arXiv:2602.10310v1 [math.DS] 10 Feb 2026

正则平面多项式自同构族的公共周期点一致上界

MARC ABBOUD，YUGANG ZHANG

摘要。给定两个由代数曲线 B 参数化的一维正则平面多项式自同构族 f 和 g，它们均定义在某个数域 K 上，且其中一个是耗散的。我们证明，对任意参数 $b \in B(\mathbf{C})$，要么 f_b 和 g_b 有共同迭代，要么它们的公共周期点数目 $\mathrm{Per}(f_b) \cap \mathrm{Per}(g_b)$ 有一个一致上界 D（与参数 b 无关）。由此，我们将 Mavraki 和 Schmidt 关于有理映射的结果推广到了这一情形。

1. 引言

1.1. 主要结果。 正则平面（多项式）自同构是一个多项式自同构 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbf{A}^2)$，其不定点 p_+ in $\mathbf{P}^2$ 与其逆映射 f^{-1} 的不定点 p 不同（[Sib99]）。任何具有第一动力次数（[FM89, DS05]）$\lambda(f) > 1$ 的平面多项式自同构（等价地，当定义在 $\mathbf{C}$ 上时具有正拓扑熵）都与这样的映射共轭（在 $\mathrm{Aut}(\mathbf{A}^2)$ 中）（[FM89]）。从本质上说，在共轭意义下，它们是仿射平面上唯一具有丰富动力学的多项式自同构。

一个由 B 参数化的正则平面多项式自同构（算术）族 $\mathrm{f} = (\mathrm{f}_t)_{t \in B}$ 由一个数域 K、一条代数曲线 B，以及一个态射 $\mathrm{f} : \mathrm{B} \times \mathrm{A}^2 \to \mathrm{B} \times \mathrm{A}^2$ 组成，且它们都定义在 K 上，并满足：对于每个参数 $\mathrm{b} \in \mathrm{B}(\mathrm{K})$，特化 f_b 都是正则平面自同构。固定一个阿基米德位，使得存在一个嵌入 $\mathrm{K} \to \mathbf{C}$。与该族相关联的是雅可比映射 $\mathrm{Jac}(\mathrm{f}) : \mathrm{B} \to \mathrm{A}^1_{\mathbf{C}}$，定义为 $\mathrm{Jac}(\mathrm{f})(\mathrm{b}) = \mathrm{Jac}(\mathrm{f}_b)$。若对所有 $\mathrm{b} \in \mathrm{B}(\mathrm{K})$，$|\mathrm{Jac}(\mathrm{f})(\mathrm{b})| < 1$（分别为 $|\mathrm{Jac}(\mathrm{f})(\mathrm{b})| = 1$），则称该族为耗散的（分别为保守的）。

作为 Dujardin 和 Favre 关于 Manin-Mumford问题的奠基性工作 [DF17] 的推论，如果 f 和 g 定义在 $\mathbf{C}$ 上，并且 $|\mathrm{Jac}(f)| \neq 1$，那么除非它们拥有共同迭代，否则它们只有有限多个公共周期点。因此，自然地，并且受算术动力学和复动力学领域早期工作的启发（参见第 1.2 节），我们可以提出这样的问题：公共周期点的数量是否存在一致上界。我们在一维情形下部分回答了这一问题。

第一作者感谢瑞士国家科学基金会对“高维簇的双有理变换”项目（200020-214999）的资助。第二作者感谢勃艮第-弗朗什-孔泰大区 ATRACT 计划通过 ADYAUS 项目（RECH-ATRAC-000012）提供的支持，以及法国国家研究署通过 DynAtrois 项目（ANR-24-CE40-1163）提供的支持。

定理 A。 设 f 和 g 是两个正则平面多项式自同构的算术族，并假设 f 是耗散的。那么存在一个仅取决于 f 和 g 的正实常数 $D>0$，以及两个正整数 $N,M>0$，使得对于任意 $b\in B(\mathbf{C})$，以下两者之一成立：

$$\#\mathrm{Per}(f_b)\cap\mathrm{Per}(g_b)\leqslant D,$$

or

$$f_b^N=g_b^M. \tag{1}$$

而相等 性(1) 除非 $f^N=g^M$ 恒成立，否则至多只会出现在有限多个参数处 y.

我们不能指望对所有参数都有一致上界。举例来说，考虑

$$f_b(x,y):=(y,y^2+b-1/2x)\quad\text{and}\quad g_b(x,y):=(y,y^2-(1/2+b)x).$$

那么在$b=0$上，$f_0=g_0$。

若不存在整数$n,m\in\mathbf{N}^*$使得$f_n=g^m$，则称两个正则平面多项式自同构f和g是（动力学上）独立的。定理 A 是以下结果的推论；在该结果中，我们放宽了对雅可比行列式的条件，但对例外参数的信息也有所减少。

定理 B. 设 f 和 g 是两个动力学独立的正则平面多项式自同构族。假设集合 $\{|\text{雅可比行列式}(f)|=1\}\cap\{|\text{雅可比行列式}(g)|=1\}\subset B(\mathbf{C})$ 是离散的。那么存在一个正实常数 $D>0$，它仅取决于 f 和 g，使得除有限多个 $b\in B(\mathbf{C})$之外，

$$\#\mathrm{Per}(f_b)\cap\mathrm{Per}(g_b)\leqslant D, \tag{2}$$

Re注 1.1. (1) 集合 $\{|\text{雅可比行列式}(f)|=1\}\cap\{|\text{雅可比行列式}(g)|=1\}$是离散的，当且仅当它是非极性的。(2) 对于小纤维化典范高度点，我们实际上证明了一个更强的形式，见定理 5.1。在无法对雅可比行列式作任何控制的情况下，我们得到较弱的结果定理 5.2。

1.2. **背景与主要定理的策略**。 二次多项式 $f_c:=z^2+c,c\in\mathbf{C}$尽管形式简单，却呈现出高度复杂的动力学行为。已知（[BD11, YZ17]），对于任意 $c_1\neq c_2,$，f_{c_1} 和f_{c_2} 的公共预周期点集合是有限的。该动力系统背景下最早的一项一致性结果，是 DeMarco、Krieger 和 Ye 的开创性工作 [DKY22]；他们证明了，对于所有 $c_1\neq c_2$，公共预周期点的数量存在一致上界。他们进一步猜想，对于黎曼球面上的任意两个复有理映射f 和g，要么预周期点集合相同，要么公共预周期点的数量由一个一致常数所界。值得注意的是，同一作者对柔性拉泰斯映射族的研究 [DKY20]（早于 [DKY22]）证明了二维复族亏格 2 曲线的一致 Manin-Mumford 上界。

沿着这一方向，Mavraki 和 Schmidt [MS25] 随后证明了关于有理映射一维算术族的猜想；而 DeMarco 和 Mavraki [DM24] 证明，该猜想在f 和g 这对$\mathbf{P}^1$ 上的所有有理映射的乘积空间中的一个扎里斯基开集上成立

C。此外， [DM24] 中的策略还可用于证明 Bogomolov、Fu 和 Tschinkel [BFT18] 提出的另一猜想，该猜想涉及一对椭圆曲线的公共挠点的一致上界；这一结果最初由 Poineau [Poi25]证明。Ang 和 Yap[AY26] 从统计学角度研究了这个问题。

给定两个族f 和g，可以将它们视为一个族，方法是考虑有序对$(f,\ g)$。它们的公共预周期点，记为 $\mathrm{Prep}_{f,\ g}$，于是可以认定为 $(f,\ g)$ 的预周期点集与对角线的交集。遵循 DeMarco、Mavraki 和 Schmidt 提出的策略，我们的目标是利用 Yuan–Zhang 等分布定理 [YZ26]证明集合 $\mathrm{Prep}_{f,\ g}$不是扎里斯基稠密的（在适当取纤维幂之后；在本例中，也可以使用 Gauthier 定理 [Gau26] ）。运用算术等分布理论的思路源自 Ullmo 对曲线的 Bogomolov 猜想的证明 [Ull98], ，后来 S. Zhang 将其推广到阿贝尔簇 [Zha98]。另请参阅例如 [DGH21, Küh21, JSX26] 以及 Gao 的综述 [Gao21], 及其中的参考文献，了解算术几何中的其他一些一致性结果。

为此，我们需要验证对角线的非退化条件。这由关键的命题 4.3 得以实现，在该命题中，我们证明对角线退化当且仅当族f 和g 在动力学上独立或同时等变。命题 4.3 依赖于三个主要要素：由 Yuan–Zhang 的阿代尔度量线丛理论 [YZ26] 推导出的交数不等式（命题 4.1）；Dujardin 和 Favre [DF17] 对正则平面多项式自同构在所有赋值处的平衡测度支集所作的刻画；以及 Gauthier 和 Vigny [GV22] 所发展的正则平面多项式自同构族的几何高度理论。尽管在$\mathbf{P}^n$ 对于$n \geqslant 2$中，既不一定有f 和g 拥有相同的预周期点集，也不一定存在一致上界（参见近期猜想 [DM26]），但 Dujardin 和 Favre 关于正则平面多项式自同构的正向和反向 Green 流的刚性结果 [DF17] 使我们得以在本情形下得出结论。

最后，我们提及，在有理映射，或更一般地说，在极化自同态的情形下，Gauthier 和 Vigny [GV25] 利用多重位势理论，系统地研究了几何典范高度函数。这一方法在 [DM24、MS25],中得到了明确体现，并且也对本工作产生了重要启发。

致谢

我们感谢 Thomas Gauthier 就这一问题与我们进行讨论。第二作者非常感谢 Thomas 邀请其前往奥赛数学研究所。

2. 拟射影簇上的阿代尔除子与线丛 S

2.1. **b-除子**。设U 是某个域K上的拟射影簇。U 的完备化是一个X 上的射影簇K，其中U 是稠密开子集。若X、Y 是U的两个完备化，则由开子集U诱导出典范双有理映射$X \dashrightarrow Y$。一个*Cartier* b-除子

U 上的 b-除子是二元组 (X, D) 的一个等价类，其中 X 是 U 的射影完备化，D 是 X 上的 Cartier 除子；若存在 $\pi: \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ $\omega: \mathrm{Y} \to \mathrm{X}'$，使得 $\pi^{*}\mathrm{D} = \omega^{*}\mathrm{D}'$，则 (X, D) 与 $(\mathrm{X}1, \mathrm{D}')$ 等价。我们将 U 上的 Cartier b-除子空间记作 $\mathrm{Cartier}_b(\mathrm{U}/\mathrm{K})$。Yuan 和 Zhang 在 [YZ26] 中为该空间定义了一种称为边界拓扑的拓扑。其定义如下：U 的边界除子是某个 U 的完备化 X 上的有效除子 D_0，满足 $\mathrm{Supp}\,\mathrm{D}_0 = \mathrm{X} \setminus \mathrm{U}$。若 $\mathrm{D} \in \mathrm{Cartier}_b(\mathrm{U})$，则定义 D 关于 D_0 的扩展范数为

$$\| D \|_{D_0} := \inf\{\varepsilon > 0 : -\varepsilon D_0 \leqslant D \leqslant \varepsilon D_0\}. \tag{3}$$

边界拓扑实际上并不依赖于边界除子 D_0 的选择。我们可以取 $\mathrm{Cartier}_b(U/K)$ 关于此拟范数的完备化。完备化中的元素称为***b*-除子**，其定义在 U 上，并记 $\mathrm{Div}_b(U/K)$ 为定义在 U 上的 b-除子的集合。具体而言，元素 $D \in \mathrm{Div}_b(U/K)$ 是一个序列 $D_i \in \mathrm{Cartier}_b(U)$ 的数据，满足对每个 $i,\ j \geqslant 0,\ D_{i|U} = D_{j|U}$，并且存在一个趋于零的正有理数序列 ε_i，使得

$$\forall j \geqslant i, \quad -\varepsilon_i D_0 \leqslant D_j - D_i \leqslant \varepsilon_i D_0. \tag{4}$$

这样的序列 (D_i) 称为柯西序列。如果 $D \in \mathrm{Div}_b(U/K)$ 是数值有效 Cartier 除子柯西序列的极限，我们就称其为强nef。若 $D1,\ \ldots\ldots,\ D_n$ 是定义在 U 上的强nef除子，且它们是数值有效 Cartier 除子 $D_{i,\ k}$ 的极限，则可以验证交数

$$D_{1,k} \cdots D_{n,k} \tag{5}$$

收敛到一个非负实数，我们将其记为 $D_1 \cdots D_n$。这是因为，如果 $E1, \ldots, E_n$ 和 $E\prime 1, \ldots, E'_n$ 是数值有效的 Cartier b-除子，且 $E_i \geqslant E'_i$，那么

$$E_1 \cdots E_n \geqslant E'_1 \cdots E'_n. \tag{6}$$

2.2. 赋范域上的情形。设 K_v 是一个关于非平凡绝对值完备的域。若 v 是阿基米德的，则 $\mathrm{K}_v =$ 为 R 或 C。若 v 是非阿基米德的，我们用 O_v 表示 K_v 的赋值环。若 X 是 K_v 上的拟射影簇，我们用 X^{an} 表示其关于 v 的 Berkovich解析化。若 $\mathrm{K}_v =$ 为 C，则这恰好是闭点 $\mathrm{X}(\mathrm{C})$ 的集合。若 v 是非阿基米德的，则这是一个局部紧豪斯多夫拓扑空间，其中包含集合 $\mathrm{X}(\overline{\mathrm{K}}_v)$ 对伽罗瓦作用取商后所得的集合，且该集合是稠密子集。若读者不熟悉 Berkovich 空间，在本文中只需将其视为 $\mathrm{X}(\mathrm{K}_v)$ 对伽罗瓦作用取商所得的空间。设 X 是 K_v 上的射影簇，L 是一个 Q-线丛。L 在 X^{an} 上的连续度量是指：对每个 $\mathrm{x} \in \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$，给出 L 在 x 处茎上的一个度量，并且对每个定义在开子集 $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$ 上的 L 的局部截面 s，函数

$$x \in V \mapsto -\log |s|_x \tag{7}$$

是连续的。一个度量线丛 L 由**有理数域**-线丛及其上的度量构成。设 D 是 X 上的**有理数域**-Cartier 除子，D 在 X 上的格林函数是连续函数 g：$X^{\mathrm{an}} \setminus \mathrm{Supp}\, D \to \mathbf{R}$，满足：对每个 $q \in \mathrm{Supp} D$，若 ξ 是 D 在 q 处的局部方程，则函数

$$x \mapsto g + \log |\xi(x)| \tag{8}$$

在 q 处延拓为连续函数。度量除子 D = (D, g) 由一个 Q-Cartier 除子 D 和 D 的格林函数 g 构成。每个度量除子 D 都典范地确定一个度量线丛 $O_X(D)$，其定义为 $-\log|s_D| = g$，其中 s_D 是 $O_X(D)$的典范有理截面，满足 $\mathrm{div}(s_D) \equiv D$。反过来，若 L 是度量线丛，则 L 的任意有理截面 s 都确定一个度量除子 div(s)，定义为 D = div(s) 及 g = −log |s|。若 D = (D, g) 满足 $g \geqslant 0$, 则称其为有效的；这特别意味着除子 D 是有效的。在这种情况下，我们记作 $D \geqslant 0$。

现在假设 v 是非阿基米德的。设 D 是 K_v 上射影簇 X 上的一个 Q-Cartier 除子。X 的一个模型是一个射影簇 $\mathscr{X}$，它定义在 O_v 上，并满足 $X = \mathscr{X} \times_{\mathrm{Spec}O_v} \mathrm{Spec}\, K_v$。(X, D) 的一个模型是指 X 在 O_v 上的一个模型 $\mathscr{X}$，以及定义在 $\mathscr{X}$ 上、满足 $\mathscr{D}_{|X} = D$ 的 Q-Cartier 除子 $\mathscr{D}$。任意这样的模型除子都会诱导一个度量除子 $\mathscr{D}$，定义如下：存在一个规范约化映射 $r : X^{an} \to \mathscr{X}$，若 $x \in X$ 且不属于 $\backslash$ Supp D，则定义 $G_{\mathscr{D}}(x) = -\log|\xi(x)|$，其中 ξ 是 $\overline{\mathscr{D}}$ 在 r(x) 处的局部方程。模型度量线丛也有类似的定义。若 X 的维数为 n，且 $\mathscr{L}_1$、.....、$\mathscr{L}_n$ 是模型度量线丛，则它们定义一个符号测度

$$c_1(\overline{\mathscr{L}}_1)\cdots c_1(\overline{\mathscr{L}}_n) \tag{9}$$

由 Chambert-Loir 首先在 [Cha03] 中定义。若每个 $\mathscr{L}_i$ 均为数值有效，则这是一个总质量为 $L_1 \cdots L_n$ 的正测度。

若 $K_v = \mathbf{C}$ 且 $\overline{L}$ 是一个带有多重次调和（psh）度量的度量线丛，则存在一个 $(1,1)$-闭正流 $c_1(L)$ 与 L 相关联，其局部定义为

$$c_1(\overline{L}) = dd^c(-\log|s|) \tag{10}$$

其中 s 是 L 的一个局部非消失截面，并且根据 Bedford-Taylor理论，我们有一个定义良好的正测度

$$c_1(\overline{L}_1)\cdots c_1(\overline{L}_n) \tag{11}$$

其总质量也为 $L_1 \cdots L_n$。在 $K_v = \mathbf{C}$ 上，我们约定任何度量线丛都是模型。若其相关联的度量是多重次调和的，则它是数值有效的。

若 U 是定义在 K_v 上、维数为 n 的拟射影簇，则 *model metrised divisor* over U 是指其任意完备化 X 上的模型化度量除子，其中 U。沿用 Yuan 和 Zhang 在 [YZ26] 中的做法，我们还可以在 U 的模型化度量除子空间上定义边界拓扑。在此情形下，度量边界除子是满足以下条件的模型化度量除子 $\mathscr{D}_0$：D_0 是边界除子，且 $G_{\mathscr{D}_0} > 0$。关于 $\mathscr{D}_0$ 的扩展范数定义与上一段类似，我们有

$$\|\overline{\mathscr{D}}\|_{\overline{\mathscr{D}}_0} := \inf\left\{\varepsilon > 0 : -\varepsilon\overline{\mathscr{D}}_0 \leqslant \overline{\mathscr{D}} \leqslant \varepsilon\overline{\mathscr{D}}_0\right\}. \tag{12}$$

我们将 $\mathrm{Div}(U/K_v)$ 记作模型化度量除子集合关于边界拓扑的完备化。该完备化中的元素称为**度量除子**（定义在U上）。注意，若$D = \lim \mathscr{D}_i$，那么在格林函数层面上，存在一个趋于零的 $\varepsilon_i > 0$，使得

$$-\varepsilon_i G_{\overline{\mathscr{D}}_0} \leqslant G_{\overline{\mathscr{D}}_j} - G_{\overline{\mathscr{D}}_i} \leqslant \varepsilon_i G_{\overline{\mathscr{D}}_0}. \tag{13}$$

特别地，格林函数序列 $(G_{\mathscr{D}_i})$ 局部一致收敛到一个函数$\widehat{\ }$，我们将其记为G_D。若$D \in$ 属于 $\mathrm{Div}(U/K_v)$，且它是定义在U上的 nef 模型度量除子柯西序列的极限，则称其为强 ***nef***。特别地，若忽略格林函数，我们便恢复了前一段中的b-除子概念；也就是说，存在一个满射群同态 $\mathrm{Div}(U/K_v) \to \mathrm{Div}_b(U/K_v)$，它将强nef度量除子映射为强nef$b$-除子。

我们可以类似地定义U 上的度量线丛和强nef度量化线丛。此外，若$L1,\dots,L_n$是强nef度量化线丛，且是 nef 模型度量线丛 $\mathscr{L}_{i,k}$的极限，那么测度序列$c1(\mathscr{L}_{1,k})\cdots c1(\mathscr{L}_{n,k})$弱收敛到一个测度，我们将其记为

$$c_1(\overline{L}_1)\cdots c_1(\overline{L}_n). \tag{14}$$

总质量由几何交数给出。

定理 2.1 ([YZ26, Guo25])**.** 设 $L_1,\dots,L_d$是完备域 K_v上的拟射影簇 U 上的强***nef***度量化线丛，则

$$\int_{U^{\mathrm{an},v}} c_1(\overline{L}_1)_v\cdots c_1(\overline{L}_d)_v = L_1\cdots L_d. \tag{15}$$

2.3. 射影簇上的情形。设 K 是一个数域，X 是定义在 K 上的射影簇。我们用 M (K) 表示 K 上正规化绝对值的集合。X 上的模型阿代尔线丛由 X 在 Spec O_K 上的一个模型 $\mathscr{X}$以及一个 Q-线丛 $\mathscr{L}$构成，并配有 $\mathscr{L}_{\mathbf{C}}$在 $\mathscr{X}(\mathrm{C}) = \mathrm{X}(\mathrm{C})$上的度量。记 $\mathrm{L} = \mathscr{L}_{|X}$，我们将 $\mathscr{L}$记作 $\mathscr{L}$及 $\mathscr{L}_{\mathbf{C}}$的度量所组成的数据。对于每个 $\mathrm{v} \in \mathrm{M}$ (K)，模型阿代尔线丛定义了 L 在 $\mathrm{X}^{\mathrm{an},v}$上的模型度量，以及高度函数 $\mathrm{h}_{\mathscr{L}}\colon \mathrm{X}(\mathrm{K}) \to \mathrm{R}$，定义如下

$$\forall p \in X(\overline{K}),\quad h_{\overline{\mathscr{L}}}(p) = \frac{1}{\#\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\cdot p} \sum_{q\in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\cdot p} \sum_{v\in \mathscr{M}(K)} n_v(-\log ||s(q)||_{\overline{\mathscr{L}},v}) \tag{16}$$

其中，s 是 L 的一个在 p 处不消失的局部截面，且 n_v 是仅依赖于 v 和 K 的有理数。我们称 $\mathscr{L}$ 为数值有效的，当且仅当 $\mathscr{L}$ 是数值有效的，$\mathscr{L}_{\mathbf{C}}$ 的度量是多重次调和的，并且 $h_{\mathscr{L}} \geqslant 0$。若 $n = \dim X$，且 $\mathscr{L}_0,\dots,\mathscr{L}_n$ 是数值有效的模型阿代尔线丛，则它们的算术交数归纳定义为

$$\overline{\mathscr{L}}_0,\dots,\overline{\mathscr{L}}_d = \left(\overline{\mathscr{L}}_0\cdots\overline{\mathscr{L}}_{d-1}\right)_{|\,\mathrm{div}(s_d)} + \sum_{v\in\mathscr{M}(K)} \int_{X^{\mathrm{an},v}} -\log||s_d||_{\overline{\mathscr{L}}_d,v}\, c_1(\overline{\mathscr{L}}_0)_v\cdots c_1(\overline{\mathscr{L}}_{d-1})_v \tag{17}$$

其中，s_d 是 L_d 在 X 上的一个有理截面。

命题 2.2. 若 $\mathscr{L}_0$、……、$\overline{\mathscr{L}}d$ 为 ***nef***模型阿代尔线丛，则

$$\overline{\mathscr{L}}_0\cdots\overline{\mathscr{L}}_d \geqslant 0. \tag{18}$$

一个模型阿代尔除子是由模型 $\mathscr{X}$、一个**有理数域**-Cartier 除子 $\mathscr{D}$（在 $\mathscr{X}$ 上）以及 $\mathscr{D}_{\mathbf{C}}$ 在 $\mathscr{X}(\mathbf{C})$ 上的格林函数所构成的数据。对于模型阿代尔除子 $\overline{\mathscr{D}}$，在相差等距的意义下存在唯一相伴的阿代尔线丛 $O_X(\mathscr{D})$。于是高度函数可以容易地计算出来：

$$\forall p \in (X \setminus \operatorname{Supp} D)(\overline{K}), \quad h_{\overline{\mathscr{D}}}(p) = \frac{1}{\#\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \cdot p} \sum_{q \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\cdot p} \sum_{v \in \mathcal{M}(K)} n_v G_{\overline{\mathscr{D}},v}(q). \tag{19}$$

我们称 $\mathscr{D}$ 是有效的，如果对每个 $v \in \mathcal{M}(K), G_{\mathscr{D},v} \gtrsim 0$ 均成立。这尤其意味着**有理数域**-Cartier 除子 $\mathscr{D}$ 是有效的。我们称 $\mathscr{D}$ 是数值有效的，如果 $O_X(\mathscr{D})$ 是。

2.4. 拟射影簇上的情形。设 U 是数域 K 上的拟射影簇。U 上的阿代尔线丛是由 Yuan 和 Zhang 在 [YZ26] 中定义的边界拓扑下，U 的射影紧化上的模型阿代尔线丛构成的柯西序列。U 上的阿代尔除子是由 U 的射影紧化上的模型阿代尔除子 $\mathscr{D}_i$ 构成的柯西序列，且相对于边界拓扑有 $\forall$i, j, $D_{i|U}$ = D jU。我们用 $\mathrm{Div}(U/O_K)$ 表示 U 上阿代尔除子的集合，用 $\mathrm{Pic}(U/O_K)$ 表示 U 上阿代尔线丛的集合。若 L 是 U 上的阿代尔线丛，且为模型阿代尔线丛序列 $\mathscr{L}_i$ 的极限，则它定义了一个高度函数 $h_L : U(K) \to R$，定义如下

$$h_{\overline{L}} := \lim_i h_{\overline{\mathscr{L}}_i}. \tag{20}$$

阿代尔线丛 L 若是数值有效模型阿代尔线丛的极限，则称其为强 *nef*。若 $L0, \ldots, L_d$ 均为强nef，则其算术交数 定义为

$$\overline{L}_0 \cdots \overline{L}_d := \lim_i \overline{\mathscr{L}}_{0,i}, \cdots, \overline{\mathscr{L}}_{d,i} \geqslant 0. \tag{21}$$

设 v ∈M (K) 是 K 的一个赋值，并记 K_v 为 K 关于 v 的完备化。于是，将所有对象限制到赋值 v 上，可得到一个态射 $\mathrm{Div}(U/O_K) \to \mathrm{Div}(U_{K_v}/K_v)$，它将强数值有效阿代尔除子映射为强nef度量化除子，其中 $U_{K_v} = U \times_{\mathrm{Spec}\, K} \mathrm{Spec}\, K_v$。我们还有定义在 U^{an} 上的测度 $c_1(L_1)_v \cdots c_1(L_d)_v$，它是对每个 v ∈ M (K)而言，测度 $c_1(\mathscr{L}_1)_v \cdots c_1(\mathscr{L}_d)_v$ 的弱极限。

若 D 是 U 上的阿代尔除子，且是 $\mathscr{D}_i$ 的极限，则对每个 $v \in \mathcal{M}(K)$，格林函数 $G_{\mathscr{D}_i,v}$ 局部一致收敛于 $G_{D,v}$，即 D 的格林函数。特别地，高度公式仍然成立

$$\forall p \in U(\overline{K}) \setminus \operatorname{Supp} D_{|U}, h_{\overline{D}}(p) = \frac{1}{\#\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \cdot p} \sum_{q \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\cdot p} \sum_v n_v G_{\overline{D},v}(q). \tag{22}$$

我们称 D 为有效，如果它是由有效模型阿代尔除子构成的柯西序列的极限。

最后，如果 $L1, \ldots, L_n$ 是强数值有效阿代尔线丛，那么忽略度量后，我们得到一列线丛 $L_{k,i}$，其几何交数

$$L_{1,i} \cdots L_{d,i} \tag{23}$$

也收敛到一个非负数，记作$L_1 \cdots L_d$。特别地，如果L是大 的，则$L^d > 0$这个几何交数称为X关于L 的次数 ，记作 $\deg_L(X)$。

最后，我们以适合本文需要的形式陈述 Yuan 和 Zhang 的算术等分布定理，以此结束本节。我们称闭点序列是一般 的，如果它的任何子序列都不包含在某个真闭子簇中。

定理 2.3 ([YZ26])**.** 设 $L \in \widehat{\mathrm{Pic}}(U/O_K)$ 为强数值有效阿代尔线丛，使得 $L^d > 0$。若$(p_n) \subset U(K)$ 是一般序列，使得 $h_L(p_n) \to 0$，则对任意 $v \in \mathcal{M}(K)$，狄拉克测度序列

$$\delta_{n,v} = \frac{1}{\#\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \cdot p_n} \sum_{q \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \cdot p_n} \delta_{q,v} \tag{24}$$

在 $U^{\mathrm{an}},_v$上弱收敛于 $c_1(L)_v$

证明。 这是 [YZ26] 的结果，只是为了应用 Yuan 和 Zhang 的结果，我们需要证明$L^{d+1} = 0$。为此，我们使用 Yuan 和 Zhang 在 [YZ26]中的基本不等式

$$\sup_{V \subset U} \inf_{q \in V(\overline{K})} h_{\overline{L}}(q) \geqslant \overline{L}^{d+1} \tag{25}$$

其中，上确界取遍U的开子集。由于序列p_n是泛的，我们得到$L^{d+1} \leqslant 0$，且它是 $\geqslant 0$，因为 L 是强nef。□

泛性条件并不太苛刻。对于由闭点组成的扎里斯基稠密序列 (p_n)，总能抽取出一个泛序列。事实上，由于K可数，U上由K定义的严格闭子簇只有可数多个，将它们记为：Z_1, Z2,$\cdots$，定义$\mathrm{Z}_i' = \mathrm{Z}_1 \cup \mathrm{Z}_2 \cdots \cup \mathrm{Z}_i$。我们定义一个抽取函数 $\sigma\colon \mathrm{N} \to \mathrm{N}$如下：选取 $\sigma(1)$ 使得$\mathrm{p}_{\sigma(1)} \notin \mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_1'$。假设 $\sigma(1), \cdots, \sigma(\mathrm{n})$ 已构造好，则选取 $\sigma(\mathrm{n}+1) > \sigma(\mathrm{n})$ 使得$\mathrm{p}_{\sigma(n+1)} \notin \mathrm{Z}_{n+1}'$，于是子序列$\mathrm{p}^{\sigma(n)}$ 是泛的。

2.5. **几何情形**。现在假设$K = k(B)$ 是某个域k上的射影曲线B 的函数域。Yuan 和 Zhang 也在此情形下发展了阿代尔线丛和除子的理论。为区别于算术情形，我们将它们称为几何阿代尔线丛和除子。我们用波浪号表示几何阿代尔线丛和除子，以区别于用横线表示的算术阿代尔线丛和除子。$\widetilde{}$ $\widetilde{}$我们分别用 $\widetilde{\mathrm{Div}}(U/k(B))$ 和 $\widetilde{\mathrm{Pic}}(U/k(B))$ 表示几何阿代尔除子和线丛的集合。我们简要回顾这一理论。设X 是有理数域K上的射影簇。我们用 $\mathcal{M}(K)$ 表示B的闭点集合。每个点$p \in \mathcal{M}(K)$ 都在K 上定义一个绝对值，其定义为

$$\forall \lambda \in K, \quad |\lambda|_p = e^{-\mathrm{ord}_p(\lambda)}. \tag{26}$$

若L是X上的一个**有理数域**-线丛，则L的一个模型由X在B上的一个模型$\mathscr{X}$以及其上的一个**有理数域**-线丛$\mathscr{L}$构成，使得$\mathscr{L}_{|X}=L$。它还定义了一个高度函数$h_{\widetilde{\mathscr{L}}}\colon X(K)\to\mathbf{R}$，定义如下：

$$h_{\widetilde{\mathscr{L}}}(p)=\Delta_p\cdot\widetilde{\mathscr{L}} \tag{27}$$

其中，Δ_p是$\mathscr{X}$中 p 的闭包。不过，我们也可以用 Berkovich 空间来解释这一点：事实上，对每个 v ∈ M (K)，$\mathscr{L}$都定义了 X^{an}上线丛 L 的一个度量，[v] 公式 (16) 也成立。几何交数$\mathscr{L}_0\cdots\mathscr{L}_n$也有形如 (17) 的表达式。我们对于几何模型阿代尔除子也有类似的结论。特别地，若$\mathscr{D}$是 X 的某个模型$\mathscr{X}$上的一个 Q-Cartier 除子，其限制到 X 上为除子 D，那么对每个 b ∈ M (K)，它都会在 X^{an}上诱导出 D 的一个格林函数[b]。现在假设 U 是 K 上的一个拟射影簇，那么 U上的几何阿代尔线丛（分别地，几何阿代尔除子）是 B 上 U 的射影模型上的几何模型阿代尔线丛（分别地，几何模型阿代尔除子）构成的柯西序列，所依据的是边界拓扑。特别地，若 U 上的阿代尔除子 D 是$\widetilde{\mathscr{D}}_i$的极限，那么格林函数 G ~$D_i$在 U^{an}上局部一致收敛[b]到 D 的格林函数 $G_{\tilde{D}}$，并且公式 (16)、(17) 和 (22) 在几何情形下也成立[b]。

2.6. **阿代尔除子与线丛的限制**。设Y,X是数域K上的准射影簇，并令$f\colon Y\to X$为一个态射，则存在一个自然的拉回算子

$$f^*\widehat{\mathrm{Pic}}(X/O_K)\to\widehat{\mathrm{Pic}}(Y/O_K),\quad f^*\widehat{\mathrm{Div}}(X/O_K)\to\widehat{\mathrm{Div}}(Y/O_K). \tag{28}$$

我们在一个对本文有用的特定情形下进行说明。设$X=\mathbf{A}^2_K$且$C\subset X$是一条不可约曲线。设$\overline{D}$是$\mathbf{A}^2_K$上的强数值有效阿代尔 Green 除子，满足$D_{|\mathbf{A}^2}=0$。记$D=\lim_i\mathscr{D}_i$，并令$\mathscr{X}_i$为其上定义了$\mathscr{D}_i$的一个射影模型。记$\mathscr{Y}_i$为C在$\mathscr{X}_i$中的 Zariski 闭包，则$\mathscr{D}_i$限制为$\mathscr{Y}_i$上的一个 Cartier 除子，而 Green 函数G^{D_i}限制为一个 Green 函数$G^{D_i}|_{C(\mathbf{C})}$，对应于$\overline{D^i|_C}$，其中C是C在X_i中的 Zariski 闭包。特别地，$D|_C$的次数等于该极限

$$\deg(D_{|C})=\lim_i\deg(D_{i|\overline{C}})=\lim_i D_i\cdot\overline{C}. \tag{29}$$

本节最后计算射影簇纤维化上的几何交数。利用 [Ful98，例 20.3。3], 我们可以陈述如下结论：若$q\colon X\to S$是平坦射影态射，其中S是一个离散赋值环的谱，并且$D_1\cdots D_n$是 Cartier 除子，其中$n=\dim_S X$，则

$$D_{1,\eta}\cdots D_{n,\eta}=D_{1,s}\cdots D_{n,s} \tag{30}$$

其中 η是S的泛点，而s是闭点。由此可以推出如下命题：

命题 2.4. 设 $q : X \to Y$ 是域 K 上不可约光滑射影簇之间的态射，$D_1, \ldots, D_n$ 是 X 上的 n 个卡蒂埃除子，$E_1,\ldots,E_m$ 是 Y 上的 m 个卡蒂埃除子，且 $n = \dim X - \dim Y$，$m = \dim Y$，则

$$D_1 \cdots D_n \cdot q^* E_1 \cdots q^* E_m = (D_{1,\eta} \cdots D_{n,\eta})(E_1 \cdots E_m) \tag{31}$$

其中 η 是 Y 的泛点，$D_{i,\eta}$ 是 D_i 在一般纤维上的限制。

推论 2.5. 设 $q : X \to Y$ 是某个域 K 上正规准射影簇之间的态射，$D_1, \ldots, D_n$ 是 X 上的强 *nef b*-除子，$E_1,\ldots,E_m$ 是 Y 上的强 *nef b*-除子，且 $n = \text{维} X - \text{维} Y$，$m = \text{维} Y$，则

$$D_1 \cdots D_n \cdot q^* E_1 \cdots q^* E_m = (D_{1,\eta} \cdots D_{n,\eta}) \cdot (E_1 \cdots E_m). \tag{32}$$

证明. 设 $D_{i,k}, E_{i,k}$ 是分别收敛到 D_i 和 E_i 的 nef 模型除子。我们可以假设每个 $D_{i,k}$ 都定义在 X_k 的完备化上，而每个 $E_{i,k}$ 都定义在同一个完备化 Y_k 上，并且态射 q 可延拓为态射 $q : X_k \to Y_k$。于是，我们有

$$D_1 \cdots D_n \cdot q^* E_1 \cdots q^* E_n = \lim_k D_{1,k} \cdots D_{n,k} \cdot q^* E_{1,k} \cdots q^* E_{n,k}. \tag{33}$$

现在，根据命题 2.4，极限中的项等于

$$(D_{1,k,\eta} \cdots D_{n,k,\eta})(E_{1,k} \cdots E_{m.k}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} (D_{1,\eta} \cdots D_{n,\eta}) \cdot E_1 \cdots E_m. \tag{34}$$

□

Fulton 结果的另一个推论如下:

命题 2.6. 设 $q : X \to Y$ 是簇之间的射影平坦态射。若 $D_1, \ldots, D_e$ 是 X 上的 *Cartier* 除子，且 $e = \dim X - \dim Y$，那么对于每个 $y \in Y$，将这些 *Cartier* 除子限制到 y 的纤维上所得的交数 $D_{1,y} \cdots D_{e,y}$ 均与 y 无关。

3. 不变阿代尔除子

设 f: $\mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$ 是定义在任意域 L 上的正则自同构，次数为 $\lambda(f)$。由 [BFJ08, Can01, FJ11, Abb23] 可知，存在两个不变的 b-除子 $\theta^{\pm}_{f,L} \in \mathrm{Div}_b(\mathbf{A}^2_L/L)$，它们在乘以正实常数的意义下唯一，使得

$$f^* \theta^+_{f,L} = \lambda(f) \theta^+_{f,L}, \quad (f^{-1})^* \theta^{-1}_{f,L} = \lambda(f) \theta^-_{f,L}. \tag{35}$$

我们将归一化固定为 $\theta^{\pm}{}_{f,L,\mathbf{P}^2_L} = L_\infty$ 是无穷远直线。由此可得以下关于交数的结论

$$(\theta^+_{f,L})^2 = (\theta^-_{f,L})^2 = 0 \text{ and } \theta^+_{f,L} \cdot \theta^-_{f,L} = 1. \tag{36}$$

我们强调，这一构造在任意域上都成立。现在，若 L 是完备度量域，我们说明这与 Yuan 和 Zhang 的理论相容，并且可以构造与这些 b-除子相关联的典范格林函数，从而定义不变阿代尔除子。

注 3.1. 这里略有滥用，因为上述参考文献中用于 Cartier b-除子的拓扑与我们此处所用的拓扑不同。把那些参考文献中的拓扑称为弱拓扑，第一作者在 [Abb24 的命题 9.6] 中证明，边界拓扑强于弱拓扑，并且用于定义 $\theta^{\pm}_{f,L}$ 的极限过程在边界拓扑下同样适用。即，若 L_∞ 是 $\mathbf{P}^2_L$ 中的无穷远直线，则

$$\frac{1}{\lambda(f)^n}(f^{\pm n})^* L_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \theta^{\pm}_{f,L} \tag{37}$$

在弱拓扑和边界拓扑下均成立。

3.1. **完备赋范域上的格林函数和平衡测度**。 设K_v 是一个完备赋范域。关于复数域上正则平面多项式自同构f 的格林函数构造，可参见 [BS91a、Hub86], ；关于带有非平凡绝对值的任意完备代数闭域上的构造，可参见 [Kaw13]。在 [Abb24], 中，第一作者证明了这些构造与 Yuan 和 Zhang 关于准射影簇上阿代尔除子的理论相容。

存在唯一一个（相差一个正实常数倍的意义下）格林函数$G^{\pm}_f$，它满足$\theta^{\pm}_{f,\,K_v}$ 使得$G^{\pm}_f \circ f^{\pm 1} = \lambda(f)G^{\pm}_f$。其定义如下：

$$\forall q \in \mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{K_v}, \quad G^{\pm}_f(q) = \lim_n \frac{1}{\lambda(f)^n}\log^+ \| f^{\pm n}(q) \| \tag{38}$$

其中 $\| (x,\ \ y) \| = \max(|x|,\ \ |y|)$。以下性质可从[BS91a、Kaw13、Ing14]中推得。

(1) $G^{\pm}_f$在 $\left\{G^{\pm}_f > 0\right\}$上是连续的、 $\geqslant 0$、多重次调和且调和的

(2) 存在一个W^- 开邻域，它是p_- 在$\mathbf{P}2_{,\mathrm{an}\,K_v}$ 中的邻域，在f^{-1} 作用下保持不变，并且函数序列

$$p \mapsto \frac{1}{\lambda(f)^n}\log^+ ||f^n(p)|| - \log^+ ||p|| \tag{39}$$

是$\mathbf{P}2_{,\mathrm{an}\,K_v} \setminus W^-$ 上的连续函数序列，一致收敛到G^+_f –$\log^+ ||\cdot||$，其定义在$\mathbf{P}2_{,\mathrm{an}\,K_v} \setminus W^-$上。

(3) $G^{\pm}_f \circ f^{\pm 1} = \lambda(f)G^{\pm}_f$。

我们将诱导的度量除子记为 $\theta^{\pm}{}_{f,K_v}$。我们还定义 $\theta_{f,K_v} = \theta^{+}{}_{f,\overline{K}_v} + \theta^{-}{}_{,f\overline{K}_v}$，并令$G_f = G^+_f + G^-_f$。

推论 3.2。 设曲线 $C \subset \mathbf{A}^2_{K_v}$ 仅在 p_+处与无穷远直线相交，则 $G^{+}_{f}|C$ 是 $L^\infty|C$ 上的格林函数，其中 L_∞ 是 $\mathbf{P}^2$中的无穷远直线。特别地， $\theta^{+}f,\ K_v$ 限制在 C 上是一个度量除子 D，其中 $D = L^\infty|C$。

由此推论以及以下 [DF17]，我们得出如下结果。

命题 3.3. 设 L 是 **有理数域** 上的有限生成域，且 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbf{A}_L^2)$ 是定义在 L 上的正则自同构。设 $C \subset \mathbf{A}_L^2$ 是一条曲线，则 $\theta_{f,L}^{\pm}$ 限制为一个 b-除子 $\theta_{f,L_{|C}}^{\pm}$，并且我们有 $\deg(\theta_{f,L_{|C}}^{\pm}) > 0.$

证明. 由于L 在 **有理数域**上有限生成，我们可以将 L 嵌入复数域 $\mathbf{C}$ 。由于次数定义为几何交数，它在基变换下不变，因此我们可以在 $\mathbf{C}$ 上计算。考虑与 $\theta_{f,\mathbf{C}}^{\pm}$ 相关联的、$\mathbf{C}$ 上的典范格林函数 f，并考虑 f 到 $\mathbf{P}^2$ 的延拓。由 [BS91b，命题 4.2]，，存在整数 $k \geqslant 0$，使得 $f^k(C)$ 与无穷远直线仅相交于 p^+。由推论 3.2，我们有

$$\deg\left(\theta_{f,\mathbf{C}_{|f^k(C)}}^{+}\right) = L_\infty \cdot \overline{f^k(C)} > 0 \tag{40}$$

其中，$\overline{f^k(C)}$ 是$f^k(C)$ 在$\mathbf{P}^2$中的闭包。现在，根据定理 2.1，我们知道这个次数等于 $(dd^c G_f^+)_{|f^k(C)}$的总质量。由于f^k在C与$f^k(C)$之间诱导了一个同构，我们还可推得 $(dd^c G_f^+)_{|C}$ 具有正质量，其值为次数 $\deg(D^+_{|C})$。□

f 的平衡测度定义为

$$\mu_f = \frac{1}{2}(dd^c G_f)^2 = dd^c G_f^+ \wedge dd^c G_f^-. \tag{41}$$

显然，$\mathrm{Supp}\mu_f \subset \{G_f = 0\}$，并且有如下刻画，该刻画最初由 Dujardin 和 Favre 在 [DF17] 中证明，随后由第一作者在[Abb24]中推广至任意仿射曲面。我们强调，该结论对任意完备度量域K_v均成立。

命题 3.4. </style}紧集G f 是Suppμf 的多项式凸包。

我们以陈述三个刚性结果结束本节。设f 和g是$\mathbf{C}^2$上的正规多项式自同构。

定理 3.5 ([DF17])。 假设存在一条曲线 $C \subset \mathbf{C}^2$，使得对于某个 $\alpha > 0$，$(G^+ - \alpha G^-)_{|C}$ 是调和的，那么 $|\mathrm{Jac}(f)| = 1$。

定理 3.6 ([DF17])。 假设 f 是耗散的。如果 f 和 g 有无穷多个公共周期点，那么它们有一个共同迭代。

以下结果出自 Stéphane Lamy 的博士论文。论证见[DF17]following [Lam01, 定理 5.3]。

定理 3.7。 若 $f, g \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^2)$ 是正则自同构，且 $\mu f = \mu g$，则存在 $N, M \neq 0$，使得 $fN = g^M$。

3.2. 数域上的情形。 若f定义在数域K上，我们可以为$v \in \mathcal{M}(K)$中的任意赋值构造格林函数。这定义了两个f-不变强数值有效阿代尔除子 $\theta^{+}_{f,K}$ $\theta^{-}_{f,K} \in \widehat{\mathrm{Div}}(\mathbf{A}^2_K/O_K)$，使得

$$f^*\overline{\theta}^{\pm}_{f,K} = \lambda(f)^{\pm 1}\overline{\theta}^{\pm}_{f,K}. \tag{42}$$

它们在乘以一个正实常数的意义下是唯一的。我们定义 $\theta_{f,K} = \theta^{+}_{f,K} + \theta^{-}_{f,K}$。$f$的典范高度为 $h_f := h_{\theta_{f,K}}$并且我们有

$$\mu_{f,v} = \frac{1}{2}c_1(\overline{\theta}_f)^2_v = \frac{1}{2}dd^c G^{+}_{f,v} \wedge dd^c G^{-}_{f,v}. \tag{43}$$

特别地，典范高度 h_f 满足 *Northcott* 性质，这意味着 $q \in K^2$ 是f-周期的，当且仅当 $h_{f,K}(q) = 0$([Kaw13])。

更准确地说，考虑除子 $D = L_\infty$，它是 $\mathbf{P}^2_K$中的无穷远直线。考虑射影模型

$$\mathscr{X} = \mathbf{P}^2_{O_K} \tag{44}$$

在 O_K 上，并将 $\overline{\mathscr{D}}$定义为模型阿代尔除子，其中 $\mathscr{D}$ 是 L_∞ 在 $\mathbf{P}^2{}_{O_K}$ 中的闭包，而 $G_{\mathscr{D}}$ 是定义在 $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})\backslash L_\infty = \mathbf{C}^2$ 上的格林函数

$$G_{\overline{\mathscr{D}}}(x,y) = \log^+ \max(|x|,|y|). \tag{45}$$

于是，根据 [Abb24], ，相对于 Yuan 和 Zhang 的边界拓扑，我们有

$$\frac{1}{\lambda(f)^n}(f^{\pm n})^*\overline{\mathscr{D}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{\theta}^{\pm}_{f,K}. \tag{46}$$

3.3. 函数域上的情形。若f 定义在某个域k上的射影曲线B 的函数域$K = K(B)$ 上，那么与数域情形一样，f的格林函数的构造对任意$b \in \mathcal{M}(K)$均成立。这也定义了强数值有效阿代尔除子 $\widetilde{\theta}^{\pm}_{f,K} \in \widehat{\mathrm{Div}}(\mathbf{A}^2_{K(B)})$，而$f$的几何典范高度定义为

$$h^{geom}_{f,K} = h_{\tilde{\theta}^{+}_{f,K}+\tilde{\theta}^{-}_{f,K}}. \tag{47}$$

更确切地说，如果 $D = L_\infty$ 是 $\mathbf{P}^2_K$ 中的无穷远直线，那么定义 $\mathscr{X} = \mathbf{P}^2_k \times B$，并令 $\widetilde{\mathscr{D}}$ 为 $\mathbf{P}^2_k$中无穷远直线的拉回，那么 $(\mathscr{X}, \widetilde{\mathscr{D}})$是 $(\mathbf{P}^2_K, L_\infty)$的射影模型，并且由 [Abb24], 相对于 Yuan 和 Zhang 的边界拓扑，我们有

$$\frac{1}{\lambda(f)^n}(f^{\pm n})^*\widetilde{\mathscr{D}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widetilde{\theta}^{\pm}_{f,K}. \tag{48}$$

3.4. 在一个族中。现在设 $f : A^2 \to A^2$ 是定义在数域 K 上的射影曲线 B 的函数域上的正则自同构。那么，在取 $B' \subset B$ 的一个开子集后，我们可以认为 f 延拓为 $A^2_K \times B'$的自同构。格林函数的构造在这一情形下同样成立，且也已在 [Abb24] 中完成。我们还具有两个强 nef 有效阿代尔除子 $\theta^{\pm} f \in \widehat{\mathrm{Div}}(A^2_K \times B'/O_K)$的存在性，它们的格林函数就是 f 的纤维化格林函数。对于每个 $b \in B'(K)$, 一阿代尔除子 $\theta^{\pm}_f$限制在纤维 $A^2_K \times \{b\}$ 上，得到上一段中构造的阿代尔除子 $\theta^{\pm} f,K(b) \in \widehat{\mathrm{Div}}(A^2_K \times \{b\}/O_{K(b)})$。特别地，格林函数相等于

$$\forall (x,y,b) \in \mathbf{A}^2 \times B(\overline{K}), \quad G^{\pm}_f((x,y,b)) = G^{\pm}_{f_b}(x,y). \tag{49}$$

特别地,

$$\forall (x,y,b) \in A^2 \times B(\overline{K}), \quad h_f((x,y,b)) = h_{f_b}((x,y)) \tag{50}$$

且 $((x, y), b)$ 是 f -周期的，当且仅当 (x, y) 是 f_b-周期的。更确切地说，令 $X = P^2_K$ 和 $D = L_\infty$ 为无穷远直线。设 $\mathscr{B}$ 是 B 在 O_K 上的射影模型，且 $\mathscr{X} = P^2 O_K \times \mathscr{B}$。定义 $\mathscr{D}$ 如下: $\mathscr{D}$ 是 L_∞ 在 $\mathscr{X}$ 中的闭包，而 $P^2(C) \times B(C) \backslash (L_\infty \times B(C)) = C^2 \times B(C)$ 上的格林函数 $G_{\mathscr{D}}$ 等于

$$G_{\overline{\mathscr{D}}}(x,y,b) = \log^+ \max(|x|,|y|). \tag{51}$$

由 [Abb24], , 根据 Yuan 和 Zhang 的边界拓扑，我们有

$$\frac{1}{\lambda(f)^n}(f^{\pm n})^* \overline{\mathscr{D}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \overline{\theta}^{\pm}_f. \tag{52}$$

现在，我们还有 $\widetilde{\mathscr{X}} = \mathbf{P}^2_K \times B$ 是 $\mathbf{P}^2_{K(B)}$ 在 B 上的射影模型，并且除子 $\mathscr{D}$ 限制~为上述 §3.3 中的除子 $\mathscr{D}$。因此，我们也可以通过这一构造得到 f 的几何典范高度，特别地,

$$\deg_{\overline{\theta}^+_f + \overline{\theta}^-_f}(\mathbf{A}^2_K \times B') = (\widetilde{\theta}^+_{f,K(B)} + \widetilde{\theta}^-_{f,K(B)})^3. \tag{53}$$

最后，如果我们将这些除子的极限限制在$\mathbf{A}^2_{K(B)}$上，也就是说，限制在$\mathbf{A}^2_K \times B$的一般纤维上，那么就可以得到与f相关联的$\mathbf{A}^2_{K(B)} \to \mathbf{A}^2_{K(B)}$，即本节开头讨论的$b$-除子 $\theta^{\pm}{}_{f,K(B)}$。

4. 几何高度与不等式

我们陈述并证明下一个关于几何阿代尔除子和线丛的命题，但完全相同的证明也逐字适用于算术阿代尔除子和线丛。

命题 4.1. 设 K 是某个域上射影曲线的函数域。设 U 是 K 上一个维数为 n 的~ ~拟射影簇，且 L_1、. . .、L_n 是强*nef*几何阿代尔线~丛，D 是一个有效几何阿德尔除子，则

$$\widetilde{D}\cdot\widetilde{L}_1\cdots\widetilde{L}_n \geqslant \sum_{v\in\mathcal{M}(K)} n_v \int_{U^{\mathrm{an},v}} G_{\widetilde{D},v}\, c_1(\widetilde{L}_1)_v\cdots c_1(\widetilde{L}_n)_v. \tag{54}$$

~ ~证明。设 D_i 和 $\mathrm{L}_{k,i}$ 分别为一列模型除子和线丛，且它们分别收敛于 ~ ~ ~D 和 L_k。特别地，我们可以取 D_i 为有效除子，$\mathrm{L}_{k,i}$ 为数值有效线丛。对每个 v，定义 $\mu_{i,v}=\mathrm{c}_1(\widetilde{\ }\mathrm{L}1,_i)_v\cdots\mathrm{c}_1(\widetilde{\ }\mathrm{L}_{n,i})_v$ 以及 $\mu_v=\mathrm{c}_1(\widetilde{\ }\mathrm{L}_1)_v\cdots\mathrm{c}_1(\widetilde{\ }\mathrm{L}_n)_v$。我们有

$$\widetilde{D}\cdot\widetilde{L}_1\cdots\widetilde{L}_d=\lim_i \widetilde{D}_i\cdot\widetilde{L}_{1,i}\cdots\widetilde{L}_{d,i}. \tag{55}$$

由（17），我们有

$$\widetilde{D}_i\cdot\widetilde{L}_{1,i}\cdots\widetilde{L}_{n,i}\geqslant\sum_v\int_{U^{\mathrm{an},v}} G_{\widetilde{D}_i}\mu_{i,v}. \tag{56}$$

现在，对每个$v\in\mathcal{M}(K)$，取 ϕ_v 为$U^{\mathrm{an},v}$ 上的连续函数，且具有紧支集 Ω_v，使得 $0\leqslant\phi\leqslant 1$。于是我们有

$$\widetilde{D}_i\cdot\widetilde{L}_{1,i}\cdots\widetilde{L}_{n,i}\geqslant\sum_v\int_{U^{\mathrm{an},v}} \phi_v G_{\widetilde{D}_i}\mu_{i,v}. \tag{57}$$

现在，$\phi_v G^{\widetilde{D}_i}$ 的支集包含于紧子集 Ω_v 中，并且由于$\mu_{i,v}$ 弱收敛于μ_v，我们有

$$\widetilde{D}\cdot\widetilde{L}_1\cdots\widetilde{L}_n\geqslant\sum_v\int_{U^{\mathrm{an},v}} \phi_v G_{\widetilde{D},v}\mu_v. \tag{58}$$

我们将此不等式应用于U^{an}的一个紧耗尽$\phi_{n,v}{}^v$，再由单调收敛定理得到结论。若v 是阿基米德的，则紧耗尽的存在性是经典结果；若v是非阿基米德的，则由 [CD12]可知其存在。□

设 $\mathrm{f}:\mathrm{B}\times\mathrm{A}^2\to\mathrm{B}\times\mathrm{A}^2$ 是定义在某个特征零域 K 上的正则平面多项式自同构族。周期点集 $\mathrm{Per}(\mathrm{f}_\eta)$ 与零高度点集 $\{\tilde{}\mathrm{h}_f=0\}$除平凡情形外重合。若存在曲线间的有限映射 $\mathrm{S}\,\mathrm{f}:\mathrm{B}'\to\mathrm{B}$，以及仿射映射族$(\varphi\mathrm{f},\mathrm{b})_{s\in B'}$，使得 $\varphi_f^{-1},\mathrm{b}\circ\mathrm{f}_{S_f(\mathrm{b})}\circ\varphi\mathrm{f},\mathrm{b}$ 定义在 K 上，则称正则平面多项式自同构族 f 为等变族。给定两个族f 和 g，若可以选取 $\mathrm{S}_f=\mathrm{S}_g$和 $\varphi\mathrm{f}=\varphi_g$，则称它们同时等变。

定理 4.2 ([GV22])**.** 若 f 是正则平面多项式自同构的非等变族，则 $\mathrm{Per}(f_\eta)=\{\tilde{}h f=0\}$。

命题 4.3. 设 f 与 g 为定义在数域 K 上的射影曲线 B 的函数域上的两个动力学独立的正则平面多项式自同构族。利用 *§3.4* 的记号，定义 $R = \theta_f + \theta_g$，则 $R^3 = 0$ 当且仅当族 f 与 g 同时等变。

证明。 由于$R^- = \theta_f^- + \theta_g^-$，我们知道$R$是强nef，因此$R^3 \geqslant 0$。显然该条件充分，下面证明它也是必要的。现在回顾一下，根据§3.4，我们有

$$R^3 = (\widetilde{\theta}_f + \widetilde{\theta}_g)^3. \tag{59}$$

我们可以假设两个族f和g定义在$B_{\mathbf{C}} = B \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec}\mathbf{C}$上，且由基变换得到。将命题 4.1 用于几何情形，可得

$$R^3 \geqslant \sum_{b \in \mathcal{M}(\mathbf{C}(B))} \int_{X^{\mathrm{an},b}} G_{f,b}(dd^c G_{g,b})^2 + \int_{X^{\mathrm{an},v}} G_{g,b}(dd^c G_{f,b})^2. \tag{60}$$

若交积为零，则对每个$b \in \mathcal{M}(\mathbf{C}(B)), \operatorname{Supp} \mu_{f,b} \subset \{G_{g,b} = 0\}$。由命题 3.4，这意味着 $\{G_{f,b} = 0\} \subset \{G_{g,b} = 0\},$；由对称性同样可得

$$\forall b \in \mathcal{M}(\mathbf{C}(B)), \quad \{G_{f,b} = 0\} = \{G_{g,b} = 0\}. \tag{61}$$

由高度分解（22），我们有

$$\{\tilde{h}_f = 0\} = \{\tilde{h}_g = 0\}. \tag{62}$$

根据定理 4.2，若f和g都不是等变族，则$\mathrm{Per}(\mathrm{f}_\eta) = \mathrm{Per}(\mathrm{g}_\eta)$。若其中一个是等变族，比如f是等变族而g不是，则集合 $\{\tilde{\mathrm{h}}_f = 0\}$ 不可数，而 $\{\tilde{\mathrm{h}}_g = 0\}$ 可数。现在假设f和g都是等变族。在这种情况下，我们可以假设f定义在C上。反设g不是平凡的。存在一个常点$\mathrm{x} \in \mathrm{A}^2(\mathrm{C}(\mathrm{B}))$，它不是gη-周期点。否则，由C(B)上定义的点组成的集合将是gη 不变的，这将意味着g定义在C上，因此是平凡的。于是$\mathrm{h}_g(\mathrm{x}) > 0$，而$\mathrm{h}_f(\mathrm{x}) = 0$。因此，上述三种可能性均不成立，f和g必须同时等变。□

考虑纤维积 $B \times \mathbf{A}^2 \times \mathbf{A}^2$。记投影到第一和第二因子 $B \times \mathbf{A}^2$的映射分别为 p_1 和 p_2。定义

$$Z_\varepsilon := \{(b,x,y) \in B \times \mathbf{A}^2 \times \mathbf{A}^2 \mid \{\widehat{h}_{f_b}(x) + \widehat{h}_{g_b}(y) \leqslant \varepsilon\}. \tag{63}$$

命题 4.4. 设 f 和 g 是定义在数域 K 上的一条曲线 B 上的两个动力学独立的正则平面多项式自同构族。那么存在一个小常数$\varepsilon > 0$，使得 $Z_\varepsilon(K)$ 不是扎里斯基稠密的。

证明。 我们可以假设f和g不是同时等变的，因此可应用命题 4.3 和定理 2.1。阿代尔除子$R = \theta_f + \theta_g$满足$R^3 > 0$。定义阿代尔除子

$$\overline{R}_h = p_1^* \overline{R} + p_2^* \overline{\theta}_h \tag{64}$$

对于$h = f,\ g$。由命题 2.4 可知,

$$R_h^5 \geqslant (p_1^* R)^3 \cdot (p_2^* \theta_h)^2 = R^3 \cdot (\theta_{h,K(B)})^2 = R^3 > 0. \tag{65}$$

因此我们可以对 R_h 应用定理 2.3。固定一个阿基米德位 v，我们仅在该赋值上应用等分布结果，故在记号中去掉下标 v。假设该命题不成立，则存在一列闭点 $p_n := (b_n, x_n, y_n) \in B \times A^2 \times A^2(K)$，使得 $h_{R_f}(p_n) \to 0$ 且 $h_{R_g}(p_n) \to 0$。于是 $B(C) \times C^2 \times C^2$ 上的两个测度 $c_1(R_f)^5$ 与 $c_1(R_g)^5$ 成比例，并且它们都正比于

$$\text{for } h = f, g, \quad p_1^* c_1(\overline{R})^3 \wedge p_2^* c_1(\overline{\theta}_h)^2. \tag{66}$$

因此，对 $\pi_* c_1(R)^3$-几乎每一个参数 $b \in B(\mathbf{C})$，我们有 $\mu_{f_b} = \mu_{g_b}$，并且由命题 3.7，f_b 与 g_b 具有共同迭代。然而，使 f_b 与 g_b 具有共同迭代的参数 $b \in B(\mathbf{C})$ 之集是可数的，且不被测度 $\pi_* c_1(R)^3$ 所负荷，从而得出矛盾。因此，对某个 $\varepsilon > 0$，集合 $Z_\varepsilon(K)$ 不是扎里斯基稠密的。□

5. 定理 A 和 B 的证明

本节旨在证明我们的主要定理。实际上，我们将证明一个更强的版本。

定理 5.1. 设 f 和 g 是两个动力学独立的正则平面多项式自同构族。假设集合 $\{|\mathrm{Jac}(f)| = 1\} \cap \{|\mathrm{Jac}(g)| = 1\}$ 关于 $B(\mathbf{C})$ 的解析拓扑是离散的（例如，f 是一个耗散族）。那么存在 $\varepsilon > 0$、B 的一个扎里斯基开子集 U 以及仅依赖于 f 和 g 的 $D > 0$，使得对于每个 $b \in U(\mathbf{K})$，都有

$$\#\{z \in \mathbf{A}^2(\overline{K}) \mid \hat{h}_{f_b}(z) + \hat{h}_{g_b}(z) \leqslant \varepsilon\} \leqslant D. \tag{67}$$

证明. 稍微滥用一下记号，所有到基空间 B 的投影都记作 π。我们希望找到一个扎里斯基开子集 $U \subset B$，使得对于任意 $b \in U(K)$，等式 (67) 都成立。

选择满足命题 4.4 结论的 ε，并将 Z 的 Z_ε 的 Zariski 闭包记为 Z。如果 Z 到 B 的投影不是支配的，那么只需令 $U := B \backslash \pi(Z)$，并取 $D = 0$。

因此，我们可以假设 Z 不可约，且 $\pi(Z) = B$。由命题 4.4，Z 不是扎里斯基稠密的。将 p_1 在 Z 上的限制记为 p_Z。

情形 (i)：p_Z 是支配的。一般平坦性和命题 2.6 给出一个由（可能可约的）子簇 $Z_{(b,x)} := p_Z^{-1}(b, x)$ 参数化的族，其参数取自 $B \times A^2$，的一个扎里斯基开子集 V，且次数均为固定的 $D' \geqslant 1$。若 $\dim Z = 3$，则 $Z_{(b,x)}$ 是点，结论得证。若 $\dim Z = 4$，则 $Z_{(b,x)}$ 是曲线。令 $W = A^2 \times B \backslash V$，并将 $W = W^h \cup W_v$ 写成相对于 π 的水平部分与垂直部分的分解。令 $U = B \backslash \pi(W_v)$，则 W^h 的每个不可约分支都在 U 上给出一个一致有界次数的点族或曲线族。现在取任意参数 $b \in U(K)$。共有三种可能性。

(1) 不存在 ε-小高度，即 $\hat{h}_{f_b}(x) + \hat{h}_{g_b}(x) \leqslant \varepsilon$;

(2) 存在 $x \in \mathbf{A}_b^2$，其高度为 ε-小，使得 $(b,\ x) \in V$。根据构造，所有高度为 ε-小的点 $y \in \mathbf{A}_b^2$ 都包含在 $Z_{(b,\ x)}$ 中；(3) 所有高度为 ε-小的点都包含在 $W_h \cap \mathbf{A}_b^2$ 中。

情形 (ii)： p_Z **不是支配的**。于是我们考虑其像 $Z' := p_Z(Z) \subset B \times \mathbf{A}^2$。我们有一个由$B$参数化的子簇族 $(Z'_b)_b$。它要么是点族（**情形 (ii.a)**），此时定理 5.1 得证；要么是固定次数的曲线族（**情形（ii.b）**）。

一般而言，我们只需将Z 分解为不可约分支的并，并逐个分支进行上述分析。由于到目前为止尚未使用关于雅可比行列式的任何条件，因此我们证明了以下结论。

定理 5.2。设 f 和 g 是两个动力学独立的正则平面多项式自同构族。那么存在正实常数 $\varepsilon > 0$ 和 $D' > 0$，仅依赖于 f 和 g，使得除有限多个 $b \in B(\mathbf{K})$ 之外，小高度点集

$$\{z \in \mathbf{A}^2(\overline{K}) \mid \widehat{h}_{f_b}(z) + \widehat{h}_{g_b}(z) \leqslant \varepsilon\} \tag{68}$$

包含在一条次数为 D' 的（可能可约的）曲线中。

我们继续分析，并首先回到情形 (i) $\dim Z = 4$。在关于雅可比行列式的附加假设下，我们证明该情形实际上不可能。设 $L^{\pm}g$ 为由 $L^{\pm}g := p_1^*R + p_2^*\theta^{\pm}g$ 定义的强数值有效阿代尔除子。存在一般序列 $z_n := (b_n, x_n, y_n) \in Z(K)$，使得 $\widehat{h}_{L^{\pm}g}(z_n) \to 0$。为应用定理 2.3，我们需要证明 $L^{\pm}g$ 在 Z 上的限制是大的。这由命题 3.3 得出。事实上，我们需要证明几何交数

$$(L_g^{\pm})^4_{|Z} \geqslant (p_1^*R^3 \cdot p_2^*\theta_g^{\pm})_{|Z} > 0. \tag{69}$$

Z 到p_1 的一般纤维的限制是一条曲线C，并且$p_2^*\theta_g^{\pm}$限制为与由g在一般纤维$\mathbf{A}_L^2$ 上诱导的正则自同构相关联的b-除子$\theta_{g,L}^{\pm}$，其中L 是$\mathbf{A}_K^2 \times B$的函数域。由推论 2.5，我们得到

$$(p_1^*R^3 \cdot p_2^*\theta_g^{\pm})_{|Z} = R^3 \cdot \deg(\theta_{g,L_{|C}}^{\pm}) \tag{70}$$

根据推论 3.2，这是一个正数。由定理 2.3，两个测度 $c_1(L^{\pm}g)^5$ 在 $B \times A^2 \times A^2(C)$ 上必定成比例。由此可知，对 $\pi_*(c_1(R))^3$-几乎每个参数 $b \in B(C)$，测度 $dd^c G_{g_b}^{\pm}|_{Z_b}$ 成比例，并且由定理 3.5 还有 $|\mathrm{Jac}(g_b)| = 1$。由对称性，对 f_b 也有同样的结论，从而对同一测度$\pi_*(c_1(R))^3$，$|\mathrm{Jac}(f_b)| = 1$ 几乎必然成立。然而，该测度不给离散集赋质量，从而得出矛盾。

现在来看情形（ii.b）。我们有一个曲线族Z'，它位于B 上，并包含所有公共周期点。我们需要以下引理。

引理 5.3（Siu 不等式（适用于 b-除子））。 设 U 是定义在特征 0 的域 k 上的 d 维拟射影簇。设 α 是一个数值有效 b-除子， β 是一个大且数值有效 b-除子。则有

$$\alpha \leqslant d\frac{\alpha\cdot\beta^{d-1}}{\beta^{d}}\beta. \tag{71}$$

证明。 在射影簇上，这是经典的 Siu 不等式，参见例如 [Dan20]。通过极限论证可将其推广到 b-除子。□

引理 5.4。 Z' 是非退化的： $R^2\cdot Z'>0$。

引理 *5.4* 的证明。R 由命题 4.3 可知是大除子。任取B中的一个充足除子H。Siu 不等式 (71) 蕴含 $3^{\pi^*}{}_{H\cdot R^2\,R^3}\,R \geqslant \pi^*H$，并且由推论 2.5 可得 $\pi^*H\cdot R^2>0$。由此推得

$$R^2\cdot Z' \geqslant R\cdot\pi^*H\cdot Z' = \deg HR_\eta\cdot Z'_\eta>0,$$

最后一个不等式由命题 3.3 得出。 □

定义强数值有效阿代尔除子 $\mathrm{M}^{\pm}\mathrm{g}:=\mathrm{p}_1^*\mathrm{R}+\mathrm{p}_2^*\theta^{+}\mathrm{g}$。应用引理 5.4，类似情形 (i) 中的计算可知 $\mathrm{M}_g^{\pm}$在 Z 上是大除子： $(\mathrm{M}_h^{+})^3\cdot\mathrm{Z}>0$。因此，两个测度 $\mathrm{c}_1(\mathrm{M}^{\pm}\mathrm{g})^3\wedge[\mathrm{Z}]$成比例；对于 $\pi_*\left(\mathrm{c}_1(\mathrm{R})^2\wedge[\mathrm{Z}']\right)$-几乎每个参数 b，测度 $\mathrm{dd^c}\,\mathrm{G}^{\pm}_{g_b}|_{Z_b}$ 也成比例。再次推得 $|\mathrm{Jac}(\mathrm{g}_b)|=1$，于是可如情形 (i) 中那样得出结论。

唯一可能的情形是情形 (ii.a)，定理 5.1 的证明至此完成。 □

定理 *B* 的证明结束。为了完成定理 B 的证明，我们需要证明：只要取更大的D，对于任意超越的$b\in B(\mathbf{C}\backslash K)$，等式 (2) 就成立。记$D^{\eta}$ 为一般纤维上f^{η} 和g^{η} 的公共周期点数。记 κ_b 为b的剩余域。于是存在一个$K(B)\to\kappa_b$的域嵌入。因此f_b 和g_b 的公共周期点数也等于D^{η}。最后，我们取新常数为 $\max\{D^{\eta},D\}$。定理 B 的证明至此结束。□

定理 *A* 的证明结束。为了完成定理 A 的证明，还需考虑存在无穷多个公共周期点的参数b 。根据定理 3.6，这意味着f_b 和g_b 有共同迭代：存在整数N_b 和M_b ，使得$f^{N_b}{}_b=g^{M_b}{}_b$ 。由于这类参数的集合是有限的，我们可以选取N_b 和M_b ，使其不依赖于b。这就完成了动力学独立情形下定理 A 的证明。另一方面，如果f 和g 动力学相关，那么根据定义，它们在全局范围内有共同迭代。□

参考文献

[Abb23] Marc Abboud. 仿射曲面自同态的动力学，2023年11月。[Abb24] Marc Abboud. 仿射曲面双曲自同构的周期点刚性，2024年。[AY26] Yan Sheng Ang and Jit WuYap. 多项式平均意义下的公共动力学小点。《遍历理论与动力系统》，46(2):373–416，2026年。

[BD11] Matthew Baker and Laura DeMarco. 预周期点与不太可能的交。《杜克数学杂志》，159(1):1–29，2011年7月。[BFJ08] Sébastien Boucksom, Charles Favre, and Mattias Jonsson. 亚纯曲面映射的次数增长。《杜克数学杂志》，141(3)，2008年2月。[BFT18] Fedor Bogomolov, Hang Fu, and Yuri Tschinkel. 椭圆曲线的挠点与不太可能的交。载于《几何与物理：向 Nigel Hitchin 致敬的论文集》第1卷，第19–37页。牛津：牛津大学出版社，2018年。[BS91a] Eric Bedford and John Smillie. $\mathbb{C}^2$的多项式微分同胚：流、平衡测度与双曲性。《数学新进展》，103(1):69–99，1991年12月。[BS91b] Eric Bedford and John Smillie. $\mathbb{C}^2$的多项式微分同胚。II：稳定流形与回归。《美国数学会杂志》，4(4):657–679，1991年。[Can01] Serge Cantat. K3 曲面自同构的动力学。《数学学报》，187(1):1–57，2001年。[CD12] Antoine Chambert-Loir and Antoine Ducros. Berkovich 空间上的实微分形式与流，2012年4月。[Cha03] Antoine Chambert-Loir. Berkovich 空间上的测度与等分布。《纯粹与应用数学杂志》，2006年，2003年4月。[Dan20] Nguyen-Bac Dang. 正规射影簇上有理映射的迭代次数。《伦敦数学会会刊》，121(5):1268–1310，2020年。[DF17] Romain Dujardin and Charles Favre. 平面多项式自同构的动力学 Manin–Mumford 问题。《欧洲数学会杂志》，19(11):3421–3465，2017年10月。[DGH21] Vesselin Dimitrov, Ziyang Gao, and Philipp Habegger. 曲线的 Mordell-Lang 一致性。《数学年刊》(2)，194(1):237–298，2021年。[DKY20] Laura DeMarco, Holly Krieger, and Hexi Ye. 亏格 2 曲线族的一致 Manin-Mumford。《数学年刊》(2)，191(3):949–1001，2020年。[DKY22] Laura DeMarco, Holly Krieger, and Hexi Ye. 二次多项式的公共预周期点。《现代动力系统杂志》，18:363–413，2022年。[DM24] Laura DeMarco and Niki Myrto Mavraki. $\mathbb{P}^1$上的动力学：预周期点与两两稳定性。《组合数学》，160(2):356–387，2024年。[DM26] Laura DeMarco and Niki Myrto Mavraki. $\mathbb{P}^n$上映射族中预周期点的几何。《数学教学》，2026年。即将发表。[DS05] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. 有理映射拓扑熵的上界。《数学年刊》(2)，161(3):1637–1644，2005年。[FJ11] Charles Favre and Mattias Jonsson. $\mathbb{C}^2$的动力学紧化。《数学年刊》，173(1):211–249，2011年1月。[FM89] Shmuel Friedland and John Milnor. 平面多项式自同构的动力学性质。《遍历理论与动力系统》，9(1):67–99，1989年3月。[Ful98] William Fulton. 交理论。施普林格，纽约，1998年。[Gao21] Ziyang Gao. 一致 Mordell-Lang 猜想的最新进展。预印本，arXiv:2104.03431[math.NT](2021)，2021年。[Gau26] Thomas Gauthier. 准射影簇上的良好高度函数：等分布及其在动力学中的应用。《图卢兹数学科学年鉴》(6)，35(1):57–94，2026年。[Guo25] Ruoyi Guo. 准射影簇上陈形式的积分公式。《数学年刊》，391(2):3055–3075，2025年2月。[GV22] Thomas Gauthier and Gabriel Vigny. 仿射平面正则多项式自同构的几何动力学 Northcott 性质。《法国数学会通报》，150(4):677–698，2022年。

[GV25] Thomas Gauthier 和 Gabriel Vigny。《几何动力学 Northcott 性质与 Bogomolov 性质》。《高等师范学校科学年刊》，2025年3月。[Hub86] John H. Hubbard。《复数域中的 Hénon 映射》。载于 Michael F. Barnsley 和 Stephen G. Demko 编，《混沌动力学与分形》，第 101–111 页。学术出版社，1986 年。[Ing14] Patrick Ingram。《Hénon 映射的典范高度》。《伦敦数学会会刊》（第 3 辑），108(3):780–808，2014 年。[JSX26] Zhuchao Ji、Jiarui Song 和 Junyi Xie。《一种关于 ℓ-主挠点一致有界性的几何方法》，2026年。[Kaw13] Shu Kawaguchi。《仿射空间正则自同构的局部与全局典范高度函数》。《代数与数论》，7(5):1225–1252，2013 年。[Küh21] Lars Kühne。《阿贝尔簇族中的等分布与一致性》。预印本，arXiv:2101.10272[math.NT](2021)，2021 年。[Lam01] Stéphane Lamy。《Aut[$\mathbb{C}^2$] 的 Tits 二分性》。《代数杂志》，239(2):413–437，2001 年。[MS25] Niki Myrto Mavraki 和 Harry Schmidt。《关于分裂有理映射族的动力学 Bogomolov 猜想》。《杜克数学杂志》，174(5):803–856，2025 年。[Poi25] Jérôme Poineau。《Z 上的解析动力学。II：Lattès 映射与 Bogomolov-Fu-Tschinkel 猜想之间的一致间隙》。《纯粹与应用数学杂志》，824:89–135，2025 年。[Sib99] Nessim Sibony。《有理映射在 $\mathbb{P}^k$上的动力学》。载于《复动力学与复几何》，第 97–185 页。巴黎：法国数学会；罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1999 年。[Ull98] Emmanuel Ullmo。《曲线上代数点的正性与离散性》。《数学年刊》（第 2 辑），147(1):167–179，1998 年。[YZ17] Xinyi Yuan 和 Shou-Wu Zhang。《阿代尔线丛的算术 Hodge 指数定理》。《数学年刊》，367(3-4):1123–1171，2017年4月。[YZ26] Xinyi Yuan 和 Shou-Wu Zhang。《准射影簇上的阿代尔线丛》。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，2026年。[Zha98] Shou-Wu Zhang。《阿贝尔簇上小点的等分布》。《数学年刊》（第 2 辑），147(1):159–165，1998 年。

Marc Abboud，纳沙泰尔大学数学研究所，埃米尔-阿尔冈街 11 号，CH-2000 纳沙泰尔电子邮件地址：marc.abboud@normalesup.org

YUGANG ZHANG，勃艮第数学研究所（UMR IMB），米兰德科学楼，阿兰·萨瓦里大道 9 号电子邮件地址：yugang.zhang@ube.fr