_1)\int_{X_1}^{X_1+r_n}f(x_2)(X_1-x_2+r_n)^2dx_2=O(r_n^4).$$

Then

$$\int_{X_1}^{X_1+r_n}f(x_2)dx_2\int_{X_2-r_n}^{X_1}f^2(x_3)dx_3=\frac{1}{2}f^3(X_1)r_n^2-\frac{f^2(X_1)f'(X_1)}{3}r_n^3+O(r_n^4). \tag{56}$$

于是由（54）、（55）和（56）可得

$$\begin{aligned}&\int_{X_1}^{X_1+r_n}f(x_2)dx_2\left(\int_{X_1}^{X_1+r_n}f^2(x_3)dx_3+\int_{X_2-r_n}^{X_1}f^2(x_3)dx_3\right)\\&=\frac{3}{2}f^3(X_1)r_n^2+\frac{7f^2(X_1)f'(X_1)}{6}r_n^3+O(r_n^4).\end{aligned}$$

同样，我们可以得到

$$\begin{aligned}&\int_{X_1-r_n}^{X_1}f(x_2)dx_2\left(\int_{X_1-r_n}^{X_1}f^2(x_3)dx_3+\int_{X_1}^{X_2+r_n}f^2(x_3)dx_3\right)\\&=\frac{3}{2}f^3(X_1)r_n^2-\frac{7f^2(X_1)f'(X_1)}{6}r_n^3+O(r_n^4).\end{aligned}$$

根据（53），对于 $r_n\le X_1\le 1-r_n$，我们有

$$\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}f(X_3)|X_1]=3r_n^3f^2(X_1)+O(r_n^4), \tag{57}$$

这与（52）一起意味着

$$\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}A_{34}|X_1]=6r_n^3f^2(X_1)+O(r_n^5). \tag{58}$$

假设 $X_1\in[0,r_n)$。若 $X_2\in[0,X_1]$，则 $X_3\in(X_1,\ X_2+r_n)$ 或 $X_3\in(0,\ X_1)$ 或 $X_3\in(1+X_1-r_n,\ 1)$。若 $X_2\in(1+X_1-r_n,\ 1)$，则 $X_3\in[0,X_1]$ 或 $X_3\in[1+X_1-r_n,1]$ 或 $X_3\in[X_1,X_2+r_n-1]$。若 $X_2\in[X_1,r_n]$，则 $X_3\in[0,X_1+r_n]$ 或 $X_3\in[X_2+1-r_n]$。若 $X_2\in[r_n,X_1+r_n]$，则 $X_3\in(X_1,\ X_1+r_n)$ 或 $X_3\in(X_2-r_n,\ X_1)$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}f(X_3)|X_1]=&\int_0^{X_1}f(x_2)dx_2\left(\int_0^{x_2+r_n}f^2(x_3)dx_3+\int_{1+X_1-r_n}^1f^2(x_3)dx_3\right)\\&+\int_{1+X_1-r_n}^1f(x_2)dx_2\left(\int_0^{x_2+r_n-1}f^2(x_3)dx_3+\int_{1+X_1-r_n}^1f^2(x_3)dx_3\right)\\&+\int_{X_1}^{r_n}f(x_2)dx_2\left(\int_0^{X_1+r_n}f^2(x_3)dX_3+\int_{X_2+1-r_n}^1f^2(x_3)dX_3\right)\end{aligned}$$

$$+\int_{r_n}^{X_1+r_n} f(x_2)dx_2 \int_{x_2-r_n}^{X_1+r_n} f^2(x_3)dx_3.$$

根据假设 A1，$f(x) = g(x)I[0 \le x \le 1]$ 其中 $g(x)$ 满足 $g(x+1) = g(x) = g(x-1)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$。通过对定积分进行变量替换，我们得到

$$\int_{1+X_1-r_n}^{1} f^2(x_3)dx_3 = \int_{X_1-r_n}^{0} g^2(y+1)dy = \int_{X_1-r_n}^{0} g^2(y)dy$$
$$\int_{x_2+1-r_n}^{1} f^2(x_3)dx_3 = \int_{x_2-r_n}^{0} g^2(y+1)dy = \int_{x_2-r_n}^{0} g^2(y)dy,$$

$$\begin{aligned}\int_{1+X_1-r_n}^{1} f(x_2) \int_{X_1-r_n}^{x_2+r_n-1} f^2(x_3)dx_3dx_2 &= \int_{X_1-r_n}^{0} f(x_2+1) \int_{X_1-r_n}^{x_2+r_n} f^2(x_3)dx_3dx_2 \\ &= \int_{X_1-r_n}^{0} f(x_2) \int_{X_1-r_n}^{x_2+r_n} f^2(x_3)dx_3dx_2.\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A_{12}A_{13}A_{23}f(X_3)|X_1] = &\int_{0}^{X_1} f(x_2)dx_2 \int_{X_1-r_n}^{x_2+r_n} f^2(x_3)dx_3 + \\ &+ \int_{X_1-r_n}^{0} f(x_2) \int_{X_1-r_n}^{x_2+r_n} f^2(x_3)dx_3dx_2 \\ &+ \int_{X_1}^{X_1+r_n} f(x_2)dx_2 \int_{x_2-r_n}^{X_1+r_n} f^2(x_3)dx_3 \\ = &\int_{X_1-r_n}^{X_1} f(x_2)dx_2 \int_{X_1-r_n}^{x_2+r_n} f^2(x_3)dx_3 \\ &+ \int_{X_1}^{X_1+r_n} f(x_2)dx_2 \int_{x_2-r_n}^{X_1+r_n} f^2(x_3)dx_3,\end{aligned}$$

wh这与（53）相同。因此，我们得出（58）对 $X_1 \in [0, r_n)$ 成立 .

类似地，容易证明（58）对 $X_1 \in [1-r_n, 1]$ 成立。至此，证明完成。

6.2. 引理*2.4*的证明

给定 X_1，d_1 服从二项分布 $B(n-1, p_n)$，其中 $p_n = \mathbb{E}[A_{12}|X_1]$。由引理 2.3，有 $p_n = 2r_n f(X_1) + O(r_n^3)$；此外，假设 A1 保证$f(x) \ge \lambda > 0$。由 Chernoff 界可得

$$\mathbb{P}(d_1 \le \delta\lambda n r_n|X_1) \le \mathbb{P}(d_1 \le \delta\mu_1|X_1) \le e^{-\frac{(1-\delta)^2\mu_1}{2}} \le e^{-(1-\delta)^2 r_n\lambda(1+o(1))}.$$

至此，证明完成。

□

6.3. 引理的证明*2.5*

注意， $\mathbb{E}\left[(d_1-\mu_1)^8\right]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[(d_1-\mu_1)^8|X_1]]$ 和

$$\mathbb{E}[(d_1-\mu_1)^8|X_1]=\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5,j_6,j_7,j_8\geq 1}\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1j_1}\bar{A}_{1j_2}\bar{A}_{1j_3}\bar{A}_{1j_4}\bar{A}_{1j_5}\bar{A}_{1j_6}\bar{A}_{1j_7}\bar{A}_{1j_8}|X_1\big].$$

若 $j_1\notin\{j_2,j_3,j_4,j_5,j_6,j_7,j_8\}$，则给定 X_1 后， A_{1j_1} 与 A_{1j_t} 独立（$2\leq t\leq 8$）。在这种情况下，我们有

$$\mathbb{E}\left[\prod_{t=1}^{8}\bar{A}_{1j_t}\Big|X_1\right]=\mathbb{E}\left[\bar{A}_{1j_1}|X_1\right]\mathbb{E}\left[\prod_{t=2}^{8}\bar{A}_{1j_t}\Big|X_1\right]=0.$$

因此， $j_1\in\{j_2,j_3,j_4,j_5,j_6,j_7,j_8\}$。类似结果对每个 j_t 都成立。每个指标 j_t 必须等于另一个指标 $j_s(s\neq t\ s,\ t\in\{1,2,\ldots,8\})$。于是 $|\{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5,j_6,j_7,j_8\}|\leq 4$。注意 A_{1j} 和 $A_{1k}\ (k\neq s)$ 在给定 X_1 和 $\mathbb{E}[A_{1j}^m|X_1]=O(r_n)$ 的条件下条件独立，对所有正整数 m (引理2.3) 均成立。于是

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(d_1-\mu_1)^8|X_1]&=C_1\sum_{j_1\neq j_2\neq j_3\neq j_4\geq 1}\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1j_1}^2\bar{A}_{1j_2}^2\bar{A}_{1j_3}^2\bar{A}_{1j_4}^2|X_1\big]+\sum_{j_1\geq 1}\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1j_1}^8|X_1\big]\\&\quad+C_2\sum_{j_1\neq j_2\neq j_3\geq 1}\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1j_1}^2\bar{A}_{1j_2}^2\bar{A}_{1j_3}^4|X_1\big]+C_3\sum_{j_1\neq j_2\neq j_3\geq 1}\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1j_1}^2\bar{A}_{1j_2}^3\bar{A}_{1j_3}^3|X_1\big]\\&\quad+\sum_{j_1\neq j_2\geq 1}\Big(C_4\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1j_1}^2\bar{A}_{1j_2}^6|X_1\big]+C_5\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1j_1}^3\bar{A}_{1j_2}^5|X_1\big]+C_6\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1j_1}^4\bar{A}_{1j_2}^4|X_1\big]\Big)\\&=O(n^4r_n^4),\end{aligned}$$

where C_1， C_2， C_3， C_4， C_5， C_6 均为正数常量。于是证明完成。

□

6.4. 引理*2.6*的证明：

首先，我们证明（8）。 P_1 的二阶矩可以表示为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[P_1^2]&=\sum_{\substack{j\neq k\neq 1\\ j_1\neq k_1\neq 1}}\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\big]\\&=\sum_{\substack{j\neq k\neq 1\\ j_1\neq k_1\neq 1\\ \{j,k\}\cap\{j_1,k_1\}=\emptyset}}\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\big]+\sum_{\substack{j\neq k\neq 1\\ j_1\neq k_1\neq 1\\ |\{j,k\}\cap\{j_1,k_1\}|=1}}\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\big]+\sum_{\substack{j\neq k\neq 1\\ j_1\neq k_1\neq 1\\ \{j,k\}=\{j_1,k_1\}}}\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\big]\end{aligned}\tag{59}$$

假设 $\{j,k\}\cap\{j_1,k_1\}=\emptyset$。存在 $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ 个指标四元组 $(j,\ k,\ j_1,\ k_1)$，使得 $j\neq k\neq 1$、 $j_1\neq k_1\neq 1$ 和 $\{j,k\}\cap\{j_1,k_1\}=\emptyset$。给定 X_1， T_{1jk} 为

与 $T_{1j_1k_1}$ 相互独立。由于 f（x）假设具有有界四阶导数，因此（f'（X_1）^{2}和 f（X_1）f''（X_1）也有界。根据引理 3 和 4 中的 2.3，式（59）中的第一个求和等于

$$\begin{aligned}&(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[T_{123}T_{145}|X_1\big]\big]\\&=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[T_{123}|X_1]\big]\big[\mathbb{E}[T_{145}]|X_1\big]\big]=O(n^4r_n^8).\end{aligned}\tag{60}$$

设 $|\{j,k\}\cap\{j_1,k_1\}|=1$。类似地，这类指标四元组至多有 n^3 个（j，k，j_1，k_1）。若 $j=j_1$，由引理 6）中的（2.3，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}|X_1\big]\big]&=\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{jk}A_{jk_1}|X_1\big]\big]-\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{jk}A_{1k_1}|X_1\big]\big]\\&\quad-\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{1k}A_{jk_1}|X_1\big]\big]+\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{1k}A_{1k_1}|X_1\big]\big]\\&=O(r_n^5).\end{aligned}\tag{61}$$

若 $j=k_1$，由引理 6）和（7）的（2.3，则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}|X_1\big]\big]&=\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{jk}A_{1j_1}A_{j_1j}|X_1\big]\big]-\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{jk}A_{1j_1}|X_1\big]\big]\\&\quad-\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{jj_1}A_{1j_1}A_{1k}|X_1\big]\big]+\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{1k}A_{1j_1}|X_1\big]\big]\\&=O(r_n^5).\end{aligned}\tag{62}$$

情形 $k=j_1$ 可按（62）中的方法类似地进行上界估计。令 $k=k_1$。注意 $\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{jk}A_{1j_1}A_{j_1k}|X_1\big]\leq\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{jk}A_{1j_1}|X_1\big]=O(r_n^3)$。由引理 6）和（7）的（2.3，则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}|X_1\big]\big]&=\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{jk}A_{1j_1}A_{j_1k}|X_1\big]\big]-\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{jk}A_{1j_1}A_{1k}|X_1\big]\big]\\&\quad-\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{1k}A_{1j_1}A_{j_1k}|X_1\big]\big]+\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{1k}A_{1j_1}|X_1\big]\big]\\&=O(r_n^3).\end{aligned}\tag{63}$$

那么（59）中的第二个求和等于

$$\sum_{\substack{j\neq k\neq1\\j_1\neq k_1\neq1\\\{j,k\}\cap\{j_1,k_1\}|=1}}\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\big]=O(n^3r_n^3).\tag{64}$$

设 $\{j,k\}=\{j_1,k_1\}$。这类指标四元组最多有 n^2 个（j，k，j_1，k_1）。注意 $|T_{1jk}|\leq A_{1j}A_{jk}+A_{1j}A_{1k}$ 且 $|T_{1j_1k_1}|\leq2$。由引理 2.3 中的（3）和（4），可得

$$\sum_{\substack{j\neq k\neq1\\j_1\neq k_1\neq1\\\{j,k\}=\{j_1,k_1\}}}\mathbb{E}\big[|T_{1jk}T_{1j_1k_1}|\big]\leq2n^2\mathbb{E}[A_{1j}A_{jk}+A_{1j}A_{1k}]=O(n^2r_n^2).\tag{65}$$

结合（59）、（60）、（64）和（65），可得方程（8）。

接下来，我们证明方程（9）。P_1 的四阶矩可以写成

$$\mathbb{E}\left[P_1^4\right]=\sum_{s=2}^{8}\sum_{\substack{j_1\neq k_1\neq 1,j_2\neq k_2\neq 1\\ j_3\neq k_3\neq 1,j_4\neq k_4\neq 1\\ |\{j_1,k_1,j_2,k_2,j_3,k_3,j_4,k_4\}|=s}}\mathbb{E}[T_{1j_1k_1}T_{1j_2k_2}T_{1j_3k_3}T_{1j_4k_4}]. \tag{66}$$

若 $|\{j_1,k_1,j_2,k_2,j_3,k_3,j_4,k_4\}|=8$，则至多有 n^8 个这样的八元组。在这种情况下，变量 $T_{1j_1k_1}$、$T_{1j_2k_2}$、$T_{1j_3k_3}$和 $T_{1j_4k_4}$ 在给定 X_1时条件独立。由引理2.3，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_{1j_1k_1}T_{1j_2k_2}T_{1j_3k_3}T_{1j_4k_4}]&=\mathbb{E}[\mathbb{E}[T_{1j_1k_1}T_{1j_2k_2}T_{1j_3k_3}T_{1j_4k_4}|X_1]]\\&=\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[T_{1j_1k_1}|X_1]\mathbb{E}[T_{1j_2k_2}|X_1]\mathbb{E}[T_{1j_3k_3}|X_1]\mathbb{E}[T_{1j_4k_4}|X_1]\big]=O(r_n^{16}).\end{aligned}$$

对应于 $s=8$ 的（66）中的求和等于 $O\left(n^8r_n^{16}\right)$。

若 $|\{j_1,k_1,j_2,k_2,j_3,k_3,j_4,k_4\}|=7$，则至多有 n^7 个这样的八元组。在这种情况下，存在互不相同的指标j_{t_1}、k_{t_1}、j_{t_2}、k_{t_2}（$t_1\neq t_2$、t_1、$t_2\in\{1,2,3,4\}$），使得它们与其余指标互不相同。不失一般性，设 $t_1=1$ 和 $t_2=2$。则$T_{1j_1k_1}$ 与 $T_{1j_2k_2}$ 在给定 X_1时条件独立，且 $T_{1j_1k_1}T_{1j_2k_2}$ 与$T_{1j_3k_3}T_{1j_4k_4}$ 在给定 X_1时条件独立。注意$|T_{1j_3k_3}T_{1j_4k_4}|\leq 4$。由引理2.3，我们有

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[T_{1j_1k_1}T_{1j_2k_2}T_{1j_3k_3}T_{1j_4k_4}|X_1]]=\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[T_{1j_1k_1}|X_1]\mathbb{E}[T_{1j_2k_2}|X_1]\mathbb{E}[T_{1j_3k_3}T_{1j_4k_4}|X_1]\big]=O(r_n^8).$$

对应于 $s=7$ 在（66）中的求和等于 $O\left(n^7r_n^8\right)$。

假设 $|\{j_1,k_1,j_2,k_2,j_3,k_3,j_4,k_4\}|=6$。这样的八元组至多有 n^6 个。注意到 $|T_{1jk}|\leq A_{1j}A_{jk}+A_{1j}A_{1k}$。于是

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[T_{1j_1k_1}T_{1j_2k_2}T_{1j_3k_3}T_{1j_4k_4}]|&\leq\mathbb{E}[|T_{1j_1k_1}||T_{1j_2k_2}||T_{1j_3k_3}||T_{1j_4k_4}|]\\&\leq\mathbb{E}[(A_{1j_1}A_{j_1k_1}+A_{1j_1}A_{1k_1})(A_{1j_2}A_{j_2k_2}+A_{1j_2}A_{1k_2})\\&\quad\times(A_{1j_3}A_{j_3k_3}+A_{1j_3}A_{1k_3})(A_{1j_4}A_{j_4k_4}+A_{1j_4}A_{1k_4})].\end{aligned} \tag{67}$$

我们将证明，(67) 中乘积展开式的每一项的期望为$O(r_n^6)$。(67) 中乘积展开式的第一项的期望为

$$\mathbb{E}[A_{1j_1}A_{j_1k_1}A_{1j_2}A_{j_2k_2}A_{1j_3}A_{j_3k_3}A_{1j_4}A_{j_4k_4}].$$

When

$$A_{1j_1}A_{j_1k_1}A_{1j_2}A_{j_2k_2}A_{1j_3}A_{j_3k_3}A_{1j_4}A_{j_4k_4}=1,$$

顶点集 $\{1, j_1, k_1, j_2, k_2, j_3, k_3, j_4, k_4\}$ 和边 $A_{1j_1}, A_{j_1k_1}, A_{1j_2}, A_{j_2k_2}, A_{1j_3}, A_{j_3k_3}, A_{1j_4}, A_{j_4k_4}$构成一个连通图，记为 G_1。如果 $|\{j_1, k_1, j_2, k_2, j_3, k_3, j_4, k_4\}| = 6$，那么 G_1 有 7 个节点。因此， G_1 有一棵恰好包含 6 条边的生成树，记为 T。令$\mathcal{E}[T]$表示 T的边集。那么

$$\mathbb{E}[A_{1j_1}A_{j_1k_1}A_{1j_2}A_{j_2k_2}A_{1j_3}A_{j_3k_3}A_{1j_4}A_{j_4k_4}] \leq \mathbb{E}[\prod_{e\in\mathcal{E}[T]} A_e] = O(r_n^6),$$

其中，最后一项是通过反复应用引理2的（2.3）六次得到的。（67）中乘积展开后其余各项的期望也可以用类似方法估计。因此，与 $s = 6$ 在（66）中对应的求和为 O（$n^6r_n^6$）。

类似地，与 s在（66）中对应的求和为 O（$n^sr_n^s$），其中 $s \in \{2, 3, 4, 5\}$。总之，我们得到（9）。引理2.6的证明至此完成。

□

6.5. 引理*2.7*的证明

注意到，由柯西–施瓦茨不等式可由（11）推出（10）。因此，我们只需证明（11）。容易利用柯西–施瓦茨不等式验证

$$\mathbb{E}\left[\frac{P_1^2(d_1-\mu_1)^4}{d_1^2\mu_1^4}I[d_1 \geq 1]\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\frac{P_1^4}{\mu_1^7}\right]\mathbb{E}\left[\frac{(d_1-\mu_1)^8}{d_1^4\mu_1}I[d_1 \geq 1]\right]}. \tag{68}$$

由引理2.6 以及 $\mu_1 = \Theta$（nr_n）这一事实可得

$$\mathbb{E}\left[\frac{P_1^4}{\mu_1^7}\right] = O\left(\frac{1}{(nr_n)^7}\right)\mathbb{E}\left[P_1^4\right] = O\left(nr_n^9 + r_n + \frac{1}{nr_n}\right). \tag{69}$$

令 $\epsilon \in (0, 1)$ 为一个较小的常数。则

$$\mathbb{E}\left[\frac{(d_1-\mu_1)^8}{d_1^4\mu_1}I[d_1 \geq 1]\right] = \mathbb{E}\left[\frac{(d_1-\mu_1)^8}{d_1^4\mu_1}I[1 \leq d_1 \leq \epsilon nr_n]\right] + \mathbb{E}\left[\frac{(d_1-\mu_1)^8}{d_1^4\mu_1}I[d_1 > \epsilon nr_n]\right]. \tag{70}$$

注意 $|d_1 - \mu_1| \leq 2\mu_1$ 当 $1 \leq d_1 \leq \epsilon nr_n$。根据引理2.4，容易验证

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{(d_1-\mu_1)^8}{d_1^4\mu_1}I[1 \leq d_1 \leq \epsilon nr_n]\right] &\leq \mathbb{E}\left[\frac{2^8\mu_1^8}{\mu_1}I[1 \leq d_1 \leq \epsilon nr_n]\right] \\ &= O(n^7r_n^7)\mathbb{P}\left(1 \leq d_1 \leq \epsilon nr_n\right) \\ &= O(n^7r_n^7)e^{-cnr_n(1+o(1))}\end{aligned}$$

$$= e^{-cnr_n(1+o(1))}. \tag{71}$$

此外，由引理2.5 可得

$$\mathbb{E}\left[\frac{(d_1-\mu_1)^8}{d_1^4\mu_1} I[d_1 > \epsilon n r_n]\right] = O\left(\frac{1}{n^5 r_n^5}\right)\mathbb{E}\left[(d_1-\mu_1)^8\right] = O\left(\frac{1}{nr_n}\right). \tag{72}$$

结合假设 $r_n = o(1)$ 与（68）–（72），我们完成引理2.7的证明。

□

6.6. 引理*2.8*的证明

注意，

$$\mathbb{E}[Q_1^2|X_1] = \sum_{\substack{j\neq k\neq 1\\ j_1\neq k_1\neq 1}} \mathbb{E}\big[S_{1jk}S_{1j_1k_1}|X_1\big]. \tag{73}$$

假设 $\{j,k\}\cap\{j_1,k_1\} = \emptyset$。至多有 n^4 个这样的指标四元组（j， k， j_1， k_1）。此外，S_{1jk} 与$S_{1j_1k_1}$ 在给定 X_1的条件下条件独立。由引理2.3，可得

$$\mathbb{E}\big[S_{1jk}S_{1j_1k_1}|X_1\big] = \mathbb{E}\big[S_{1jk}|X_1\big]\mathbb{E}\big[S_{1j_1k_1}|X_1\big] = r_n^4 f^4(X_1) + O(r_n^6). \tag{74}$$

假设 $|\{j,k\}\cap\{j_1,k_1\}| = 1$。至多有 n^3 个这样的指标四元组（j， k， j_1， k_1）。不失一般性，设 $j = j_1$。注意 $A_{1j}A_{1k} \geq A_{1j}A_{jk}A_{k1}$。于是

$$\big|\mathbb{E}\big[S_{1jk}S_{1j_1k_1}|X_1\big]\big| \leq 4\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{1k}A_{1k_1}|X_1\big] = O(r_n^3). \tag{75}$$

假设 $\{j,k\} = \{j_1,k_1\}$。此类指标四元组（j， k， j_1， k_1）至多有 n^2 个。于是

$$\big|\mathbb{E}\big[S_{1jk}S_{1j_1k_1}|X_1\big]\big| \leq \mathbb{E}\big[A_{1j}A_{1k}|X_1\big] = O(r_n^2). \tag{76}$$

结合（73）—（76）可得（12）。至此，证明完成。

□

6.7. 引理 *2.9* 的证明

注意

$$\mathbb{E}[R_1^2|X_1] = \sum_{\substack{j\neq k\neq l\neq 1\\ j_1\neq k_1\neq l_1\neq 1}} \mathbb{E}[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1l}\bar{A}_{1l_1}\big|X_1]. \tag{77}$$

若 $l \notin \{j_1, k_1, l_1\}$，则 A_{1l} 在给定 X_1 的条件下与 $T_{1jk}T_{1j_1k_1}A_{1l_1}$ 条件独立。在这种情况下，

$$\mathbb{E}[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1l}\bar{A}_{1l_1}\big|X_1] = \mathbb{E}[\bar{A}_{1l}\big|X_1]\mathbb{E}[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1l_1}\big|X_1] = 0.$$

于是 $l \in \{j_1, k_1, l_1\}$。同理，我们有 $l_1 \in \{j, k, l\}$。

假设 $l = l_1$。注意，式（77）中的求和遍历所有指标 $j \neq k \neq l \neq 1$和 $j_1 \neq k_1 \neq l_1 \neq 1$。因此 $l = l_1 \notin \{j, k, j_1, k_1\}$。若 $\{j, k\} \cap \{j_1, k_1\} = \emptyset$，这样的指标六元组至多有 n^5 个（j， k， l， j_1， k_1， l_1）。此外， T_{1jk}， $T_{1j_1k_1}$ 和 $\bar{A}_{1l}$ 在给定 X_1 的条件下条件独立。由引理2.3 可得

$$\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1l}^2|X_1\big] = \mathbb{E}\big[T_{1jk}\big|X_1\big]\mathbb{E}\big[T_{1j_1k_1}\big|X_1\big]\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1l}^2|X_1\big] = O(r_n^9).$$

若 $|\{j, k\} \cap \{j_1, k_1\}| = 1$，这样的指标六元组至多有$n^4$ 个（j， k， l， j_1， k_1， l_1）。由（61）-（63），我们有

$$\mathbb{E}\Big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1l}^2|X_1\Big] = \mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}|X_1\big]\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1l}^2|X_1\big] = O(r_n^4).$$

若 $\{j, k\} = \{j_1, k_1\}$，则此类指标六元组（j、 k、 l、 j_1、 k_1、 l_1）至多有 n^3 个。因此我们有

$$|\mathbb{E}\Big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1l}^2|X_1\Big]| \leq 2\mathbb{E}\big[|T_{1jk}||X_1\big]\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1l}^2|X_1\big] = O(r_n^3).$$

因此，对 $l = l_1$ 在（77）中的求和，我们有

$$\sum_{\substack{j\neq k\neq l\neq 1\\ j_1\neq k_1\neq l\neq 1}} \mathbb{E}[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1l}^2\big|X_1] = O(n^5r_n^9 + n^4r_n^4 + n^3r_n^3). \tag{78}$$

假设 $l \neq l_1$ 且 $|\{l, j, k\} \cap \{l_1, j_1, k_1\}| = 2$。此类指标六元组（$j$， k， l， j_1， k_1， l_1）至多有 n^4 个。回顾一下， $l \in \{j_1, k_1, l_1\}$ 且 $l_1 \in \{j, k, l\}$。否则，（77）中的期望为零。因此有以下四种情况：(a) $l = j_1$ 且 $l_1 = j$; (b) $l = j_1$ 且 $l_1 = k$; (c) $l = k_1$且 $l_1 = j$; (d) $l = k_1$ 且 $l_1 = k$。我们通过考察这种情况来计算（77）中的期望。注意，$\{j, k\} \cap \{j_1, k_1\} = \emptyset$ 且 $A_{1l}A_{1l} = A_{1l}$（$1 - \mathbb{E}[A_{1l}|X_1]$）。若 $l = j_1$ 且$l_1 = j$，则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1j_1}\bar{A}_{1j}|X_1\big] &= \mathbb{E}\big[A_{1j}(A_{jk} - A_{1k})A_{1j_1}(A_{j_1k_1} - A_{1k_1})\bar{A}_{1j_1}\bar{A}_{1j}|X_1\big]\\ &= (1 - \mathbb{E}[A_{1l}|X_1])^2\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}|X_1\big]\\ &= O(r_n^8).\end{aligned}$$

若 $l = j_1$ 且 $l_1 = k$，则

$$\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1j_1}\bar{A}_{1k}|X_1\big] = \mathbb{E}\big[A_{1j}(A_{jk} - A_{1k})A_{1j_1}(A_{j_1k_1} - A_{1k_1})\bar{A}_{1j_1}\bar{A}_{1k}|X_1\big]$$

$$= (1 - \mathbb{E}[A_{1j_1}|X_1])\mathbb{E}\big[T_{1jk}\bar{A}_{1k}|X_1\big]\mathbb{E}\big[T_{1j_1k_1}|X_1\big]$$
$$= O(r_n^6).$$

若 $l = k_1$ 且 $l_1 = j$，则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1j}\bar{A}_{1k_1}|X_1\big] &= \mathbb{E}\big[A_{1j}(A_{jk} - A_{1k})A_{1j_1}(A_{j_1k_1} - A_{1k_1})\bar{A}_{1j}\bar{A}_{1k_1}|X_1\big]\\ &= (1 - \mathbb{E}[A_{1j}|X_1])\mathbb{E}\big[T_{1jk}|X_1\big]\mathbb{E}\big[T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1k_1}|X_1\big]\\ &= O(r_n^6).\end{aligned}$$

如果 $l = k_1$ 且 $l_1 = k$，则

$$\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1k}\bar{A}_{1k_1}|X_1\big] = \mathbb{E}\big[T_{1jk}\bar{A}_{1k}|X_1\big]\mathbb{E}\big[T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1k_1}|X_1\big] = O(r_n^4).$$

因此，对于在 $l \neq l_1$ 和 $|\{l, j, k\} \cap \{l_1, j_1, k_1\}| = 2$ 上取的（77）中的求和，我们有

$$\sum_{\substack{j\neq k\neq l\neq 1\\ j_1\neq k_1\neq l_1\neq 1\\ |\{l,j,k\}\cap\{l_1,j_1,k_1\}|=2\\ l\neq l_1}} \mathbb{E}[T_{1jk}T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1l}\bar{A}_{1l_1}\big|X_1] = O(n^4 r_n^4). \tag{79}$$

假设 $\{j, k, l\} = \{j_1, k_1, l_1\}$。至多有 n^3 个这样的指标六元组（j，k，l，j_1，k_1，l_1）。注意$|A_{1l_1}| \leq 2$ 且$|T_{1j_1k_1}| \leq 2$。在 $\{l, j, k\} = \{l_1, j_1, k_1\}$ 上取的（77）中的求和有上界

$$\sum_{\substack{j\neq k\neq l\neq 1\\ j_1\neq k_1\neq l_1\neq 1\\ \{l,j,k\}=\{l_1,j_1,k_1\}}} \big|\mathbb{E}\big[\big(T_{1jk}T_{1j_1k_1}\bar{A}_{1l}\bar{A}_{1l_1}\big|X_1\big]\big| \leq 4\mathbb{E}\big[\big(A_{1j}A_{jk} + A_{1j}A_{1k}\big)\big(A_{1l} + \mathbb{E}[A_{1l}|X_1]\big)|X_1\big]$$
$$= O(n^3 r_n^3). \tag{80}$$

综合（77）-（80）可得（13）。于是证明完成。

□

6.8. 引理*2.10*的证明

我们给出（14）的详细证明。（15）和（16）的证明类似。为简洁起见，我们省略这些证明。注意，

$$\mathbb{E}\left[\frac{P_1R_2}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[P_1R_2|X_1, X_2]}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] = \sum_{\substack{j\neq k\neq 1\\ j_1\neq k_1\neq l\neq 2}} \mathbb{E}\left[\frac{1}{\mu_1^2\mu_2^2}\mathbb{E}[T_{1jk}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{2l}|X_1, X_2]\right]. \tag{81}$$

我们将通过考虑 $l \notin \{1,j,k\}$ 和 $l \in \{1,j,k\}$ 的情况，推导条件期望 $\mathbb{E}[T_{1jk}T_{2j_1k_1}A_{2l}|X_1,X_2]$ 的一个上界。

若 $l \notin \{1,j,k\}$，则 $T_{1jk}T_{2j_1k_1}$ 和 A_{2l} 在给定 X_1 和 X_2的条件下条件独立；因此，我们有

$$\mathbb{E}[T_{1jk}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{2l}|X_1,X_2] = \mathbb{E}[T_{1jk}T_{2j_1k_1}|X_1,X_2]\mathbb{E}[\bar{A}_{2l}|X_1,X_2] = 0.$$

对满足以下条件的指标求和： $j \neq k \neq 1$ 和 $j_1 \neq k_1 \neq l \neq 2$，且 $l \notin \{1,j,k\}$ 在（81）中，该求和为零。

若 $l = 1$，则 j_1， $k_1 \geq 3$。设 $\{j,k\} \cap \{j_1,k_1\} = \emptyset$ 且 j， $k \geq 3$。此类指标元组至多有 n^4 个 $\{j,k,j_1,k_1,l\}$。此外， T_{1jk}， $T_{2j_1k_1}$ 和 $\bar{A}_{21}$ 在给定 X_1 和 X_2的条件下条件独立。由引理 2.3 可得

$$\mathbb{E}[T_{1jk}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{21}|X_1,X_2] = \bar{A}_{21}\mathbb{E}[T_{1jk}|X_1,X_2]\mathbb{E}[T_{2j_1k_1}|X_1,X_2] = O(r_n^8).$$

因此，式（81）中对满足 $j \neq k \neq 1$ 且 $j_1 \neq k_1 \neq l \neq 2$的指标进行求和，并限定在 $l = 1$ 且 $\{j,k\} \cap \{j_1,k_1\} = \emptyset$ 且 j的情形下， $k \geq 3$其阶为 $O(r_n^4)$ 。

若 $l = 1$， 且 $|\{j,k\} \cap \{j_1,k_1\}| = 3$，则此类指标元组至多有 n^3 个 $\{j,k,j_1,k_1,l\}$。注意， $|A_{21}| \leq 2$， $\mu_1 = \Theta(nr_n)$ 以及 $\mu_2 = \Theta(nr_n)$ 。若 $j = j_1$，则式（81）中的期望可作如下上界估计：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{1}{\mu_1^2\mu_2^2}|\mathbb{E}[T_{1jk}T_{2jk_1}\bar{A}_{21}|X_1,X_2]|\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\frac{1}{\mu_1^2\mu_2^2}\mathbb{E}[A_{1j}A_{jk}A_{2j}A_{jk_1}|X_1,X_2]\right] + 2\mathbb{E}\left[\frac{1}{\mu_1^2\mu_2^2}\mathbb{E}[A_{1j}A_{jk}A_{2j}A_{2k_1}|X_1,X_2]\right] \\
&\quad + 2\mathbb{E}\left[\frac{1}{\mu_1^2\mu_2^2}\mathbb{E}[A_{1j}A_{kk}A_{2j}A_{jk_1}|X_1,X_2]\right] + 2\mathbb{E}\left[\frac{1}{\mu_1^2\mu_2^2}\mathbb{E}[A_{1j}A_{1k}A_{2j}A_{2k_1}|X_1,X_2]\right] \\
&= O\left(\frac{1}{n^4r_n^4}\right)\Big(\mathbb{E}\left[A_{1j}A_{jk}A_{2j}A_{jk_1}\right] + \mathbb{E}[A_{1j}A_{jk}A_{2j}A_{2k_1}] \\
&\quad + \mathbb{E}[A_{1j}A_{kk}A_{2j}A_{jk_1}] + \mathbb{E}[A_{1j}A_{1k}A_{2j}A_{2k_1}]\Big) \\
&= O\left(\frac{r_n^4}{n^4r_n^4}\right).
\end{aligned}$$

这里，最后一个等式是通过反复应用引理 2.3 中的第一个方程四次得到的。对于 $j = k_1$ 或 $k = j_1$ 或 $k = k_1$ 的情形，也可以类似地进行上界估计。因此，式（81）中对满足 $j \neq k \neq 1$ 且 $j_1 \neq k_1 \neq l \neq 2$的指标求和，并限定在$l = 1$ 且 $|\{j,k\} \cap \{j_1,k_1\}| = 3$的情形下，其阶为 $O\left(\frac{1}{n}\right)$。

若 $l = 1$ 且 $\{j,k\} = \{j_1,k_1\}$，这样的指标元组 $\{j,k,j_1,k_1,l\}$ 至多有 n^2 个。注意，$|A_{21}| \leq 2$、 $|T_{2j_1k_1}| \leq 2$ 和 $|T_{1jk}| \leq A_{1j}(A_{jk} + A_{1k})$ 。在这种情况下，我们有

$$|\mathbb{E}[T_{1jk}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{21}|X_1,X_2]| \leq 4\mathbb{E}[|T_{1jk}||X_1,X_2] = O(r_n^2).$$

因此，式（81）中对满足 $j \neq k \neq 1$ 且 $j_1 \neq k_1 \neq l \neq 2$ 的指标求和，且限于 $l = 1$ 且 $\{j, k\} = \{j_1, k_1\}$ 的情形，其阶为 $O\left(\frac{1}{n^2 r_n^2}\right)$。

若 $l = 1$、$j = 2$ 和 $k \neq j_1 \neq k_1$，则此类指标元组 $\{j, k, j_1, k_1, l\}$ 至多有 n^3 个。在这种情况下，我们有

$$\mathbb{E}[T_{12k} T_{2j_1k_1} \bar{A}_{21} | X_1, X_2] = \bar{A}_{21} \mathbb{E}[T_{12k} | X_1, X_2] \mathbb{E}[T_{2j_1k_1} | X_1, X_2] = O(r_n^4).$$

因此，(81) 中对这些指标求和的阶为 $O\left(\frac{1}{n}\right)$。

若 $l = 1$、$j = 2$、$k = j_1$ 或 $k = k_1$，则此类指标元组 $\{j, k, j_1, k_1, l\}$ 至多有 n^2 个。在这种情况下，我们有

$$\mathbb{E}[|T_{12k} T_{2j_1k_1} \bar{A}_{21}|] \leq 4\mathbb{E}[A_{12}(A_{2k} + A_{1k})] = O(r_n^2).$$

Thus，(81) 中对这些指标的求和上界为 $O\left(\frac{1}{n^2 r_n^2}\right)$。

若 $l = 1$、$k = 2$ 和 $j \neq j_1 \neq k_1$，则此类指标元组 $\{j, k, j_1, k_1, l\}$ 至多有 n^3 个。在这种情况下，我们有

$$\mathbb{E}[T_{1j2} T_{2j_1k_1} \bar{A}_{21} | X_1, X_2] = \bar{A}_{21} \mathbb{E}[T_{1j2} | X_1, X_2] \mathbb{E}[T_{2j_1k_1} | X_1, X_2] = O(r_n^4).$$

因此，对这些指标求和，式（81）中的求和项的阶为 $O\left(\frac{1}{n}\right)$。

若 $l = 1$、$k = 2$、$j = j_1$ 或 $k = k_1$，则此类指标元组 $\{j, k, j_1, k_1, l\}$ 至多有 n^2 个。在这种情况下，我们有

$$\mathbb{E}[|T_{1j2} T_{2j_1k_1} \bar{A}_{21}|] \leq 4\mathbb{E}[(A_{1j_1} A_{j_1k_1} + A_{1j_1} A_{1k_1}) | X_1, X_2] = O(r_n^2).$$

因此，式（81）中仅对这些指标求和的结果有上界 $O\left(\frac{1}{n^2 r_n^2}\right)$。

若 $l = j$，则 $l = j \geq 3$，且 $l = j \notin \{k, j_1, k_1\}$。设 $k \notin \{j_1, k_1\}$、k，j_1，$k_1 \geq 3$。此类指标元组 $\{j, k, j_1, k_1, l\}$ 至多有 n^3 个。在这种情况下，我们有

$$\mathbb{E}[T_{1jk} T_{2j_1k_1} \bar{A}_{2j} | X_1, X_2] = \mathbb{E}[T_{1jk} \bar{A}_{2j} | X_1, X_2] \mathbb{E}[T_{2j_1k_1} | X_1, X_2] = O(r_n^7).$$

因此，式（81）中对这些指标的求和为 $O\left(\frac{1}{n}\right)$。

假设 $l = j$。若 $k = j_1$ 或 $k = k_1$，且 k，j_1，$k_1 \geq 3$，则这样的指标元组 $\{j, k, j_1, k_1, l\}$ 至多有 n^2 个。在这种情况下，我们有

$$|\mathbb{E}[T_{1jk} T_{2j_1k_1} \bar{A}_{2j} | X_1, X_2]| \leq 4\mathbb{E}[|T_{1jk}| | X_1, X_2] = O(r_n^2).$$

因此，对这些指标求和得到的式（81）为 $O\left(\frac{1}{n^2 r_n^2}\right)$。对于 $k = 2$或 $j_1 = 1$ 或 $k_1 = 1$，也有类似结果。

若 $l=k$，则 $k=l\geq 3$，且 $l=k\notin\{j,j_1,k_1\}$。设 $j\neq j_1\neq k_1\geq 3$。这样的指标元组 $\{j,k,j_1,k_1,l\}$ 至多有 n^4 个。在这种情况下，我们有

$$\mathbb{E}[T_{1jk}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{2k}|X_1,X_2]=\mathbb{E}[T_{1jk}\bar{A}_{2k}|X_1,X_2]\mathbb{E}[T_{2j_1k_1}|X_1,X_2]=O(r_n^7).$$

因此，关于这些指标的式（81）中的求和的阶为 $O(r_n^3)$。

假设 $l=k$。若 $j=j_1\neq k_1\geq 3$，则此类指标元组 $\{j,k,j_1,k_1,l\}$ 至多有 n^3 个。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\frac{1}{\mu_1^2\mu_2^2}\mathbb{E}[|T_{1jk}T_{2jk_1}\bar{A}_{2k}||X_1,X_2]\right]\\&\leq O\left(\frac{1}{n^4r_n^4}\right)\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[(A_{1j}A_{jk}A_{jk_1}+A_{1j}A_{1k}A_{2k_1})(A_{2k}+\mathbb{E}[A_{2k}|X_1])|X_1,X_2]\right]\\&=O\left(\frac{1}{n^4}\right).\end{aligned}$$

因此，关于这些指标的式（81）中的求和的阶为 $O\left(\frac{1}{n}\right)$。

假设 $l=k$。若 $j=k_1\neq j_1\geq 3$，则此类指标元组 $\{j,k,j_1,k_1,l\}$ 至多有 n^3 个。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\frac{1}{\mu_1^2\mu_2^2}\mathbb{E}[|T_{1jk}T_{2j_1j}\bar{A}_{2k}||X_1,X_2]\right]\\&\leq O\left(\frac{1}{n^4r_n^4}\right)\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[(A_{1j}A_{jk}A_{2j_1}+A_{1j}A_{1k}A_{2j_1})(A_{2k}+\mathbb{E}[A_{2k}|X_1])|X_1,X_2]\right]\\&=O\left(\frac{1}{n^4}\right).\end{aligned}$$

因此，关于这些指标的式（81）中的求和的阶为 $O\left(\frac{1}{n}\right)$。

如果 $l=k$、$j=2$ 和 $j_1\neq k_1\geq 3$，则至多有 n^3 个这样的指标元组 $\{j,k,j_1,k_1,l\}$。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\frac{1}{\mu_1^2\mu_2^2}\mathbb{E}[|T_{12k}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{2k}||X_1,X_2]\right]\\&\leq O\left(\frac{1}{n^4r_n^4}\right)\mathbb{E}\left[(A_{12}A_{2k}+A_{12}A_{1k})(A_{2j_1}A_{j_1k_1}+A_{2j_1}A_{2k_1})\right]\\&=O\left(\frac{1}{n^4}\right).\end{aligned}$$

因此，(81) 中对这些指标的求和为 $O\left(\frac{1}{n}\right)$ 阶。

如果 $l=k$ 且 $j=2$ 且 $j_1=1$ 或 $k_1=1$，则此类指标元组$\{j,k,j_1,k_1,l\}$至多有 n^2 个。在这种情况下，我们有

$$\mathbb{E}[|T_{12k}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{2k}||X_1,X_2]\leq 4\mathbb{E}[(A_{2k}A_{2j_1}A_{j_1k_1}+A_{2k}A_{2j_1}A_{2k_1})|X_1,X_2]=O(r_n^2).$$

因此，81中对这些指标求和的结果为 $O\left(\frac{1}{n^2 r_n^2}\right)$。

总之，我们得到（14）。式（15）和式（16）的证明类似。为简洁起见，此处略去。

□

6.9. 引理 *2.11*的证明

注意

$$\mathbb{E}\left[\frac{R_1R_2}{\mu_1^2\mu_2^2}\right]=\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[R_1R_2|X_1,X_2]}{\mu_1^2\mu_2^2}\right]=\sum_{\substack{j\neq k\neq l\neq 1\\ j_1\neq k_1\neq l_1\neq 2}}\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[T_{1jk}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{1l}\bar{A}_{2l_1}\big|X_1,X_2]}{\mu_1^2\mu_2^2}\right]. \tag{82}$$

若 $l\notin\{2,j_1,k_1,l_1\}$，则 A_{1l} 在给定 X_1 的条件下与 $T_{1jk}T_{2j_1k_1}A_{2l_1}$ 条件独立，X_2。于是

$$\mathbb{E}\Big[T_{1jk}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{1l}\bar{A}_{2l_1}\big|X_1,X_2\Big]=\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{2l_1}\big|X_1,X_2\big]\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1l}\big|X_1,X_2\big]=0.$$

因此，$l\in\{2,j_1,k_1,l_1\}$。类似地，我们有 $l_1\in\{1,j,k,l\}$。接下来，我们分别为式（82）中对应于以下情形的求和推导上界：$l=l_1$，$l=2$，$l=j_1$，以及 $l=k_1$。

(c1)。若 $l=l_1$，则 $l=l_1\geq 3$ 且 $l=l_1\notin\{j,k,j_1,k_1\}$。对于 $\{j,k\}\cap\{j_1,k_1\}=\emptyset$ 和j，k，j_1，$k_1\geq 3$，由引理 2.3 可得

$$\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{1l}^2\big|X_1,X_2\big]=\mathbb{E}\big[T_{1jk}\big|X_1,X_2\big]\mathbb{E}\big[T_{2j_1k_1}\big|X_1,X_2\big]\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1l}^2\big|X_1,X_2\big]=O(r_n^9).$$

此外，这类指标元组（n^5（j，k，l，j_1，k_1，l_1）至多有 O 个。因此，式（82）中对这些指标的求和阶为 $O(nr_n^5)$。

(c2)。若 $l=l_1$ 且 $j=j_1\neq k\neq k_1\geq 3$，由引理 2.3 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\,\big|\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{2jk_1}\bar{A}_{1l}^2\big|X_1,X_2\big]\big|\,\big]\\
&=\mathbb{E}\big[\,\big|\mathbb{E}\big[(A_{1j}A_{jk}-A_{1j}A_{1k})(A_{2j}A_{jk_1}-A_{2j}A_{2k_1})\big|X_1,X_2\big]\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1l}^2\big|X_1,X_2\big]\big|\,\big]\\
&=O(r_n)\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[\,|(A_{1j}A_{jk}-A_{1j}A_{1k})(A_{2j}A_{jk_1}-A_{2j}A_{2k_1})|\,\big|X_1,X_2\big]\big]\\
&\leq O(r_n)\mathbb{E}\big[(A_{1j}A_{jk}+A_{1j}A_{1k})(A_{2j}A_{jk_1}+A_{2j}A_{2k_1})\big]\\
&=O(r_n^5).
\end{aligned}$$

在这种情况下，这类指标元组（n^4（j，k，l，j_1，k_1，l_1）至多有 O 个。因此，式（82）中对这些指标的求和为 $O(r_n)$。相同的上界也适用于 $l=l_1$ 且 $j=k_1\neq j_1\neq k_1\geq 3$。

（c3）。如果 $l=l_1$ 且 $k=j_1\neq j\neq k_1\geq 3$，则由引理2.3 可知

$$\mathbb{E}\big[\,\big|\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{2kk_1}\bar{A}_{1l}^2\big|X_1,X_2\big]\big|\,\big]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\big[\,\big|\mathbb{E}\big[(A_{1j}A_{jk} - A_{1j}A_{1k})(A_{2k}A_{kk_1} - A_{2k}A_{2k_1})\big|X_1, X_2\big]\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1l}^2\big|X_1, X_2\big]\big|\,\big] \\
&= O(r_n)\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[\,|(A_{1j}A_{jk} - A_{1j}A_{1k})(A_{2k}A_{kk_1} - A_{2k}A_{2k_1})|\,\big|X_1, X_2\big]\big] \\
&\le O(r_n)\mathbb{E}\big[(A_{1j}A_{jk} + A_{1j}A_{1k})(A_{2k}A_{kk_1} + A_{2k}A_{2k_1})\big] \\
&= O(r_n^5).
\end{aligned}
$$

在这种情况下，至多有 n^4 个这样的指标元组（j、k、l、j_1、k_1、l_1）。因此，式（82）中对这些指标的求和为 O（r_n）。同样的上界也适用于 $l = l_1$ 和$k = k_1 \neq j \neq j_1 \geq 3$的情况。

（c4）。若 $l = l_1$ 且 $\{j, k\} = \{j_1, k_1\}$，根据引理 2.3 可得

$$
\mathbb{E}\big[\,\big|\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{2kk_1}\bar{A}_{1l}^2\big|X_1, X_2\big]\big|\,\big] \le \mathbb{E}\big[|T_{1jk}|\big]|X_1, X_2\big]\mathbb{E}[\bar{A}_{1l}^2\big|X_1, X_2\big] = O(r_n^3).
$$

在这种情况下，至多有 n^3 个这样的指标元组（j，k，l，j_1，k_1，l_1）。因此，对这些指标求和，式（82）中的求和为 $O\Big(\frac{1}{nr_n}\Big)$。

（c5）。若 $l = l_1$, $j = 2$ 且 $k \neq j_1 \neq k_1 \geq 3$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[T_{12k}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{1l}^2\big|X_1, X_2\big] &= \mathbb{E}\big[T_{12k}\big|X_1, X_2\big]\mathbb{E}\big[T_{2j_1k_1}\big|X_1, X_2\big]\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1l}^2\big|X_1, X_2\big] \\
&= \mathbb{E}\big[(A_{2k} + A_{1k})\big|X_1, X_2\big]\mathbb{E}\big[T_{2j_1k_1}\big|X_1, X_2\big]\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1l}^2\big|X_1, X_2\big] \\
&= O(r_n^5). \qquad (83)
\end{aligned}
$$

在这种情况下，至多有 n^4 个这样的指标元组（j，k，l，j_1，k_1，l_1）。因此，对这 (82) 些指标求和，所得为 $O(r_n)$。

（c6）。若 $l = l_1$, $j = 2$ 且 $k = j_1 \neq k_1 \geq 3$,

$$
\begin{aligned}
\big|\mathbb{E}\big[T_{12k}T_{2kk_1}\bar{A}_{1l}^2\big|X_1, X_2\big]\big| &\le 2\mathbb{E}\big[|T_{2kk_1}|\big|X_1, X_2\big]\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1l}^2\big|X_1, X_2\big] \\
&= O(r_n^3).
\end{aligned}
$$

在这种情况下，至多有 n^3 个这样的指标元组（j、k、l、j_1、k_1、l_1）。因此，对这些指标在（82）中的求和为 O（$\frac{1}{nr_n}$）。同样的上界也适用于 $l = l_1$、 $j = 2$ 和 $k = k_1 \neq j_1 \geq 3$的情况。

(c7). 如果 $l = l_1$、 $j = 2$ 和 $j_1 = 1$，则 k， $k_1 \geq 3$。对于 $k \neq k_1$，我们有

$$
\big|\mathbb{E}\big[T_{12k}T_{21k_1}\bar{A}_{1l}^2\big|X_1, X_2\big]\big| \le 2\mathbb{E}\big[(A_{2k} + A_{1k})\big|X_1, X_2\big]\mathbb{E}\big[\bar{A}_{1l}^2\big|X_1, X_2\big] = O(r_n^2).
$$

在这种情况下，至多有 n^2 个这样的指标元组（j， k， l， j_1， k_1， l_1）。因此， （82）中对这些指标的求和为 $O\big(\frac{1}{n^2r_n^2}\big)$。同样的上界适用于情形 $l = l_1$， $j = 2$ 以及 $k_1 = 1$, $k \neq j_1$。

（c8）。对于 $l=l_1$、 $j=2$ 与 $j_1=1$，以及 $k=k_1$，我们有

$$\left|\mathbb{E}\left[T_{12k}T_{21k}\bar{A}_{1l}^2\middle|X_1,X_2\right]\right| \le 4\mathbb{E}[A_{2k}+A_{1k}]\mathbb{E}\left[\bar{A}_{1l}^2\middle|X_1,X_2\right]=O(r_n^2).$$

在这种情况下，最多有 n^2 个这样的指标元组（j， k， l， j_1， k_1， l_1）。因此，式（82）中对这些指标的求和为 $O\left(\frac{1}{n^2r_n^2}\right)$。同样的上界也适用于 $l=l_1$， $j=2$ 以及 $k_1=1$，$j_1=k$的情况。

（c9）。如果 $l=l_1$、 $k=2$ 和 $j\neq j_1\neq k_1\ge 3$，则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[T_{1j2}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{1l}^2\middle|X_1,X_2\right]&=\mathbb{E}\left[T_{1j2}\middle|X_1,X_2\right]\mathbb{E}\left[T_{2j_1k_1}\middle|X_1,X_2\right]\mathbb{E}\left[\bar{A}_{1l}^2\middle|X_1,X_2\right]\\&=\mathbb{E}\left[(A_{j2}+A_{1j})\middle|X_1,X_2\right]\mathbb{E}\left[T_{2j_1k_1}\middle|X_1,X_2\right]\mathbb{E}\left[\bar{A}_{1l}^2\middle|X_1,X_2\right]\\&=O(r_n^5).\end{aligned}\tag{84}$$

在这种情况下，最多有 n^4 个这样的指标元组（j， k， l， j_1， k_1， l_1）。因此，式（82）中对这些指标的求和为 $O\left(r_n\right)$。

（c10）。如果 $l=l_1$、 $k=2$ 和 $j=j_1\neq k_1\ge 3$，则

$$\left|\mathbb{E}\left[T_{1j2}T_{2jk_1}\bar{A}_{1l}^2\middle|X_1,X_2\right]\right| \le \mathbb{E}\left[\left|T_{2j_1k_1}\right|\middle|X_1,X_2\right]\mathbb{E}\left[\bar{A}_{1l}^2\middle|X_1,X_2\right]=O(r_n^3).$$

在这种情况下，最多有 n^3 个这样的指标元组（j， k， l， j_1， k_1， l_1）。因此，式（82）中对这些指标的求和为 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$。同样的上界也适用于 $l=l_1$， $k=2$ 以及$j=k_1\neq j_1\ge 3$。

(c11). 若 $l=l_1, k=2, j_1=1, j\neq k_1\ge 3$，则

$$\left|\mathbb{E}\left[T_{1j2}T_{21k_1}\bar{A}_{1l}^2\middle|X_1,X_2\right]\right| \le 4\mathbb{E}\left[A_{1j}(A_{1k_1}+A_{2k_1})\middle|X_1,X_2\right]\mathbb{E}\left[\bar{A}_{1l}^2\middle|X_1,X_2\right]=O(r_n^3).$$

在这种情况下，至多有 n^3 个这样的指标元组（j， k， l， j_1， k_1， l_1）。因此，对这些指标求和，式（82）中的和为 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$。同一上界也适用于以下情形： $l=l_1$， $k=2$， $k_1=1$，$j_1\neq k\ge 3$。

(c12). 若 $l=l_1, k=2, j_1=1, j=k_1\ge 3$，则

$$\left|\mathbb{E}\left[T_{1j2}T_{21j}\bar{A}_{1l}^2\middle|X_1,X_2\right]\right| \le 4\mathbb{E}\left[A_{1j}\middle|X_1,X_2\right]\mathbb{E}\left[\bar{A}_{1l}^2\middle|X_1,X_2\right]=O(r_n^2).$$

在这种情况下，至多有 n^2 个这样的指标元组（j， k， l， j_1， k_1， l_1）。因此，对这些指标求和，式（82）中的和为 $O\left(\frac{1}{n^2r_n^2}\right)$。同一上界也适用于以下情形： $l=l_1$， $k=2$， $k_1=1$，$j_1=k\ge 3$。

(c13). 若 $l=2$，则 j， $k\ge 3$。若 $l_1=1$，则 j_1， $k_1\ge 3$。当 $\{j,k\}\cap\{j_1,k_1\}=\emptyset$ 时，我们有

$$\mathbb{E}\left[T_{1jk}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{12}^2\middle|X_1,X_2\right]=\bar{A}_{12}^2\mathbb{E}\left[T_{1jk}\middle|X_1,X_2\right]\mathbb{E}\left[T_{1j_1k_1}\middle|X_1,X_2\right]=O(r_n^8).$$

在这种情况下，至多有 n^4 个这样的指标元组（j，k，l，j_1，k_1，l_1）。因此，对这些指标求和，(82) 中的求和为 $O(r_n^4)$。

(c14). 若 $l=2$，则 j，$k\geq 3$。若 $l_1=1$，则 j_1，$k_1\geq 3$。当 $\{j,k\}=\{j_1,k_1\}$ 时，我们有

$$|\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{12}^2\big|X_1,X_2\big]|\leq \bar{A}_{12}^2\mathbb{E}\big[|T_{1jk}|\big|X_1,X_2\big]=O(r_n^2).$$

在这种情况下，这类指标元组（ n^2 至多有j，k，l，j_1，k_1，l_1）。因此，对这些指标在（82）中的求和为 $O\left(\frac{1}{n^2r_n^2}\right)$。

(c15). 若 $l=2$、$l_1=1$ 且 $j=j_1$，我们有

$$|\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{2jk_1}\bar{A}_{12}^2\big|X_1,X_2\big]|\leq \bar{A}_{12}^2\mathbb{E}\big[|T_{1jk}|A_{jk_1}\big|X_1,X_2\big]=O(r_n^3).$$

在这种情况下，这类指标元组（ n^3 至多有j，k，l，j_1，k_1，l_1）。因此，对这些指标在（82）中的求和为 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$。同一上界也适用于以下情形：(a) $l=2$，$l_1=1$ 且$j=k_1$；(b) $l=2$，$l_1=1$ 且 $k=j_1$；(c) $l=2$，$l_1=1$ 且 $k=k_1$。

(c16)。若 $l=2$ 且 $l_1=j$，则 j，$k\geq 3$。当 $j_1\neq k\neq k_1\geq 3$时，由引理2.3 可得

$$\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{12}\bar{A}_{2j}\big|X_1,X_2\big]=\mathbb{E}\big[T_{1jk}\bar{A}_{2j}\big|X_1,X_2\big]\mathbb{E}\big[T_{2j_1k_1}\big|X_1,X_2\big]\bar{A}_{12}=O(r_n^5).$$

在这种情况下，这类指标元组（ n^4 （j，k，l，j_1，k_1，l_1）至多有 O个。因此，式（82）中对这些指标的求和为 $O(r_n)$。

(c17)。若 $l=2$ 且 $l_1=j$，则 j，$k\geq 3$。当 $j_1=k\neq k_1\geq 3$时，由引理2.3 可得

$$|\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{2kk_1}\bar{A}_{12}\bar{A}_{2j}\big|X_1,X_2\big]|\leq 4\mathbb{E}\big[|T_{1jk}|(A_{kk_1}+A_{2k_1})\big|X_1,X_2\big]=O(r_n^3).$$

在这种情况下，这类指标元组（ n^3 （j，k，l，j_1，k_1，l_1）至多有 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$个。因此，式（82）中对这些指标的求和为 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$。同样的上界也适用于 $l=2$ 且 $l_1=j$ 且$j_1\neq k=k_1\geq 3$的情况。

(c18)。如果 $l=2$ 和 $l_1=j$，那么 j，$k\geq 3$。当 $j_1=1$ 和 $k\neq k_1$时，我们有

$$|\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{21k_1}\bar{A}_{12}\bar{A}_{2j}\big|X_1,X_2\big]|\leq 4\mathbb{E}\big[|T_{1jk}|(A_{1k_1}+A_{2k_1})\big|X_1,X_2\big]=O(r_n^3).$$

在这种情况下，最多有 n^3 个这样的指标元组（j，k，l，j_1，k_1，l_1）。因此，对这些指标在（82）中的求和为 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$。同样的上界也适用于 $l=2$，$l_1=j$，$k_1=1$ 以及$k\neq j_1$ 的情况。

(c19). 如果 $l=2$ 且 $l_1=j$，那么 j，$k\geq 3$。当 $j_1=1$ 且 $k=k_1$时，我们有

$$|\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{21k_1}\bar{A}_{12}\bar{A}_{2j}\big|X_1,X_2\big]|\leq 4\mathbb{E}\big[|T_{1jk}|\big|X_1,X_2\big]=O(r_n^2).$$

在这种情况下，最多有 n^2 个这样的指标元组（j，k，l，j_1，k_1，l_1）。因此，对这些指标在（82）中的求和为 $O\left(\frac{1}{n^2r_n^2}\right)$。同样的上界也适用于 $l=2$，$l_1=j$，$k_1=1$ 和$k=j_1$。

(c20)。若 $l=2$ 且 $l_1=k$，则 j，$k\geq 3$。当 $j\neq j_1\neq k_1\geq 3$ 时，按照与 (c16) 类似的论证，这些指标对应的 (82) 中的求和为 $O(r_n^2)$。

(c21)。若 $l=2$ 且 $l_1=k$，则 j，$k\geq 3$。当 $j=j_1\neq k_1\geq 3$ 或 $j=k_1\neq j_1$ 时，按照与 (c17) 类似的论证，这些指标对应的 (82) 中的求和为 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$。

(c22)。若 $l=2$，$l_1=k$，$j_1=1$ 且 $j\neq k_1\geq 3$，则按照与 (c18) 类似的论证，这些指标对应的 (82) 中的求和为 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$。对于情形$l=2$，$l_1=k$，$k_1=1$ 且 $j_1\neq k\geq 3$，同样的上界也成立。

(c23). 若 $l=2$，$l_1=k$，$j_1=1$ 且 $j=k_1\geq 3$，那么，按照与 (c19) 类似的论证，(82) 中对这些指标的求和为 $O\left(\frac{1}{n^2r_n^2}\right)$。对于以下情形，同样的上界也成立：$l=2$，$l_1=k$，$k_1=1$ 且 $j_1=k\geq 3$。

(c24). 情形 $l=j_1$，$l_1=1$ 与情形 $l=2$，$l_1=j$类似。根据 (c16)-(c19) 中类似的论证，(82) 中对这些指标的求和为 $O\left(\frac{1}{nr_n}+r_n\right)$。

(c25). 若 $l=j_1$ 且 $l_1=j$，则 $k\notin\{j_1,l_1\}$ 且 $k_1\notin\{j,l\}$。当 $k\neq k_1\geq 3$ 时，

$$\mathbb{E}\big[\big|\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{1j_1}\bar{A}_{2j}\big|X_1,X_2\big]\big|\big]=\mathbb{E}\big[|T_{1jk}\bar{A}_{2j}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{1j_1}|\big]=O(r_n^6).$$

在这种情况下，至多有 n^4 个这样的指标元组（j，k，l，j_1，k_1，l_1）。因此，（82）中对这些指标的求和为 $O(r_n^2)$。

（c26）。若 $l=j_1$ 且 $l_1=j$，则 $k\notin\{j_1,l_1\}$ 且 $k_1\notin\{j,l\}$。当 $k=k_1\geq 3$时，则

$$\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{2j_1k}\bar{A}_{1j_1}\bar{A}_{2j}\big|X_1,X_2\big]=\mathbb{E}\big[T_{1jk}\bar{A}_{2j}\big|X_1,X_2\big]\mathbb{E}\big[T_{2j_1k}\bar{A}_{1j_1}\big|X_1,X_2\big]=O(r_n^4).$$

在这种情况下，至多有 n^3 个这样的指标元组（j，k，l，j_1，k_1，l_1）。因此，（82）中对这些指标的求和为 $O(r_n)$。

（c27）。若 $l=j_1$ 且 $l_1=j$，则 $k\notin\{j_1,l_1\}$ 且 $k_1\notin\{j,l\}$。当 $k=2$ 且 $k_1\geq 3$时，则

$$|\mathbb{E}\big[T_{1j2}T_{2j_1k_1}\bar{A}_{1j_1}\bar{A}_{2j}\big|X_1,X_2\big]|\leq 4\mathbb{E}\big[A_{1j}|T_{2j_1k_1}|\big|X_1,X_2\big]=O(r_n^3).$$

在这种情况下，至多有 n^3 个这样的指标元组（j，k，l，j_1，k_1，l_1）。因此，（82）中对这些指标的求和为 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$。同样的上界适用于 $l=j_1$、$l_1=j$、$k_1=1$ 和$k\geq 3$的情形。

(c28)。如果 $l=j_1$ 且 $l_1=j$，则 $k\notin\{j_1,l_1\}$ 且 $k_1\notin\{j,l\}$。当 $k=2$ 且 $k_1=1$时，则

$$|\mathbb{E}\big[T_{1j2}T_{2j_11}\bar{A}_{1j_1}\bar{A}_{2j}\big|X_1,X_2\big]|\leq 4\mathbb{E}\big[|\bar{A}_{1j_1}\bar{A}_{2j}|\big|X_1,X_2\big]=O(r_n^2).$$

在这种情况下，至多有 n^2 个这样的指标元组（j, k, l, j_1, k_1, l_1）。因此，（82）中对这些指标的求和为 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$。

(c29)。若 $l = j_1$ 且 $l_1 = k$，则 $j \notin \{j_1, l_1\}$ 且 $k_1 \notin \{k, l\}$。当 $j \neq k_1 \geq 3$时，通过类似的论证可得上界 (c25) 成立。

(c30)。若 $l = j_1$ 且 $l_1 = k$，则 $j \notin \{j_1, l_1\}$ 且 $k_1 \notin \{k, l\}$。当 $j = k_1 \geq 3$时，通过类似的论证可得上界 (c26) 成立。

(c31)。若 $l = j_1$ 且 $l_1 = k$，则 $j \notin \{j_1, l_1\}$ 且 $k_1 \notin \{k, l\}$。当 $j = 2$ 或 $k_1 = 1$时，通过类似的论证可得上界 (c27) 或 (c28) 成立。

(c32)。$l = k_1$ 和 $l_1 = 1$ 的情况与 $l = 2$ 和 $l_1 = k$的情况类似。(c20)-(c23)中的上界成立。

(c33)。$l = k_1$ 和 $l_1 = j$ 的情况与 $l = j_1$ 和 $l_1 = k$的情况类似。(c29)-(c31)中的上界成立。

(c34)。若 $l = k_1$ 和 $l_1 = k$，则 $j \notin \{k_1, l_1\}$ 和 $j_1 \notin \{k, l\}$。当 $j \neq j_1 \geq 3$时，利用类似的论证可得(c25)中的上界成立。

(c35)。若 $l = k_1$ 和 $l_1 = k$，则 $j \notin \{k_1, l_1\}$ 和 $j_1 \notin \{k, l\}$。当 $j = j_1 \geq 3$时，利用类似的论证可得(c26)中的上界成立。

(c36). 若 $l = k_1$ 且 $l_1 = k$，则 $j \notin \{k_1, l_1\}$ 且 $j_1 \notin \{k, l\}$。当 $j = 2$ 且 $j_1 \geq 3$，或$j_1 = 1$ 且 $j \geq 3$时，通过类似论证可得 (c27) 中的上界。

(c37). 若 $l = k_1$ 且 $l_1 = k$，则 $j \notin \{k_1, l_1\}$ 且 $j_1 \notin \{k, l\}$。当 $j = 2$ 且 $j_1 = 1$时，通过类似论证可得 (c28) 中的上界。

综上，我们有

$$\mathbb{E}\left[\frac{R_1 R_2}{\mu_1^2 \mu_2^2}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[R_1 R_2 | X_1, X_2]}{\mu_1^2 \mu_2^2}\right] = O\left(nr_n^5 + r_n + \frac{1}{nr_n}\right).$$

于是证明完成。

□

6.10. 引理 *2.12* 的证明

回顾一下，$\mu_t = (n-1)\mathbb{E}[A_{12}|X_t]$ 对于 $t \in \{1, 2\}$。那么

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)^2 \mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right] \mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]}{\mu_1^2 \mu_2^2} \mathbb{E}\left[P_1 P_2 | X_1, X_2\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{(n+1)^2}{(n-1)^4 \mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right] \mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]} \sum_{\substack{j \neq k \neq 1 \\ j_1 \neq k_1 \neq 2}} \mathbb{E}\left[T_{1jk} T_{2j_1k_1} | X_1, X_2\right]\right]. \qquad (85)
\end{aligned}$$

接下来，我们将推导（85）的主导项。当 $j \neq k \neq j_1 \neq k_1 \geq 3$， T_{1jk} 和 $T_{2j_1k_1}$在给定 X_1 和 X_2的条件下相互独立时。那么我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[T_{1jk}T_{2j_1k_1}|X_1,X_2\right] &= \mathbb{E}\left[T_{1jk}|X_1\right]\mathbb{E}\left[T_{2j_1k_1}|X_2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(A_{13}A_{34}-A_{13}A_{14})|X_1\right]\mathbb{E}\left[(A_{25}A_{56}-A_{25}A_{26})|X_2\right].\end{aligned}$$

引理 2.3 意味着 $\mathbb{E}[A_{12}|X_t] = \Theta(r_n)$ 且 $\mathbb{E}[T_{123}|X_t] = O(r_n^4)$。因此，对指标 $j \neq k \neq j_1 \neq k_1 \geq 3$ 在 (85) 中求和，结果等于

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)^2}{(n-1)^4\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]}\sum_{j\neq k\neq j_1\neq k_1\geq 3}T_{1jk}T_{2j_1k_1}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{(n+1)^2}{(n-1)^4\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]}\sum_{j\neq k\neq j_1\neq k_1\geq 3}\mathbb{E}\left[T_{1jk}T_{2j_1k_1}|X_1,X_2\right]\right] \\ &= \frac{(n+1)^2(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{(n-1)^4}\left(\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[(A_{13}A_{34}-A_{13}A_{14})|X_1\right]}{\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]}\right]\right)^2 \\ &= \left(n\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[(A_{13}A_{34}-A_{13}A_{14})|X_1\right]}{\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]}\right]\right)^2 + O(nr_n^6). \qquad (86)\end{aligned}$$

假设 $\{j,k\} = \{j_1,k_1\}$。在这种情况下， j， k， j_1， $k_1 \geq 3$。如果 $j = j_1$ 且 $k = k_1$，那么

$$\begin{aligned}|T_{1jk}T_{2jk}| &\leq A_{1j}A_{2j}A_{jk} + A_{1j}A_{2j}A_{jk}A_{2k} + A_{1j}A_{1k}A_{2j}A_{jk} + A_{1j}A_{2j}A_{1k}A_{2k} \\ &\leq 3A_{1j}A_{2j}A_{jk} + A_{1j}A_{2j}A_{2k}.\end{aligned}$$

由引理 2.3，很容易得到

$$\mathbb{E}[A_{1j}A_{2j}A_{jk}] = O(r_n^3), \qquad \mathbb{E}[A_{1j}A_{2j}A_{2k}] = O(r_n^3).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)^2}{(n-1)^4\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]}\left|\sum_{j\neq k\geq 3}T_{1jk}T_{2jk}\right|\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\frac{(n+1)^2}{(n-1)^4\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]}\sum_{j\neq k\geq 3}\mathbb{E}\left[|T_{1jk}T_{2jk}||X_1,X_2\right]\right] \\ &= O\left(\frac{1}{r_n^2}\right)\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|T_{1jk}T_{2jk}||X_1,X_2\right]\right] \\ &= O\left(\frac{1}{r_n^2}\right)\mathbb{E}\left[|T_{1jk}T_{2jk}|\right] \\ &= O(r_n). \qquad (87)\end{aligned}$$

若 $j = k_1$ 且 $k = j_1$，则

$$\begin{aligned}|T_{1jk}T_{2kj}| &\le A_{1j}A_{jk}A_{2k} + A_{1j}A_{jk}A_{2k}A_{2j} + A_{1j}A_{1k}A_{2k}A_{kj} + A_{1j}A_{1k}A_{2k}A_{2j}\\ &\le A_{1j}A_{jk}A_{2k} + A_{1j}A_{jk}A_{2j} + A_{1k}A_{2k}A_{kj} + A_{1j}A_{1k}A_{2j}\end{aligned}$$

因此，$\mathbb{E}\left[|T_{1jk}T_{2kj}|\right] = O(r_n^3)$。与 (87) 类似，我们有

$$\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)^2}{(n-1)^4\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]}\left|\sum_{j\neq k\ge 3} T_{1jk}T_{2kj}\right|\right] = O(r_n). \tag{88}$$

假设 $|\{j,k\}\cap\{j_1,k_1\}| = 1$ 和 $j,k,j_1,k_1 \ge 3$。若 $j = j_1$ 且 $k \neq k_1$，由引理 2.3，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]}\mathbb{E}[T_{1jk}T_{2jk_1}|X_1,X_2]\\ &= \frac{\mathbb{E}\big[(A_{1j}A_{2j}A_{jk}A_{jk_1} - A_{1j}A_{2j}A_{jk}A_{2k_1} - A_{1j}A_{1k}A_{2j}A_{jk_1} + A_{1j}A_{2j}A_{1k}A_{2k_1})|X_1,X_2\big]}{\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]}\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]}\Big((2r_n)^2\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}f^2(X_j)|X_1,X_2\big]\\ &\quad - (2r_n)^2\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}f(X_j)f(X_2)|X_1,X_2\big] - (2r_n)^2\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}f(X_j)f(X_1)|X_1,X_2\big]\\ &\quad + (2r_n)^2\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}f(X_1)f(X_2)|X_1,X_2\big] + O(r_n^4)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}|X_1,X_2\big]\\ &\quad + O(r_n^4)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}|X_1,X_2\big]\Big) + O(r_n^4)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}|X_1,X_2\big] + O(r_n^4)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}|X_1,X_2\big].\end{aligned} \tag{89}$$

我们将推导 (89) 中每一项期望的渐近表达式或上界。

由引理 2.3，$\mathbb{E}\big[A_{12}|X_1\big] = 2r_nf(X_1) + O(r_n^3)$。由假设 A1 可知 $f(x)$ 与零有正距离，且 $f(x)^2$ 有界。因此，(89) 中第一项的期望为

$$\begin{aligned}(2r_n)^2\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}f^2(X_j)|X_1,X_2\big]}{\mathbb{E}\big[A_{13}|X_1\big]\mathbb{E}\big[A_{24}|X_2\big]}\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}f^2(X_j)|X_1,X_2\big]}{f(X_1)f(X_2)}\right] + O(r_n^2)\mathbb{E}[A_{1j}A_{2j}]\\ &= \mathbb{E}\left[\frac{A_{1j}A_{2j}f^2(X_j)}{f(X_1)f(X_2)}\right] + O(r_n^4)\\ &= \mathbb{E}\left[f^2(X_j)\mathbb{E}\left[\frac{A_{1j}A_{2j}}{f(X_1)f(X_2)}\middle|X_j\right]\right] + O(r_n^4).\end{aligned}$$

注意，

$$\mathbb{E}\left[\frac{A_{1j}A_{2j}}{f(X_1)f(X_2)}\middle|X_j\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= I[r_n \le X_j \le 1-r_n] \int_{X_j-r_n}^{X_j+r_n} dx_1 \int_{X_j-r_n}^{X_j+r_n} dx_2 \\
&\quad + I[0 \le X_j \le r_n] \left(\int_0^{X_j+r_n} dx_1 + \int_{1-r_n+X_j}^{1} dx_1 \right) \left(\int_0^{X_j+r_n} dx_2 + \int_{1-r_n+X_j}^{1} dx_2 \right) \\
&\quad + I[1-r_n \le X_j \le 1] \left(\int_{X_j-r_n}^{1} dx_1 + \int_0^{r_n+X_j-1} dx_1 \right) \left(\int_{X_j-r_n}^{1} dx_2 + \int_0^{r_n+X_j-1} dx_2 \right) \\
&= (2r_n)^2.
\end{aligned}
$$

由此可得,

$$
(2r_n)^2 \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}f^2(X_j)|X_1,X_2\big]}{\mathbb{E}\big[A_{13}|X_1\big]\mathbb{E}\big[A_{24}|X_2\big]} \right] = (2r_n)^2 \mathbb{E}\left[f^2(X_j)\right] + O(r_n^4). \tag{90}
$$

(89) 中第二项的期望为

$$
\begin{aligned}
&(2r_n)^2 \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}f(X_j)f(X_2)|X_1,X_2\big]}{\mathbb{E}\big[A_{13}|X_1\big]\mathbb{E}\big[A_{24}|X_2\big]} \right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}f(X_j)f(X_2)|X_1,X_2\big]}{f(X_1)f(X_2)} \right] + O(r_n^2)\mathbb{E}[A_{1j}A_{2j}] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{A_{1j}A_{2j}f(X_j)}{f(X_1)} \right] + O(r_n^4) \\
&= \mathbb{E}\left[f(X_j)A_{2j}\mathbb{E}\left[\frac{A_{1j}}{f(X_1)} \middle| X_j, X_2 \right] \right] + O(r_n^4) \\
&= 2r_n \mathbb{E}\left[f(X_j)A_{2j}\right] + O(r_n^4) \\
&= 2r_n \mathbb{E}\left[f(X_j)\mathbb{E}[A_{2j}|X_j]\right] + O(r_n^4) \\
&= 2r_n \mathbb{E}\left[2r_n f^2(X_j) + \frac{f(X_j)f''(X_j)}{3} r_n^3 \right] + O(r_n^4) \\
&= (2r_n)^2 \mathbb{E}\left[f^2(X_j)\right] + O(r_n^4),
\end{aligned} \tag{91}
$$

其中，第四个等号可由以下论证得出

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{A_{1j}}{f(X_1)} \middle| X_j, X_2 \right] &= I[r_n \le X_j \le 1-r_n] \int_{X_j-r_n}^{X_j+r_n} dx_1 \\
&\quad + I[0 \le X_j \le r_n] \left(\int_0^{X_j+r_n} dx_1 + \int_{1-r_n+X_j}^{1} dx_1 \right) \\
&\quad + I[1-r_n \le X_j \le 1] \left(\int_{X_j-r_n}^{1} dx_1 + \int_0^{r_n+X_j-1} dx_1 \right)
\end{aligned}
$$

$$= (2r_n). \tag{92}$$

(89) 中第三项的期望与第二项相同。(89) 中第四项的期望为

$$\begin{aligned}
&(2r_n)^2\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}f(X_1)f(X_2)|X_1,X_2\big]}{\mathbb{E}\big[A_{13}|X_1\big]\mathbb{E}\big[A_{24}|X_2\big]}\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j}f(X_1)f(X_2)|X_1,X_2\big]}{f(X_1)f(X_2)}\right]+O(r_n^2)\mathbb{E}[A_{1j}A_{2j}]\\
&=\mathbb{E}[\mathbb{E}[A_{1j}|X_j]\mathbb{E}[A_{2j}|X_j]]+O(r_n^4)\\
&=\mathbb{E}\left[(2r_n)^2f^2(X_j)+\frac{r_n^4}{3}f(X_j)f''(X_j)\right]+O(r_n^4)\\
&=(2r_n)^2\mathbb{E}\left[f^2(X_j)\right]+O(r_n^4).
\end{aligned} \tag{93}$$

结合（89）-（93可得

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\big[T_{1jk}T_{2jk_1}|X_1,X_2\big]}{\mathbb{E}\big[A_{13}|X_1\big]\mathbb{E}\big[A_{24}|X_2\big]}\right]=O\left(r_n^4\right).$$

因此，我们有

$$\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)^2}{(n-1)^4\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]}\sum_{j\neq k\neq k_1\geq 3}T_{1jk}T_{2jk_1}\right]=O(nr_n^4). \tag{94}$$

设 $j=k_1$、$k\neq j_1$ 和 $j,\ k,\ j_1,\ k_1\geq 3$。则

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]}\mathbb{E}[T_{1jk}T_{2j_1j}|X_1,X_2]\\
&=\frac{\mathbb{E}\big[(A_{1j}A_{jk}A_{2j_1}A_{j_1j}-A_{1j}A_{jk}A_{2j_1}A_{2j}-A_{1j}A_{1k}A_{2j_1}A_{j_1j}+A_{1j}A_{2j_1}A_{1k}A_{2j})|X_1,X_2\big]}{\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]}\\
&=\frac{1}{\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]}\Big((2r_n)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j_1}A_{j_1j}f(X_j)|X_1,X_2\big]\\
&\quad-(2r_n)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j_1}A_{2j}f(X_j)|X_1,X_2\big]-(2r_n)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j_1}A_{j_1j}f(X_1)|X_1,X_2\big]\\
&\quad+(2r_n)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j_1}A_{2j}f(X_1)|X_1,X_2\big]+O(r_n^3)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j_1}A_{j_1j}|X_1,X_2\big]\\
&\quad+O(r_n^3)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j_1}A_{j_1j}|X_1,X_2\big]+O(r_n^3)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j_1}A_{2j}|X_1,X_2\big]\\
&\quad+O(r_n^3)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j_1}A_{2j}|X_1,X_2\big]\Big).
\end{aligned} \tag{95}$$

根据（92），（95）中第一项的期望等于

$$(2r_n)\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j_1}A_{j_1j}f(X_j)|X_1,X_2\big]}{\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2r_n}\mathbb{E}\left[\frac{A_{1j}A_{2j_1}A_{j_1j}f(X_j)}{f(X_1)f(X_2)}\right] + O(r_n^3)\mathbb{E}\left[A_{1j}A_{2j_1}A_{j_1j}\right] \\
&= \frac{1}{2r_n}\mathbb{E}\left[A_{j_1j}f(X_j)\mathbb{E}\left[\frac{A_{1j}}{f(X_1)}\middle|X_j\right]\mathbb{E}\left[\frac{A_{2j_1}}{f(X_2)}\middle|X_{j_1}\right]\right] + O(r_n^4) \\
&= 2r_n\mathbb{E}\left[A_{j_1j}f(X_j)\right] + O(r_n^4) \\
&= (2r_n)^2\mathbb{E}\left[f^2(X_j)\right] + O(r_n^4). \qquad (96)
\end{aligned}
$$

根据（92），（95）中第二项的期望等于

$$
\begin{aligned}
&(2r_n)\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[A_{1j}A_{2j_1}A_{2j}f(X_j)|X_1,X_2\right]}{\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]}\right] \\
&= \frac{1}{2r_n}\mathbb{E}\left[\frac{A_{1j}A_{2j_1}A_{2j}f(X_j)}{f(X_1)f(X_2)}\right] + O(r_n^3)\mathbb{E}\left[A_{1j}A_{2j_1}A_{2j}\right] \\
&= \frac{1}{2r_n}\mathbb{E}\left[A_{j2}f(X_j)\mathbb{E}\left[\frac{A_{1j}}{f(X_1)}\middle|X_j\right]\mathbb{E}\left[\frac{A_{2j_1}}{f(X_2)}\middle|X_2\right]\right] + O(r_n^4) \\
&= 2r_n\mathbb{E}\left[A_{j2}f(X_j)\right] + O(r_n^4) \\
&= (2r_n)^2\mathbb{E}\left[f^2(X_j)\right] + O(r_n^4). \qquad (97)
\end{aligned}
$$

根据（92），（95）的第三项的期望等于

$$
\begin{aligned}
&(2r_n)\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[A_{1j}A_{2j_1}A_{j_1j}f(X_1)|X_1,X_2\right]}{\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]}\right] \\
&= \frac{1}{2r_n}\mathbb{E}\left[\frac{A_{1j}A_{2j_1}A_{j_1j}}{f(X_2)}\right] + O(r_n^3)\mathbb{E}\left[A_{1j}A_{2j_1}A_{j_1j}\right] \\
&= \frac{1}{2r_n}\mathbb{E}\left[A_{jj_1}\mathbb{E}\left[A_{1j}\middle|X_j\right]\mathbb{E}\left[\frac{A_{2j_1}}{f(X_2)}\middle|X_{j_1}\right]\right] + O(r_n^4) \\
&= 2r_n\mathbb{E}\left[A_{jj_1}f(X_j)\right] + O(r_n^4) \\
&= (2r_n)^2\mathbb{E}\left[f^2(X_j)\right] + O(r_n^4). \qquad (98)
\end{aligned}
$$

(95）的第四项的期望等于

$$
\begin{aligned}
&(2r_n)\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[A_{1j}A_{2j_1}A_{2j}f(X_1)|X_1,X_2\right]}{\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]}\right] \\
&= \frac{1}{2r_n}\mathbb{E}\left[\frac{A_{1j}A_{2j_1}A_{2j}}{f(X_2)}\right] + O(r_n^3)\mathbb{E}\left[A_{1j}A_{2j_1}A_{2j}\right] \\
&= \frac{1}{2r_n}\mathbb{E}\left[\frac{A_{2j}}{f(X_2)}\mathbb{E}\left[A_{1j}\middle|X_j\right]\mathbb{E}\left[A_{2j_1}\middle|X_2\right]\right] + O(r_n^4) \\
&= 2r_n\mathbb{E}\left[A_{2j}f(X_j)\right] + O(r_n^4) \\
&= (2r_n)^2\mathbb{E}\left[f^2(X_j)\right] + O(r_n^4). \qquad (99)
\end{aligned}
$$

注意到 $\mathbb{E}\big[A_{13}|X_1\big]=\Theta(r_n)$。由引理 2.3，容易得到

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j_1}A_{2j}|X_1,X_2\big]}{\mathbb{E}\big[A_{13}|X_1\big]\mathbb{E}\big[A_{24}|X_2\big]}\right]=O\left(\frac{1}{r_n^2}\right)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j_1}A_{2j}\big]=O(r_n), \tag{100}$$

and

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j_1}A_{j_1j}|X_1,X_2\big]}{\mathbb{E}\big[A_{13}|X_1\big]\mathbb{E}\big[A_{24}|X_2\big]}\right]=O\left(\frac{1}{r_n^2}\right)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{2j_1}A_{j_1j}\big]=O(r_n). \tag{101}$$

结合（95）—（101）可得

$$\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)^2}{(n-1)^4\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]}\sum_{j\neq k\neq j_1\geq 3}T_{1jk}T_{2j_1j}\right]=O(nr_n^4). \tag{102}$$

由（86）、（87）、（94）和（102），可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)^2\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]\sum_{j\neq k\geq 3,j_1\neq k_1\geq 3}T_{1jk}T_{2j_1k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right]\\&=\left(n\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[(A_{13}A_{34}-A_{13}A_{14})|X_1\right]}{\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]}\right]\right)^2+O(nr_n^4+r_n).\end{aligned} \tag{103}$$

设 $j=2$ 和 $k\neq j_1\neq k_1\geq 3$。则

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[T_{12k}T_{2j_1k_1}|X_1,X_2]\\&=\mathbb{E}\big[(A_{12}A_{2k}A_{2j_1}A_{j_1k_1}-A_{12}A_{2k}A_{2j_1}A_{2k_1}-A_{12}A_{1k}A_{2j_1}A_{j_1k_1}+A_{12}A_{2j_1}A_{1k}A_{2k_1})|X_1,X_2\big]\\&=A_{12}\mathbb{E}\big[A_{2k}|X_1,X_2\big]\mathbb{E}\big[A_{2j_1}A_{j_1k_1}|X_1,X_2\big]-A_{12}(\mathbb{E}\big[A_{2k}|X_1,X_2\big])^3\\&\quad-A_{12}\mathbb{E}\big[A_{1k}|X_1,X_2\big]\mathbb{E}\big[A_{2j_1}A_{j_1k_1}\big]+A_{12}\mathbb{E}\big[A_{1k}|X_1,X_2\big](\mathbb{E}\big[A_{2k}|X_1,X_2\big])^2\\&=(2r_n)^3\mathbb{E}\big[A_{12}f^3(X_2)|X_1,X_2\big]+O(r_n^5)\mathbb{E}\big[A_{12}|X_1,X_2\big]\\&\quad-(2r_n)^3\mathbb{E}\big[A_{12}f^3(X_2)|X_1,X_2\big]+O(r_n^5)\mathbb{E}\big[A_{12}|X_1,X_2\big]\\&\quad-(2r_n)^3\mathbb{E}\big[A_{12}f^2(X_2)f(X_1)|X_1,X_2\big]+O(r_n^5)\mathbb{E}\big[A_{12}|X_1,X_2\big]\\&\quad+(2r_n)^3\mathbb{E}\big[A_{12}f^2(X_2)f(X_1)|X_1,X_2\big]+O(r_n^5)\mathbb{E}\big[A_{12}|X_1,X_2\big]\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\big[T_{12k}T_{2j_1k_1}|X_1,X_2\big]}{\mathbb{E}\big[A_{13}|X_1\big]\mathbb{E}\big[A_{24}|X_2\big]}\right]=O(r_n^5)\mathbb{E}\left[\frac{A_{12}}{(2r_n)^2f(X_1)f(X_2)}\right]=O(r_n^4).$$

因此，我们有

$$\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)^2\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]\sum_{k\neq j_1\neq k_1\geq 3}T_{12k}T_{2j_1k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right]=O(nr_n^4). \tag{104}$$

假设 $j=2$ 且 $k=j_1\neq k_1\geq 3$。则

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[|T_{12k}T_{2kk_1}|]\\&\leq\mathbb{E}\Big[(A_{12}A_{2k}A_{kk_1}+A_{12}A_{2k}A_{2k_1}+A_{12}A_{1k}A_{2k}A_{kk_1}+A_{12}A_{2k}A_{1k}A_{2k_1})\Big]=O(r_n^3).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left|\frac{(n+1)^2\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]\sum_{k\neq k_1\geq 3}T_{12k}T_{2kk_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right]\\&=O\left(\frac{(n+1)^2(n-3)(n-4)}{(n-1)^4r_n^2}\right)\mathbb{E}[|T_{12k}T_{2kk_1}|]\\&=O(r_n).\end{aligned}\tag{105}$$

假设 $j=2$ 和 $k=k_1\neq j_1\geq 3$。那么

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[|T_{12k}T_{2j_1k}|]\\&\leq\mathbb{E}\Big[(A_{12}A_{2k}A_{2j_1}A_{j_1k}+A_{12}A_{2k}A_{2j_1}+A_{12}A_{1k}A_{2j_1}A_{j_1k}+A_{12}A_{2k}A_{1k}A_{2j_1})\Big]=O(r_n^3).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left|\frac{(n+1)^2\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]\sum_{k\neq j_1\geq 3}T_{12k}T_{2j_1k}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right]\\&=O\left(\frac{(n+1)^2(n-3)(n-4)}{(n-1)^4r_n^2}\right)\mathbb{E}[|T_{12k}T_{2j_1k}|]\\&=O(r_n).\end{aligned}\tag{106}$$

假设 $j=2$ 和 $j_1=1$。在这种情况下，k，$k_1\geq 3$ 和 $T_{12k}T_{21k_1}$ 可以表示为

$$T_{12k}T_{21k_1}=A_{12}(A_{1k_1}A_{2k}-A_{2k}A_{2k_1}-A_{1k}A_{1k_1}+A_{1k}A_{2k_1}).$$

如果 $k_1\neq k$，那么

$$\mathbb{E}[T_{12k}T_{21k_1}]=O(r_n^3).$$

如果 $k_1=k$，那么

$$\mathbb{E}[T_{12k}T_{21k}]=O(r_n^2).$$

因此，我们有

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{(n+1)^2\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]\sum_{k,k_1\geq 3}T_{12k}T_{21k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right]$$

$$= O\left(\frac{(n+1)^2(n-3)(n-4)r_n^3}{(n-1)^4 r_n^2}\right) + O\left(\frac{(n+1)^2(n-3)r_n^2}{(n-1)^4 r_n^2}\right)$$
$$= O\left(r_n + \frac{1}{n}\right). \tag{107}$$

假设 $j \quad = 2$ 和 $k_1 = 1$。在这种情况下， j_1， $k \geq 3$和 $T_{12k}T_{2j_11}$ 可表示为

$$T_{12k}T_{2j_11} = A_{12}A_{1j_1}A_{2k}A_{2j_1} - A_{12}A_{2k}A_{2j_1} - A_{12}A_{1k}A_{1j_1}A_{2j_1} + A_{12}A_{1k}A_{2j_1}.$$

如果 $j_1 \neq k$，那么

$$\mathbb{E}[|T_{12k}T_{2j_11}|] = O(r_n^3).$$

如果 $j_1 = k$，那么

$$\mathbb{E}[|T_{12k}T_{2j_11}|] = O(r_n^2).$$

因此，我们有

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{(n+1)^2\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]\sum_{k,j_1\geq 3} T_{12k}T_{2j_11}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right] = O\left(r_n + \frac{1}{n}\right). \tag{108}$$

假设 $k = 2$ 和 $j \neq j_1 \neq k_1 \geq 3$。在这种情况下， $T_{1j2}T_{2j_1k_1}$ 在给定 X_1， X_2 时的条件期望为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[T_{1j2}T_{2j_1k_1}|X_1, X_2] \\
&= \mathbb{E}\big[(A_{1j}A_{j2}A_{2j_1}A_{j_1k_1} - A_{1j}A_{j2}A_{2j_1}A_{2k_1} - A_{1j}A_{12}A_{2j_1}A_{j_1k_1} + A_{1j}A_{2j_1}A_{12}A_{2k_1})|X_1, X_2\big] \\
&= (2r_n)^2\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{j2}f^2(X_2)|X_1, X_2\big] + O(r_n^4)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{j2}|X_1, X_2\big] \\
&\quad - (2r_n)^2\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{j2}f^2(X_2)|X_1, X_2\big] + O(r_n^4)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{j2}|X_1, X_2\big] \\
&\quad - (2r_n)^2\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{12}f^2(X_2)|X_1, X_2\big] + O(r_n^4)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{12}|X_1, X_2\big] \\
&\quad + (2r_n)^2\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{12}f^2(X_2)|X_1, X_2\big] + O(r_n^4)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{12}|X_1, X_2\big] \\
&= O(r_n^4)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{j2}|X_1, X_2\big] + O(r_n^4)\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{12}|X_1, X_2\big].
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)^2\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]\sum_{j\neq j_1\neq k_1\geq 3} T_{1j2}T_{2j_1k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] \\
&= \frac{(n+1)^2(n-3)(n-4)(n-5)}{(n-1)^4}\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\big[T_{1j2}T_{2j_1k_1}|X_1, X_2\big]}{\mathbb{E}\big[A_{13}|X_1\big]\mathbb{E}\big[A_{24}|X_2\big]}\right] \\
&= O(nr_n^4)\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\big[A_{1j}A_{j2}|X_1, X_2\big] + \mathbb{E}\big[A_{1j}A_{12}|X_1, X_2\big]}{\mathbb{E}\big[A_{13}|X_1\big]\mathbb{E}\big[A_{24}|X_2\big]}\right]
\end{aligned}$$

$$= O(nr_n^4), \tag{109}$$

其中，最后一个等式可通过类似于式（99）中所用的论证得出。

假设 $k = 2$ 和 $j = j_1 \neq k_1 \geq 3$。那么

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[|T_{1j2}T_{2jk_1}|]\\&\leq \mathbb{E}\left[A_{1j}A_{j2}A_{jk_1} + A_{1j}A_{j2}A_{2k_1} + A_{1j}A_{12}A_{2j}A_{jk_1} + A_{1j}A_{2j}A_{12}A_{2k_1}\right] = O(r_n^3).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{(n+1)^2\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]\sum_{j_1\neq k_1\geq 3} T_{1j2}T_{2jk_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right] = O(r_n). \tag{110}$$

假设 $k = 2$ 和 $j = k_1 \neq j_1 \geq 3$。那么

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[|T_{1j2}T_{2j_1j}|]\\&\leq \mathbb{E}\left[A_{1j}A_{j2}A_{2j_1}A_{jj_1} + A_{1j}A_{j2}A_{2j_1} + A_{1j}A_{12}A_{2j}A_{jj_1} + A_{1j}A_{2j}A_{12}A_{2j_1})\right]\\&= O(r_n^3).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{(n+1)^2\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]\sum_{j\neq j_1\geq 3} T_{1j2}T_{2j_1j}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right] = O(r_n). \tag{111}$$

假设 $k = 2$ 和 $j_1 = 1$。在这种情况下，k_1，$j \geq 3$。那么

$$T_{1j2}T_{21k_1} = A_{1j}A_{j2}A_{21}A_{1k_1} - A_{1j}A_{j2}A_{21}A_{2k_1} - A_{12}A_{1j}A_{1k_1} + A_{1j}A_{12}A_{2k_1}$$

如果 $j_1 \neq k$，那么

$$\mathbb{E}[|T_{1j2}T_{21k_1}|] = O(r_n^3).$$

如果 $j_1 = k$，那么

$$\mathbb{E}[|T_{1j2}T_{21k_1}|] = O(r_n^2).$$

因此，我们有

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{(n+1)^2\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]\sum_{j,k_1\geq 3} T_{1j2}T_{21k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right] = O\left(r_n + \frac{1}{n}\right). \tag{112}$$

假设 $k = 2$ 和 $k_1 = 1$。在这种情况下，$j_1, j \geq 3$。于是

$$T_{1j2}T_{2j_11} = A_{1j}A_{j2}A_{2j_1}A_{j_11} - A_{1j}A_{j2}A_{21}A_{2j_1} - A_{12}A_{1j}A_{2j_1}A_{j_11} + A_{1j}A_{12}A_{2j_1}.$$

如果 $j_1 \neq j$，那么

$$\mathbb{E}[|T_{1j2}T_{2j_11}|] = O(r_n^3).$$

如果 $j_1 = j$，则

$$\mathbb{E}[|T_{1j2}T_{2j_11}|] = O(r_n^2).$$

因此，我们有

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{(n+1)^2\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]\sum_{j,j_1\geq 3} T_{1j2}T_{2j_11}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right] = O\left(r_n + \frac{1}{n}\right). \tag{113}$$

由（104）-（113），我们有

$$\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)^2\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right]\sum_{\substack{j\neq k\geq 3, j_1\neq k_1\geq 3\\ j=2, or\ \ k=2}} T_{1jk}T_{2j_1k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] = O\left(r_n + \frac{1}{n} + nr_n^4\right). \tag{114}$$

结合（103）和（114）可得（20）。等式（18）和（19）可由（20）的证明容易得出。

□

6.11. 证明引理 *2.13*

注意，

$$\mathbb{E}\left[\frac{Q_1Q_2}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] = \sum_{\substack{j\neq k\neq 1\\ j_1\neq k_1\neq 2}} \mathbb{E}\left[\frac{S_{1jk}S_{2j_1k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right]. \tag{115}$$

若 $j \neq k \neq j_1 \neq k_1 \geq 3$，则在给定 X_1, X_2 的条件下，S_{1jk} 和 $S_{2j_1k_1}$ 条件独立。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{S_{1jk}S_{2j_1k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[S_{1jk}S_{2j_1k_1}|X_1, X_2\right]}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[S_{1jk}|X_1\right]\mathbb{E}\left[S_{2j_1k_1}|X_2\right]}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[S_{1jk}|X_1\right]}{\mu_1^2}\right]\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[S_{2j_1k_1}|X_2\right]}{\mu_2^2}\right] \\
&= \frac{1}{(n-1)^4}\left(\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[\left(A_{12}A_{13} - A_{12}A_{13}A_{23}\right)|X_1\right]}{\left(\mathbb{E}[A_{12}|X_1]\right)^2}\right]\right)^2.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\sum_{j\neq k\neq j_1\neq k_1\geq 3}\mathbb{E}\left[\frac{S_{1jk}S_{2j_1k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right]=\left(\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}\left[\left(A_{12}A_{13}-A_{12}A_{13}A_{23}\right)|X_1\right]}{\left(\mathbb{E}[A_{12}|X_1]\right)^2}\right]\right)^2+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{116}$$

设 $\{j,k\}=\{j_1,k_1\}$。在此情形下，j，k，j_1，$k_1\geq 3$。这样的指标对至多有 n^2 个。注意，$0\leq S_{1jk}=A_{1j}A_{1k}(1-A_{jk})\leq 2A_{1j}A_{1k}$ 且 $|S_{2j_1k_1}|=|A_{2j_1}A_{2k_1}(1-A_{j_1k_1})|\leq 2$。于是 $|S_{1jk}S_{2j_1k_1}|\leq 4A_{1j}A_{1k}$。在此情形下，

$$\mathbb{E}\left[|S_{1jk}S_{2j_1k_1}|\right]\leq 4\mathbb{E}\left[A_{1j}A_{1k}\right]=4\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[A_{1j}A_{1k}|X_1\right]\right]=O(r_n^2). \tag{117}$$

Then

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\sum_{j\neq k\geq 3,j_1\neq k_1\geq 3\atop\{j,k\}=\{j_1,k_1\}}S_{1jk}S_{2j_1k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right]=O\left(\frac{n^2r_n^2}{n^4r_n^4}\right)=O\left(\frac{1}{n^2r_n^2}\right). \tag{118}$$

设 $|\{j,k\}\cap\{j_1,k_1\}|=1$ 且 j，k，j_1，$k_1\geq 3$。这样的指标元组至多有 n^3 个 $\{j,k,j_1,k_1\}$。在此情形下，$j_1\notin\{j,k\}$ 或 $k_1\notin\{j,k\}$。不失一般性，令 $j_1\notin\{j,k\}$。于是 $|S_{1jk}S_{2j_1k_1}|\leq 4A_{1j}A_{1k}A_{2j_1}$。在此情形下，

$$\mathbb{E}\left[|S_{1jk}S_{2j_1k_1}|\right]\leq 4\mathbb{E}\left[A_{1j}A_{1k}A_{2j_1}\right]=4\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[A_{1j}A_{1k}A_{2j_1}|X_1\right]\right]=O(r_n^3).$$

Then

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\sum_{j\neq k\geq 3,j_1\neq k_1\geq 3\atop|\{j,k\}\cap\{j_1,k_1\}|=1}S_{1jk}S_{2j_1k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right]=O\left(\frac{n^3r_n^3}{n^4r_n^4}\right)=O\left(\frac{1}{nr_n}\right). \tag{119}$$

假设 $j=2$ 且 $j_1=1$。则 $k\geq 3$ 且 $k_1\geq 3$。若 $k\neq k_1$，则至多有 n^2 个这样的指标元组 $\{j,k,j_1,k_1\}$。在这种情况下，我们有

$$\mathbb{E}\left[|S_{12k}S_{21k_1}|\right]\leq 4\mathbb{E}\left[A_{2k}A_{1k_1}\right]=O(r_n^2). \tag{120}$$

若 $k=k_1$，则至多有 n 个这样的指标元组 $\{j,k,j_1,k_1\}$。在这种情况下，我们有

$$\mathbb{E}\left[|S_{12k}S_{21k_1}|\right]\leq 4\mathbb{E}\left[A_{2k}\right]=O(r_n). \tag{121}$$

类似地，我们可以得到（120）和（121），对于情形 $\{j,k\}\cap\{2\}\neq\emptyset$ 和 $\{j_1,k_1\}\cap\{1\}\neq\emptyset$。因此，我们有

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\sum_{j\neq k\neq 1,j_1\neq k_1\neq 2\atop\{j,k\}\cap\{2\}\neq\emptyset,\{j_1,k_1\}\cap\{1\}\neq\emptyset}S_{1jk}S_{2j_1k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right]=O\left(\frac{n^2r_n^2+nr_n}{n^4r_n^4}\right)=O\left(\frac{1}{n^2r_n^2}\right). \tag{122}$$

假设 $j=2$。如果 $k\neq j_1\neq k_1\geq 3$，则至多存在 n^3 个这样的指标元组 $\{j,k,j_1,k_1\}$。那么

$$\mathbb{E}\left[|S_{1jk}S_{2j_1k_1}|\right]\leq 4\mathbb{E}\left[A_{1k}A_{2j_1}A_{2k_1}\right]=4\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[A_{1k}A_{2j_1}A_{2k_1}|X_1,X_2\right]\right]=O(r_n^3),$$

这意味着

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\sum_{k\neq j_1\neq k_1\neq 2}S_{12k}S_{2j_1k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right]=O\left(\frac{n^3r_n^3}{n^4r_n^4}\right)=O\left(\frac{1}{nr_n}\right). \tag{123}$$

如果 $k\in\{j_1,k_1\}$，那么

$$\mathbb{E}\left[|S_{1jk}S_{2j_1k_1}|\right]\leq 4\mathbb{E}\left[A_{2j_1}A_{2k_1}\right]=4\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[A_{2j_1}A_{2k_1}|X_1,X_2\right]\right]=O(r_n^2).$$

由此可得

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\sum_{\substack{j_1\neq k_1\neq 2\\ k\in\{j_1,k_1\}}}S_{12k}S_{2j_1k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right|\right]=O\left(\frac{n^2r_n^2}{n^3r_n^3}\right)\qquad =O\left(\frac{1}{n^2r_n^2}\right). \tag{124}$$

情形 $k=2$ 与情形 $j=2$类似。总之，结合式（116）至（124）即可得到引理2.13。

□

6.12. 引理*2.14*的证明

注意,

$$\frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]}{\mu_1^2\mu_2^2}P_1Q_2=\frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]}{\mu_1^2\mu_2^2}\sum_{\substack{j\neq k\neq 1\\ j_1\neq k_1\neq 2}}T_{1jk}S_{2j_1k_1}. \tag{125}$$

假设 $j\neq k\neq j_1\neq k_1\geq 3$。由于在给定 X_1， X_2 的条件下， T_{1jk} 和 $S_{2j_1k_1}$ 条件独立，因此条件期望可分解为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_{1jk}S_{2j_1k_1}|X_1,X_2]&=\mathbb{E}[T_{1jk}|X_1]\mathbb{E}[S_{2j_1k_1}|X_2]\\&=\mathbb{E}[(A_{13}A_{34}-A_{13}A_{14})|X_1]\mathbb{E}[(A_{25}A_{26}-A_{25}A_{26}A_{56})|X_2].\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\sum_{j\neq k\neq j_1\neq k_1\geq 3}\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\mathbb{E}[T_{1jk}S_{2j_1k_1}|X_1,X_2]}{\mu_1^2\mu_2^2}\right]\\&=\frac{(n^5+O(n^4))}{(n-1)^4}\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[(A_{13}A_{34}-A_{13}A_{14})|X_1]\mathbb{E}[(A_{25}A_{26}-A_{25}A_{26}A_{56})|X_2]}{\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\left(\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right]\right)^2}\right]\end{aligned}$$

$$= n\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[(A_{13}A_{34} - A_{13}A_{14})|X_1]}{\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]}\right]\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[(A_{25}A_{26} - A_{25}A_{26}A_{56})|X_2]}{(\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_2\right])^2}\right] + O\left(r_n^3\right). \tag{126}$$

假设 $j = j_1 \neq k \neq k_1 \geq 3$。那么

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[|T_{1jk}S_{2jk_1}|] \\
&\leq \mathbb{E}[A_{1j}A_{jk}A_{2j}A_{2k_1} + A_{1j}A_{jk}A_{2j}A_{2k_1}A_{jk_1} + A_{1j}A_{1k}A_{2j}A_{2k_1} + A_{1j}A_{1k}A_{2j}A_{2k_1}A_{jk_1}] \\
&= O(r_n^4).
\end{aligned}$$

这意味着

$$\sum_{j\neq k\neq k_1\geq 3}\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12} \mid X_1\right]\mathbb{E}[T_{1jk}S_{2jk_1}|X_1, X_2]}{\mu_1^2\mu_2^2}\right] = O\left(\frac{n^4 r_n^5}{n^4 r_n^4}\right) = O(r_n). \tag{127}$$

假设 $j = k_1 \neq k \neq j_1 \geq 3$。那么

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[|T_{1jk}S_{2j_1j}|] \\
&\leq \mathbb{E}[A_{1j}A_{jk}A_{2j_1}A_{2j} + A_{1j}A_{jk}A_{2j_1}A_{2j}A_{j_1j} + A_{1j}A_{1k}A_{2j_1}A_{2j} + A_{1j}A_{1k}A_{2j_1}A_{2j}A_{j_1j}] \\
&= O(r_n^4).
\end{aligned}$$

式（125）中对这些指标的求和有上界 $O(r_n)$。

假设 $k = j_1 \neq j \neq k_1 \geq 3$。那么

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[|T_{1jk}S_{2kk_1}|] \\
&\leq \mathbb{E}[A_{1j}A_{jk}A_{2k}A_{2k_1} + A_{1j}A_{jk}A_{2k}A_{2k_1}A_{kk_1} + A_{1j}A_{1k}A_{2k}A_{2k_1} + A_{1j}A_{1k}A_{2k}A_{2k_1}A_{kk_1}] \\
&= O(r_n^4).
\end{aligned}$$

式（125）中对这些指标的求和有上界 $O(r_n)$。

假设 $k = k_1 \neq j \neq j_1 \geq 3$。那么

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[|T_{1jk}S_{2j_1k}|] \\
&\leq \mathbb{E}[A_{1j}A_{jk}A_{2j_1}A_{2k} + A_{1j}A_{jk}A_{2j_1}A_{2k}A_{j_1k} + A_{1j}A_{1k}A_{2j_1}A_{2k} + A_{1j}A_{1k}A_{2j_1}A_{2k}A_{j_1k}] \\
&= O(r_n^4).
\end{aligned}$$

对（125）中这些指标求和，其上界为 $O(r_n)$。

假设 $\{j, k\} = \{j_1, k_1\}$ 且 $j,\ k,\ j_1,\ k_1 \geq 3$。那么

$$\mathbb{E}[|T_{1jk}S_{2jk}|] \leq 2\mathbb{E}[A_{1j}A_{jk} + A_{1j}A_{1k}] = O(r_n^2).$$

式（125）中对这些指标的求和有上界 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$。

—

因此，我们有

$$\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\sum_{j\neq k\geq 3, j_1\neq k_1\geq 3} T_{1jk}S_{2j_1k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right]$$
$$= n\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[(A_{13}A_{34}-A_{13}A_{14})|X_1]}{\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]}\right]\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[(A_{25}A_{26}-A_{25}A_{26}A_{56})|X_2]}{(\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_2\right])^2}\right]+O\left(r_n+\frac{1}{nr_n}\right). \tag{128}$$

假设 $j=2$、 $k\neq j_1\neq k_1\geq 3$。则

$$\mathbb{E}[|T_{12k}S_{2j_1k_1}|]$$
$$\leq \mathbb{E}[A_{12}A_{2k}A_{2j_1}A_{2k_1}+A_{12}A_{2k}A_{2j_1}A_{2k_1}A_{j_1k_1}+A_{12}A_{1k}A_{2j_1}A_{2k_1}+A_{12}A_{1k}A_{2j_1}A_{2k_1}A_{j_1k_1}]$$
$$= O(r_n^4).$$

这些指标在 (125) 中的求和有上界 $O(r_n)$。

假设 $j=2$、 $k=j_1\neq k_1\geq 3$ 或 $k=k_1\neq j_1\geq 3$。则

$$\mathbb{E}[|T_{12k}S_{2j_1k_1}|]\leq 2\mathbb{E}[A_{12}A_{2k}+A_{12}A_{1k}]=O(r_n^2).$$

这些指标在 (125) 中的求和有上界 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$。

假设 $j=2$ 和 $j_1=1$。若 $k\neq k_1$，则

$$\mathbb{E}[|T_{12k}S_{2j_1k_1}|]\leq 2\mathbb{E}[A_{12}A_{2k}+A_{12}A_{1k}]=O(r_n^2).$$

若 $k=k_1$，则

$$\mathbb{E}[|T_{12k}S_{21k}|]\leq 2\mathbb{E}[A_{2k}+A_{1k}]=O(r_n).$$

式（125）中对这些指标的求和有上界 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$。同样的上界也适用于 $j=2$ 且 $k_1=1$ 的情形。

设 $k=2, j\neq j_1\neq k_1\geq 3$。则

$$\mathbb{E}[|T_{1j2}S_{2j_1k_1}|]$$
$$\leq \mathbb{E}[A_{1j}A_{j2}A_{2j_1}A_{2k_1}+A_{1j}A_{j2}A_{2j_1}A_{2k_1}A_{j_1k_1}+A_{1j}A_{12}A_{2j_1}A_{2k_1}+A_{1j}A_{j2}A_{2j_1}A_{2k_1}A_{j_1k_1}]$$
$$= O(r_n^4).$$

式（125）中对这些指标的求和有上界 $O(r_n)$ 。

假设 $k=2$、 $j=j_1\neq k_1\geq 3$ 或 $j=k_1\neq j_1\geq 3$。那么

$$\mathbb{E}[|T_{1j2}S_{2j_1k_1}|]\leq 2\mathbb{E}[A_{1j}A_{j2}+A_{1j}A_{12}]=O(r_n^2).$$

对（125）中这些指标求和，其上界为 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$。

假设 $k=2$ 和 $j_1=1$。若 $j\neq k_1$，则

$$\mathbb{E}[|T_{1j2}S_{2j_1k_1}|]\leq 2\mathbb{E}[A_{1j}A_{j2}+A_{1j}A_{12}]=O(r_n^2).$$

若 $j=k_1$，则

$$\mathbb{E}[|T_{1j2}S_{21j}|]\leq 2\mathbb{E}[A_{1j}]=O(r_n).$$

对（125）中这些指标的求和有上界 $O\left(\frac{1}{nr_n}\right)$。同样的上界也适用于 $k=2$ 且 $k_1=1$ 的情形。

综上，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\frac{(n+1)\mathbb{E}\left[A_{12}\mid X_1\right]\sum_{\substack{j\neq k\neq 1,j_1\neq k_1\neq 2\\ j=2\ or\ k=2}}T_{1jk}S_{2j_1k_1}}{\mu_1^2\mu_2^2}\right]=O\left(r_n+\frac{1}{nr_n}\right). \tag{129}$$

结合（128）和（129），得到引理 2.14 的结论。

□

参考文献

[1] Abbe, E. (2018). 社区检测与随机块模型：近期进展。机器学习研究杂志，18，1-86。[2] Cantwell, G., Kirkley, A. and Newman, M.E.J.(2021). 现实网络与模型网络中的友谊悖论，复杂网络杂志，00:1-15。[3] Duchemin, Q., De Castro, Y. (2023). 随机几何图：近期进展与展望。高维概率 *IX*. 概率进展Birkh¨auser, Cham。[4] Desmond J. Higham, Marija Raˇsajski, Nataˇsa Prˇzulj (2008). 将几何图拟合到蛋白质相互作用网络，生物信息学，24(8)，1093–1099。[5] Evtushenko, A. and Kleinberg, J. (2024). 将友谊悖论全面推广至权重和属性，科学报告，14,13730。[6] Field, S. (1991). 为什么你的朋友比你有更多朋友，美国社会学杂志，96(6):1464-1477。[7] S. Galhotra, A. Mazumdar, S. Pal, B. Saha (2023). 几何块模型中的社区恢复，机器学习研究杂志 24: 1-53。[8] Goel, A., Rai, S., Krishnamachari, B.(2005). 随机几何图的单调性质具有尖锐阈值。*Ann. Appl. Probab.*15 (4) 2535-2552。

[9] Ganesan, G., 随机几何图中的鲁棒路径及其在移动网络中的应用，*2021*年国际通信系统与网络会议（*COM-SNETS*），印度班加罗尔，2021年，第119-123页。[10] Jackson, M.(2019). 友谊悖论以及对认知和社会规范的系统性偏差，政治经济学杂志，127(2):777–818。[11] Kumar, V., Krackhardt, D. and Feld S.(2024). 关于友谊悖论与逆友谊悖论：一种应用于隐私敏感型网络干预的网络性质，美国国家科学院院刊，121,e2306412121。[12] Nettasinghe, B. and Krishnamurthy, V. (2019). “你的朋友怎么想？”：利用友谊悖论进行网络高效轮询的方法，*IEEE*知识与数据工程汇刊，33(3):1291–1305。[13] Nettasinghe, B. and Krishnamurthy, V. (2021). 通过基于友谊悖论的抽样对幂律度分布进行最大似然估计。*ACM Trans.Knowl. Discov. Data 15*，6，106。[14] Siddharth Pal, Feng Yu, Yitzchak Novick, Ananthram Swami, and Amotz Bar-Noy (2019), 关于友谊悖论的研究——定量分析及其与择 assortative mixing 的关系，*Appl. Netw. Sci.* 4(1): 1–26。[15] Paolino, R., Bojchevski, A., Gunnemann, S., Kutyniok, G. and Levie, R.(2023). 揭示非均匀几何图中的抽样密度，国际学习表征会议 *2023*[16] Yuan, M. (2024). 随机几何图友谊悖论的渐近分布。巴西概率与统计学杂志，38，444-462。[17] Yuan, M. and Yu, F. (2025). 随机几何图维数的假设检验，预印本，ResearchGate，DOI: 10.13140/RG.2.2.31959.53920[18] Yuan,M.(2025). 随机环带图全局聚类系数的渐近分布，https://arxiv.org/pdf/2510.15003[19] Yuan, M. (2025b). 随机几何图均匀性的假设检验，https://arxiv.org/pdf/2510.14210[20] Yuan, M,(2025). 随机几何图 Randic 指数的极限分布，*MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*，93,767-789。[21] Yuan, M. and Sium, Md. N. I. (2026). 随机几何图全局聚类系数的中心极限定理。预印本。