arXiv:2602.10306v1 [math.AT] 10 Feb 2026

映射的同伦相似。复合

S. S. Podkorytov

我们描述由与常值映射强 r-相似的映射$Y \to Z$ 所诱导的函数 $[X,Y] \to [X,Z]$ 对同伦相似关系和有限阶不变量的影响。

§1. 引言

本文是对 [1] 和 [2] 的延续。我们采用其中的记号和约定。设 X、 Y 和 Z 为胞腔空间， X 和 Y 为紧空间。我们证明以下两个定理。

1.1. 定理。设映射 a、 $a'\colon\ X \to Y$满足 $a \overset{p-1}{\sim} a'$，且映射 $b\colon\ Y \to Z$满足 $b \overset{q-1}{\approx} \lhd^Y_Z(p,q \geqslant 1)$。则映射 $b\circ a$、 $b\circ a'\colon\ X \to Z$满足

$$b\circ a \overset{pq-1}{\sim} b\circ a'.$$

1.2. 定理。设 $b\colon\ Y \to Z$ 是一个映射，使得 $b \overset{q-1}{\approx} \lhd^Y_Z(q \geqslant 1)$。设 L 是一个阿贝尔群， $h\colon\ [X,Z] \to L$ 是一个同伦不变量。那么该不变量

$$f\colon [X,Y] \to L, \qquad [a] \mapsto h([b\circ a]),$$

满足

$$q \operatorname{ord} f \leqslant \operatorname{ord} h.$$

我们猜想，这些陈述中关于强（$q-1$）相似性的假设可以由（$q-1$）相似性的假设取代。

§2. 复合族的一致性

设 E 是一个非空有限集，连续函数 $\phi_e\colon\ X \to [0,1]$，$e \in E$ 构成一个单位分解：

$$\sum_{e\in E} \phi_e = 1.$$

考虑非基点映射

$$\phi = (\phi_e)_{e\in E}\colon X \to \Delta E.$$

引入函数

$$\theta^\phi\colon Y^X \times (Z^Y)^{(\Delta E)} \to Z^X, \qquad \theta^\phi(a,s)\colon X \xrightarrow{x\mapsto \phi(x)\leftthreetimes a(x)} \Delta E \leftthreetimes Y \xrightarrow{\sharp^Y(s)} Z$$

[等价地， $\theta^{\phi}(a,\ s)\colon\ x \mapsto s(\phi(x))(a(x))$], 以及同态

$$(\theta^{\phi}) : \langle Y^X \rangle \otimes \langle (Z^Y)^{(\Delta E)} \rangle \to \langle Z^X \rangle, \qquad <a> \otimes <s> \mapsto <\theta^{\phi}(a,s)>.$$

我们在 X 上固定一个度量。若开覆盖 Γ 的任意直径不超过 λ 的集合 $V \subseteq X$ 都包含于某个$G \in \Gamma$ 中，则称数 $\lambda > 0$ 为 X 的一个 勒贝格数（根据定理 3.3.14] 的 [3, 证明）。

2.1. 命题。设 Γ 是 X 的一个开覆盖，其勒贝格数为 λ。假设

$$\operatorname{diam}\operatorname{supp}\phi_e \leqslant \epsilon, \qquad e \in E,$$

其中 $\epsilon > 0$ 和 $(pq-2)\epsilon \leqslant \lambda (p, q \geqslant 1)$。设一个系综 $A \in \langle Y^X \rangle$ 满足

$$A \overset{p-1}{\underset{\Gamma}{=}} 0.$$

设 $S \in \langle (Z^Y)^{(\Delta E)} \rangle$ 是一个可裂系综，使得

$$<\Xi^{\Delta E}(\lhd_Z^Y)> - S \in \langle (Z^Y)^{(\Delta E)} \rangle_Y^{(q)}. \tag{1}$$

Then

$$(\theta^{\phi})(A \otimes S) \in \langle Z^X \rangle^{(pq)}.$$

证明。取一个满足 $|V| \leqslant pq-1$ 的集合 $V \subseteq X$。我们需要证明

$$(\theta^{\phi})(A \otimes S)|_V = 0$$

在 $\langle Z^{(V)} \rangle$ 中。考虑由所有满足 $\operatorname{dist}(x_1, x_2) \leqslant \epsilon$ 的配对 (x_1, x_2) 在 V 上生成的等价关系。设 V_i、 $i \in I$ 为该等价关系的等价类。显然， $\operatorname{diam} V_i \leqslant (pq-2)\epsilon$ ， 且对 $i \neq j$, $\operatorname{dist}(V_i, V_j) > \epsilon$。对于 $i \in I$， 令

$$F_i = \{\, e \mid \phi_e|_{V_i} \neq 0 \,\} \subseteq E.$$

显然， $\phi(V_i) \subseteq \Delta F_i$。我们有 $F_i \neq \varnothing$ ，因为 $V_i \neq \varnothing$。对于 $i \neq j$ ，我们有 $F_i \cap F_j = \varnothing$，因为 $\operatorname{diamsupp}\ \phi_e \leqslant \epsilon$ 且 $\operatorname{dist}(V_i, V_j) > \epsilon$。因此我们得到该布局

$$F_* = \{\, F_i \mid i \in I \,\} \in \mathcal{A}(E).$$

考虑这些同态

$$\rho_1 : \langle Y^X \rangle \to \bigotimes_{i \in I} \langle Y^{(V_i)} \rangle, \qquad <a> \mapsto \bigotimes_{i \in I} <a|_{V_i}>,$$

and

$$\rho_2 : \langle (Z^Y)^{(\Delta E)} \rangle \to \bigotimes_{i \in I} \langle (Z^Y)^{(\Delta F_i)} \rangle, \qquad <s> \mapsto \bigotimes_{i \in I} <s|_{\Delta F_i}>.$$

从现在起，带装饰的 ρ 表示相似的同态。对于 $i \in I$，与 θ 和 θ^{ϕ} 类似，我们有函数

$$\theta_i^{\phi} : Y^{(V_i)} \times (Z^Y)^{(\Delta F_i)} \to Z^{(V_i)}, \qquad \theta^{\phi}(d,t) : x \mapsto t(\phi(x))(d(x)),$$

以及同态

$$(\theta_i^\phi) : \langle Y^{(V_i)}\rangle \otimes \langle (Z^Y)^{(\Delta F_i)}\rangle \to \langle Z^{(V_i)}\rangle, \qquad <d> \otimes <t> \mapsto <\theta_i^\phi(d,t)>.$$

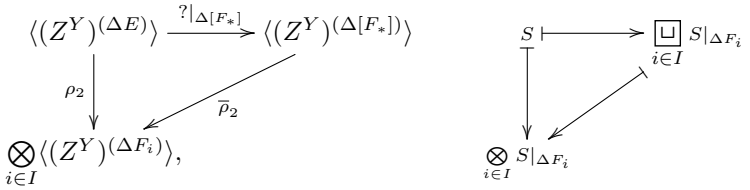
显然,

$$\theta^\phi(a,s)|_{V_i} = \theta_i^\phi(a|_{V_i}, s|_{\Delta F_i}), \qquad a \in Y^X,\ s \in (Z^Y)^{(\Delta E)}. \tag{2}$$

我们有

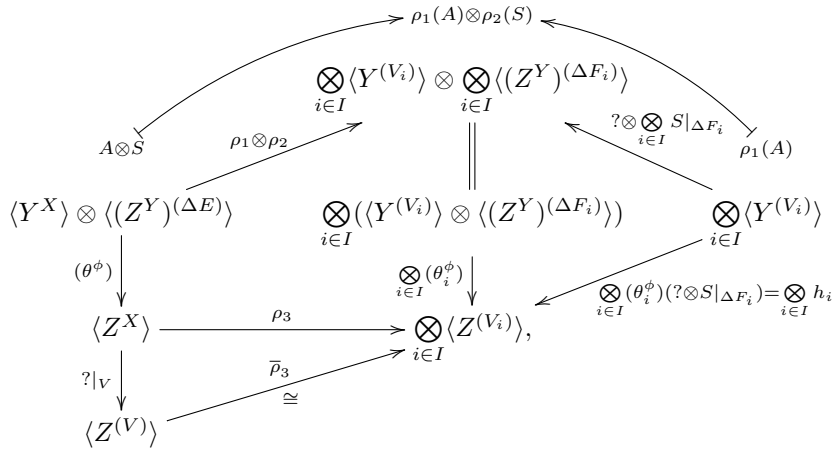
$$\rho_2(S) = \bigotimes_{i\in I} S|_{\Delta F_i}. \tag{3}$$

事实上，考虑带有映射的交换图



水平映射成立，因为 S 是可裂的。对角的那个是显然的。垂直映射，即(3)，随之得出。

我们有带映射的交换图



其中

$$h_i = (\theta_i^\phi)(?\otimes S|_{\Delta F_i}) : \langle Y^{(V_i)}\rangle \xrightarrow{?\otimes S|_{\Delta F_i}} \langle Y^{(V_i)}\rangle \otimes \langle (Z^Y)^{(\Delta F_i)}\rangle \xrightarrow{(\theta_i^\phi)} \langle Z^{(V_i)}\rangle.$$

左上方五边形的交换性由 (2) 得出。其余部分的交换性显然。显然， ρ_3 是一个同构。第一个映射显然成立。第二个映射由 (3) 得出。我们应证明，在左列的复合映射下， $A\otimes S$ 映到零。由图可知，只需证明

$$\big(\bigotimes_{i\in I} h_i\big)(\rho_1(A)) = 0. \tag{4}$$

令 $J \subseteq I$ 由满足 $|V_i| \geqslant q$ 的那些 i 构成。因为 $|V| \leqslant pq-1$，所以 $|J| \leqslant p-1$。

取 $i \in I \setminus J$ 和 $d \in Y^{(V_i)}$。我们证明

$$h_i(<d>) = <\lhd_Z^{V_i}>, \tag{5}$$

其中 $\lhd_Z^{V_i} \in Z^{(V_i)}$ 是（当然）将整个 V_i 映到基点 $\lhd_Z$ 的非基点映射。考虑非基点映射

$$D : V_i \to \Delta E \curlywedge Y, \qquad x \mapsto \phi(x) \curlywedge d(x),$$

以及 $D' = D|_{V_i \to D(V_i)}$。我们有如下交换图，其中的映射为

$$\begin{array}{ccccc}
S & & <\Xi^{\Delta E}(\lhd_Z^Y)> & & \langle (Z^Y)^{(\Delta E)} \rangle & \xrightarrow{\langle \#^Y \rangle} & \langle Z^{(\Delta E \curlywedge Y)} \rangle \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\theta_i^\phi)(<d> \otimes ?|_{\Delta F_i})} & & \downarrow{\scriptstyle ?|_{D(V_i)}} \\
h_i(<d>) & & <\lhd_Z^{V_i}> & & \langle Z^{(V_i)} \rangle & \xleftarrow{\langle Z^{(D')} \rangle} & \langle Z^{(D(V_i))} \rangle .
\end{array}$$

交换性可直接验证。第一个映射由 h_i 的定义可知成立。第二个显然成立。考虑差 $R = <\Xi^{\Delta E}(\lhd_Z^Y)> - S$。由 (1)，$\langle \#^Y \rangle(R) \in \langle (Z^Y)^{\Delta E \curlywedge Y} \rangle^{(q)}$。由于 $|D(V_i)| \leqslant |V_i| \leqslant q-1$，我们有 $\langle \#^Y \rangle(R)|_{D(V_i)} = 0$。等式 (5) 可由该图得到。

我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\langle Y^X \rangle & \xrightarrow{\rho_1} & \bigotimes_{i \in I} \langle Y^{(V_i)} \rangle & \xrightarrow{\bigotimes_{i \in I} h_i} & \bigotimes_{i \in I} \langle Z^{(V_i)} \rangle \\
 & \searrow^{\rho_1'} & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \uparrow{\scriptstyle \sigma} \\
 & & \bigotimes_{i \in J} \langle Y^{(V_i)} \rangle & \xrightarrow{\bigotimes_{i \in J} h_i} & \bigotimes_{i \in J} \langle Z^{(V_i)} \rangle ,
\end{array}$$

其中 π 和 σ 由以下规则定义

$$\pi : \bigotimes_{i \in I} <d_i> \mapsto \bigotimes_{i \in J} <d_i>, \qquad d_i \in Y^{(V_i)} \ (i \in I),$$

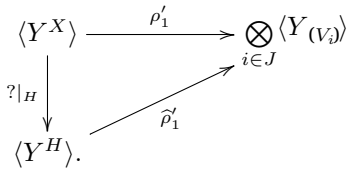
$$\sigma : \bigotimes_{i \in J} C_i \mapsto \bigotimes_{i \in I} C_i, \qquad C_i \in \langle Z^{(V_i)} \rangle \ (i \in I),\ C_i = <\lhd_Z^{V_i}> \text{ for } i \notin J.$$

由（5）可知该方形图可交换。我们证明 $\rho_1'(A) = 0$。由图可知，（4）随即成立。

对于每个 $i \in I$，都存在 $G_i \in \Gamma$，使得 $V_i \subseteq G_i$，因为 $\operatorname{diam} V_i \leqslant (pq-2)\epsilon \leqslant \lambda$。令

$$H = \{\lhd_X\} \cup \bigcup_{i \in J} G_i \subseteq X.$$

由于 $|J| \leqslant p-1$, $H \in \Gamma(p-1)$。我们有如下交换图



由于 $A \overset{p-1}{\underset{\Gamma}{=}} 0$，我们有 $A|_H = 0$。根据图表， $\rho_1'(A) = 0$。 □

§ 3. 利用命题 2.1

3.1. 推论。设一个系综 $A \in \langle Y^X \rangle$,

$$A = \sum_i u_i <a_i>,$$

满足 $A \overset{p-1}{=} 0$，且映射 $b:\ Y \to Z$ 满足 $b \overset{q-1}{\approx} \triangleleft_Z^Y (p, q \geqslant 1)$。那么存在一个系综 $C \in \langle Z^X \rangle$,

$$C = \sum_{i,j} u_i v_j <c_{ij}>, \tag{6}$$

其中 $c_{ij} \sim b \circ a_i$ 且

$$\sum_j v_j = 1, \tag{7}$$

使得 $C \overset{pq-1}{=} 0$。

证明。根据 [1, 推论 6.2], ，存在一个系综 $\widetilde{A} \in \langle Y^X \rangle$,

$$\widetilde{A} = \sum_i u_i <\widetilde{a}_i>,$$

其中 $\widetilde{a}_i \sim a_i$, 使得 $\widetilde{A} \overset{p-1}{\underset{\Gamma}{=}} 0$，对于某个关于 X 的开覆盖 Γ。令 λ 为 Γ 的一个勒贝格数。选取 $\epsilon > 0$，使得 $(pq-2)\epsilon \leqslant \lambda$，以及一个单位分解

$$\sum_{e\in E} \phi_e = 1,$$

其中 E 是一个非空有限集，且 $\phi_e:\ X \to [0,1]$ 是连续函数，使得

$$\operatorname{diam} \operatorname{supp} \phi_e \leqslant \epsilon, \qquad e \in E.$$

构造非基点映射

$$\phi = (\phi_e)_{e\in E} : X \to \Delta E.$$

由于 $b \overset{q-1}{\approx} \lhd_Z^Y$，存在可裂系综 $S \in \langle (Z_b^Y)^{(\Delta E)} \rangle \subseteq \langle (Z^Y)^{(\Delta E)} \rangle$,

$$S = \sum_j v_j <s_j>,$$

使得 $\Xi^{\Delta E}(\lhd_Z^Y) - S \in \langle (Z^Y)^{(\Delta E)} \rangle_Y^{(q)}$。令

$$C = (\theta^\phi)(\widetilde{A} \otimes S)$$

（关于 (θ^ϕ)，见 § 2）。由命题 2.1，$C \overset{pq-1}{=} 0$。我们有

$$C = \sum_{i,j} u_i v_j <\theta^\phi(\widetilde{a}_i, s_j)>.$$

由于 $\widetilde{a}_i \sim a_i$ 和 $s_j \in (Z_b^Y)^{(\Delta E)}$，我们有 $\theta^\phi(\widetilde{a}_i,\ s_j) \sim b \circ a_i$。等式 (7) 成立，是因为 S 是可裂的，因而是仿射的。 □

定理 *1.1* 的证明。由于 $a \overset{p-1}{\sim} a'$，我们有

$$\sum_i u_i <a_i> \overset{p-1}{=} <a'>$$

在 $<Y^X>$ 中，其中 $a_i \sim a$。由推论 3.1,

$$\sum_{i,j} u_i v_j <c_{ij}> \overset{pq-1}{=} \sum_j v_j <c'_j>$$

在 $\langle Z^Y \rangle$ 中，其中 $c_{ij} \sim b \circ a_i \sim b \circ a$，$c'_j \sim b \circ a'$，且等式 (7) 成立。由[1, 定理 7.3]，$b \circ a \overset{pq-1}{\sim} b \circ a'$。 □

定理 *1.2* 的证明。 假设 ord $h \leqslant pq - 1$，其中 $p \geqslant 1$ 是某个整数。只需证明 ord $f \leqslant p - 1$。取一个系综 $A \in \langle Y^X \rangle$,

$$A = \sum_i u_i <a_i>,$$

使得 $A \overset{p-1}{=} 0$。推论 3.1 给出一个形式为 (6) 的系综 $C \in \langle Z^X \rangle$，其中 $c_{ij} \sim b \circ a_i$ 和 v_j 满足 (7)，并且 $C \overset{pq-1}{=} 0$。我们有

$$\sum_i u_i f([a_i]) = \sum_{i,j} u_i v_j h([b \circ a_i]) = \sum_{i,j} u_i v_j h([c_{ij}]) \overset{(*)}{=} 0,$$

其中，$(*)$ 成立，因为 ord $h \leqslant pq - 1$ 和 $C \overset{pq-1}{=} 0$。因此 ord $f \leqslant p - 1$。 □

参考文献

[1] S. S. Podkorytov, 《映射的同伦相似》, arXiv:2308.00859 (2023)。

[2]S. S. Podkorytov, 《映射的同伦相似：强相似》, arXiv:2512.16500（2025）。

[3] E. H. Spanier, 《代数拓扑》。麦格劳-希尔，1966年。

ssp@pdmi.ras.ru
http://www.pdmi.ras.ru/~ssp