初选中策略行为的复杂性

Colin Cleveland 伦敦国王学院 伦敦，英国
colin.cleveland@kcl.ac.uk

Bart de Keijzer 伦敦国王学院 伦敦，英国
bart.de_keijzer@kcl.ac.uk

Maria Polukarov 伦敦国王学院 伦敦，英国
m aria.polukarov@kcl.ac.uk

arXiv:2602.10290v1 [cs.GT] 10 Feb 2026

摘要

我们研究初选中策略行为的计算复杂性。与直接投票制度不同，初选引入了一个多阶段过程：选民首先影响党内提名人，随后由大选决定最终获胜者。以往研究通过福利损失评估初选，而我们转而考察其博弈论性质。我们形式化了一个采用得票最多者当选制和固定平局裁决的初选模型，并分析选民的策略行为。我们证明，判定纯纳什均衡是否存在是 Σ_2^{P} 完全的，计算最优反应是 NP 完全的，而判定顺序初选中子博弈完美均衡是否存在则是 PSPACE 完全的。这些结果表明，初选从根本上增加了策略推理的计算难度，使其成为计算社会选择中复杂性理论挑战的丰富来源。

CCS 概念

• **计算理论** → **算法博弈论**；**博弈的表示及其复杂性**；问题、归约与完全性。

关键词

计算社会选择；算法博弈论；策略性投票；初选；PSPACE-完全

1 引言

民主通常是在选民群体 →政府层面加以理解的，但政党内部也存在一个同样重要的问题：政党应如何遴选自己的候选人？历史上，在许多制度中，政党精英会直接挑选提名人，而初选至多只是非正式的民意调查。1968年美国民主党全国代表大会上，Hubert Humphrey 未参加任何初选便获得提名，此事引发了广泛抗议，并促使美国将初选制度化 [7, 21]。此后，类似改革已在全球各地推行：在一些国家（如美国、智利、阿根廷），初选受到国家监管 [6, 28], ；而在另一些国家（如法国、意大利），初选仍是由政党组织举办的党内程序 [3, 16, 27]。即使在尚未正式采用初选制度的英国，各大政党也越来越多地允许支持者参与领导人遴选 [23]。

初选有多种制度形式——开放式、封闭式、半开放式，或诸如民调加权初选这样的混合制度，在后者中，民意调查会影响结果。这类混合制度在台湾和韩国等较新的民主国家尤为常见；在那里，党员结构薄弱，政党因此会将公众民调纳入提名程序 [11, 15, 24]。

初选不仅是判定程序，也是政党与其支持者之间的沟通渠道。然而，初选也会引发策略行为。例如，据报道，在科罗拉多州 2022 年的共和党初选中，数千名民主党人重新登记为无党派选民，以反对众议员 Lauren Boebert，但最终并未影响选举结果 [13]。这种“跨党投票”行为表明，增加选择可能会带来操纵的动机，并导致意料之外的损失。

从政党的角度看，初选可能无法最大化大选表现，因为两极化候选人可能胜出。从选民的角度看，初选提供了重塑竞争格局的机会，但也带来了不可忽视的计算成本和信息成本。这些观察促使我们对初选的策略结构进行形式化分析。

我们的贡献。 我们从计算社会选择和算法博弈论的视角研究初选。具体而言，我们：

- 将一个两阶段选举模型形式化，其中选民的初选选择和大选选择构成明确的策略（第 3.1 节）；
- 刻画最佳响应计算、均衡验证以及均衡存在性判定的计算复杂性（第 4 节）；
- 将该框架扩展至序贯多阶段初选，展示时间条件化如何增加策略复杂性（第 5 节）。

我们的结果表明，多阶段初选加剧了策略性行动者所面临的推理负担：最佳响应计算是 NP 完全的，均衡存在性上升至 Σ_2^{P}-完全性，而序贯条件化则产生 PSPACE-完全性。除了选举之外，这些结果还关联到多智能体推理中的更广泛问题——将集体决策分解为多个阶段，如何在多项式层级内扩展均衡分析的逻辑深度。

复杂性概述。 我们使用复杂性类 NP、 Σ_2^{P} 和 PSPACE。NP 包含形如 $\exists x\, \varphi(x)$ 的判定问题，其中 φ 可在多项式时间内计算。类 Σ_2^{P} 包含形如 $\exists x \forall y\, \varphi(x, y)$ 的问题，其中 φ可在多项式时间内计算。PSPACE 包含可在多项式空间内判定的判定问题；等价地，它包含可表示为 $Q_1 x_1 \cdots Q_{p(n)} x_{p(n)}\, \varphi(x_1, \ldots, x_{p(n)})$ 的问题，其中含有多项式数量的交替量词，如量化布尔公式（量化布尔公式）所示。选举阶段数量的增加对应于量词交替深度的增加。

2 相关工作

计算社会选择领域的大多数研究都聚焦于直接选举，即所有候选人同时参与竞选。Borodin

等人 [4] 首次对该领域的初选 进行了形式化分析，并依据不同规则比较了多阶段提名流程与直接选举。他们的研究结果表明，无论从理论上还是从实证扭曲分析来看，初选都可能与直接选举存在显著差异。我们的工作沿着这一方向继续推进，探讨初选中选民行为的策略与计算层面，而非其福利影响。

另一条互补的研究脉络探讨策略性候选，即候选人决定是否参选或退出。Dutta 等人 [8, 9] 开创了这一研究，并由 Brill 和 Conitzer [5] 以及 Polukarov 等人 [22], 进一步发展，刻画了候选人参选决策所形成的均衡。关于选举控制的相关研究——例如增加或删除候选人——始于 Bartholdi 等人 [2]。Harrenstein 等人 [10] 在 Hotelling–Downs 框架下将策略性候选与空间竞争结合起来，在该框架中，政党提名候选人；他们展示了均衡存在问题的复杂度界，并揭示了其与设施选址和 Voronoi 博弈之间的联系。近来，Schlotter 和 Cechlárová [26] 在符合孔多塞准则的规则下分析了可能总统 问题，探讨了当提名人取决于竞争政党的选择时，该问题的计算复杂度和参数化复杂度。与这些以候选人为中心 的视角不同，我们关注的是初选制度中选民 的策略性计算。

另一条相关研究脉络关注迭代投票，即选民根据他人的选择反复调整自己的选票。Meir 等人[19] 率先研究了多数制下收敛至均衡的问题，随后 Reijngoud 和 Endriss [25], 、Obraztsova 等人 [20], 以及 Lev 和 Rosenschein [17]拓展了这项研究。Meir [18] 以及 Airiau 等人 [1] 的综述系统总结了这方面的文献，这些研究通常假设选举只有一个阶段，并探讨行为上的收敛。我们的分析则将选民视为计算能力受限的智能体：我们证明，一旦初选先于大选举行，计算最优反应便是 NP 完全问题；而引入序贯条件化后，均衡存在性问题的复杂度则上升至 Σ_2^{P}-或 PSPACE-完全。这使初选成为多智能体系统中均衡推理复杂性这一更广泛讨论的一部分。

最后，除了计算研究之外，社会科学领域也广泛探讨了初选的设计及其影响。Kenig [12] 综述了议会民主国家中的候选人遴选方法，而 Cohen 等人 [7] 以及 Sides 和 Vavreck [29] 则分析了精英影响力和美国初选中的代表性。这些实证见解与人工智能和博弈论中发展的计算模型相辅相成，共同更全面地展现了制度设计如何塑造多智能体群体中的策略推理。

3 预备知识

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $[n] = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$。令 $V = [n]$ 为选民集合，$A = [m]$ 为政治人物集合。[1] 我们用 v_i 表示选民 $i \in V$，用 a_j 表示政治人物 $j \in A$。

令 $\Pi = [p]$ 表示政党集合。每个政党 $k \in \Pi$ 都有一个互不相交的附属政治人物集合 $A_k \subseteq A$，因此 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 只要 $i \neq j$。所以，每位政治人物都恰好属于一个政党。

[1]在直接选举中，A 与候选人集合相同。

所有初选结束后，每个政党都会推选一名候选人参加大选（GE）。因此，决赛候选人集合构成一个策略组合

$$c = (c_1, \ldots, c_p) \in C := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p,$$

其中，$c_k \in A_k$ 是政党 k的提名人。

每位选民 i都有一个基数效用函数 u_i： $A \to \mathbb{Q}$，其中 $u_i(a_j)$ 表示政治人物 a_j 赢得大选时的效用。由于 A是有限的，我们将 u_i 视为其向量表示

$$(u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,m}), \qquad u_{i,j} = u_i(a_j).$$

效用概况 $[u]$ 汇集了所有选民的偏好，并完全决定了每一位可能的大选获胜者所对应的收益。

3.1 投票框架

我们将选举建模为一个多阶段过程：先进行政党初选，随后举行大选。每个政党 $k \in \Pi$按照固定顺序（1,2,. . . ,p）举行初选。在每个阶段，选民同时投出初选选票，并立即确定一位唯一的提名人。除非另有说明，初选和大选均采用简单多数制（$FPTP$）规则：每位选民投一张选票，得票最多的候选人获胜。平票按照预先确定的候选人固定排序来裁决（固定平票裁决名单）。

选民策略。选民的行为由一个策略描述

$$s_i = \{b_i, g_i\},$$

其中：

- $b_i = (b_{i,1}, \ldots, b_{i,p})$ 是初选选票向量。每个坐标 $b_{i,k} \in A_k \cup \{0\}$表示投票给 A_k 中的一位政客，或弃权（0）。
- g_i： $C \to A\cup\{0\}$是大选决策函数。对于每个最终候选人概况 $c \in C$，它规定选民 i在大选中的选择（或弃权）。

这种约化形式仅涵盖与选举结果相关的事后行为，而非完整的扩展式计划。要完整描述扩展式计划，必须为每一种可能的初选路径和决选候选人集合指定行动——这需要 $\Theta(m^{pn})$的空间（见附录A）。因此，约化形式以牺牲完全性为代价，换取分析上的可处理性。

登记。 各类制度对参与是否要求事先进行政党登记的规定各不相同。在封闭式 初选中，每位选民在初选季开始前选择一个政党；如果 i 登记加入政党 k，则只有$b_{i,k}$ 可能非零。在开放式 初选中，党派归属并非预先确定：在每个阶段 k，选民 i 决定是否投出$b_{i,k}$，但同一选民不得在同一场竞选中参与两次。因此， b_i 在两种机制中的定义域相同，但含义不同——前者是静态承诺，后者是权变选择。行政细节（截止日期、成员名册等）均予以抽象处理。

参与机制。 第二项制度选择涉及选民可以参加多少场初选：

- **单一初选参与：** b_i 中至多有一个坐标非零。
- **多重初选参与：** 每个坐标都可以独立填写，$b_i \in \prod_{k=1}^{p}($ $A_k \cup \{0\})$。

我们将多重参与制度作为一般情形；它涵盖单一初选情形。

访问模型： g_i。大选组件 g_i 可能会非常庞大：由于 $|C| = \prod_{k=1}^{p} |A_k| = \Theta(m^p)$，为 g_i 建立显式表格将需要指数级空间。因此，我们假设使用标准 RAM 模型，将 g_i 视为预言机进行查询，查询成本为 $\tau = \tau(m, p)$。我们的归约使用支持常数时间查询（$\tau = O(1)$）的构件。我们还允许使用简洁编码，其中 $g_i(c)$ 按需计算。一个典型示例是列表偏好规则 $g_i(\cdot; L)$，其中 L 是 $A \cup \{0\}$ 上的有序列表：给定 c，选民会选择 L 中出现在 c 里的第一个元素（如果 0 排在所有决赛候选人之前，则弃权）。这种编码仅使用 $O(m)$ 空间，并支持在 RAM 模型下进行 $O(1)$ 次查询。

汇总所有选民的策略即可得到策略组合 $\mathrm{s} = (s_1, \ldots\ldots, s_n) \in A$。随后，制度安排决定最终获胜者 $\mathrm{W}(\mathrm{s})$。在全文中，我们均将选民视为在这些预言机假设下运作的多项式时间代理。

3.2 选民成本与效用

投下大选选票会产生参与成本 $\kappa_i > 0$，参加政党 k 的初选则会产生参与成本 $\kappa_i^k > 0$。给定策略 s_i 以及其他人的策略 $\mathrm{s}_{-i} = (s_1, \ldots\ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots\ldots, s_n)$，选民 v_i 的总效用等于其从最终大选获胜者那里获得的效用，减去其参加大选和任何初选所产生的参与成本。形式化地，

$$\mathrm{U}_i(s_i, \mathrm{s}_{-i}) = u_i\big(\mathcal{W}(s_i, \mathrm{s}_{-i})\big) - \mathbf{1}[g_i \neq 0]\,\kappa_i - \sum_{k \in [p]} \mathbf{1}[b_{i,k} \neq 0]\,\kappa_i^k,$$

其中，$\mathrm{W}(s_i, \mathrm{s}_{-i})$ 表示大选获胜者。选民根据对他人策略的信念采取行动，以最大化其预期效用 U_i。

玩具示例：两个政党与单一初选参与。考虑 $\Pi = \{1, 2\}$，其中 $A_1 = \{a, b\}$ 和 $A_2 = \{c, d\}$，并假设按字母顺序裁决平票。政治人物位于直线上的 $[10, 6, 4, 0]$ 处，四名选民分别位于 $[0, 4, 6, 10]$ 处，且不存在参与成本。效用遵循 $u_i(a_j) = -|x_i - y_j|$，其中 x_i 和 y_j 分别表示选民 i 和候选人 j[2] 的位置。图1展示了这一设定。

每位选民的策略为 $s_i = \{b_i, g_i\}$，其中 g_i 以排序列表的形式表示：

$$s_1 = \{[0, d], [d, c, b, a]\}, \quad s_2 = \{[0, c], [c, b, d, a]\},$$
$$s_3 = \{[b, 0], [b, c, a, d]\}, \quad s_4 = \{[a, 0], [a, b, c, d]\}.$$

决赛候选人是 $C = (a, c)$，大选获胜者是 c，获得了 v_1、v_2、v_3 的支持。因此 $[u_1(c)\ u_2(c)\ u_3(c)\ u_4(c)] = [-4, 0, -2, -6]$。

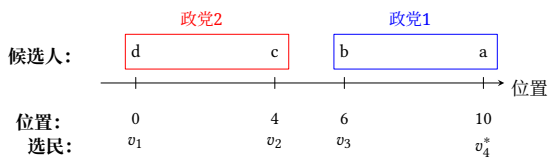

图1：玩具示例中的政治人物和选民位置。

两种策略性投票提高了 v_4 的效用：

- 敌意跨党投票。 v_4 在 $s_4 = (b_4, g_4)$ 中改变了对 b_4 的支持，转而支持 $[0, d]$。随后，d 在政党2的初选中击败了 c（2:1），而 b 在政党1的初选中击败了 a（1:0），最终决出 $C^* = (b, d)$。在大选中，b 以 3:1 击败 d，因此 $\mathrm{U}_4(s_4^*, s_{-4}) = u_4(b) = -4 > -6$。
- 诚实协调。 v_4 则改为投票支持 $b_4 = [b, 0]$，因此 $C^* = (b, c)$。大选结果为 2:2 平局，最终判定 b 获胜，再次将 v_4 的效用提高至 -4。

这些示例表明，真诚的初选投票未必能使个人效用最大化。其他操纵方式，例如诚实跨党投票——即选民在竞争政党的初选中支持自己最喜欢的政治人物——也可能使决选候选人集合朝着更理想的总体结果转变。

4 关于初选的计算问题

上述框架引出了两个核心决策问题。

问题 1（最优反应）。
实例： 选民集合 V、效用概况 $[u]$、政治人物集合 A_1、……、A_p、平局决胜表 L，以及策略组合 s。

任务： 对于给定的选民 i，计算使 $\mathrm{U}_i(s_i^*, \mathrm{s}_{-i})$ 最大化的策略 s_i^*。

问题2（均衡）。
实例： V、$[u]$，以及政治人物集合 A_1，……，A_p。
任务：判定是否存在策略组合 s^*，使得对每个选民 i 以及每个替代策略 s_i'，

$$\mathrm{U}_i(\mathrm{s}^*) \geq \mathrm{U}_i(s_i', \mathrm{s}_{-i}^*).$$

为清晰起见，我们从最简单的时序结构入手，即所有政党同时举行初选。这将选举简化为两个阶段：初选之后是大选，同时保留基本的策略要素。在第5节中，我们放宽这一假设，并考虑顺序情形，即初选在各政党中依次展开。

4.1 最优反应搜索空间与运行时间

计算选民 i 最优反应的一种朴素方法是枚举所有可能的策略。每个策略包括：(i) 每个政党的一张初选选票，以及 (ii) 一条大选（GE）决策规则 $g_i : C \to A \cup \{0\}$，它在决赛候选人中进行选择。由此得到上界

$$\Big(\prod_{k=1}^{p} (1 + |A_k|)\Big) \cdot (|A| + 1)^{|C|},$$

由于每张政党选票提供 $|A_k|+1$ 个选项（包括弃权），且大选规则必须为每个最终候选人概况指定一个行动，其中 $|C| = \prod_k m_k = O(m^p)$。

然而，在计算最优反应时，我们无需枚举整个 g_i。一旦决选候选人 $c \in C$ 确定，选民 i

[2] 效用可以加上一个常数而平移，且不影响比较结果

只需在{c_1、……、c_p、0}之间贪心地做出选择——这些是可供选择的决选候选人和弃权选项——从而将大选决策简化为 m+1 次评估。因此，搜索空间中的主要开销来自枚举初选选票 [3]。

为分析运行时间，我们将计算分解为两个部分。

基线过程。

(1) 预计算。对于每个政党 k，根据 s_{-i}计算初选计票结果，只需扫描所有其他选民一次，耗时为 $O(np)$。(2) 枚举 i的初选行动。对于每种组合$b_i \in \prod_k (A_k \cup \{0\})$：(a) 在局部更新计票结果以反映 b_i，根据简单多数制（采用固定平局裁决）确定每个政党的提名人，并获得决选候选人元组 $c_x \in C$。利用每个政党的运行中最大值参数，每个 b_i 所需时间为 $O(mp)$。(b) 评估大选结果。对于每个 $i' \neq i$，查询 $g_{i'}(c_x)$（每次查询耗时 τ），并将该选择的计票结果加一。此步骤的成本为 $O(n\tau+p)$，其中每个 b_i 的 p 计入对大选计票结果进行最终最大值参数计算的开销。选民 i随后从 {$c_{x,1}$、……、$c_{x,p}$、0} 中贪心地选择她的大选行动，并计算 U_i。

汇总这些项可得以下界 .

命题 1（最佳响应运行时间）。设 τ 为针对给定最终候选人概况 c计算单个选民的大选决策 $g_i(c)$ 所需的时间。对于固定选民 i，针对 $b_i \in \prod_{k=1}^{p}(A_k \cup \{0\})$ 的枚举算法运行时间为

$$O\big(np + (m+1)^p (mp + n\tau)\big)$$

对于固定的 p 和常数 τ，

$$T_{\mathrm{BR}} = O\big(n + m^p\,(mp + n)\big) = O\big(m^{p+1} + n\,m^p\big),$$

因此，最优反应可在关于 n 和 m的多项式时间内计算。

显式与简洁表示下的 *GE* 行为。决选候选人集合的大小为 $|C| = \prod_k |A_k| = O(m^p)$。在显式表示下，每个$g_i$：$C \to A\cup\{0\}$都以表格形式存储，包含 $\Theta(m^p)$个条目，查询时间为 $O(1)$，这意味着输入已经编码了 $\Theta(nm^p)$的信息。由于 $T_{\mathrm{BR}} = O((nm^p)^2)$，即使 p随 m增长，最优反应的运行时间仍是输入长度的多项式。

相比之下，如果g_j以简洁形式给出（例如，采用偏好列表表示），输入规模会降至 $O(nm)$。行动空间中的指数因子（$m+1$）^{p} 便会重新出现，使复杂度对表示差距变得敏感。

注释 1（多项式时间与输入规模）。对于固定的 p 和可简洁计算的大选规则，最优反应关于 n、m 是多项式时间的。对于显式的 g，输入规模相对于 p 已经是指数级的，因此最优反应仍是关于输入长度的多项式时间。只有当 g 是简洁表示时，我们才会遇到真正的复杂度增加。

特殊机制。值得注意的两种简化变体是：

（1）单次参与初选。如果每位选民最多只能参加一次初选，则行动空间缩减为 $O(m)$，且最优反应可在 $O(m^2 + mn)$时间内运行。

（2）固定大选行为。如果某位选民的大选选择已预先确定（例如，始终支持某一固定政党的提名人），则大选阶段不会增加计算负担，运行时间仍如命题所述。

迈向 NP 完全性。当大选行为以简洁形式给出时，一个自然的问题是：是否存在求解最优反应的多项式时间算法？我们证明，相应的判定版本是 NP 完全的。

定义 1（至少为最优反应的U（BR-≥ U）。在简单多数制下，固定 $m = |A|$、$p = |\Pi|$，以及除$i^\star$之外所有选民的策略组合s_{-i}。判定问题 *BR-≥ U* 定义如下：

> 实例：一个选举，包含政党 $\Pi = \{1, \ldots, p\}$ 及政治人物集合 A_k、一份固定平局决胜表 $\mathcal{L}$、其他选民的策略 $s_{-i^\star}$，以及简洁的大选函数 g_j：$C \to A\cup\{0\}$（可通过 $O(1)$ 查询）。一个效用阈值 $U \in \mathbb{Q}$。问题：是否存在一种策略 $s_{i^\star}$，使得 $U_{i^\star}(s_{i^\star}, s_{-i^\star}) \geq U$？

定理 2（BR- 的 NP 完全性≥ U）。当政党数量 p 属于输入的一部分，且大选行为以简洁形式给出时，即使参与成本为零，在固定平局裁决下，*BR-≥ U* 仍是 *NP* 完全的。

证明。成员资格。证书由 $i^\star$的策略组成。验证过程会模拟初选、评估决选候选人、查询每个$g_j(c)$、统计大选选票并计算 $U_{i^\star}$—— 在 RAM 模型下，这些操作都能在多项式时间内完成。

困难性（源自 *3-SAT*）。给定一个布尔公式 $\Phi(x_1, \ldots, x_p)$，我们构造一个选举实例，其中初选阶段编码变量赋值，而大选的计票结果用于评估子句。

政治人物（作为固定政党的锚点）。对于每个变量 x_k，创建一个政党，其中有政治人物 {x_k、$\neg x_k$}。再添加两个虚设政党 $A_\top = \{x_\top\}$ 和 $A_\bot = \{x_\bot\}$，它们不参与有实际意义的初选，并始终让各自唯一的提名人晋级大选（它们只会对 $|C|$产生一个常数因子，不影响分析）。因此，每个最终候选人概况的形式为 $c = (x_\top, x_\bot, c_1, \ldots, c_p)$。

初选。只有 $i^\star$ 在变量政党的初选中投票。确定性的平局裁决使她的选票具有决定性，因此她可以自由选择提名人 {c_1、……、c_p}，以编码一个赋值 σ。

GE 投票者。</style}两个大小为 $Q = q + 1$ 的固定群体分别投票给 $x_\top$ 和 $x_\bot$。对于每个子句 $C_t = (\ell_{t1} \vee \ell_{t2} \vee \ell_{t3})$，添加一名子句投票者，其列表形式的 GE 规则

$$g_t(c; L_t), \qquad L_t = [\ell_{t1}, \ell_{t2}, \ell_{t3}, x_\bot, 0],$$

会选择 L_t 中排名第一的决选候选人（简洁表示，O 次查询）。指定投票者 $i^\star$ 投票给 $x_\top$。

正确性与规模。如果 Φ 可满足，$i^\star$ 会根据一个满足赋值挑选候选人，每位子句投票者都支持某个文字决选候选人，而 $x_\top$ 以一票优势击败 $x_\bot$（q+2 对 q+1）。如果 Φ 不可满足，则有某个子句为假，其投票者支持 $x_\bot$，于是 $x_\bot$ 与 $x_\top$ 打平或胜过 $x_\top$；固定平局裁决偏向 $x_\bot$。该构造使用 O（p）名政治人物和 O（q）名选民，因此规模为多项式。

因此，BR-≥ U 是 NP 困难；结合成员资格，它是 NP 完全问题。□

[3]当候选人、政党或初选轮次的数量较少时，最优策略问题可以编码为普雷斯布格尔算术公式，因此可能无需枚举 [14]

$x_\top$ 和 $x_\bot$各有 $Q = q + 1$ 名固定支持者，且子句投票者总共只有 q名，因此任何非锚定决选者最多只能获得 q 票——严格少于 $q + 2$。因此，最终获胜者必定是 $x_\top$ 或 $x_\bot$。

通过移除固定群体，可以进一步简化该归约。定义每个子句投票者 v_t，使其在子句 C_t的至少一个文字 ℓ_{ti} 出现在决赛候选人中时弃权 v_t；否则 v_t投票支持 $x_\bot$。这一版本仍使用 $O(1)$查询规则，且只需要一名固定支持者来支持 $x_\top$，但其行为上不太自然（某种“抗议性弃权”），因此我们保留基于集团的构造。

因此，在我们的表述中，只有当初选数量或显式 GE 规则的数量固定时，最佳响应计算才仍然是可处理的。

4.2 纯均衡：验证、存在性与运行时间

与 § 4.1 一样，我们假设 GE行为以简洁形式给出，因此每位选民的策略为 $s_i = (b_{i,1}, \ldots, b_{i,p}, g_i)$，其中 $b_{i,k} \in A_k \cup \{0\}$ 和 g_i： $C \to A \cup \{0\}$ 可在 $O(1)$ 时间内查询。

我们研究两个问题：NE-VERIFY——检查给定策略组合是否为纯纳什均衡；以及 NE-EXIST——判断是否存在纯纳什均衡。

定义 2（均衡验证（NE-VERIFY））。在简单多数制下，给定政党 $\Pi = \{1, \ldots, p\}$ 及其政治人物集合 $A_k (|A_k| \geq 1)$、固定平局决胜表 $\mathcal{L}$、效用 $[u]$、简洁的大选规则 $(g_j)_j$，以及策略组合 $\mathrm{s} = (s_i)_{i \in V}$，判断对所有选民 i和所有备选策略 s'_i，

$$\mathrm{U}_i(\mathrm{s}) \;\geq\; \mathrm{U}_i(s'_i, \mathrm{s}_{-i}).$$

平凡均衡。在分析均衡存在性之前，我们先排除结果恒定的策略组合：在这些组合中，每个人在各个阶段都一致支持同一位政治人物；因此获胜者固定，任何单边偏离都无法改变获胜者。因此，我们聚焦于一小部分策略性选民：

$$V = V_{\text{env}} \cup V_{\text{strat}},$$

其中，V_{env} 是固定的环境选民，而 V_{strat} 是其决策会影响大选结果的选民。

定义 3（均衡存在性（NE-EXIST））。给定相同的模型，判断是否存在策略组合 $\mathrm{s}^* = (s_i^*)_{i \in V}$，使得对每个 $i \in V_{\text{strat}}$ 和每个单边偏离 s'_i，

$$\mathrm{U}_i(\mathrm{s}^*) \;\geq\; \mathrm{U}_i(s'_i, \mathrm{s}^*_{-i}).$$

4.2.1 验证。NE-VERIFY 与 BR-$\geq U$ 之间的联系很直接：BR-$\geq U$ 询问是否存在有利偏离，而 NE-VERIFY 询问是否对所有选民都不存在此类偏离。“非 NE”的证书是一个二元组 $(i,\ s'_i)$；验证时，需根据 $(s'_i,\ \mathrm{s}_{-i})$ 重新计算决赛候选人，评估 i 的新 GE 行动$y = g'_i(c)$（采用常数选择即可），查询所有 $g_j(c)$（其中 $j \neq i$），进行计票，并比较 U_i。这些操作均可在多项式时间内完成，因此“非 NE”属于 NP，故 NE-VERIFY 属于 coNP。

定理 3（NE-VERIFY 的 coNP 完全性）。给定一个策略组合s，判断s 是否为纯纳什均衡，在采用固定平局裁决的简单多数制下是***coNP***完全的，即使参与成本为零且 *GE* 求值是简洁的，也成立。

证明。成员资格。“不是纳什均衡”的证据是 (i, s'_i)；验证该证据需要多项式时间，因此 NE-VERIFY $\in$属于 coNP。

困难性。使用定理 2 中相同的构造，从 UNSAT 归约。固定 s，使其选出所有“假”提名人。如果 Φ 可满足，则关键选民可以偏离到一个满足赋值并提高收益——因此 s 不是 NE。如果 Φ 不可满足，则任何单边偏离都无法产生满足赋值，因此没有选民能够提高收益，s 是 NE。由此，$\Phi \in$ UNSAT $\Longleftrightarrow$ s $\in$ NE-VERIFY，得到 coNP 困难性。□

4.2.2 存在性。 NE-EXIST 具有如下量词形式

$$\exists \mathrm{s}\ \forall i\ \neg(\exists s'_i \text{ profitable}),$$

其中，内部谓词（“是否存在有利偏离？”）属于 NP；因此 NE-EXIST $\in \Sigma_2^{\mathrm{P}}$。从 2-QBF（即判定 $\exists X\, \forall Y\, \varphi(X, Y)$）出发，采用标准的基于构件的归约——使用封闭式初选，使 $v_{\mathbf{odd}}$ 控制 X，且 $v_{\mathbf{even}}$ 控制 Y，并采用相同的子句／救援选民构件和简洁的大选函数——可得 Σ_2^{P}-困难性。在给出形式化证明之前，我们先说明为何纯均衡可能不存在。

例 4.1。 不存在具有封闭式初选的纯纳什均衡。 考虑有两个政党的简单多数制： $A_{\text{odd}} = \{a_1, a_3\}$和 $A_{\text{even}} = \{a_2, a_4\}$。四名环境选民 $v_1, \ldots, v_4$ 的大选列表呈循环排列：(a_1, a_2, a_3, a_4)、(a_2, a_3, a_4, a_1)、(a_3, a_4, a_1, a_2)、(a_4, a_1, a_2, a_3)，以及两名初选选民：

$$v_{\boldsymbol{odd}} : a_1 \sim a_3 \succ a_2 \sim a_4, \qquad v_{\boldsymbol{even}} : a_2 \sim a_4 \succ a_1 \sim a_3.$$

假设不存在跨党派参与 $(\kappa^{\text{odd}}_{\text{even}} = \kappa^{\text{even}}{}_{\text{奇数}} = \infty)$，因此每场初选都只有一名策略性选民。由此得到的候选人博弈为

	a_2	a_4
a_1	*odd wins*	*even wins*
a_3	*even wins*	*odd wins*

这是一种匹配硬币 收益结构：不存在纯纳什均衡（唯一的混合策略均衡是均匀分布）。

即使没有参与成本，纯均衡也可能不存在：跨初选的循环平局裁决确保总有选民能够通过偏离获利（完整构造见附录 B）。

命题 4. 在采用固定平局裁决的简单多数制下，初选可能不存在纯策略纳什均衡。

证明。示例 4.1 和 B.1 展示了有参与成本和无参与成本时的偏离循环，因此至少有一名选民总能单方面改善结果；故不存在纯纳什均衡。□

定理 5（Σ_2^{P}NE 存在性的完全性）。在简单多数制下，判断是否存在纯纳什均衡是 Σ_2^{P}-完全的，即使大选行为采用基于决赛候选人的形式（列表行动），且采用固定平局裁决。

证明。成员资格。 该问题的形式为 $\exists \mathrm{s}\ \forall i\ \neg(\exists s'_i$prof- itable)。给定 s 和 (i, s'_i)，我们可以重新计算决选候选人、在 $O(1)$ 时间内逐个选民评估基于列表的 GE 行动、进行计票并比较效用，因此 NE-EXIST$\in \Sigma_2^{\mathrm{P}}$。

困难性（来自 2–量化布尔公式）。设 $\Phi(X, Y) = \exists X\, \forall Y$: $\varphi(X, Y)$ 是一个量化3-CNF。我们构造一个初选博弈 G_Φ（简单多数制，固定平局裁决），当且仅当 Φ为真时，该博弈存在纯纳什均衡。

政党与参与者。每个变量 $z \in X \cup Y$对应一个政党，该党有候选人 $\{z, \neg z\}$。再加入两个顶层政党 $A_{\mathbf{odd}} = \{a_1, a_3\}$ 和 $A_{\mathbf{even}} = \{a_2, a_4\}$，并设定平局裁决规则 $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4$。两名策略性选民采取行动：$v_{\mathbf{odd}}$控制所有 X政党，并选择 $a_o \in \{a_1, a_3\}$；$v_{\mathbf{even}}$控制所有 Y政党和 $a_e \in \{a_2, a_4\}$。两人只关心各自的顶层政党能否赢得大选。

背景与子句。为 $A_{\mathbf{odd}}$设定基准票差 +1（例如，$r{+}1$ r $C_t = \ell_{t1} \vee$固定的奇数支持者与 $\ell_{t2} \vee \ell_{t3}$偶数支持者）。对于每个子句 $(\ell_{t1} \vee \ell_{t2} \vee \ell_{t3})$，添加四名子句投票者 $v_{t1}, \ldots, v_{t4}$，并为其设置列表

$$L_{ti} = (\ell_{t1}, \ell_{t2}, \ell_{t3}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}) \pmod 4.$$

每位选民都投给 L_{ti} 中排名第一的决选候选人。如果 C_t得到满足，四人都会投给文字；如果未得到满足，他们就依次转投 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，形成 3:1票数分布，根据（a_o, a_e）使某个顶层政党获益（如例 4.1 所示）。

该构造使用 $O(|X|+|Y|+r)$ 名政治人物和选民，所有人都采用简洁的大选规则，因此其规模为多项式级。

（⇒）如果 Φ为真，令 $x^\star$满足 $\forall Y\colon\ \varphi(x^\star, Y)$。在策略组合 $S^\star = (x^\star, a_1;\ y, a_e)$ 中，对于任意（y, a_e），每个子句都得到满足，因此所有子句投票者都会支持文字，且基准票 +1 票差使 $A_{\mathbf{odd}}$获胜。$v_{\mathbf{even}}$（总是落败）和 $v_{\mathbf{odd}}$（已经获胜）都无法改善结果，因此 $S^\star$ 是纯纳什均衡。

（⇐）如果 Φ 为假，那么对于每个 x，都存在一个 y，使至少一个子句为假。每个被否定的子句都会触发 3:1 的兜底结果，使一个政党占优；更换顶层提名人（a_o 或 a_e）则会逆转这一优势。因此，在任意（$x,\ a_o$；$y,\ a_e$）之后，落败方都能通过偏离获利，而偏离会无限交替——不存在纯纳什均衡。

因此，G_Φ 存在纯纳什均衡，当且仅当 Φ 为真，由此证明了 Σ_2^{P}-困难性。结合成员资格，NE-EXIST 是 Σ_2^{P}-完全的。 □

要点。初选中的均衡分析涉及多项式层级的第二层。验证一个给定策略组合位于 **coNP**，因为要否定其稳定性，只需举出一个有利偏离；判定均衡是否存在则需要对策略组合额外引入一个存在量词，因此是 Σ_2^{P}-完全的。尽管单独求出最优反应是可处理的，但寻找彼此稳定的结果在理论上难以处理。

5 顺序初选下的复杂性：承诺与条件化

我们的 Σ_2^{P} 结果已经假设选民的完整策略是在事后评估的：每位选民都预先承诺一套涵盖所有阶段的完整计划，而均衡验证则检验是否存在有利可图的单边偏离。

一旦初选按顺序进行，情况就会发生变化：后续阶段的选民可以像子博弈完美博弈中那样，根据先前的结果调整自己的行动。在定理 5 中，我们使用 $\exists$ 表示由设计者控制的变量（$v_{\mathbf{odd}}$），使用 $\forall$ 表示对抗性变量（$v_{\mathbf{even}}$），从而得到 PSPACE-完全的结果。扩展这一推理，每个顺序阶段都会引入一个类型相同的额外量词块。因此，一个包含 p 个阶段的过程表现得像一个 $\Sigma_{O(p)}^{\mathrm{P}}$ 问题；当 p 无界时，交替深度也无界，这与量化布尔公式（QBF）的情形类似，表明该问题可能是 PSPACE-完全的。我们将在下文形式化这一对应关系。

顺序初选（模型回顾）。共有 p 个政党，编号为 $k \in [p]$，每个政党都有一个非空的政治人物集合 A_k；令 $C \coloneqq A_1 \times \cdots \times A_p$表示提名人元组的集合。初选按照固定顺序进行：1、2、…、p。在阶段 $t \in [p]$，指定的一组策略性选民 $V_{\mathrm{strat}} \subseteq V$采取行动，而其他所有选民都遵循固定行为。每个阶段内，行动同时进行。解决政党 k 的初选（采用简单多数制和平局裁决规则）后，其提名人 $c_k \in A_k$ 即确定，随后流程进入阶段 $k{+}1$。所有阶段结束后，根据 $c = (c_1, \ldots, c_p)$，通过可在多项式时间内计算的规则 W 计算大选（GE）结果：$\in C$ $C \to A$（例如采用简单多数制和平局裁决规则）。

信息与历史。令 $C_{<k} \coloneqq A_1 \times \cdots \times A_{k-1}$表示提名人前缀的空间。在阶段 k 行动之前，所有玩家观察到已实现的前缀 $h_k \in C_{<k}$，即获胜者序列（$c_1, \ldots, c_{k-1}$）。[4]政党 k的选票是 $A_k \cup \{0\}$ 的一个元素。对于选民 i，其在政党 k 的（行为）策略是一个函数

$$f_{i,k}^{p} : C_{<k} \longrightarrow A_k \cup \{0\}.$$

因此，选民 i 的依赖历史的策略 是该元组

$$s_i = \left(f_{i,1}^{p}, \ldots, f_{i,p}^{p},\ g_i\right),$$

其中 g_i表示GE行为（例如，映射 $g_i\colon \mathcal{L} \to A \cup \{0\}$，或排序列表策略，取决于大选模型）。完整的策略组合为 $\mathrm{s} = (s_i)_{i \in V}$。

给定 s，通过在每个阶段使用选票 $\{f_{i,\ k}^{p}(h_k)\}_{i \in V_k}$，依次采用带固定平局裁决的简单多数制，即可生成诱导出的候选人元组 c (s) $\in C$，其中 h_k为已实现的前缀。大选获胜者为 W $(c(\mathrm{s}))$。

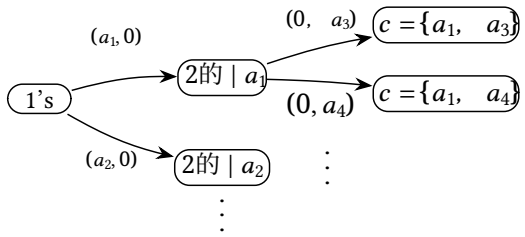

图2：双选民顺序初选的部分博弈树。标记为“政党1的”和“政党2的 $| a_j$”的节点，分别表示政党1的初选，以及以候选人a_j赢得政党1初选为条件的政党2初选。在每个节点，两位选民同时投出选票 $(a_i,\ a_{i'})$。**叶节点** $c = \{c_1,\ c_2\}$ **表示大选决选候选人。**

图2中的树展示了双选民顺序初选的扩展式。第1阶段（政党*1*的）和第2阶段（政党*2*的）分别对应政党1和政党2的初选，其中标记为“政党2的 $| a_j$”的节点表示候选人 a_j 赢得了政党1的初选。在每个节点，两位选民同时投出选票（$a_i,\ a_{i'}$），每条分支代表一种可能的提名结果，并通向大选。

注意，政党 k的初选中每个节点的分支因子为 $(m_k+1)^n$，这反映了 n 名选民对 m_k 位政治人物同时投出的选票（包括弃权）所形成的所有可能组合。每个节点

[4]如果只能获得不完整或含噪信息（例如，只观察到 c_{k-1}），则将$C_{<k}$ 替换为相应的信息集 $\mathcal{H}_k$。

因此都可以用一个 n 元组 $(a_{k1},\ a_{k2},\ \ldots\ldots,\ a_{kn})$ 来索引，表示选民选票。尽管节点数量会随 n呈指数级增长，仍然可以使用多项式空间遍历整棵树。

策略范围与表示。 我们假设只有一小部分选民具有策略性，而其他所有选民都是环境选民 ，其行为固定为 § 3.1 中定义的 $(b_i,\ g_i)$。如果将每个函数 $f_{i,k}^{p}$ 显式表示，其表格大小将随 $\Theta(\prod_{\ell<k}|A_\ell|)$ 增长，即每位选民需要 $O(m^p)$，这会使输入规模甚至随政党数量呈指数级增长。为避免这种膨胀，我们保留环境选民的简单形式，并将序贯推理限制在指定的策略性选民子集中。

我们不再关注单个选民的最佳响应，[5] 而是关注占优策略 以及策略性选民之间的均衡 ，以确保输入规模仍受多项式界限约束。

均衡概念。 我们研究诱导出的、前缀可观察的扩展式博弈中的纯子博弈完美均衡（SPNE）；也就是说，策略组合 s 在以任意历史 $h_k \in C_{<k}$为根的每个子博弈中都构成纳什均衡。

定义 4（序贯支配策略至少为 U（SeqDS-$\geq U$））。给定如上所述的实例、指定玩家 $i^\star$以及阈值 $U \in \mathbb{Q}$，判定 $i^\star$ 是否拥有一种策略 $s_{i^\star}$，该策略能保证$\mathrm{U}_{i^\star}(s_{i^\star}, s_{-i^\star}) \geq U$对其对手的所有可容许多阶段策略$s_{-i^\star}$成立。

定理 6（SeqDS-$\geq U$是 PSPACE-完全的）。在采用固定平局裁决且 *GE* 计算可在多项式时间内完成的简单多数制下，若阶段数 p作为输入的一部分（多项式有界时域），则 *SeqDS*-$\geq U$是 *PSPACE*-完全的。当 p为常数时，该问题属于$\Sigma_{O(p)}^{\mathrm{P}}$。

证明。成员资格。该扩展式的深度为 p。在阶段k，联合行动集的大小为$(m_k)^n$（参见图 2 及相关讨论：每个节点可由选票的 n元组$(a_{k1},\ \ldots\ldots,\ a_{kn})$进行索引），因此分支因子关于 n可能呈指数级，但深度优先求值仅需多项式空间：我们存储一条长度为 p 的路径，以及每个节点处可在多项式时间内计算的摘要。叶节点处的效用通过计算 GE 结果并检验 $\mathrm{U}_{i^\star} \geq U$ 得到，根据假设，二者均可在多项式时间内完成。因此，针对支配性判定谓词（“$i^\star$ 是否能保证对所有对手的效用 $\geq U$？”）对该博弈树进行的交替（极大–极小）求值，可通过带回溯的标准深度优先搜索在 PSPACE 内判定。

困难性（来自量化布尔公式）。设 $\Phi = Q_1X_1\,Q_2X_2\cdots\,Q_pX_p\colon\ \varphi(X)$ 是一个量化 3-CNF 公式。我们构造一个包含 p 个阶段的序贯初选博弈来编码 Φ。

政治人物。对于每个变量 X_k，创建政党 k，其候选人为 $\{x_k、\ \neg x_k\}$，并添加两个虚拟政党 $A_\top = \{x_\top\}$ 和 $A_\bot = \{x_\bot\}$。

控制。若 $Q_k = \exists$，则阶段 k 由 $i^\star$ 控制（平局裁决确保她的选票起决定作用）；若 $Q_k = \forall$，则由对手 v_a 控制。因此，候选人元组 $c = (c_1、\ \ldots\ldots、\ c_p)$ 编码了对 X 的完整赋值。

大选选民。两个固定群体 $B_\top,\ B_\bot$（各有 q+1 人）始终分别投票给 $x_\top$ 和 $x_\bot$。对于每个子句 $C_t = (\ell_{t1} \vee \ell_{t2} \vee \ell_{t3})$，增加一名策略为……的子句投票者

$$g_t(c) = \text{first of } [\ell_{t1}, \ell_{t2}, \ell_{t3}, x_\bot, 0] \text{ appearing among finalists.}$$

若在 c 下 C_t 为假，则该选民支持 $x_\bot$；否则，满足的文字会获得她的选票。

效用。设 $U\colon\ u_{i^\star} = u_{i^\star}\ x_\top \quad u_{i^\star}\ x_\top > u_{i^\star}\ x_\bot >\ i^\star \geq U \quad x_\top$ ( ),

其中 ( ) ( )（其他），因此当其赢得大选时，U 当且仅当成立。

计票。 $x_\top$ 有 q+2 张基准票（$B_\top$ 加上 $i^\star$）； $x_\bot$ 以 q+1 （$B_\bot$）张票起步，每有一个子句为假便增加一票。若平局裁决有利于 $x_\bot$，则 $x_\top$ 当且仅当所有子句都满足时获胜。

正确性。 在每个阶段：- 若 $Q_k = \exists$，则 $i^\star$ 选择 $c_k \in \{x_k, \neg x_k\}$（或节点）；- 若 $Q_k = \forall$，则由对手选择（与节点）。在叶节点， $x_\top$ 当且仅当 φ 在诱导赋值下得到满足时获胜。因此， $i^\star$ 当且仅当 Φ为真时，能够保证 $\mathrm{U}_{i^\star} \geq U$。

该构造使用 $O(p+q)$ 名选民和政治人物，且其规模关于 $|\Phi|$ 呈多项式增长。因此，SeqDS-$\geq U$ 是 PSPACE-困难的。结合其成员资格结果可知，它是 PSPACE-完全的。对于固定的 p，交替深度为 $O(p)$，从而得到所述的 $\Sigma_{O(p)}^{\mathrm{P}}$ 界。□

序贯支配框架已经抓住了困难性的本质来源：每个阶段都会引入一次量词交替，这与量化布尔公式的结构相呼应。然而，均衡推理并不会从根本上简化这一图景。在轮流行动扩展式中，验证子博弈完美性只需对相同的交替阶段进行逆向归纳，而困难性也源于相同的量词嵌套。因此，均衡存在性的复杂度与支配验证以完全相同的方式增长，最终得到以下定理。

我们沿用环境/子句投票者及其循环后备列表，并使用两个顶层政党 $A_{\mathbf{odd}} = \{a_1,\ a_3\}$、 $A_{\mathbf{even}} = \{a_2,\ a_4\}$，其固定平局裁决与定理 5 中完全相同。不引入新的选民类型；我们只是将同一构造分阶段进行。

定理 7（复用 NE 构造组件的 SPNE 存在性）。在采用简单多数制、固定平局裁决和基于列表的 *GE* 行为时，判定是否存在纯子博弈完美均衡（*SPNE*）对于固定阶段数而言是 $\Sigma_{O(p)}^{\mathrm{P}}$-完全的 p；当 p 属于输入的一部分时，则是 *PSPACE*-完全的。

证明。成员资格。同样的深度优先求值论证（参见图 2 和定理 6）仍然适用。给定多项式有界时域以及可在多项式时间内求值的 GE 结果，沿序贯树验证子博弈完美最优性只需多项式空间。因此，SPNE 存在性判定问题属于 PSPACE；对于常数 p，由此产生的交替使其属于 $\Sigma_{O(p)}^{\mathrm{P}}$。

困难性（来自量化布尔公式）。令 $\Psi = \exists X_1\,\forall Y_1\cdots\,\exists X_k\,\forall Y_k\colon\ \varphi(X, Y)$。按顺序创建 $p = 2k$ 个阶段： $X_1, Y_1, \ldots, X_k, Y_k$。对于每个变量 $z \in X \cup Y$，创建一个政党，其提名人为 $\{z, \neg z\}$。在阶段 X_i， $v_{\mathbf{odd}}$ 选择 x_i 或 $\neg x_i$；在阶段 Y_i， $v_{\mathbf{even}}$ 选择 y_i 或 $\neg y_i$。沿用定理 5 中相同的背景设置：(i) $A_{\mathbf{odd}}$ 的基准 GE 优势为 +1；(ii) 对于每个子句 $C_t = (\ell_{t1} \vee \ell_{t2} \vee \ell_{t3})$，加入子句投票者 $v_{t1}, \ldots, v_{t4}$，其列表为 $L_{ti} = (\ell_{t1}, \ell_{t2}, \ell_{t3}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3})$（索引模 4），他们会选择列表中排在最前的决选候选人。

正确性。 (⇒)若 Ψ 为真，则存在一个用于 X阶段的依赖历史的策略： 对每个 i，存在一条规则，将先前选择的 $(Y_1,\ \ldots\ldots,\ Y_{i-1})$ 映射为对 x_i或 $\neg x_i$的选择，使得 φ对

[5]如果所有选民都遵循更简单的 $(b_i,\ g_i)$ 形式，博弈实际上就会退化为同时进行的情形。否则，就需要对 $f_{i,k}^{p}$ 施加额外的简洁性限制，而这会显得很牵强，也超出了我们目前讨论的范围。

所有 Y选择成立。令 $v_{\mathbf{odd}}$遵循该策略。则沿任意 Y行动序列，每个子句均被满足，子句投票者从不回退，且基准票 +1在大选中选出 $A_{\mathbf{odd}}$。因此， $v_{\mathbf{odd}}$（已经获胜）与 $v_{\mathbf{even}}$（无法诱发回退）均不能在任何子博弈中通过偏离获利；逆向归纳给出一个纯策略子博弈精炼纳什均衡。

(⇐) 若 Ψ 为假，则对于任意 X 阶段的选择，都存在第一个 Y_i，其选择使某个子句为假。在该子博弈中，相应的子句投票者会循环退回，从而形成 3:1 票数分布；这一分布与基准票共同作用，使大选获胜者转为 $A_{\mathbf{even}}$（如定理 5 所示）。因此， $v_{\mathbf{even}}$ 存在有利偏离，这与子博弈完美性矛盾。所以不存在纯策略子博弈精炼纳什均衡。

因此，当且仅当 Ψ 为真时，存在纯策略子博弈精炼纳什均衡。实例规模为多项式。对于固定的 $p = 2k$，这给出 $\Sigma^{\mathrm{P}}_{O(p)}$-困难性；当 p 不受限制时，则为 PSPACE-困难性。结合成员资格，定理得证。□

总结。 序贯模型通过引入分阶段条件化，将同时模型推广到更一般的情形。当所有初选同时进行——或虽按序进行，但在观察到任何初选结果之前就对完整策略作出事前承诺——支配性和均衡验证只涉及一次存在量词—全称量词交替，因此仍处于 Σ^{P}_2 之内。允许选民根据早先的结果进行条件化，则每个阶段都会增加一个量词块；当 p 固定时，复杂度为 $\Sigma^{\mathrm{P}}_{O(p)}$；一旦 p 成为输入的一部分，问题便是 PSPACE-完全的。结合定理 5 和定理 6，这描绘出一个统一的图景：序贯条件化充当扩展量词的机制，连接起多项式层级与 PSPACE。

6 结论

我们首次正式刻画了同时进行与序贯进行两种情形下初选的计算复杂性。在事前（承诺）模型中，均衡验证和支配验证均涉及一次存在量词—全称量词交替，因此具有 Σ^{P}_2-完全性。允许选民根据跨越 p 个阶段的早期结果调整策略，会引入额外的量词块；当 p 固定时，复杂性达到 $\Sigma^{\mathrm{P}}_{O(p)}$，而一旦阶段数成为输入的一部分，问题便具有 PSPACE 完全性。

除这些分类之外，分阶段初选过程还呈现为一种扩大量词的机制，连接了多项式层级与 PSPACE。这一视角将若干均衡概念——占优策略、纳什均衡和子博弈完美推理——统一在共同的结构框架之下，展现了时间顺序安排如何加剧计算难度，即使投票规则十分简单亦是如此。从多智能体视角来看，这也将选举设计与更广泛的问题联系起来：如何对有限理性智能体之间的序贯协调进行推理。

我们的结果揭示了一种复杂性屏障：在最坏情况下，某些在策略上不理想的行为在计算上难以实现。同时，这种困难性取决于政党数量和初选阶段数量等参数，而这些参数在现实选举中可能较小，从而降低复杂性。反过来，现实中的选民往往面临更丰富的信息环境——例如观察初选计票结果、形成关于他人行为的信念，或应对时序不确定性——这可能进一步增加策略复杂性。这些问题超出了本研究的范围，但也为未来研究指明了有前景的方向。

7 未来研究

我们的研究结果仅初步揭示了初选中丰富的战略与制度特征。仍有若干方向值得进一步探索。

更丰富的战略与制度模型。 将这一框架扩展到混合策略，有助于阐明竞争环境中的概率推理与均衡选择。此外，尽管我们的困难性结果普遍适用，但探索有限的领域（如封闭式或开放式初选）或许能发现易于处理的子类。其他投票机制，包括两轮投票制和排序选择制，可能会带来性质迥异的复杂性边界。一些国家甚至将民调数据纳入提名结果，这表明可以构建混合模型，将社会选择与统计推断结合起来。

信息、动态与候选人行为。 我们的序贯模型假设信息完全且偏好静态。放宽这些假设，纳入噪声或不完全信息、信念更新或自适应学习，将使初选与有限理性和动态博弈模型建立联系。另一个值得探索的方向是引入候选人定位：当政治人物策略性地选择空间纲领时，初选可能会重塑均衡位置与极化模式。

人工智能与基于模拟的探索。基于智能体的模拟为我们的理论结果提供了自然的补充，使我们能够在有界理性条件下对战略适应进行实证研究。将此类模拟与强化学习或演化动力学相结合，有望揭示复杂均衡在实践中何时可以近似，从而将计算难度与可观察到的集体行为联系起来。

总而言之，这项工作迈出了在计算社会选择领域构建初选统一理论的第一步，阐明了序贯集体决策如何重塑多智能体系统中的战略推理与计算格局。

致谢

BdK 获得了英国工程与自然科学研究委员会拨款 EP/X021696/1 的资助。MP 获得了英国工程与自然科学研究委员会拨款 EP/X038351/1 的资助。作者感谢匿名审稿人提出的建设性反馈和宝贵建议。

参考文献

[1] Stéphane Airiau、Umberto Grandi 和 Filipo Studzinski Perotto。2017 年。用于迭代投票的学习型智能体。载于算法决策理论，Jörg Rothe（编）。Springer International Publishing，施普林格，139–152。[2] J. J. Bartholdi、C. A. Tovey 和 M. A. Trick。1989 年。操纵选举的计算难度。《社会选择与福利》6，3（1989 年 7 月 1 日），227–241。https://doi.org/ 10 1007 00295861 。 /BF Luca Bernardi。 。《成员资格新探索：初选与意大利案例》[3] 2013 。 https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2305097。SSRN 工作论文，20 页。[4] Allan Borodin、Omer Lev、Nisarg Shah 和 Tyrone Strangway。2024 年。《主要谈初选》。《人工智能》329（2024），104095。[5] Markus Brill 和 Vincent Conitzer。2015 年。策略性投票与策略性候选。*AAAI*人工智能会议论文集 29，1（2021 年 2 月），–。https://doi.org/ 。/aaai.v i 。John M. Carey 和 Peter M. Siavelis。 。《智利的初选与政治》。《拉丁美洲政治与社会》45，3（2003），1–25。https://doi.org/10.1111/j.1548-2456.2003.tb00247.x

[7] Marty Cohen、David Karol、Hans Noel 和 John Zaller。2008 年。《政党决定：改革前后的总统提名》。芝加哥大学出版社，美国伊利诺伊州芝加哥东60街1427号，邮编60637。[8] Bhaskar Dutta、Matthew O. Jackson 和 Michel Le Breton。2004 年。议程形成均衡。《社会选择与福利》23，1（2004），21–57。http://www.jstor.org/stable/41106617[9] Bhaskar Dutta、Matthew O. Jackson 和 Michel Le Breton。2001 年。策略性参选与投票程序。《计量经济学》69，4（2001），1013–1037。10 1111 1468 0262 00228（），–。https://doi.org/ 。/ - 。arXiv:https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/ 10 1111 1468 0262 00228 。/ - 。[10] Paul Harrenstein、Grzegorz Lisowski、Ramanujan Sridharan 和 Paolo Turrini。2021 年。政党提名人的霍特林–唐斯框架。载于第*20*届国际自主智能体与多智能体系统会议论文集（英国，线上活动）（*AAMAS '21*）。国际自主智能体与多智能体系统基金会，南卡罗来纳州里奇兰，593–601。[11] Yumi Hwang。2017 年。韩国的候选人遴选。载于《通往权力之路：亚洲的政治招募与候选人遴选》，Pippa Norris 和 Bernard Grofman（编）。牛津大学出版社，英国牛津大克拉伦登街，邮编OX2 6DP。[12] Ofer Kenig。2009 年。议会民主国家中政党领袖遴选方法的分类。《选举、公众舆论与政党期刊》19，4（2009），433–447。[13] Andrew Kenney。2022 年。大选前，数千名民主党人正在Lauren Boebert选区变更选民登记。科罗拉多公共广播电台（在线）。https://www.cpr.org/2022/06/07/lauren-boebert-2022-elections-democrats-unaffiliated-voters/ 访问日期：2025-10-02。[14] Martin Koutecký 和 Nimrod Talmon。2021 年。多党竞选。*AAAI*人工智能会议论文集35，6（2021 年 5 月），5506–5513。https://doi.org/ 10 1609 aaai.v i 。Sook Jong Lee。 。韩国总统选举：两极分化与变化。东亚研究院报告。https://www.eai.or.kr/new/en/pub/view. asp?intSeq=10845 政策报告，可在线获取。[16] Rémi Lefebvre。2017 年。《法国的开放式初选：总统候选人遴选的新工具》。《法国政治学评论》67，6（2017），1167–1187。https://doi.org/10.3917/rfsp.676.1167 分析社会党和共和党引入开放式初选的情况。[17] Omer Lev 和 Jeffrey S. Rosenschein。2012 年。迭代投票的收敛性。载于第*11*届国际自主智能体与多智能体系统会议论文集——第*2*卷（西班牙瓦伦西亚）（*AAMAS '12*）。国际自主智能体与多智能体系统基金会，南卡罗来纳州里奇兰，611–618。[18] Reshef Meir。2017 年。迭代投票。载于《计算社会选择的趋势》，Ulle Endriss（编）。AI Access，COST协会，布鲁塞尔大道21号——Bolwerklaan 21，1210布鲁塞尔，|比利时，第4章，69–86。http://procaccia.info/wp-content/uploads/2019/04/TrendsComputationalSocialChoice.pdf [19] Reshef Meir、Maria Polukarov、Jeffrey Rosenschein 和 Nicholas Jennings。2010年。相对多数投票中的均衡收敛。*AAAI*人工智能会议论文集24, 1（2010年7月），823–828。https://doi.org/10.1609/aaai. v24i1.7624[20] Svetlana Obraztsova、Evangelos Markakis、Maria Polukarov、Zinovi Rabinovich 和 Nicholas R. Jennings。2015年。迭代投票的收敛性：受限动态应有多严格？载于第二十九届*AAAI*人工智能会议论文集（德克萨斯州奥斯汀）（*AAAI'15*）。AAAI出版社，601 Pennsylvania Ave, NW Suite 900 Washington, DC 20004 USA，993–999。[21] Nelson W. Polsby。1983年。政党改革的后果。牛津大学出版社，Great Clarendon Street, Oxford, OX2 6DP。[22] Maria Polukarov、Svetlana Obraztsova、Zinovi Rabinovich、Alexander Kruglyi 和 Nicholas R. Jennings。2015年。策略性候选中的均衡收敛。载于国际人工智能联合会议（*2015*年*7*月*25*日—*2015*年*7*月*31*日）。AAAI出版社 / 国际人工智能联合会议，加利福尼亚州帕洛阿尔托，美国，624–630。https://eprints.soton.ac.uk/376940/ [23] Thomas Quinn。2024年。议员与政党成员之争？英国保守党和工党的领导人遴选制度。《英国政治与国际关系杂志》26, 2（2024年），569–596。https://doi.org/ 10 1177 13691481231191915 10 1177 13691481231191915 。/ arXiv:https://doi.org/ 。/ [24] Jacob Austin Reidhead。 。韩国与台湾党内政治比较。博士论文。斯坦福大学。https://purl.stanford.edu/ st454xr1842[25] Annemieke Reijngoud 和 Ulle Endriss。2012年。选民对迭代民调信息的反应。载于第十一届国际自主智能体与多智能体系统会议论文集——第*2*卷（西班牙瓦伦西亚）（*AAMAS '12*）。国际自主智能体与多智能体系统基金会，Richland, SC，635–644。[26] Ildikó Schlotter 和 Katarína Cechlárová。2025年。符合孔多塞准则的投票规则中的候选人提名。载于第二十四届国际自主智能体与多智能体系统会议论文集（美国密歇根州底特律）（*AAMAS '25*）。国际自主智能体与多智能体系统基金会，Richland, SC，1858–1866。[27] Antonella Seddone 和 Fulvio Venturino。2013年。让选民重新参与领导人遴选：意大利民主党的开放式初选。《现代意大利》18, 3（ 2013 303 318 10 1080 13532944 2013 801675 ），–。[28] https://doi.org/ 。/ 。 。Peter M. Siavelis。 。智利：例外主义的终结？载于《通往权力之路：拉丁美洲的政治招募与候选人遴选》，Peter M. Siavelis 和 Scott Morgenstern（编）。宾夕法尼亚州立大学出版社，8 University Dr., USB 1 Suite C University Park, PA 16802-1003。[29] John Sides 和 Lynn Vavreck。2020年。初选选民群体的代表性。《英国政治学杂志》50, 2（2020年），677–685。https: // doi.org/10.1017/S000712341700062X

扩展式博弈中策略表达的全面展开

在§ 3.1中，我们粗略估算了描述完整扩展式策略所需的输入规模为 $\Theta(|A|^{pn})$。现在我们将给出更详细的计算。

假设选举方案允许多次参与，且初选依次进行。在每次初选中，选民同时行动——因此，选民无法根据同一轮初选中其他选民的行动来决定自己的选择。然而，初选之间揭示的信息决定了扩展式博弈树的结构。

对于每一种扩展式策略，都必须明确选民在其行动的每个信息集上所作的选择。因此，单个策略的编码空间会随着该选民可能面对的不同决策节点数量成比例增长。

我们区分两种信息假设：
（情形 1）选民可以观察到此前的所有初选结果（完全的阶段间信息）。（情形 2）选民只能观察到此前初选的总得票数（粗略的阶段间信息）。

情形 *1.* 不失一般性，考虑选民 n。在第一次初选（政党 1）中，每位选民都没有先验信息，因此只有一个决策节点。每位选民的行动空间为 $A_1 \cup \{0\}$，其中 0 表示弃权。选民 n 行动时，其他选民的行动可能有 $|m_1+1|^{n-1}$ 种配置。

依次进行，假设在政党 k 的初选之后，当前博弈树有 ℓ 个节点。在下一场初选（政党 $k+1$）中，n $A_{k+1} \cup 0$ $\ell \times$ 名选民再次各自从 $\{\}^{|m_{k+1}+1|^{n-1}}$ 中进行选择，从而产生新的节点。根据归纳法，大选前的决策节点总数为

$$\prod_{k=1}^{p} |m_k + 1|^{n-1} = \left(\prod_{k=1}^{p} |m_k + 1|\right)^{n-1}.$$

根据算术—几何平均不等式，

$$\prod_{k=1}^{p} |m_k + 1| \;\le\; \left(\frac{\sum_{k=1}^{p}(m_k+1)}{p}\right)^{p} = \left(\frac{m+p}{p}\right)^{p},$$

当所有 m_k 都相等时，等号成立。因此，决策节点的数量为

$$\Theta\left(\left(\frac{m}{p}\right)^{pn}\right).$$

若将 p 视为常数，则可简化为 $\Theta(|A|^{pn})$。

情形 *2.* 现在假设选民只能观察到此前各场初选的汇总投票数。在这种情况下，政党 k的初选中其他选民所产生的不同结果概况的数量等于

$$H_{m_k}^{n-1} \;=\; \binom{(n-1)+m_k-1}{m_k},$$

可重复组合的数量（或从 $n-1$ 名选民中抽取 m_k 个元素构成的多重集）。该数量渐近为

$$\Theta\big((n+m_k)^{m_k}\big) \;=\; \Theta\big(n^{m_k} + m_k^{m_k}\big).$$

因此，所有初选中的决策节点总数为

$$\Theta\left(\prod_{k=1}^{p}(n^{m_k} + m_k^{m_k})\right) = \Theta\left(n^m + \prod_{k=1}^{p} m_k^{m_k}\right).$$

由于 $n > m$ 且每个 $m_k \le m$，主导项为 $\Theta(n^m)$。

总之，尽管输入规模的激增来自不同来源——情形 1 中的政党规模和选民数量，相对于情形 2 中的候选人总数——两种情形都在参数（n, m, p）上呈现指数增长。在本文所考虑的计算问题中，一旦 p 随输入规模增长，两种情形都无法得到可处理表示。

B 即使没有参选成本也不存在均衡的情形

相对于例 4.1，我们现在（i）将每个政党的初选扩展为三名候选人，（ii）增加一名仅参加大选的候选人 a_7，两党的党派选民都将其严格排在最后，以及（iii）在每次初选中采用固定的循环平局决胜规则，其中平票沿预先确定的循环加以解决（例如，$a_1 \succ a_3 \succ a_5 \succ a_1$）。

局外候选人 a_7 确保两个政党都面临一个他们希望避免的结果，而循环平局决胜保证在每一种初选配置中至少有一名党派选民存在有利偏离，从而消除纯均衡。

例 B.1. 循环平局决胜下均衡不存在（***no*** κ）。

考虑简单多数制，其中有 $A_{\text{odd}} = \{a_1, a_3, a_5\}$、$A_{\text{even}} = \{a_2, a_4, a_6\}$，以及一名仅参加大选的候选人 a_7。六名循环选民 $v_1, \ldots, v_6$ 的列表式偏好为 $L_i = [a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i+4}, a_{i+5}]$（模 *6*），另有五名固定的 a_7支持者从不参加初选。还有两名党派选民保持策略性，每人都更偏好本党候选人而非对手党候选人，且两者都胜过 a_7。

在每场初选中，双方平票时按固定循环裁决：奇数时选 $a_1 \succ a_3 \succ a_5 \succ a_1$，偶数时选 $a_2 \succ a_4 \succ a_6 \succ a_2$。如图 *3* 所示，只要决赛候选人中包含$(a_i, a_{i\pm3}, a_7)$，局外候选人 a_7就会获胜。两名党派选民都严格希望避免这种情况，并可利用循环平局决胜改变提名人，从而改善结果。根据对称性，对于每个纯策略组合，至少有一名党派选民存在有利偏离。因此，纯纳什均衡不存在。

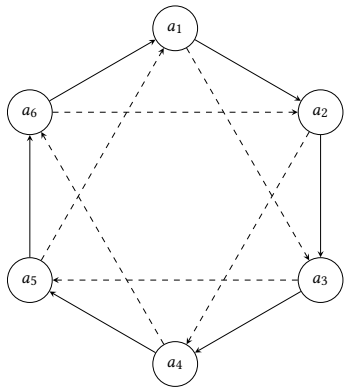

图 3：示例 B.1 的说明。实线箭头：如果 $c = (x,\ y,\ a_7)$，那么 x 赢得大选。虚线箭头：初选中的循环平局裁决（$w \to z$ 表示在平局时 w 击败 z）。