arXiv:2602.10322v1 [math.DG] 10 Feb 2026

气态巨行星上的1-形式断层成像

¨JOONAS ILMAVIRTA、ANTTI KYKKANEN 和 EETU SATUKANGAS

Abstract. 我们证明，在气态巨行星流形上，测地线 X 射线变换对在适当光滑结构下光滑延拓至边界的 1-形式是散度自由单射的。气态巨行星流形是共形膨胀黎曼流形，其边界奇点比渐近双曲情形更弱。证明基于 Pestov 恒等式以及对短测地线的渐近分析。

1. Introduction

设 $(M, \bar{g})$ 是一个带边界的紧黎曼流形，且 $\rho\colon M \to [0,\infty)$ 是一个边界定义函数。相应的气态巨行星流形是赋予度量 $g = \rho^{-1}\bar{g}$ 的同一流形 M。

如文献 [7]所述，气态巨行星上的声波传播可以用气态巨行星流形的测地流很好地建模。反问题（即间接测量的数学）中的一个自然问题，是根据声波传播时间上相关的多普勒效应，求出气体的流场。在零流场处对该问题线性化，可得到向量场的射线变换 [35]。我们着手研究气态巨行星几何中的这一问题。

我们用 I 表示作用于 1-形式的测地线 X 射线变换。在内部，向量场可与 1-形式等同；但在边界处，由度量张量给出的这种对应会发散。流形上有两种自然的光滑结构，一种对应于 $\bar{g}$ 的边界法坐标，另一种对应于 g 的边界法坐标。我们采用后一种结构，函数和张量场的光滑性均相对于此结构理解。详情见第 1.1 节。

定理 1.1。设(M, g) 是一个处处具有非正曲率的非捕获[1] 气态巨行星。对于1-形式 f，其在 M 上光滑（直至边界），以下条件等价：

(1) f 的测地线 X 射线变换为零。(2) 存在一个光滑函数 $p \in C^\infty(M)$，使得 $p|_{\partial M} = 0$，从而 $f = \mathrm{d}p$。

Date: 2026 年 2 月 12 日。芬兰于韦斯屈莱大学数学与统计系。joonas.ilmavirta@jyu.fi。美国得克萨斯州休斯敦莱斯大学计算应用数学与运筹学系，ak272@rice.edu。芬兰于韦斯屈莱大学数学与统计系。eetu.a.e.satukangas@jyu.fi。[1]非捕获是指所有从内部出发的测地线都会在有限时间内到达边界。

证明基于 Pestov 恒等式。为了能在奇异流形上使用这个能量恒等式，我们需要确保相应的函数可积。这是通过基于短测地线渐近分析的高阶边界确定实现的。

1.1. 结构的选择。 我们的主要结果涉及气态巨行星几何中的反问题。另一个重点是，在我们的奇异流形上，结构的选择（包括光滑结构）十分重要。

气态巨行星流形的光滑结构有两种自然的选择。一种相当直观，足以描述测地流；另一种虽然不那么直观，却能最简洁地描述流形余切丛上的测地流。

通过一个简单的例子可以最好地说明这两种坐标选择。设 $\bar{g} = \mathrm{d}s^2 + \mathrm{d}y^2$ 为半平面 $\{(s,\ y) : s > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ 上的标准欧几里得度量，并考虑气态巨行星度量

$$g = \frac{\mathrm{d}s^2 + \mathrm{d}y^2}{s}. \tag{1}$$

光滑坐标 $(s,\ y)$ 对应于流形的一种光滑结构选择（即显而易见的那种），其中 s 表示到边界的 $\bar{g}$-距离。然而，坐标变换 $s = x^2$ 基本上将度量化为以下形式

$$g = \mathrm{d}x^2 + \frac{\mathrm{d}y^2}{x^2}. \tag{2}$$

映射 $s \mapsto x^2$ 是光滑的，但其逆映射 $x \mapsto s^{1/2}$ 在 $s = 0$处是奇异的。因此，坐标变换对应于引入第二种光滑结构，在这种结构下，x 度量到边界的 g 距离。乍看之下，这种光滑结构的选择不那么显而易见，但事实证明，它更适合分析余切丛上的测地流。

令与 (s, y) 对应的对偶坐标——即余切丛上诱导的坐标——记为 (ξ_s, η)；类似地，与 (x, y) 对应的对偶坐标记为 (ξ_x, η)。于是，在相应的光滑结构选择下，余切丛上的测地流由哈密顿量的双特征线给出，该哈密顿量写作 $H(s, y, \xi_s, \eta) = \frac{1}{2}(s\xi_s^2 + s\eta^2)$ 或 $H(x, y, \xi_x, \eta) = \frac{1}{2}(\xi_x^2 + x^2\eta^2)$。表 1 汇总了两种光滑结构选择下，测地线法向分量的二阶演化；这里同时考虑了切丛和余切丛版本的测地流。关键结论是，只有在 g-边界法向结构以及测地流的哈密顿形式下，演化在边界 $x = 0$处及其上保持非奇异。这清楚地表明，最佳的光滑结构选择是采用光滑坐标 (x, y)，并考虑余切丛上的测地流。

在 [7], 中，作者将多方状态方程与莱恩-埃姆登方程结合，推导出一条规律：气态巨行星上的度量渐近正比于 ρ^{-1}，其中 ρ 表示到表面的物理距离。以这一计算为指导，作者随后

	切丛 TM	余切丛 T^*M
$\bar{g}$-法坐标	$\ddot{s} = -\frac{1}{2s}((\dot{s})^2 + (\dot{y})^2)$	$\dot{\xi}_s = -\frac{1}{2}(\xi_s^2 + \eta^2) = -\frac{1}{s}H(s, y, \xi_s, \eta)$
g法坐标	$\ddot{x} = \frac{1}{x^3}(\dot{y})^2$	$\dot{\xi}_x = -x\eta^2$

TABLE 1. 表格的各行对应气态巨行星光滑结构的两种可能选择。第一行所对应的结构中，坐标 $(s,\ y)$ 是光滑的；第二行所对应的结构中，坐标 $(x,\ y)$ 是光滑的（见 (1) 和 (2)）。各列则给出了切丛和余切丛上的测地流在边界分支处的法向量。要点是，若要使流非奇异，唯一的选择是采用光滑结构 $(x,\ y)$，并考虑余切丛上的测地流。

通过以下方式定义了一个用于气态巨行星几何的更一般的黎曼模型:

$$g = \frac{\bar{g}}{\rho^{\alpha}} \tag{3}$$

其中 α 是 (0，2) 中的一个参数。这提供了一个更一般、因而更灵活的框架来发展几何理论；不过，几何的物理（由多方模型预测）爆破解析率仍为 ρ^{-1}。本文选择取 $\alpha = 1$，这使某些光滑性方面的考量更为简单，同时仍符合模型的物理性质。例如，在表 1 中，当 α 为无理数时， x 和 s 的分数次幂会出现，这会导致在光滑结构的两种可能选择下，以及切丛和余切丛两种流的情形中，测地流在边界处均不光滑。

由于测地向量场及其他量存在奇点，我们在第 2 节给出的引理证明并不适用于一般的 $\alpha \in$ (0，2)。

1.2. 相关成果。 我们的文章延续了在带边界黎曼流形上研究积分几何反问题的悠久传统。积分几何最初源于 Funk [15]对圆球面所做的研究，而带边界流形则是很久以后才出现的。关于函数的X射线变换的原始问题以及Pestov恒等式方法，可以追溯到 Mukhome- tov [26, 27, 28]的开创性工作；而关于1-形式的问题至少可以追溯到 [2]。本文同样采用的Pestov恒等式方法，已在多部专著和综述中得到充分阐述（例如见 [19, 31, 33, 36]）。作为现代带边界流形上的张量层析成像研究现状的代表，我们提及 [30] ，该文证明了在简单黎曼曲面上，二阶张量场的X射线变换是散度自由单射的。在维数为3及以上的一般简单流形上，这一问题仍未解决。

流形上射线层析成像近来的一项进展，是用渐近双曲度量取代流形的标准黎曼度量。简而言之，这与气态巨行星的情形有关，因为渐近双曲度量具有 $g = \rho^{-2}\bar{g}$ 的形式，而气态巨行星度量则为 $g = \rho^{-1}\bar{g}$。渐近双曲流形上的X射线变换已得到较为充分的研究（见 [11, 12, 13, 14, 16]）；此外，渐近双曲几何中的若干其他反问题也已有研究（例如见 [17, 22, 24]）。射线变换也已在非紧致、非双曲的Cartan–Hadamard流形上得到研究 [23]。

本文的几何设定介于标准黎曼几何（$\alpha = 0$）与渐近双曲几何（α =2）之间，但在某些方面，气态巨行星几何与情形 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 2$截然不同。例如，正如 [7]所指出的，并不存在常曲率气态巨行星，这意味着我们的几何 $\alpha = 1$ 并非仅仅是两端情形之间的简单插值。气态巨行星设定出现于 [7]，作为研究气态巨行星上波传播的几何背景。反问题，尤其是X射线变换，在气态巨行星几何中尚未得到充分研究，目前仅有的结果是标量函数 [7]之变换的单射性。拉普拉斯–贝尔特拉米算子特征函数的分析则已有更多进展（见 [8, 9, 10]）。

气态巨行星流形与 Grushin流形相似 [10]。Grushin流形上的测地线已作为次黎曼测地线得到研究 [1, 4, 5,6]。这种几何结构也出现在量子力学中 [3]。在这一背景下，人们也研究了这两种光滑结构之间的关系 [34]。据我们所知，关于气态巨行星测地线的结果并不能从 Grushin相关文献中推导出来。

致谢。 J.I. 得到了芬兰研究委员会的资助（传感、成像与建模高级数学旗舰项目资助359208；反演建模与成像卓越中心资助353092；以及其他资助351665、351656、358047、360434），并获得芬兰科学与文学学院的V¨ais¨al¨a 项目资助。E.S. 得到了芬兰教育与文化部博士项目试点计划（博士项目试点计划“传感、成像与建模数学”项目）、芬兰研究委员会的资助（传感、成像与建模高级数学旗舰项目资助359208；反演建模与成像卓越中心资助353092），以及与第一作者相同的 V¨ais¨al¨a 项目资助。A.K. 得到了莱斯大学地理数学成像组的资助。

2. Proof of the main result

证明的背景是余切丛 T^*M上的测地流。我们主要将流限制在“单位余球丛” $S^*M \subset T^*M$上；在气态巨行星几何中，它是一个子流形，但直到边界处都不是子丛。该流的生成元是测地向量场 X。详情见第 3 节。

我们通过对输运方程 $Xu^f = -\lambda f$ 使用 Pestov 恒等式 (103) 来证明主要结果，其中 f 是一个满足 $If = 0$ 的 1-形式，而积分函数 u^f: $S^*M \to \mathbb{R}$ 是输运方程的唯一解，由下式给出

$$u^f(z,\zeta) := \int_0^{\tau(z,\zeta)} \langle f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \,\mathrm{d}t \tag{4}$$

对于任意由初始条件（z, ζ） $\in S^*M$给出的提升测地线（$\gamma(t)$ $\dot\gamma(t)$） $\in TM$；更多详情请参见下文第3节。为了在气态巨行星上使用 Pestov 恒等式，我们必须假设若干正则性条件，并将它们描述为如下函数空间 Ω:

定义 2.1（函数空间 Ω）。设 u: $S^*M \to \mathbb{R}$ 连续。若以下条件均成立，我们称 $u \in \Omega$:

(1) $u \in x^\infty C^\infty(S^*M^\circ)$ (2) $Xu \in C^\infty(S^*M)$ (3) $\nabla_{S^*M} u \in x^\infty L^\infty(S^*M, TS^*M)$ (4) $\nabla Xu, X\nabla u \in L^2(N)$ (5) $u|_{\partial S^*M} = \nabla u|_{\partial S^*M} = 0$

有关丛、截面和梯度的详细信息，请参见第 3 节。

我们利用下列引理证明主要定理 1.1。

引理 2.2（在第 5 节中证明）。设 (M, g) 为一个气态巨行星，并设 f 是 M上的一个光滑 *1*-形式。若 $If = 0$，则存在 $q \in C^\infty(M)$，其支撑集位于 ∂M附近，且满足 $q|_{\partial M} = 0$，使得 $f - \mathrm{d}q \in x^\infty C^\infty(M, T^*M)$。

引理 2.3（在第 6 节中证明）。设 (M, g) 为一个非俘获气态巨行星。若 $If = 0$且 $f \in x^\infty C^\infty(M, T^*M)$，则 $u^f \in \Omega$ 满足定义 *2.1* 的意义。

引理 2.4（在第 7 节中证明）。设 (M, g) 为一个具有非正曲率的非俘获气态巨行星。若 $u \in \Omega$ 且 $Xu(z,\zeta)$ 是关于 ζ的 *1* 阶多项式，则存在一个函数 $p \in C^\infty(M)$，使得 $u = \pi^* p$ 在 S^*M上成立。

定理 *1.1* 的证明。我们首先证明，$If = 0$ 蕴含 $f = \mathrm{d}\tilde q$，其中 $\tilde q$是某个标量函数。假设 f 是一个满足 $If = 0$的光滑 1-形式。于是，根据引理 2.2，我们可以将引理 2.3 应用于 1-形式 $f := f - \mathrm{d}q$。根据引理 2.3 以及输运方程 $Xu^f = -\lambda\tilde f$（它给出了关于 ζ 的一阶多项式表达式），我们可以将引理 2.4 应用于积分函数 u^f，从而 $u^f(z, \zeta) = p(z)$ 在 S^*M 上成立。因此 $p|_{\partial M} = 0$。由于 u^f 是输运方程 $Xu^f = -\lambda\tilde f$ 的一个解，所以我们有

$$Xu^{\tilde f} = X\pi^* p = \lambda \mathrm{d}p = -\lambda\tilde f \tag{5}$$

因此 $f = -\mathrm{d}p$，从而对于 $(q-p)|_{\partial M} = 0$ 有 $f = \mathrm{d}(q-p)$，这就完成了该命题非平凡方向的证明。注意，从同一计算中我们可以看出，引理 2.4 中的函数 p 必须是光滑的。如果 p不光滑，那么 $\lambda\mathrm{d}p = X\pi^* p$ 也将不再光滑，这与 $u^f \in \Omega$这一事实矛盾。

为证明等价性的另一方向，假设对于某个 $p \in C^\infty(M)$，有 $f = \mathrm{d}p$，其中 $p|_{\partial M} = 0$。那么由 $Xp = \lambda\mathrm{d}p$ 和微积分基本定理可得 $If = I\mathrm{d}p = 0$。□

2.1. **引理证明概要**。我们在第 5 节证明边界确定性引理 2.2；首先在命题 5.1 中证明一个关于气态巨行星上的短测地线的结果。随后，我们利用命题 5.1 以及对 [20, 定理 2.1] 证明思路的略微修改，在命题 5.8 中证明：在边界 ∂M 上，1-形式 f的导数 $If = 0$沿边界法向的分量，除一个引理 5.7 中所述的规范外，均为零。由命题 5.8 即可推出引理 2.2。请注意，引理 2.2 只要求 (M, g) 是一颗气态巨行星，因此从几何角度看，该引理的结果利用了气态巨行星的边界具有（无限）严格凸性这一事实；有关严格凸性的更详细讨论，请参见第 4 节。

在第 6 节中，我们通过在命题 6.1 中证明积分函数 u^f 的一个稍弱的正则性结果来证明引理 2.3。随后我们证明引理 2.3 可由命题 6.1 推出，并在整个第 6 节中证明若干正则性结果，再将这些结果汇总，于第 6 节末证明命题 6.1。在引理 2.3 中，我们必须假设该流形是全局非捕获的，因为若无此假设，积分函数便不能良定义。全局测地流的这一性质并不由气态巨行星几何推出。

最后，在第 7 节中，我们证明空间 Ω 中函数的一个 Pestov 恒等式。使用 Pestov 恒等式所得的结论见推论 7.2 与引理 7.3。随后，引理 2.4 直接由引理 7.3 推出。为简化引理 2.4 的证明，我们假设流形 (M, g) 具有非正曲率。我们预期该假设可替换为流形没有共轭点这一假设，从而使 (M, g) 成为简单气态巨行星，但由于曲率在边界处爆破所引起的技术困难，我们选择不追求这一层次的一般性。

3. Preliminaries

我们在此描述结果的数学设定。设 (M, g) 为一个 n 维带边界的光滑紧致黎曼流形，其中$n \geq 2$。如第 1 节所述，我们为 M 配备气态巨行星度量 $g = \rho^{-1} g$，其中ρ 是边界定义函数，并将偶对 (M, g) 称为气态巨行星。我们将 M 的内部记为 M°。设 $U \subset \partial M$ 为边界的一个邻域，并设 $x \in [0, 1)$。则在气态巨行星的边界附近，存在一个光滑结构 $(x, y) \in [0, 1) \times \partial M$ 以及一族光滑度量h_x，它们关于 x 光滑变化，使得

$$g = \mathrm{d}x^2 + x^{-2} h(x, y, \mathrm{d}y) \tag{6}$$

在此光滑结构中。如引言（第 1 节）中所见，我们可以将坐标 x 缩放为 ρ，并利用结果 [7, 命题 2]来证明该光滑结构存在。直至边界的所有光滑性分析均关于光滑结构 (x, y) 进行。

我们使用坐标 $z = (x, y)$，并约定 $z^0 = x$ 与$z^i = y^i$ 用于 $i \geq 1$。希腊指标（例如 μ, ν）从 0 取到 $n - 1$，拉丁指标（例如 i, j）从 1 取到 $n - 1$。我们使用爱因斯坦求和约定。

度量 $g = \mathrm{d}x^2 + x^{-2}h(x, y, \mathrm{d}y)$ 的克里斯托费尔符号由下式给出

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^i_{00} = \Gamma^0_{i0} = 0, \tag{7}$$

$$\Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2}h^{ik}\partial_x h_{kj} - \delta^i{}_j x^{-1}, \tag{8}$$

$$\Gamma^0_{ij} = x^{-3}h_{ij} - \frac{1}{2}x^{-2}\partial_x h_{ij}, \tag{9}$$

$$\Gamma^i_{jk} = H^i_{jk} \tag{10}$$

其中 H^i_{jk} 是 h的克里斯托费尔符号。根据 [7, 命题 1] ，我们有$R \sim x^{-2}$ ，就气态巨行星的截面曲率而言，因此曲率在趋近边界时趋近于 $-\infty$ 。气态巨行星在边界附近的体积形式为 $\mathrm{d}V_g = x^{-(n-1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}V_h$ 。因此，气态巨行星的体积 $\mathrm{Vol}_g(M)$ 是无限的。

接下来，我们将气态巨行星上的测地线定义为哈密顿流。令 $(z, \zeta) \in T^*M$，其中 $z = (x, y)$ 和 $\zeta = (\xi, \eta)$，并令$H(x, y, \xi, \eta) := \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}x^2 h^{ij}\eta_i\eta_j$为哈密顿量。测地流$\phi_t : T^*M \to T^*M$由初始条件 (z, ζ) 和哈密顿方程给出

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \xi} = \xi, \tag{11}$$

$$\dot{y}^i = \frac{\partial H}{\partial \eta_i} = x^2 h^{ij}\eta_j, \tag{12}$$

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -xh^{ij}\eta_i\eta_j - \frac{1}{2}x^2\frac{\partial h^{ij}}{\partial x}\eta_i\eta_j, \tag{13}$$

$$\dot{\eta}_i = -\frac{\partial H}{\partial y^i} = -\frac{1}{2}x^2\frac{\partial h^{kj}}{\partial y^i}\eta_k\eta_j \tag{14}$$

因此 $\phi_t(z, \zeta) = (x(t)\ y(t)\ \xi(t)\ \eta(t))$。我们用 $\tau(z, \zeta)$ 表示测地线的退出时间，使得 $t \in [0, \tau(z, \zeta)]$。测地流的哈密顿向量场由下式给出：

$$X = \xi\partial_x + x^2 h^{ij}\eta_j\partial_{y^i} - \left(xh^{ij}\eta_i\eta_j - \frac{1}{2}x^2\frac{\partial h^{ij}}{\partial x}\eta_i\eta_j\right)\partial_\xi - \frac{1}{2}x^2\frac{\partial h^{kj}}{\partial y^i}\eta_k\eta_j\partial_{\eta_i} \tag{15}$$

我们将在第 4 节和第 5 节中更详细地分析测地流在边界处的行为。利用典范投影 $\pi : T^*M \to M$，我们定义初始条件为 $(z, \zeta) \in T^*M$ 的测地线 $\gamma_t := \pi(\phi_t(z, \zeta))$，它可以提升至 TM，对应的提升为 $(\gamma_t, \dot{\gamma}_t) := (z(t)\ \zeta^\sharp(t))$，其中 $\zeta^\sharp = (\xi, x^2 h^{ij}\eta_j)$ 在边界附近。

设 $S^*M = \{(z, \zeta) \in T^*M : |\zeta|_g = 1\}$。则将 1-形式 f 识别为 S^*M 上的函数 λ 的方式为

$$\lambda f(z, \zeta) := f_\mu(z)g^{\mu\nu}(z)\zeta_\nu \tag{16}$$

使得积分函数 $u^f : S^*M \to \mathbb{R}$ 由下式定义

$$u^f(z, \zeta) := \int_0^{\tau(z,\zeta)} f_\mu(z(t))g^{\mu\nu}(z(t))\zeta_\nu(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\tau(z,\zeta)} f_\mu(\gamma(t))\dot{\gamma}^\mu(t)\mathrm{d}t. \tag{17}$$

令 $\partial_\pm S^*M = \{(0, y, \xi, \eta) \in \partial T^*M : \xi = \pm 1\}$，我们得到限制 $u^f|_{\partial_+ S^*M} = If$ 和不交并 $\partial S^*M = \partial_+ S^*M \sqcup \partial_- S^*M$。

类似于 $\partial_\pm S^*M$，我们用 $\partial_0 T^*M = \{(0, y, \xi, \eta) \in \partial T^*M : \xi = 0\}$ 表示 $\partial_0 T^*M \cong T^*\partial M$。

接下来，我们将给出一组关于单位余球丛 S^*M 几何的标准结果，并在第 6 节和第 7 节中直接使用。详情请参见 [29]；下文所述各对象的局部坐标公式见附录 A。

本节余下部分中，设 g 为一个光滑至边界的黎曼度量，并用 π 表示典范投影 T^*M 到 S^*M 的限制。设 $(z, \zeta) \in S^*M$, $\theta \in T_{(z,\zeta)} S^*M$ 和 c 为 S^*M 中的一条曲线，其中 $c(0) = (z, \zeta)$，且 $\dot{c}(0) = \theta$。则联络映射 $K : TS^*M \to TM$ 定义为 $K(\theta) = \mathrm{D}_t c(0)^\sharp$，其中 $\sharp$ 表示音乐同构 $T^*M \to TM$，而 D_t 表示沿曲线 $\pi(c(t))$ 在 M 上的 Levi-Civita 联络。令 $\mathcal{V} := \ker \mathrm{d}\pi$ 表示垂直丛，令 $\mathcal{H} := \ker K$ 表示水平丛。于是有如下分解

$$TS^*M = \mathbb{R}X \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{V} \tag{18}$$

其关于 S^*M 的 Sasaki 度量正交（见公式（109））。映射 $\mathrm{d}\pi|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to N$ 和 $K|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to N$ 是同构，其中 $N \to S^*M$ 是公式（113）中定义的法丛。光滑函数 $u \in C^\infty(S^*M)$ 的 Sasaki 梯度为

$$\nabla_{S^*M} u = (Xu)X + \overset{\mathrm{v}}{\nabla} u + \overset{\mathrm{h}}{\nabla} u \tag{19}$$

其中 X 是测地流的哈密顿向量场，而 $\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u$，$\overset{\mathrm{h}}{\nabla} u$ 分别是垂直梯度和水平梯度，它们是法丛 N 的光滑截面；梯度的坐标表达式见公式（117）和（118）。对于法丛 N 的截面 W，我们可以将黎曼曲率张量视为一个映射，将 W 映射到 N 的另一个截面，即 $RW(z, \zeta) = R(W(z, \zeta)^\sharp \zeta)^\sharp$。我们将 S^*M 上由 Sasaki 度量诱导的体积形式记为 $\mathrm{d}\Sigma$。按照定理 1 的约定，[16, 证明 1]，∂S^*M 的体积形式为 $\mathrm{d}\sigma = j^* i_X \mathrm{d}\Sigma$，其中 $j : \partial S^*M \to S^*M$ 是包含映射，i_X 表示关于哈密顿向量场 X 的内积。

4. Analysis of the exit time

本节包含对余切丛上测地流的分析，此时我们选择光滑结构使得 $g = \mathrm{d}x^2 + x^{-2} h(x, y, \mathrm{d}y)$。作为该分析的结果，我们证明了命题 4.2，其涉及气态巨行星上测地线退出时间的渐近行为。本节中的大多数论证与 [7, 第 2 节。2] 中的论证非常相似，但由于我们使用了不同的光滑结构，我们将列出该流的一些性质，这些性质对于证明主要结果至关重要。

为了澄清记号，并为测地流的分析提供几何直观，我们引入边界的第二基本形式这一概念，它被延拓到由下文定义边界法坐标的邻域

命题 4.1。对于度量 $g = \mathrm{d}x^2 + x^{-2} h(x, y, \mathrm{d}y)$ 以及切向量 $a = \omega^\sharp$, $b = \theta^\sharp$，其中 $\theta, \omega \in T^*M^\circ$，我们有第二基本形式

x 及其对偶的水平集

$$I\!I(a,b) := x^{-3}h_{ij}a^ib^j - \frac{1}{2}x^{-2}\partial_x h_{ij}a^ib^j \tag{20}$$

$$I\!I(\omega,\theta) := xh^{ij}\omega_i\theta_j + \frac{1}{2}x^2\partial_x h^{ij}\omega_i\theta_j \tag{21}$$

在.....意义下 $I\!I(a,b) = I\!I(\omega,\theta)$，至多相差音乐同构。

证明。 这一结论可通过利用以下两个公式进行计算得出

$$I\!I(a,b) = -\frac{1}{2}\partial_x g_{ij}a^ib^j \quad \text{and} \quad x^2\partial_x h^{ij} = -x^2h^{im}h^{kj}\partial_x h_{mk}. \tag{22}$$

□

于是我们可以写成

$$\dot{\xi}(t) = -I\!I(\eta,\eta) \tag{23}$$

并在 x 处对 $h^{ij}(x,y)$ 和 $\partial_x h^{ij}(x,y)$ 进行泰勒展开，得到

$$\dot{\xi}(t) = -I\!I(\eta,\eta) = -xh^{ij}(0,y)\eta_i\eta_j + \mathcal{O}(x^2) \tag{24}$$

由于 $h(0,y)$ 就是 ∂M 上的度量，因此当 $\eta \neq 0$时， $h^{ij}(0,y)\eta_i\eta_j > 0$。因此，对于某个较小的 $\varepsilon > 0$，存在一个由 $0 < x < \varepsilon$ 定义的区域，其中$\xi \leq 0$。由同样的论证可知，$I\!I(\eta,\eta) > 0$ 在此区域内，因此，气态巨行星的边界在某种意义上是严格凸的。

固定该区域内任意一个 $0 < x_0 < \varepsilon$，以及某个参考点（y， η） $\in T^*\partial M$，满足 $\eta \neq 0$。那么，上述论证以及 $\dot{x}(t) = \xi(t)$表明，对于 $\xi_0 \leq 0$，存在一个退出时间 $\tau(x_0,\ y,\ \xi_0,\ \eta)$，使得 $x(\tau) = 0$。为简化后续论证，我们将利用 [7] 中证明的事实： $\tau(x_0,\ y,\ \xi_0,\ \eta) < \infty$。由于 $\xi(t) < 0$对 $t \in (0,\ \tau]$ 成立，因此 x严格递减，我们可以将 x作为变量。接下来注意到

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = -\frac{I\!I(\eta,\eta)}{\xi}. \tag{25}$$

Thus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\xi(x)^2 = -2I\!I(\eta,\eta) = -\partial_x(x^2h^{ij}\eta_i\eta_j). \tag{26}$$

将最后一个表达式关于 x 从 0 积分到 x_0，得到

$$\xi(x_0)^2 - \xi(0)^2 = -x_0^2h^{ij}(x_0,y)\eta_i\eta_j \tag{27}$$

因此

$$\xi(x_0)^2 + x_0^2h^{ij}(x_0,y)\eta_i\eta_j = \xi(0)^2. \tag{28}$$

由于哈密顿量 $H(x,y,\xi,\eta)$ 沿测地流保持不变，因此反转流后可知，最后一个表达式表明，给定极大测地线的速度由初始条件 $(0,y,\xi,\eta)$ 的法向分量 $\xi >$0 表征 $\in \partial T^*M$。这也意味着，边界的余切方向上的任意初始条件 $(0,y,0,\eta)$ 都会产生一条速度为零的测地线；也就是说，所有初始条件与边界相切的测地线都是静止的。我们将在下文的边界确定第 5 节中探讨任意速度的一般情形以及速度趋于零的极限，但目前先关注单位速度情形 $\xi(0) = 1$。

回到 x 严格递减的测地线，这样我们便可以将其作为变量。然后利用泰勒展开 $(a-b)^{-1/2} = a^{-1/2} + \mathcal{O}(a^{-3/2}b)$ 以及事实 $\xi \leq 0$，得到

$$\xi(x_0)^2 = 1 - x_0^2 h^{ij}(x_0, y)\eta_i\eta_j \tag{29}$$

使得

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\xi(x_0)} &= \left(1 - x_0^2 h^{ij}(x_0, y)\eta_i\eta_j\right)^{-1/2} \\ &= 1 + x_0^2 h^{ij}(x_0, y)\eta_i\eta_j F(x_0, y, \eta) \end{aligned} \tag{30}$$

其中，F 是一个在 x_0、y、η 中一致有界的辅助函数。经过上述讨论，我们现在可以证明以下结果。

命题 4.2。设 $(M、g)$ 是一个气态巨行星。固定一个足够小的 $\varepsilon > 0$，并令 $U \subset \partial M$ 为一个邻域，在该邻域中法坐标 $(x、y) \in [0, \varepsilon) \times U$ 有定义，且有 $II(\eta、\eta) > 0$。固定 $x_0 \in (0、\varepsilon)$ 和 $y \in U$，并令 $(\xi_0、\eta) \in S^*_{(x_0,y)}M$ 满足 $\xi_0 \leq 0$。则有如下估计

$$\tau(x_0, y, \xi_0, \eta) = x_0 + \mathcal{O}(x_0^3) \tag{31}$$

其中，余项在 $(y、\xi_0、\eta)$ 中一致有界。具体而言，$\tau \to 0$ 在 $(y、\xi_0、\eta)$ 中一致成立，其中 $\xi_0 \leq 0$，当 $x_0 \to 0$ 时。

证明。令 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得对于 $t \in (0, \tau(x_0, y, \xi_0, \eta)]$，当 $0 < x_0 < \varepsilon$ 时，$\xi_0 \leq 0$ 蕴含 $\xi(t) < 0$。于是，$x(t)$ 沿流严格递减，因此我们可以用 x 作变量代换，且 $\mathrm{d}x = \xi \mathrm{d}t$。我们将利用这样一个事实：沿给定测地线，$h^{ij}\eta_i\eta_j$ 是一个一致有界的量。关于这一事实的验证，参见引理 5.4 及其下文证明。利用方程 (30) 中 $-1/\xi$ 的渐近表达式，我们得到

$$\begin{aligned} \tau(x_0, y, \xi_0, \eta) &= \int_0^{\tau(x_0,y,\xi_0,\eta)} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{x_0} -\frac{\mathrm{d}x}{\xi} \\ &= \int_0^{x_0} \left(1 + x^2 h^{ij}(x, y)\eta_i\eta_j F(x, y, \eta)\right) \mathrm{d}x \\ &= x_0 + \mathcal{O}(x_0^3) \end{aligned} \tag{32}$$

这就证明了该断言。 □

5. Boundary determination

5.1. 短测地线的存在性。本节旨在证明：给定任意固定点 $y \in \partial M$ 和一个边界余切方向 $\eta \in T^*_y\partial M$，存在一族极大测地线，使得与该族测地线相对应的余切丛上的流始终处于点 $(0, y, 0, \eta) \in \partial T^*M$ 的任意小邻域 $U \subset T^*M$ 内。特别地，该族极大测地线的长度将变得任意小，因此称为短测地线。

命题 5.1. 设 (M, g) 为气态巨行星，且 $\varepsilon > 0$ 很小。固定 $y \in \partial M$。对于 $0 < s < \varepsilon$，我们取测地线的单参数初始条件集

$\sigma(s) = (s, \eta) \in T^*(0,y)M$ 其中 $\eta \in T^*_y \partial M$ 与 s 无关，且满足 $|\eta|_h^2 = 1$。设 $\gamma_s : [0, \tau(0, y, \sigma_s)] \to T^*M$ 表示对应于初始条件 σ_s 的测地线，并设 $0 < l(\gamma_s)$ 表示测地线长度。则当 $s \to 0$ 时，$\gamma_s(t) \to (0, y, 0, \eta)$ 关于 $t \in [0, \tau(0, y, \sigma_s)]$ 一致成立，且当$s \to 0$时 $l(\gamma_s) \to 0$。

我们通过以下三个引理证明命题 5.1，并在证明 5.1 之后继续证明这些引理。

引理 5.2. 设 $\varepsilon > 0$ 足够小且 $0 < s < \varepsilon$。那么，对于测地线$\gamma_s(t) = (z(t)\ \zeta(t))$，其初始条件为 $(0, y, \sigma_s)$，我们有 $\xi(t) < 0$，其中$t \in (0, \tau(0, y, \sigma_s))$，并且

$$x(t) \leq Cs \quad for \quad t \in [0, \tau(0, y, \sigma_s)] \tag{33}$$

其中该常数关于 t 是一致的，且仅依赖于度量 h。

引理 5.3. 设 $(0, y, \sigma_s)$ 是上述测地线的初始条件。那么，退出时间的一致估计为

$$0 < \tau(0, y, \sigma_s) \leq C \tag{34}$$

以及测地线长度 γ_s

$$0 < l(\gamma_s) = s\tau(0, y, \sigma_s) \leq Cs \tag{35}$$

其中常数 C 仅取决于度量 h。

引理 *5.4.* 记 $h^{ij}(x, y)\eta_i\eta_j := h(\eta, \eta)$，且 $h^{ij}(0, y)\eta_i\eta_j := h_0(\eta, \eta)$。固定测地线 γ_s初始条件处的 $h_0(\eta, \eta) = 1$。那么存在一个仅取决于度量 h 的常数 $c > 0$，使得只要 $s \leq c$，沿测地线 γ_s 就有 $\frac{1}{2} \leq h(\eta(t)\ \eta(t)) \leq \frac{3}{2}$。

从这些引理中，我们可以立即观察到关于短测地线 γ_s 的一些几何事实。对于 $0 < s < 1$，投影 $\pi(\gamma_s(t)) \in M$ 是预测地线，也就是说，γ_s 满足哈密顿方程，但路径 $\pi(\gamma_s(t))$ 并不是将参数区间等距嵌入到流形中的映射。若要将映射改为等距嵌入 $\gamma_s : [0, l(\gamma_s)] \to M$，那么根据引理 5.3 中的长度公式——一个「距离 = 速度 × 时间」形式的初等公式——我们可知必须对 $s \mapsto 1$进行缩放。由于我们可以将 $T^*_{(0,y)}M$ 视为向量空间，这种重新参数化就对应于用中心投影 $\sigma(s) \mapsto \sigma(s)/s = (1, \eta/s) \in S^*_{(0,y)}M$映射初始条件。由于测地线的分析更直接，在单位（余）球面丛 [7, 16, 20, 33]中陈述和使用类似命题 5.1 的结果更为常见；但现在我们看到，在气态巨行星上，当 $s \to 0$ 时，重新参数化后的初始条件 $(1, \eta/s)$ 在 S^*M 上会发散。因此，在气态巨行星上，改变测地线的速度比分析单位速率测地线更自然。接下来，我们将证明命题 5.1 中关于短测地线的结果。

命题 *5.1* 的证明。令 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得引理 5.2、5.3 和 5.4 均成立。在整个证明过程中，我们用 表示任意的一致

常数。由于 h-度量是光滑的，因此由引理 5.2、5.4 和哈密顿方程可知，对所有 $i = 1, \ldots, n-1$，都有

$$\left|\dot{y}^i(t)\right| \leq Cx(t)^2 \leq Cs^2 \quad \text{and} \quad |\dot{\eta}_i(t)| \leq Cs^2. \tag{36}$$

因此，根据中值定理和引理 5.3

$$\left|y^i(t) - y^i(0)\right| \leq Cs^2 t \leq Cs^2\tau \leq Cs^2 \tag{37}$$

$$|\eta_i(t) - \eta_i(0)| \leq Cs^2 t \leq Cs^2\tau \leq Cs^2 \tag{38}$$

对所有 $t \in [0, \tau(0, y, \sigma_s)]$ 以及 $i = 1, \ldots, n-1$。由引理 5.2 可知，$\xi(t)$ 沿测地线严格递减。结合测地线的恒速条件 γ_s，我们得到 $-s \leq \xi(t) \leq s$，因此

$$|\xi(t) - \xi(0)| \leq 2s \tag{39}$$

对所有 $t \in [0, \tau(0, y, \sigma_s)]$。由引理 5.2，我们还得到

$$x(t) = |x(t) - x(0)| \leq Cs \tag{40}$$

对所有 $t \in [0, \tau(0, y, \sigma_s)]$。因此，取极限 $s \to 0$，并利用上述一致估计，即可得到一致收敛这一结论。由引理 5.3，我们得到 $l(\gamma_s) \to 0$，当 $s \to 0$ 时。□

现在，我们将通过分析足够小的 s 对应的流来证明引理 5.2 和 5.4。由哈密顿方程可知，如果我们选择足够小的 s，那么测地线会始终处于满足 $\xi(t) < 0$ 的区域内，其中 $t \in (0, \tau(0, y, \sigma_s))$。我们将在下文对这一性质给出更精确的论证。只要测地线始终处于这样的区域内，就存在一个时间 $T \in (0, \tau(0, y, \sigma_s))$，使得对于 $t \in (0, \tau(0, y, \sigma_s))$，有 $0 < x(t) \leq x(T)$，且 $\xi(T) = 0$。特别地，$0 < T < \tau(0, y, \sigma_s)$，因此每条测地线 γ_s 的长度都为正。我们的目标是分析此时的恒速条件 T，为此需要估计 h-范数。下面我们证明一个有用的引理。

引理5.5. </style}设 $(\eta, \eta) = h^{ij}(x, y)\eta_i\eta_j$ 以及 $\eta \neq 0$。沿边界附近的测地线，$Xh(\eta, \eta) = 0$成立，当且仅当 $\partial_x h = 0$。若此条件成立，则 h-范数是测地流的运动常量。

证明. 根据刘维尔定理

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(\eta, \eta) &= Xh(\eta, \eta) \\
&= \xi \partial_x h^{ij} \eta_i \eta_j + x^2 h^{ij} \eta_j \partial_{y^i} h^{ml} \eta_m \eta_l \\
&\quad - \frac{1}{2} x^2 \partial_{y^i} h^{kj} \eta_k \eta_j h^{ml} (\delta^i{}_m \eta_l + \eta_m \delta^i{}_l) \\
&= \xi \partial_x h^{ij} \eta_i \eta_j.
\end{aligned}$$

□

由该引理及其证明可直接得到关于边界 h_0-范数的推论。

推论5.6. </style}设 $(\eta, \eta) = h^{ij}(0, y)\eta_i\eta_j$。那么 $h_0(\eta, \eta)$ 是测地流的运动常量。

这意味着，如果我们固定初始条件 $(0, y, s, \eta)$，且 $h(\eta, \eta) = h_0(\eta, \eta) = 1$，那么 $h_0(\eta(t), \eta(t)) \equiv 1$ 沿测地线保持成立。这也意味着，η 的分量必须沿流一致有界

因为 h_0 是光滑的。由此可知，如果我们重新参数化命题 5.1 中短测地线 γ_s 的初始条件 $(s,\ \eta) \mapsto (1,\ \eta/s)$，那么沿着余切丛上单位速度版本的测地流，我们有

$$\frac{\mathrm{d}\xi(\tilde{t})}{\mathrm{d}\tilde{t}} = -II\big(\eta(\tilde{t})/s, \eta(\tilde{t})/s\big) = -II\big(\eta(\tilde{t}), \eta(\tilde{t})\big)/s^2 \tag{41}$$

其中，$\eta(\tilde{t})$沿流有界，$\tilde{t} = st$ 是测地线 γ_s的单位速度版本上的参数。通过选取足够小的 $s > 0$，我们可知，在边界附近，$\xi(\tilde{t})$下降得更快；在此处 $II(\eta, \eta) > 0$，因此，对于足够小的 s，到边界的距离 $x(\tilde{t})$会在某个满足 $\mathrm{d}\xi(\tilde{t})/\mathrm{d}\tilde{t} < 0$ 的区域内达到最大值。由于沿着 γ_s 的单位速度版本，$\mathrm{d}\xi(\tilde{t})/\mathrm{d}\tilde{t} < 0$ 成立，因此，只要我们选取足够小的 s，当测地线 γ_s 上的速度为 s 时，$\xi < 0$ 也必须成立。经过以上讨论，我们现在可以证明引理 5.2。

引理 *5.2* 的证明。令 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得对于 $0 < s < \varepsilon$，我们有 $\dot{\xi}(t) < 0$，其中 $t \in (0, \tau(0, y, \sigma_s))$。固定初始条件 $h(\eta, \eta) = 1$。于是存在一个时刻 T，使得 $x(T)$是沿流的 x 的最大值，且$\xi(T) = 0$。关于 $x(T)$在 $x(T)$处对函数 $h^{ij}(x(T)\ y(T))$作泰勒展开，$= 0$ 可得测地线恒速条件的如下形式

$$\begin{aligned} 0 &= \xi(T)^2 \\ &= s^2 - x(T)^2 h(\eta(T), \eta(T)) \\ &= s^2 - x(T)^2 h_0(\eta(T), \eta(T)) + \mathcal{O}(x(T)^3) \\ &= s^2 - x(T)^2 + \mathcal{O}(x(T)^3) \end{aligned} \tag{42}$$

由 h 的光滑性以及 η 的有界性可知，余项 $\mathcal{O}(x(T)^3)$ 有界，且其界由一个仅依赖于度量 h 的一致常数控制。我们看到 $x(T)^2$ 与 s^2 相当。对余项反复迭代可得

$$x(T)^2 = s^2 + \mathcal{O}(s^3) \le s^2 + Cs^3 = s^2(1 + Cs) \le s^2(1 + C) \tag{43}$$

其中 $C > 0$ 表示任意一个仅依赖于度量 h 的一致常数，且我们使用了任意界 $s \le 1$。□

用同样的思路即可得到引理 5.4 的证明

引理 *5.4* 的证明。固定 $h_0(\eta, \eta) \equiv 1$。于是，在测地流上的任意一点处进行泰勒展开可得

$$h(\eta, \eta) = h_0(\eta, \eta) + xP(x, y, \eta) = 1 + xP(x, y, \eta) \tag{44}$$

其中 $|P(x, y, \eta)| \le C_1$，因此 $C_1 > 0$ 是一个仅依赖于度量 h 的一致常数。由引理 5.2 可知，对于 $C_2 > 0$ 有 $x \le C_2 s$，因此

$$h(\eta, \eta) \le 1 + C_1 C_2 s \le \frac{3}{2} \tag{45}$$

当.....时成立

$$s \le \frac{1}{2C_2 C_1} \tag{46}$$

类似的论证给出了该断言中 $h(\eta(t)\ \eta(t))$ 的下界。 □

最后，我们将通过使命题 4.2 的证明更加精确，并使用引理 5.2 和 5.4，来证明引理 5.3。

引理 5.3 的证明。设 γ_s 是满足初始条件 $(0, y, \sigma_s)$ 的测地线。则存在一个时刻 T，使得 $\xi(T) = 0$。我们可以将测地线 γ_s 视为两条测地线 $\gamma_\pm$ 的组合，其中 γ_+ 是满足初始条件 $(x(T)\ y(T)\ 0, \eta(T))$ 的测地线，而 γ_- 是满足初始条件 $(x(T)\ y(T)\ 0, -\eta(T))$ 的测地线。记 γ_+ 的退出时间为 τ_+，记 γ_- 的退出时间为 τ_-。于是 $\tau(0, y, \sigma_s) = \tau_+ + \tau_-$，我们使用命题 4.2 证明中的积分来估计 $\tau_\pm$。注意，沿着测地线 $\gamma_\pm$，当 $s > 0$ 足够小时，我们有 $\xi < 0$，因此可以像命题 4.2 的证明中那样改变积分变量。我们有

$$\begin{aligned}
\tau_\pm &= \int_0^{\tau_\pm} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{x(T)} -\frac{1}{\xi}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{x(T)} \frac{1}{\sqrt{s^2 - x^2 h(\eta,\eta)}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{x(T)} \frac{1}{s\sqrt{1 - \frac{x^2}{s^2}h(\eta,\eta)}}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{47}$$

注意，在最后一个积分中，函数 $x^2 h(\eta,\ \eta) = s^2 - \xi^2$ 关于 x 从 $x = 0$ 到 $x = x(T)$ 严格递增，因为通过取 s 足够小，我们知道 ξ 沿此区间严格递减。因此，我们可以引入如下变量代换

$$u^2 = \frac{x^2}{s^2}h(\eta,\eta) \quad \text{with} \quad \mathrm{d}u^2 = 2u\mathrm{d}u = \frac{2}{s^2}II(\eta,\eta)\mathrm{d}x \tag{48}$$

so

$$\mathrm{d}x = \frac{s^2 u}{II(\eta,\eta)}\mathrm{d}u = \frac{2sxh(\eta,\eta)^{1/2}}{2xh(\eta,\eta) + x^2\partial_x h(\eta,\eta)}\mathrm{d}u. \tag{49}$$

对于足够小的 $x > 0$ 和 s，根据引理 5.2 和 5.4，我们还可知 x 足够小，且 $h(\eta,\ \eta)$ 有界且严格为正，因此

$$\frac{2xh(\eta,\eta)^{1/2}}{2xh(\eta,\eta) + x^2\partial_x h(\eta,\eta)} = \frac{2h(\eta,\eta)^{1/2}}{2h(\eta,\eta) + x\partial_x h(\eta,\eta)} \leq C_h \tag{50}$$

其中 C_h 是一个仅依赖于度量 h的一致常数。因此变量代换是良定义的，我们得到

$$\begin{aligned}
\tau_\pm &= \int_0^{x(T)} \frac{1}{s\sqrt{1 - \frac{x^2}{s^2}h(\eta,\eta)}}\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}C_h\mathrm{d}u \\
&= C_h \arcsin(1) \\
&= \frac{C_h\pi}{2}
\end{aligned} \tag{51}$$

并由 $\tau = \tau_+ + \tau_-$ 我们得到 γ_s退出时间的类似估计。测地线长度的估计由

$$l(\gamma_s) = \int_0^{\tau(0,y,\sigma_s)} s\mathrm{d}t = s\tau(0,y,\sigma_s). \tag{52}$$

□

请注意，根据证明可知，我们有一个更强的结论：若 h-范数$h(\eta,\ \eta)$是测地流的守恒量，如引理5.5所述（例如，当气态巨行星的背景度量g 为欧几里得度量时，这一条件成立），那么引理5.3可以改进为：$\tau(0,\ y,\ \sigma_s) = \pi$ 以及短测地线的长度由 $l(\gamma_s) = s\pi$给出。当 g 为欧几里得度量且气态巨行星的维数为二时，可以像 [6, 第 11] 章那样求解哈密顿方程，并得出关于退出时间$\tau = \pi$ 和测地线长度 $l(\gamma_s) = s\pi$ 的相同观察结果；因此，我们实际上推广了引理5.3中的这些观察结果。

5.2. **1-形式的边界确定**。这里我们证明一个边界确定结果：对于测地线 X 射线变换在极大测地线上为零的光滑 1-形式，该结果成立。随后我们将利用这一结果证明引理 2.2。首先，我们按照以下引理所述，对光滑 1-形式进行规范修正。

引理 5.7（规范修正）。设（M, g） 是一个气态巨行星。设 f 为一个满足 $If = 0$的光滑 *1*-形式。那么在边界 ∂M 附近，存在一个˜ ˜标量函数 q，使得 $q|_{\partial M} = 0$，并且对于 $f := f - \mathrm{d}q$，我们有 $If = 0$，且在边界的任意领圈邻域中˜ $f_0 \equiv 0$。

证明。我们将采用与 [37, 引理证明 4]类似的思路。对于邻域 $U \subset \partial M$，令

$$q(x,y) = \int_0^x f_0(s,y)\mathrm{d}s \quad \text{for} \quad (x,y) \in [0,1) \times U \tag{53}$$

由 f 的光滑性可知 $q(0,\ y) \equiv 0$。显然，对于任意标量函数 q，有 $\lambda\mathrm{d}q = g^{-1}(\mathrm{d}q,\ \zeta) = Xq$，因此根据微积分基本定理，$I(\mathrm{d}q) = 0$。根据构造，我们有 $\partial_x q = f_0$。用截断函数 $\chi(x)$ 修改 q，使得当 $x > 1$ 时 $\chi(x) = 0$，而当 $x \leq 1/2$ 时 $\chi(x) = 1$，并将这个˜修改后的函数 $q\chi$ 仍记作 q。令 $f := f - \mathrm{d}q$，结合以上所证，即可证明该结论。□

从这里开始，我们将任意光滑 1-形式 f with $If = 0$ to the˜视为规范校正后的 1-形式 $f = f - \mathrm{d}q$（引理 5.7）。接下来，我们将证明一个高阶边界确定结果，其证明思路与定理 2.1] 的证明相同。

命题 5.8（边界确定）。设（M, g） 是一个气态巨行星。设 f 是一个光滑 *1*-形式，使得 $If = 0$，并假设我们已对 f 应用了引理 *5.7* 的规范修正。那么在边界法坐标（x, y） $\in [0,1)$ $\times \partial M$ 中，我们有

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x^k}(0,y) = 0 \quad for \quad 0 \leq k \in \mathbb{N}. \tag{54}$$

证明。 固定点 $y \in \partial M$。我们先证明 $k = 0$ 的情形。反设 $f_i(0, y) \neq 0$ 对于 $i = 1, \ldots\ldots, n-1$。那么不失一般性，可以假设存在 $\eta \in T_y^*\partial M$，满足 $|\eta|_h = 1$，使得

$$h^{ij}(0, y) f_i(0, y)\eta_j > 0. \tag{55}$$

由连续性可知，存在点 (y, η) 的一个邻域 $U \subset T^*\partial M$，在其中我们同样有

$$h^{ij}(0, y) f_i(0, y)\eta_j > 0 \quad \text{for} \quad (y, \eta) \in U. \tag{56}$$

设 γ_s 为如命题 5.1 中那样、以 $(0, y, \sigma_s)$ 为初始条件的短测地线。则当 $\varepsilon > 0$ 充分小且对任意 $s \in (0, \varepsilon)$ 时，测地线 γ_s 具有非零长度，且 γ_s 是极大的。因此 $(If)(0, y, \sigma_s) = 0$。由引理 5.7 的规范修正，我们有

$$\begin{aligned} I(f)(0, y, \sigma_s) &= \int_0^{\tau(0,y,\sigma_s)} g^{\mu\nu}(z(t)) f_\mu(z(t))\zeta_\mu(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\tau(0,y,\sigma_s)} x(t)^2 h^{ij}(z(t)) f_i(z(t))\eta_j(t)\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{57}$$

我们将 f 在 $x = 0$ 处关于 x 作泰勒展开，然后对度量 h 的分量同样处理，从而得到

$$\begin{aligned} I(f)(0, y, \sigma_s) &= \int_0^{\tau(0,y,\sigma_s)} \left[x(t)^2 h^{ij}(z(t)) f_i(0, y(t))\eta_j(t) + x(t)^3 F(x(t), y(t), \eta(t))\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\tau(0,y,\sigma_s)} \left[x(t)^2 h^{ij}(0, y(t)) f_i(0, y(t))\eta_j(t) + x(t)^3 P(x(t), y(t), \eta(t))\right] \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{58}$$

由 f 与 h 的光滑性，函数 F 与 P 在x, y 与 η 上一致有界。取 s 充分小可保证 $(y(t)\ \eta(t)) \in U$（据命题 5.1），并且由引理 5.2，值 $x(t)$ 也将保持很小。因此该积分的值将由阶为 $x(t)^2$ 的首项决定，并且当 s 充分小时，由估计式（56）我们有

$$\int_0^{\tau(0,y,\sigma_s)} x(t)^2 h^{ij}(0, y(t)) f_i(0, y(t))\eta_j(t)\mathrm{d}t > 0 \tag{59}$$

由此我们得到 $(If)(0, y, \sigma_s) > 0$，这就产生了矛盾。

对于 $k \geq 1$，我们以与上文类似的方式，通过反证法并利用归纳法证明该结论。假设对所有 $0 \leq k < l$， $\partial_x^k f_i(0, y) = 0$ 都成立，但对于 $i = 1, \ldots, n-1$， $\partial_x^l f_i(0, y) \neq$ 不为 0。不失一般性，我们可以假设存在 $\eta \in T_y^*\partial M$，满足 $|\eta|_h = 1$，使得

$$h^{ij}(0, y)\partial_x^l f_i(0, y)\eta_j > 0. \tag{60}$$

接下来，我们按照 $k = 0$ 的情形进行，以证明 $(If)(0, y, \sigma_s) > 0$。唯一的区别在于步骤 (58)：对 f 进行泰勒展开时，首项的阶为 $x(t)^{2+l}$，并且除去一个正的常数 $1/l!$ 因子后，它包含项 (60)。因此，只要 s 取得足够小，我们仍会得到矛盾 $(If)(0, y, \sigma_s) > 0$，从而由归纳原理证明该结论。□

本节汇集所有内容，以证明引理 2.2

引理 *2.2* 的证明。设 f 是一个光滑 1-形式，满足 $If = 0$，定义在一颗气态巨行星上（M，g）。根据引理 5.7 和命题 5.8，存在 $q \in C^\infty$（M），其支集位于 ∂M 附近，并满足 $q|_{\partial M} = 0$，使得 $f - \mathrm{d}q$ 在边界处以多项式阶 k 消失，其中 $k > 0$ 为任意整数。因此根据定义，$f - \mathrm{d}q \in x^\infty C^\infty$（$M$，$T^*M$）。□

6. Regularity of the integral function

本节我们证明引理 2.3。在整个证明过程中，我们假设 $If = 0$，并且已经完成边界确定和规范修正，使得 $f \in x^\infty C^\infty(M,\ T^*M)$。为了证明 $u^f \in \Omega$，我们证明下面这个较弱但更精确的论断。

命题 6.1. 设（M, g）是一个非俘获气态巨行星。设 $k \in \mathbb{N}, f \in x^k C^\infty$（$M, T^*M$）且 $If = 0$。那么 $u^f \in x^{k+1} C^\infty$（S^*M°），$Xu^f = -\lambda f \in x^k C^\infty$（$S^*M$）以及

$$\left|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u^f\right|_g^2 = \mathcal{O}(x^{2k-2}), \qquad \left|\overset{\mathrm{h}}{\nabla} u^f\right|_g^2 = \mathcal{O}(x^{2k-2}), \tag{61}$$

$$\left|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} Xu^f\right|_g^2 = \mathcal{O}(x^{2k-4}), \qquad \left|X\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u^f\right|_g^2 = \mathcal{O}(x^{2k-4}) \tag{62}$$

在内部 S^*M° 且 $_{\mathrm{v}}\nabla u^f|_{\partial S^*M} = 0$。

我们首先证明，引理 2.3 可直接由命题 6.1 推出。

引理 2.3 的证明。由于命题 6.1 的结论对所有 k 都成立，我们可以假设在非俘获气态巨行星 (M, g) 上有 $If = 0$ 和 $f \in x^\infty C^\infty(M, T^*M)$，并将 6.1 的结果应用于这一情形。显然，还有 $u^f \in x^\infty C^\infty(S^*M^\circ)$ 和 $Xu^f \in C^\infty(S^*M)$。命题 6.1 中其余含有导数的量用于计算 $\mathrm{v}\nabla u^f$、$\mathrm{h}\nabla u^f$、$\mathrm{v}\nabla Xu^f$ 和 $X\,\mathrm{v}\nabla u^f$ 相应的 L^2 范数。由于这些估计对所有 k 都成立，因此我们还有 $\nabla_{S^*M} u^f \in x^\infty L^2(S^*M, TS^*M)$ 和 $\mathrm{v}\ \nabla Xu^f, X\mathrm{v}\ \nabla u^f \in L^2(N)$。由于气态巨行星度量 g 在边界处退化，这些估计显然也成立，且不需要 g-范数。因此还有 $\nabla_{S^*M} u^f \in x^\infty L^\infty(S^*M, TS^*M)$。根据积分函数的定义以及命题 6.1 $u^f|_{\partial S^*M} =$，显然 $\mathrm{v}^{\nabla u^f}|_{\partial S^*M} = 0$。因此 $u^f \in \Omega$，引理 2.3 的证明至此完成。□

接下来，我们证明若干结果，并在本节末将它们汇总起来，以证明命题 6.1。首先分析被积函数 λf of u^f 的光滑性，以及测地线 $\tau(z, \zeta)$ 的退出时间的光滑性。我们有如下引理。

引理 6.2。设 (M, g) 为一非俘获气态巨行星。设 $k \in \mathbb{N}$，$f \in x^k C^\infty(M,\ T^*M)$ 和 $If = 0$。我们将 *1*-形式 f 视为 S^*M 上的函数，定义为

$$\lambda f(z, \zeta) = g^{\mu\nu}(z)\zeta_\mu f_\nu(z) \quad for\ all \quad (z, \zeta) \in S^*M. \tag{63}$$

那么 $\lambda f \in C^\infty(S^*M)$ 并且对于边界附近的所有 $(z, \zeta) \in S^*M$，我们有$|\lambda f(z, \zeta)| \leq Cx^k$ 以及 $|\mathrm{d}\ \lambda f(z, \zeta)|_e \leq Cx^{k-1}$。

证明。 根据 λf 的定义显然，该函数在内部是光滑的。因此，只需证明该函数在包含边界法坐标结构的任意邻域内都是光滑的。在坐标 (x, y, ξ, η) 中，我们有

$$\lambda f(z,\zeta) = \lambda f(x,y,\xi,\eta) = f_0(x,y)\xi + x^2 h^{ij}(x,y) f_i(x,y)\eta_j \tag{64}$$

根据定义，该表达式关于所有变量 x, y, ξ 和 η 均为光滑。趋近边界时的首阶消失速率由项 $|f_0\xi| \leq Cx^k$ 给出，其中 C 与 x, y, ξ 和 η 无关。为证明结论 $|\mathrm{d}\,\lambda f(z,\zeta)|_e \leq Cx^{k-1}$，我们计算 λf 的偏导数：

$$\partial_x \lambda f(z,\zeta) = \partial_x f_0\,\xi + 2x h^{ij} f_i \eta_j + x^2 \partial_x h^{ij} f_i \eta_j + x^2 h^{ij} \partial_x f_i\,\eta_j, \tag{65}$$

$$\partial_{y^k} \lambda f(z,\zeta) = \partial_{y^k} f_0\,\xi + x^2 \partial_{y^k} h^{ij} f_i \eta_j + x^2 h^{ij} \partial_{y^k} f_i\,\eta_j, \tag{66}$$

$$\partial_\xi \lambda f(z,\zeta) = f_0, \tag{67}$$

$$\partial_{\eta_k} \lambda f(z,\zeta) = x^2 h^{ik} f_i \tag{68}$$

由此可见，若我们将 $f_0 = x^k \bar{f}_0$ 写作 $k \geq 1$，其中 $\bar{f}_0 \in C^\infty(M)$ 与 x 无关，则首阶行为由 $\partial_x f_0 \xi = k x^{k-1} \bar{f}_0 \xi + \mathcal{O}(x^k)$ 给出。□

推论 6.3. 设 (M, g) 是一个非俘获气态巨行星。设 λf 如引理 *6.2* 中所述。则 $Xu^f \in x^k C^\infty(S^*M)$ 且

$$\left| \overset{\mathrm{v}}{\nabla} X u^f \right|_g^2 = \left| \overset{\mathrm{v}}{\nabla} \lambda f \right|_g^2 = \mathcal{O}(x^{2k-4}). \tag{69}$$

证明。 由于余切丛上的测地流是光滑的，且 f 在边界上消失，因此由微积分基本定理可得 $Xu^f = -\lambda f$，并由引理 6.2 $-\lambda f \in x^k C^\infty(S^*M)$ 得证。为证明第二个结论，我们将讨论限制在一个包含边界法坐标的邻域内，并使用附录中公式（117）给出的垂直梯度局部坐标公式，得到

$$\left| \overset{\mathrm{v}}{\nabla} \lambda f \right|_g^2 = g_{\mu\nu} \partial_{\zeta_\mu} \lambda f\, \partial_{\zeta_\nu} \lambda f \leq C x^{-2} \left| \mathrm{d}\,\lambda f \right|_e^2 \leq C x^{2(k-1)-2} = C x^{2k-4}. \tag{70}$$

□

在以下证明中，我们需要对法向雅可比场进行一些估计，为此我们陈述以下引理。

引理 *6.4*（[7, 引理 26]）。设 (M, g) 是一个气态巨行星。设 $J(t)$ 是处处垂直于双特征曲线 $(z(t)\ \zeta(t))$ 的雅可比场，且满足 $x(0) < \varepsilon$ 和 $\xi(0) \leq 0$。则对所有 $t \in [0, \tau(z(0)\ \zeta(0))]$，有 $|J(t)|_g \leq C$ 且 $|D_t J(t)|_g \leq C x(t)^{-1}$。

引理的证明可见于 [7]，其中采用了不同的光滑结构，但很容易验证，在我们使用的边界法坐标光滑结构中，证明乃至结论也都相同。接下来，我们证明关于测地流退出时间的以下命题：

命题 6.5。 设 (M, g) 为非俘获气态巨行星。退出时间的萨萨基梯度为 $\nabla_{S^*M} \tau = -X$。特别地，$\tau \in C^\infty(S^*M)$。

证明。我们首先在内部点 S^*M° 处证明该结论，然后利用关于辛结构的流形 M 的光滑延拓，证明在 $\partial T^*M \backslash \partial_0 T^*M$中的结论，从而也证明在 $\partial S^*M \subset \partial T^*M \backslash \partial_0 T^*M$中的结论（包含关系由第 5 节关于中心投影的讨论得出）。

首先，我们证明对于所有（z, ζ），$X\tau(z, \zeta) = -1$。由于余切丛上的测地流是光滑的，因此

$$X\tau(z,\zeta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tau(\phi_s(z,\zeta))|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\tau(z,\zeta) - s)|_{s=0} = -1. \tag{71}$$

v h 接下来，我们证明对于所有（z, ζ），$\nabla\tau(z, \zeta) = \nabla\tau(z, \zeta) = 0$。为此，设 $s \in (-1, 1)$ 和 $c(s)$ 是 S^*M° 中的一条曲线，其中 $c(0) = (z, \zeta)$，$\dot{c}(0) = \theta \in T_z{}_\zeta S^*M$，且 $\theta \perp X$。我们在点（s, $\tau(c(s))$）处对函数 $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(s, t) = x(\pi(\phi_t(c(s)))$ 应用隐函数定理，其函数值为 $s = 0$。这里我们假设，$c(s)$ 中的缩放 s 选取得当，使得对于所有 $s \in (-1, 1)$，$\phi_{\tau(c(s))}(c(s))$ 都位于同一个边界法坐标图内，从而 F 有明确定义。注意，$F(0, \tau(z, \zeta)) = 0$，并且

$$\begin{aligned}\partial_t F(0,t)|_{t=\tau(c(0))} &= \partial_t F(0,t)|_{t=\tau(z,\zeta)} \\ &= \mathrm{d}x(\mathrm{d}\pi(\dot{\phi}_{\tau(z,\zeta)}(c(0)))) \\ &= \mathrm{d}x(\mathrm{d}\pi(\dot{\phi}_{\tau(z,\zeta)}(z,\zeta)))\end{aligned} \tag{72}$$

其中 $\phi_{\tau(z,\zeta)}(z, \zeta) = (\gamma_f, \zeta_f)$。因此

$$\partial_t F(0,t)|_{t=\tau(z,\zeta)} = \mathrm{d}x(\mathrm{d}\pi(\dot{\gamma}_f, \dot{\zeta}_f)) = \mathrm{d}x(\dot{\gamma}_f) = \dot{\gamma}_f^0. \tag{73}$$

由哈密顿方程和测地线的单位速度约束可知，$\dot{\gamma}_f^0 = -1$ 因此 $\partial_t F(0, t)|_{t=\tau(z,\zeta)}$ 非零，故可应用隐函数定理。于是

$$\frac{\mathrm{d}F(s,\tau(c(s)))}{\mathrm{d}s} = \partial_1 F(s,\tau(c(s))) + \partial_2 F(s,\tau(c(s)))\frac{\mathrm{d}\tau(c(s))}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{74}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}\tau(c(s))}{\mathrm{d}s}|_{s=0} = -\frac{\partial_1 F(s,\tau(c(s)))}{\partial_2 F(s,\tau(c(s)))}\bigg|_{s=0}. \tag{75}$$

接下来注意到 $\pi_{T^*M}(\phi_t(z, \zeta)) = \pi_{TM}(\gamma(t)\ \dot{\gamma}(t)) = \gamma(t)$，因此 $\mathrm{d}\pi(\mathrm{d}\phi_t(\theta)) = J_\theta(t)$，其中根据 $\theta \perp X$，J_θ 是沿测地线 γ的法雅可比场，其初始条件为 $J_\theta(0) = \mathrm{d}\pi(\theta)$。再由引理 6.4 可知，$J_\theta$ 的分量值有界，因此

$$\partial_s F(s,t)|_{s=0} = \mathrm{d}x(\mathrm{d}\pi(\mathrm{d}\phi_t(\partial_s c(s))))|_{s=0} = \mathrm{d}x(J_\theta(t)) \tag{76}$$

and

$$\partial_s F(s,\tau(z,\zeta))|_{s=0} = \mathrm{d}x(J_\theta(\tau(z,\zeta))) = J_\theta^0(\tau(z,\zeta)) = 0 \tag{77}$$

其中，零值源于 J_θ 是法雅可比场这一事实，因此特别地，在 $\tau(z, \zeta)$ 处，它必须与 $\dot{\gamma}_f = (-1, 0, \ldots, 0)$ 正交。因此我们得到

$$\frac{\mathrm{d}\tau(c(s))}{\mathrm{d}s}|_{s=0} = 0 \quad \text{in} \quad S^*M^\circ \tag{78}$$

h v这证明了 $\nabla\tau(z, \zeta) = \nabla\tau(z, \zeta) = 0$对所有 $(z, \zeta) \in S^*M^\circ$

为证明 S^*M中的结论，我们将通过与上文相同的隐函数定理证明在 $\partial T^*M\setminus\partial_0T^*M$上证明该结论，并注意到根据边界确定，我们可以将 $\partial T^*M\setminus\partial_0T^*M$与 ∂S^*M等同。由于我们要在边界 ∂M 上进行变分，扩张流形将很有用。首先考虑带有光滑度量 g的黎曼流形 $(M,\ g)$。根据 [33,− 引理 3.1.8]，存在 $(M,\ g)$的一个闭光滑延拓 $(N,\ g)$，另见 [2I, 例 9.32]。 由于预计 $(N,\ g)$不会包含关于奇异气巨星度量 g的任何有用信息，从这里开始我们不再考虑黎曼结构，而是转而考虑光滑流形 M 及其闭光滑延拓 N （不要与法丛的记号混淆）。我们将利用惠特尼延拓定理 [38]，把各种光滑函数从 M 延拓到 N 。

我们首先证明，气态巨行星的测地流存在从 M 到 N的光滑延拓。由于 N 是 M的光滑延拓，因此余切丛 T^*N是 T^*M的光滑延拓。因此，典范辛形式 $\omega=\sum_{\mu=0}^{n-1}\mathrm{d}z^\mu\wedge\mathrm{d}\zeta_\mu$ 也从 T^*M到 T^*N光滑延拓。根据惠特尼延拓定理，我们可以将光滑哈密顿量 $H\colon\ T^*M\to\mathbb{R}$, $H(z,\zeta)=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(z)\zeta_\mu\zeta_\nu$延拓为 T^*N上的光滑函数。在辛几何层面，相应的哈密顿流由方程 $\mathrm{d}H=i_X\omega$ 给出；由于 H 和ω 在 T^*N 上都有光滑延拓，测地流的哈密顿向量场 X也有光滑延拓。因此，测地流也存在光滑延拓$\phi_t\colon\ T^*N\to T^*N$。有了这一结果，我们就可以计算 $\partial T^*M\setminus\partial_0T^*M$上退出时间的Sasaki梯度。

设 $s\in(-1,1)$ 和 $c(s)$ 是 T^*N中的一条曲线，其中 $c(0)=(z,\zeta)\in\partial T^*M\setminus\partial_0T^*M$且 $\dot c(0)=\theta\in T_{z,\zeta}(\partial T^*M\setminus\partial_0T^*M)$ 满足 $\theta\perp X$。设 $F(s,t)=x(\pi(\phi_t(c(s))))$ 是上文所用函数的光滑延拓版本。再次在点 $F(0,\tau(z,\zeta))=0$ 处使用隐函数定理。关键观察是，由于 $(z,\zeta)\in\partial T^*M\setminus\partial_0T^*M$，根据哈密顿方程和边界确定，我们知道 $\dot\gamma_f^0\neq0$。因此，与 S^*M° 的情形相同的计算给出

$$\frac{\mathrm{d}\tau(c(s))}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}=0\quad\text{on}\quad\partial T^*M\setminus\partial_0T^*M\tag{79}$$

h v这尤其证明了对于所有 $(z,\zeta)\in\partial S^*M\subset\partial T^*M\setminus\partial_0T^*M$, $\nabla\tau(z,\zeta)=\nabla\tau(z,\zeta)=0$。

接下来我们将证明 $X\tau(z,\zeta)=-1$在 $\partial T^*M\setminus\partial_0T^*M$上。注意，方程（71）中的计算在边界上不成立，因此我们将改用隐函数定理。与之前的计算相比，主要区别在于我们取 $\dot c(0)=\theta\in T_{z,\zeta}(\partial T^*M\setminus\partial_0T^*M)$ with$\theta\parallel X$。设 $A>0$ 为某个实数。于是，在局部范围内，我们可以写成 $(z,\zeta)=(z,\pm A,\eta)$, 使得 $X=\pm A\partial_x$在 (z,ζ) 处 $\in\partial T^*M\setminus\partial_0T^*M$。由于我们只关心关于 X 取变分，因此根据 $X\parallel\theta$，我们将情况限制为 $\mathrm{d}\pi(\mathrm{d}\phi_t(\theta))=J_\theta$({v28)，并且 J_θ 是由 $J_\theta(0)=(\pm A,0,\ldots,0)$ 刻画的平行雅可比场。由流的恒速条件可知 $\dot\gamma_f=(-A,0,\ldots,0)$，且 $J_\theta(\tau(z,\zeta))=\dot\gamma_f$，因此应用隐函数

定理，如上所述对 F 应用隐函数定理，得到

$$X\tau(z,\zeta) = -\frac{J^0_\theta(\tau(z,\zeta))}{\dot\gamma^0_f} = -\frac{-A}{-A} = -1 \quad \text{on} \quad \partial T^*M \setminus \partial_0 T^*M. \tag{80}$$

将范围限制在 $\partial S^*M \subset \partial T^*M \setminus \partial_0 T^*M$，即可完成退出时间的Sasaki梯度的证明。由于 $\nabla_{S^*M}\tau = -X$，所以所有更高阶导数都将为零，因此可得 $\tau \in C^\infty(S^*M)$。□

命题 6.5指出，气态巨行星上的退出时间是测地线。这是气态巨行星几何所特有的，在标准黎曼流形上并不成立；例如，在配备欧几里得度量的 $\mathbb{R}^2$ 单位圆盘上即可轻易验证这一点。

接下来我们证明命题 6.1的第一条陈述：

引理 6.6. 设(M,g) 为一个非俘获气态巨行星。设 $k \in \mathbb{N}$，$f \in x^k C^\infty(M, T^*M)$ 且 $If = 0$。则 $u^f \in x^{k+1}C^\infty(S^*M^\circ)$。

证明。 $u^f \in C^\infty(S^*M^\circ)$这一事实可直接由 $\lambda f \in C^\infty(S^*M)$和 $\tau \in C^\infty(S^*M)$得出，参见引理 6.2 和命题 6.5。为证明$u^f(z,\zeta) = \mathcal{O}(x^{k+1})$，其中这些常数对$(x,y,\xi,\eta)$一致，令 $z \in M^\circ$。根据假设，$u^f(z,\zeta) + u^f(z,-\zeta) = If = 0$。具体而言，我们有

$$\left|u^f(z,\zeta)\right| = \left|u^f(z,\zeta) + u^f(z,-\zeta) - u^f(z,-\zeta)\right| = \left|u^f(z,-\zeta)\right| \tag{81}$$

因此，其数量级仅取决于初始基点 z，我们可以选择方向，使余向量 ζ 在局部指向边界，即 $\zeta = (\xi,\eta)$，其中 $\xi \le 0$。假设我们取 z 使其靠近边界，并取 ζ使得 x 沿测地线$\gamma_{z,\zeta}$严格递减。用 $C > 0$表示任意一致常数。于是

$$\begin{aligned}
\left|u^f(z,\zeta)\right| &\le \int_0^{\tau(z,\zeta)} \left|f_\mu(\gamma_{z,\zeta}(t))\dot\gamma^\mu_{z,\zeta}(t)\right| \mathrm{d}t \\
&\le C\int_0^{\tau(z,\zeta)} x(t)^k \mathrm{d}t \\
&\le C\int_0^{\tau(z,\zeta)} x(0)^k \mathrm{d}t \\
&= C\tau(z,\zeta)x(0)^k \\
&= Cx(0)^{k+1} + \mathcal{O}\left(x(0)^{k+3}\right)
\end{aligned} \tag{82}$$

因为根据命题 4.2，当 $\xi \le 0$ 时，$\tau(x,\ y,\ \xi,\ \eta) = x + \mathcal{O}(x^3)$。 □

作为本节的总结，我们证明两个关于积分函数导数的引理。

引理 6.7。 设(M,g) 是非俘获气态巨行星。设 $k \in \mathbb{N}$，$f \in x^k C^\infty(M, T^*M)$ 且 $If = 0$。那么在内部 S^*M° 中，我们有

$$\left|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u^f\right|^2_g = \mathcal{O}(x^{2k-2}), \quad \left|\overset{\mathrm{h}}{\nabla} u^f\right|^2_g = \mathcal{O}(x^{2k-2}), \quad \left|X\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u^f\right|^2_g = \mathcal{O}(x^{2k-4}). \tag{83}$$

证明。我们先计算 u^f 的垂直梯度和水平梯度。为使记号简洁，以下计算中省略映射 λ，并由参数决定 f 是函数还是 1-形式。设 $c(s)$ 是 S^*M° 中的一条曲线，使得 $c(0) = (z, \zeta)$ 且 $\dot{c}(0) = \theta$，其中某个 $\theta \in T_{z,\zeta}S^*M^\circ$，且 $\theta \perp X$。于是由命题 6.5 以及 f 的光滑性

$$\begin{aligned}\partial_\theta u^f(z,\zeta) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^{\tau(c(s))} f(\phi_t(c(s)))\mathrm{d}t|_{s=0} \\ &= f(\phi_{\tau(z,\zeta)}(z,\zeta))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tau(c(s))|_{s=0} + \int_0^{\tau(z,\zeta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(\phi_t(c(s)))|_{s=0}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\tau(z,\zeta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(\phi_t(c(s)))|_{s=0}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{84}$$

设 $J_\theta(t)$ 是沿着 $\gamma_t = \pi(\phi_t(z, \zeta))$ 的一个法雅可比场，其中 $J_\theta(0) = \mathrm{d}\pi(\theta) \in \mathcal{H}$ 且 $\mathrm{D}_t J_\theta(0) = K(\theta) \in \mathcal{V}$。由于测地流的初始条件位于内部 S^*M°，因此我们可以利用气态巨行星度量 g，将测地流从余切丛映射到切丛，从而

$$\mathrm{d}\phi_t(\theta) = (\mathrm{d}\pi(\mathrm{d}\phi_t(\theta)), K(\mathrm{d}\phi_t(\theta))) = (J_\theta(t), \mathrm{D}_t J_\theta(t)) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}. \tag{85}$$

根据链式法则，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(\phi_t(c(s)))\Big|_{s=0} &= \mathrm{d}f \frac{\partial}{\partial s}\phi_t(c(s))\Big|_{s=0} \\ &= \mathrm{d}f\left(\mathrm{d}\phi_t \frac{\partial}{\partial s} c(s)\Big|_{s=0}\right) \\ &= \mathrm{d}f(\mathrm{d}\phi_t(\theta)) \\ &= \mathrm{d}f(J_\theta(t), \mathrm{D}_t J_\theta(t)).\end{aligned} \tag{86}$$

因此，结合以上所有结果可得

$$\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u^f(z,\zeta) = \int_0^{\tau(z,\zeta)} f(\mathrm{D}_t J_\theta(t))\,\mathrm{d}t \tag{87}$$

and

$$\overset{\mathrm{h}}{\nabla} u^f(z,\zeta) = \int_0^{\tau(z,\zeta)} \mathrm{d}f(J_\theta(t), \dot{\gamma}_{z,\zeta}(t))\,\mathrm{d}t. \tag{88}$$

利用引理 6.4 中关于雅可比场的界、引理 6.2 中关于 f 爆破解估计的界，以及命题 4.2 中关于退出时间渐近行为的结果，仿照引理 6.6 的证明可得

$$\begin{aligned}\left|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u^f(z,\zeta)\right|_g^2 &\le Cx^{-2}\left|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u^f(z,\zeta)\right|_e^2 \\ &\le Cx^{-2}\left(\int_0^{\tau(z,\zeta)} |f(\mathrm{D}_t J_\theta(t))|\,\mathrm{d}t\right)^2 \\ &\le Cx^{-2}(\tau(z,\zeta)x^{k-1})^2 \\ &\le Cx^{2k-2}\end{aligned} \tag{89}$$

and

$$\begin{aligned}\left|\overset{\mathrm{h}}{\nabla} u^f(z,\zeta)\right|_g^2 &\leq Cx^{-2}\left|\overset{\mathrm{h}}{\nabla} u^f(z,\zeta)\right|_e^2 \\ &\leq Cx^{-2}\left(\int_0^{\tau(z,\zeta)} |\mathrm{d}f(J_\theta(t),\dot{\gamma}_{z,\zeta}(t))|\,\mathrm{d}t\right)^2 \\ &\leq Cx^{2k-2}\end{aligned} \tag{90}$$

其中 C 表示任意一致常数。为了证明最后一个结论，我们利用 S^*M° 中的 $\overset{\mathrm{v}}{}$ $\overset{\mathrm{h}}{}$交换子公式 $[X,\nabla]=-\nabla$ 以及推论 6.3 来计算

$$\begin{aligned}\left|X\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u^f(z,\zeta)\right|_g^2 &= \left|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} Xu^f(z,\zeta)-\overset{\mathrm{h}}{\nabla} u^f(z,\zeta)\right|_g^2 \\ &\leq \left|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} Xu^f(z,\zeta)\right|_g^2+\left|\overset{\mathrm{h}}{\nabla} u^f(z,\zeta)\right|_g^2 \\ &\leq C\left(x^{2k-4}+x^{2k-2}\right) \\ &\leq 2Cx^{2k-4}\end{aligned} \tag{91}$$

其中 C 是一个一致常数，且我们使用了任意估计 $x^2\leq 1$。□

引理 6.8。 设(M,g) 为一个非俘获气态巨行星，并设 $k\in\mathbb{N}$, $f\in x^kC^\infty(M,T^*M)$。若 $If=0$，则$\overset{\mathrm{v}}{}$ $\nabla u^f|_{\partial S^*M}=0$。

证明。 固定 $y\in\partial M$。令 $c\colon(-1,1)\to\partial S^*M$ 为一条光滑路径，使得

$$c(s)=(0,y,\zeta(s))=(0,y,\pm 1,\eta(s)). \tag{92}$$

对于 $(0,y,1,\eta(s))$，我们有 $u^f(c(s))=If=0$，例如，根据第 5 节中关于中心投影的讨论，$(0,y,1,\eta(s))$ 对所有 $s\in(-1,1)$ 都是极大测地线的初始条件。对于 $(0,y,-1,\eta(s))$，相应的极大测地线将是静止的，因此在这种情况下，对所有$s\in(-1,1)$，也有 $u^f(c(s))=0$。因此

$$\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u^f|_{\partial S^*M}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u^f(c(s))\Big|_{s=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}0\Big|_{s=0}=0 \tag{93}$$

这就证明了该结论。 □

我们将本节中证明的所有结果结合起来，以证明命题 6.1。

命题 *6.1* 的证明。 设 $k\in\mathbb{N}$, $f\in x^kC^\infty(M,T^*M)$ 和 $If=0$位于一颗非俘获气态巨行星（M,g）上。由引理 6.6 可得 $u^f\in x^{k+1}C^\infty(S^*M^\circ)$，由推论 6.3 可得 $Xu^f\in C^\infty(S^*M)$。由引理 6.7 和推论 6.3，我们可得命题 6.1 中所述导数的爆破解率。最后，由引理 6.8 可得 $\overset{\mathrm{v}}{}$ $\nabla u^f|_{\partial S^*M}=0$，至此命题 6.1 的证明完成。□

7. Pestov identity

本节我们将证明气态巨行星上函数 $u \in \Omega$ 的 Pestov 恒等式，并利用该恒等式证明引理 2.4。

命题 7.1. 设(M, g) 是一个非俘获气态巨行星，具有 $R \leq 0$ 和$u \in \Omega$，其意义见定义 *2.1*。那么我们有

$$\|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} Xu\|^2 \geq \|X\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u\|^2 + (n-1)\|Xu\|^2. \tag{94}$$

证明。令 $M_\varepsilon = \{x \geq \varepsilon\}$ 表示 $\varepsilon > 0$的截断流形。于是$u \in C^\infty(S^*M_\varepsilon)$，由 [16] 可得下列 Pestov 恒等式成立

$$\|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} Xu\|_\varepsilon^2 = \|X\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u\|_\varepsilon^2 - (R\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u, \overset{\mathrm{v}}{\nabla} u)_\varepsilon + (n-1)\|Xu\|_\varepsilon^2 + B_\varepsilon(u) \tag{95}$$

其中 $B_\varepsilon(u)$是定义在 $\partial S^*M_\varepsilon$ 上的边界项，定义如下

$$\int_{\partial S^*M_\varepsilon} \left\langle \overset{\mathrm{v}}{\nabla} u, \overset{\mathrm{h}}{\nabla} u \right\rangle - (n-1)uXu \, \mathrm{d}\sigma \tag{96}$$

下标 ε 表示将范数限制在 $L^2(S^*M_\varepsilon)$上。我们将证明，当 $\varepsilon \to 0$ 时，在较弱的设定下该恒等式仍然收敛；在此设定中， u具有与命题 6.1 中的 u^f 相同的所有性质。具体而言，我们假设$u \in x^{k+1}C^\infty(S^*M^\circ)$、 $Xu \in x^k C^\infty(S^*M)$，并且具有以下渐近速率

$$\left|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u\right|_g^2 = \mathcal{O}(x^{2k-2}), \qquad \left|\overset{\mathrm{h}}{\nabla} u\right|_g^2 = \mathcal{O}(x^{2k-2}), \tag{97}$$

$$\left|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} Xu\right|_g^2 = \mathcal{O}(x^{2k-4}), \qquad \left|X\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u\right|_g^2 = \mathcal{O}(x^{2k-4}) \tag{98}$$

对任意整数 k。在下面的计算中，我们取足够大的整数 k，具体而言，$k \geq n+1$，使得当 $\varepsilon \to 0$ 时，各种上界趋于零。

首先，我们有

$$\begin{aligned} |B_\varepsilon(u)| &\leq \int_{\partial S^*M_\varepsilon} \left|\left\langle \overset{\mathrm{v}}{\nabla} u, \overset{\mathrm{h}}{\nabla} u \right\rangle\right| + |(n-1)uXu| \, \mathrm{d}\sigma \\ &\leq \mathrm{Vol}^{n-1}(x=\varepsilon)\omega_n \left[\left|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u\right|_{g,x=\varepsilon} \left|\overset{\mathrm{h}}{\nabla} u\right|_{g,x=\varepsilon} + C(n-1)\varepsilon^{k+1+k} \right] \\ &\leq C'\varepsilon^{-(n-1)} \left[\varepsilon^{2k-2} + (n-1)\varepsilon^{2k+1}\right], \end{aligned} \tag{99}$$

其中 ω_n 表示 $S_z^*M_\varepsilon$ 在 $z \in \{x=\varepsilon\}$上的常数球面测度，且 C 和 C' 是某些一致常数。选取足够大的 k，我们便看到当 $\varepsilon \to 0$时 $B_\varepsilon(u) \to 0$。接下来

$$\begin{aligned} \|X\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u\|^2 - \|X\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u\|_\varepsilon^2 &= \int_{S^*M \setminus S^*M_\varepsilon} \left|X\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u\right|_g^2 \mathrm{d}\Sigma \\ &\leq C \int_{S^*M \setminus S^*M_\varepsilon} x^{2k-4} \mathrm{d}\Sigma \\ &\leq C\mathrm{Vol}_{\overline{g}}(M \setminus M_\varepsilon) \int_0^\varepsilon x^{2k-4-(n-1)} \mathrm{d}x \\ &\leq C\mathrm{Vol}_{\overline{g}}(M \setminus M_\varepsilon)\varepsilon^{2k-2-n}. \end{aligned} \tag{100}$$

选取足够大的 k，我们便看到当 $\varepsilon \to 0$时 $\|X\,{}_{\mathrm{v}}\nabla u\|_\varepsilon^2 \to \|X\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u\|^2$。同样地

$$\|Xu\|^2 - \|Xu\|_\varepsilon^2 \le C\varepsilon^{2k+2-n} \quad \text{and} \quad \|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} Xu\|^2 - \|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} Xu\|_\varepsilon^2 \le C\varepsilon^{2k-2-n} \tag{101}$$

因此，当 $\varepsilon \to 0$ k 足够大时，$\|Xu\|_\varepsilon^2 \to \|Xu\|^2$ 和 $\|\,{}_{\mathrm{v}}\nabla Xu\|_\varepsilon^2 \to \|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} Xu\|^2$ 也成立。为完整起见，我们还将证明曲率项收敛，尽管我们已经具备证明该结论所需的全部要素。在边界附近的光滑结构 (x, y) 中，按照截面曲率的意义，我们有 $R \sim x^{-2}$，参见 [7, 命题 1]。于是

$$\begin{aligned}(R\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u, \overset{\mathrm{v}}{\nabla} u) - (R\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u, \overset{\mathrm{v}}{\nabla} u)_\varepsilon &\le C\int_{S^*M\setminus S^*M_\varepsilon} x^{-2}\left|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u\right|_g^2 \mathrm{d}\Sigma \\ &\le C\int_{S^*M\setminus S^*M_\varepsilon} x^{-2+2k-2}\mathrm{d}\Sigma \\ &\le C\varepsilon^{2k-2-n}\end{aligned} \tag{102}$$

v v vv这表明，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$(R\nabla u, \nabla u)_\varepsilon \to (R\nabla u, \nabla u)$。因此，对于满足与命题 6.1 中 u^f 相同性质的函数 u，当 k 足够大时，我们得到 Pestov 恒等式

$$\|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} Xu\|^2 = \|X\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u\|^2 - (R\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u, \overset{\mathrm{v}}{\nabla} u) + (n-1)\|Xu\|^2. \tag{103}$$

由 (95)，在极限 $\varepsilon \to 0$ 下成立。因此，在更强的假设 $u \in \Omega$ 下，恒等式 (103) 也成立。由于 $R \le 0$，这就证明了该结论。□

推论 7.2. 设(M, g) 是一个具有非正曲率的非俘获气态巨行星。设 $u \in \Omega$ 和 $Xu(z, \zeta)$ 对所有 $z \in M$ 都关于 ζ 线性。则$_{\mathrm{v}}X\nabla u = 0$。

证明。设 $\varepsilon > 0$ 和 M_ε 是命题 7.1 的证明中所述的截断流形。若 $w \in x^\infty C^\infty(S^*M)$ 和 $w(z, \zeta)$ 对所有 z 都关于 ζ 线性，则在每个内部纤维上我们有（参见引理 4] 的证明） [18,

$$\int_{S_z^*M_\varepsilon} \left|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} w(z,\zeta)\right|^2 \mathrm{d}\zeta = (n-1)\int_{S_z^*M_\varepsilon} |w(z,\zeta)|^2\,\mathrm{d}\zeta. \tag{104}$$

因此

$$\|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} w\|_\varepsilon^2 = (n-1)\|w\|_\varepsilon^2. \tag{105}$$

根据我们对 u 的假设，我们可以在 $w = Xu$ 上使用这一结论并取极限 $\varepsilon \to 0$，于是得到

$$\|\overset{\mathrm{v}}{\nabla} Xu\|^2 = (n-1)\|Xu\|^2. \tag{106}$$

将此与命题 7.1 结合，得到 $\|X\,{}_{\mathrm{v}}\nabla u\|^2 = 0$。 □

最后，我们证明下面这个引理；它是引理 2.4 的一个稍微更一般的版本。

引理 7.3。 设(M, g) 为曲率非正的非俘获气态巨行星。设 $u \in \Omega$ 和 $Xu(z, \zeta)$ 是关于 ζ *for all*$_{\mathrm{v}}(z, \zeta) \in S^*M$的一阶多项式。那么 $\nabla u \equiv 0$，并且存在函数 $p \in C^\infty(M)$ 使得$u = \pi^* p$。

v证明。设 $(z,\zeta) \in S^*M^\circ$。由于 $u \in \Omega$，因此 $\nabla u|_{\partial S^*M} = 0$；由流的光滑性以及推论 7.2，我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\tau(z,\zeta)} X \overset{\mathrm{v}}{\nabla} u(\phi_t(z,\zeta))\mathrm{d}t \\ &= \overset{\mathrm{v}}{\nabla} u(\phi_{\tau(z,\zeta)}(z,\zeta)) - \overset{\mathrm{v}}{\nabla} u(z,\zeta) \\ &= 0 - \overset{\mathrm{v}}{\nabla} u(z,\zeta). \end{aligned} \tag{107}$$

v将其与边界值 $\nabla u|_{\partial S^*M} = 0$结合起来，便可得出$\overset{\mathrm{v}}{\nabla} u \equiv 0$。

v接下来注意，由于 $\nabla u \equiv 0$，因此对于每个 $z \in M$，u 都与 $\zeta \in S_z^*M$ 无关。记 $u(z,\zeta) = p(z)$ 为标量函数 p。根据假设 $u \in \Omega$，我们有 $Xu \in C^\infty(S^*M)$，所以

$$Xu = X\pi^*p = \lambda \mathrm{d}p \tag{108}$$

因此也有 $\lambda \mathrm{d}p \in C^\infty(S^*M)$。若 p 不光滑，则 $\lambda \mathrm{d}p$ 也不光滑，所以必有 $p \in C^\infty(M)$。□

Appendix A. Coordinate formulas for derivatives on the unit cosphere bundle

我们推导光滑黎曼流形 (M,g) 上的坐标公式，其中度量 g 在边界处仍然光滑。从推导中可以看出，在气态巨行星几何中，有些公式在边界处会退化，因此坐标公式只在气态巨行星的内部M° 定义。本节旨在部分对应于余切丛版本的 [32, 附录 A]，因此我们将省略那些与切丛情形证明相同的细节；更多详情另见 [29]。

设 z 是 M 上的一组局部坐标。将 T^*M 的局部坐标记为 (z,ζ)，即协向量可以写成 1-形式 $\zeta_\mu \mathrm{d}z^\mu$。在 T^*M 中任取一条路径，并计算其在某点的切向量，可得到 $T(T^*M)$ 上诱导的局部坐标 $(z,\zeta,Z,\mathcal{Z})$，即 $T(T^*M)$ 中的向量可写为 $Z^\mu \partial_{z^\mu} + \mathcal{Z}_\mu \partial_{\zeta_\mu}$。我们引入向量场 $\delta_{z^\mu} = \partial_{z^\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\zeta_\nu \partial_{\zeta_\lambda}$。$T^*M$ 上的 Sasaki度量表示为

$$\langle Z^\mu \delta_{z^\mu} + \mathcal{Z}_\mu \partial_{\zeta_\mu}, \tilde{Z}^\mu \delta_{z^\mu} + \tilde{\mathcal{Z}}_\mu \partial_{\zeta_\mu} \rangle = g_{\mu\nu} Z^\mu \tilde{Z}^\nu + g^{\mu\nu} \mathcal{Z}_\mu \tilde{\mathcal{Z}}_\nu. \tag{109}$$

根据 [25]，T^*M 的水平子丛和垂直子丛分别由 $\{\delta_{z^\mu}\}_{\mu=0}^{n-1}$ 和 $\{\partial_{\zeta_\mu}\}_{\mu=0}^{n-1}$ 张成。

T^*M 中的超曲面 S^*M 由 $S^*M = f^{-1}(1)$ 给出，其中 $f\colon T^*M \to \mathbb{R}$ 是函数 $f(z,\zeta) = g^{\mu\nu}(z)\zeta_\mu\zeta_\nu$。

类似于切丛情形下所做的计算可得

$$\mathrm{d}f(Z^\mu \delta_{z^\mu} + \mathcal{Z}_\mu \partial_{\zeta_\mu}) = 2g^{\mu\nu}\zeta_\mu \mathcal{Z}_\nu \tag{110}$$

通过这一计算，我们可以定义

$$TS^*M = \{Z^\mu \delta_{z^\mu} + \mathcal{Z}_\mu \partial_{\zeta_\mu} \in TT^*M \mid (z,\zeta) \in S^*M,\ g^{\mu\nu}\zeta_\mu \mathcal{Z}_\nu = 0\} \tag{111}$$

将 TS^*M 的定义与方程（109）中的Sasaki度量相结合，即可得到 S^*M上的Sasaki度量。由于我们可以将量 $g^{\mu\nu}\mathcal{Z}_\nu$认定为 M上一个向量场的分量，即 $v:=g^{\mu\nu}\mathcal{Z}_\nu\partial_{z^\mu}$，因此在 TS^*M 的定义中我们可以写成

$$g^{\mu\nu}\zeta_\mu\mathcal{Z}_\nu=\zeta_\mu v^\mu=\zeta(v). \tag{112}$$

我们将法丛 $N\to S^*M$ 定义为

$$N_{(z,\zeta)}=\{v\in T_zM\,:\,\zeta(v)=0\} \tag{113}$$

通过上述讨论，我们看到，局部上，水平分布和垂直分布 $\mathcal{H}\to N$与 $\mathcal{V}\to N$分别可通过 $Z^\mu\delta_{z^\mu}\mapsto Z^\mu\partial_{z^\mu}$和$\mathcal{Z}_\mu\partial_{\zeta_\mu}\mapsto g^{\mu\nu}\mathcal{Z}_\mu\partial_{z^\nu}$进行识别。后一个映射应解释为基变换 $\partial_{\zeta_\mu}\mapsto g^{\mu\nu}\partial_{z^\nu}$，因为 $\mathcal{V}\to N$由自然同构 $K_{(z,\zeta)}$给出，其中 $(z,\ \zeta)\ \in T^*M$是第3节所定义的联络映射的局部版本。

定义 $p\colon\ T^*M\setminus 0\to S^*M$，令 $p(z,\ \zeta)=(z,\ \zeta/|\zeta|_g)$。我们将函数 $u\in C^\infty(T^*M)$ 的导数 δ_{z^μ}和 ∂_{ζ_μ}从 T^*M扩展到 S^*M，定义如下：

$$\delta_{z^\mu}u=\delta_{z^\mu}(u\circ p)|_{S^*M}\quad\text{and}\quad\partial_{\zeta_\mu}u=\partial_{\zeta_\mu}(u\circ p)|_{S^*M}. \tag{114}$$

我们通过考虑限制 $u_z=u|_{S^*_zM}$ 来计算垂直梯度。使用 p 将 u_z 从 S^*_zM 延拓到 T^*_zM，使得微分为

$$\mathrm{d}(u_z\circ p)=\partial_{\zeta_\mu}(u(z,\zeta))\mathrm{d}\zeta_\mu=\partial_{\zeta_\mu}u\mathrm{d}\zeta_\mu \tag{115}$$

然后通过取音乐同构得到梯度

$$\nabla(u_z\circ p)=(g_{\mu\nu}\partial_{\zeta_\nu}u)\partial_{\zeta_\mu}. \tag{116}$$

v这个最终公式就是 $\mathcal{V}$ 上的垂直梯度 ∇。通过 $K_{(z,\zeta)}$ 进行识别 $\mathcal{V}\to N$，对于（z,ζ） $\in T^*M$，会改变基，使得在法丛 N 上，垂直梯度表示为

$$\overset{\mathrm{v}}{\nabla}u=(g_{\mu\nu}\partial_{\zeta_\mu}u)g^{\nu\lambda}\partial_{z^\lambda}=\delta^\lambda{}_\mu\partial_{\zeta_\mu}u\partial_{z^\lambda}=\partial_{\zeta_\mu}u\partial_{z^\mu} \tag{117}$$

$u\in C^\infty$（S^*M）的情形。类似于单位切丛 SM 的情形，经过计算可得水平梯度表示为

$$\overset{\mathrm{h}}{\nabla}u=(g^{\mu\nu}\delta_{z^\nu}u-(Xu)g^{\mu\nu}\zeta_\nu)\partial_{z^\mu} \tag{118}$$

$u\in C^\infty$（S^*M）的情形，其中 X 是测地流的哈密顿向量场。根据构造，我们有

$$\overset{\mathrm{v}}{\nabla}u(z,\zeta)\in N_{z,\zeta}\quad\text{and}\quad\overset{\mathrm{h}}{\nabla}u(z,\zeta)\in N_{z,\zeta} \tag{119}$$

对于所有（z,ζ） $\in S^*M$，也就是说，垂直梯度和水平梯度都是法丛 N 的截面。

References

[1] M. Albert、S. Borza 和 M. Gordina。Grushin空间上的测地线。预印本，arXiv:2509.03411 [math.DG] (2025)，2025。[2] Y. E. Anikonov 和 V. G. Romanov。关于由沿测地线的积分唯一确定一阶形式。 *J. Inverse Ill-Posed Probl.*，5 490，1997 6 487( ): – 。

[3] I. Beschastnyi 和 H. Quan。
α 2305 08280 -
[ ] 2023 2023
Grushin流形上拉普拉斯–贝尔特拉米算子的自伴性判据与自伴扩张。预印本，arXiv: .
math.DG ( )，。[4] S. Borza。
α 32 3 28, -
2022 78
Grushin平面的畸变系数。 *J. Geom. Anal.*，( ): 。编号/编号。[5] U. Boscain 和 C. Laurent。近黎曼几何中的拉普拉斯–贝尔特拉米算子。 *Ann. Inst. Fourier*，63(5):1739–1770，2013。[6] O. Calin 和 D.-C. Chang。 *Sub-Riemannian geometry. General theory and examples*，第126卷， *Encycl. Math. Appl.* 剑桥：剑桥大学出版社，2009。[7] M. V. de Hoop、J. Ilmavirta、A. Kykk¨anen 和 R. Mazzeo。气态巨行星上的几何反问题。预印本，arXiv:2403.05475 [math.DG] (2024)，2024。[8] Y. C. de Verd`ı`ere、C. Dietze、M. V. de Hoop 和 E. Tr´elat。若干奇异度量的韦尔公式及其在气态巨行星声学模态中的应用。预印本，arXiv:2406.19734 [math.AP] (2024)，2024。[9] C. Dietze。奇异黎曼流形上特征函数集中的临界情形。预印本，arXiv:2510.23520 [math.SP] (2025)，2025。[10] C. Dietze 和 L. Read。奇异黎曼流形上的特征函数集中。预印本，arXiv:2410.20563 [math.AP] (2024)，2024。[11] N. Eptaminitakis。简单渐近双曲流形上X射线变换的稳定性估计。 *Pure Appl. Anal.*，4(3):487–516，2022。[12] N. Eptaminitakis 和 C. R. Graham。通过射影紧化研究渐近双曲流形上的局部X射线变换。 *N. Z. J. Math.*，52:733–763，2021。[13] N. Eptaminitakis、F. Monard 和 Y. Zou。双曲X射线变换：新的值域刻画、映射性质与函数关系。预印本，arXiv:2405.02521 [math.AP] (2025)，2025。[14] N. Eptaminitakis、F. Monard 和 Y. J. Zou。渐近双曲曲面上的张量层析成像。预印本，arXiv:2510.04144 [math.DG] (2025)，2025。[15] P. Funk。 ¨关于所有测地线均闭合的曲面。 *Math. Ann.*，74 278 300，1913 : – 。[16] C. R. Graham、C. Guillarmou、P. Stefanov 和 G. Uhlmann。渐近双曲流形上的X射线变换与边界刚性。 *Ann. Inst. Fourier*，69 7 2857 2919，2019 ( ): – 。[17] C. Guillarmou 和 A. S
´
Inverse a
Probl. Imaging 3 1 1 15, 2009
Barreto。爱因斯坦流形上的反问题。，( ): – 。[18] J. Ilmavirta。伪黎曼几何中的X射线变换。 *J. Geom. Anal.*，28 606 626，2018 : – 。[19] J. Ilmavirta 和 F. Monard。带边界流形上的积分几何及其应用。载于 *The Radon transform. The first 100 years and beyond*，第43–114页。柏林：De Gruyter，2019。[20] M. Lassas、V. Sharafutdinov 和 G. Uhlmann。黎曼度量的半全局边界刚性。 *Math. Ann.*，325(4):767–793，2003。[21] J. M. Lee。 *Introduction to smooth manifolds*，第218卷， *Grad. Texts Math.* 纽约：施普林格，第2修订版，2013。[22] T. Lefeuvre。负曲率渐近双曲曲面的边界刚性。 *Comment. Math. Helv.*，95(1):129–166，2020。[23] J. Lehtonen、J. Railo 和 M. Salo。Cartan–Hadamard流形上的张量层析成像。 *Inverse Probl.*，34(4):27，2018。编号 044004。[24] J. Marx-Kuo。重整化面积的反问题：利用极小曲面确定体度量。 *N. Z. J. Math.*，56:69–124，2025。[25] K. P. Mok。余切丛上的度量与联络。 *Kodai Math. J.*，28(2)，1977。[26] R. G. Mukhometov。平面上的地震学运动学反问题。Mat. Probl. Geofiz. 6，2，243-254 (1975)，1975。[27] R. G. Mukhometov。二维黎曼度量的恢复问题与积分几何。 *Sov. Math.*， *Dokl.*，18:27–31，1977。[28] R. G. Mukhometov。重建黎曼度量的问题。
Sib. Math. , : – 。
J. 22 420 433, 1981

[29] G. P. Paternain。 *Geodesic flows*，第180卷， *Progress in mathematics*。Birkh¨auser，1999年。[30] G. P. Paternain、M. Salo 和 G. Uhlmann。曲面上的张量层析成像。

Invent. ， （）： –。 *Math.* 193 1 229 247, 2013

[31] G. P. Paternain、M. Salo 和 G. Uhlmann。张量层析成像：进展与挑战。 *Chin. Ann. Math.， Ser. B*，35(3):399–428，2014年。[32] G. P. Paternain、M. Salo 和 G. Uhlmann。高维中的不变分布、Beurling 变换与张量层析成像。 *Math. Ann.*，363 362，2015 1 2 305(-): –。[33] G. P. Paternain、M. Salo 和 G. Uhlmann。

Geometric inverse problems. With empha- ，剑桥：*sis on two dimensions* 204 *Camb. Stud. Adv. Math.* 剑桥大学出版社，2023年。[34] M. Romney。共形 Grushin 空间。 *Conform. Geom. Dyn.*，20:97–115，2016年。[35] T. Schuster。三维多普勒变换：重建核的基本性质与计算。 *Inverse Problems*，16(3):701，2000年6月。[36] V. A. Sharafutdinov。 *Integral geometry for tensor fields. Transl. from the Russian*。逆问题丛书。乌得勒支：VSP，1994年。[37] P. Stefanov 和 G. Uhlmann。一般简单度量的边界刚性与稳定性。 *J. Am. Math. Soc.*，18(4):975–1003，2005年。[38] H. Whitney。可微流形。 *Ann. Math. (2)*，37:645–680，1936年。