arXiv:2602.10335v1 [math.AP] 10 Feb 2026

时间尺度上的非线性椭圆Dirichlet边值问题

Shalmali Bandyopadhyay[1], F. Ay.ca C.etinkaya[2], 和 Tom Cuchta[3]

[1] *The University of Tennessee at Martin, email: sbandyo5@utm.edu*

[2] *The University of Tennessee at Chattanooga, email: fatmaayca-cetinkaya@utc.edu*

[3] *Marshall University, email: cuchta@marshall.edu*

摘要

我们建立了n维时间尺度域上非线性椭圆Dirichlet边值问题的存在唯一性结果。时间尺度提供了一个统一框架，涵盖连续、离散和混合情形。在非线性项满足以第一特征值为界的Lipschitz条件时，我们利用压缩映射定理证明了存在唯一性。在较弱的单侧增长条件下，我们利用Leray–Schauder不动点定理证明了存在性。为应用这些泛函分析方法，我们将问题重新表述为算子方程，这需要发展混合nabla-delta导数下Dirichlet拉普拉斯算子的谱理论。我们证明了其自伴性、正性和特征函数完备性，并证明在n维情形下，乘积特征函数构成完备标准正交基。

关键词： 偏动态方程，椭圆问题，Dirichlet边界条件，特征函数展开，时间尺度

数学主题分类（2020）： 34N05, 35J65,35J61, 35J15.

1 引言

我们考虑非线性椭圆Dirichlet边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{T}} u + f(x, u(x)) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

$_n$其中 $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个非线性项，时间尺度拉普拉斯算子由$\Delta_{\mathbb{T}} u = \sum u^{\nabla_i \Delta_i}$定义，并且$_{i=1}$定义域为$\Omega = \prod (a_i, b_i) \cap \mathbb{T}_i$，其中每个 $\mathbb{T}_i$ 是带有 $a_i, b_i \in \mathbb{T}_i$ 并满足 $a_i < b_i$的时间尺度。为记号方便起见，令 $A_i = (a_i, b_i) \cap \mathbb{T}_i$ 和 $\partial A_i = \{a_i, b_i\}$。边界由 $\partial\Omega = \Omega \setminus \Omega$给出；具体地，点 $x \in \Omega$位于 $\partial\Omega$上，当且仅当 $x_i \in \{a_i, b_i\}$ 对至少一个指标 i成立。

时间尺度微积分在 [13] 中被引入，为连续分析（$\mathbb{T} = \mathbb{R}$）、离散分析（$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$）和混合区域提供了一个统一的框架。相关理论在专著 [5, 8], 中得到了系统发展，读者可在其中找到delta导数与nabla导数、前向与后向跳跃算子以及粒度函数的基本定义。时间尺度模型自然地应用于连续与离散动力学并存的场景：在种群生物学中，昆虫种群可能在活动季节连续发育，却在休眠期经历离散的世代更替 [1, 10],；而在经济学中，时间尺度微积分则适用于决策时点间隔不规则的模型 [12, 18]。时间尺度上的椭圆方程用于描述这类混合系统中的稳态现象。尽管时间尺度上的常动态方程已得到广泛研究，偏动态方程理论的发展仍相对滞后。

为准确表述我们的结果，我们先介绍所使用的函数空间 .

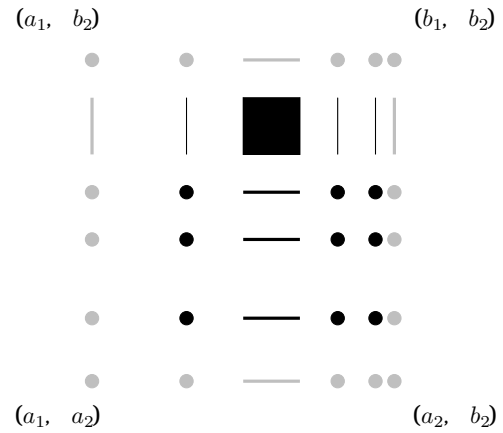


图1：时间尺度上的二维矩形区域的边界分解。灰色边和点分别是集合 $A_1 \times \partial A_2$ 和 $\partial A_1 \times A_2$，而 Ω 由黑色矩形、线段和点组成。

$_n$**定义1.1**。令 $\mathscr{H}$ 表示由 $\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_n$-可测函数 u: $\prod_{i=1}^{} [a_i, b_i) \cap \mathbb{T}_i \to \mathbb{R}$ 构成的实希尔伯特空间 满足

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} u^2(x)\,\Delta_n x_n\cdots\Delta_2 x_2\,\Delta_1 x_1 < \infty,$$

配备内积

$$\langle u, v\rangle = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} u(x)v(x)\,\Delta_n x_n\cdots\Delta_2 x_2\,\Delta_1 x_1.$$

定义1.2. 令 $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ 表示满足以下条件的函数集合 $u \in \mathscr{H}$

(i) u 在 Ω 上连续，

(ii) $u = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上，

(iii) 对每个 $i \in \{1,\dots,n\}$，u 关于 $x_i \in (a_i, b_i]$ 对所有 x_j、所有 $j \neq i$ 均连续 ∇_i 可微，并且

(iv) 对于每个 $i \in \{1,\dots,n\}$, u^{∇_i}，关于 $x_i \in [a_i, b_i$ 均为 Δ_i-可微) 对所有满足 $j \neq i$ 的 x_j 都成立。

我们对非线性项 f: $\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 作出如下假设:

$$|f(x,\eta) - f(x,\gamma)| \le L|\eta - \gamma| \quad \text{for all } x \in \Omega \text{ and } \eta, \gamma \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

其中 $L > 0$ 是 利普希茨常数。我们还令 λ_1 表示线性问题的第一特征值

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{T}} u + \lambda u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

现在陈述本文的主要结果。

定理 1.3。假设(1.2) 成立，且 $L < \lambda_1$。则边值问题(1.1) 在$\mathscr{D}$中有唯一解。

严格不等式 $L < \lambda_1$ 至关重要：在共振情况下，即 $f(x,\ u) = -\lambda_1 u$ 且 $L = \lambda_1$时，唯一性不成立，问题可能有无穷多个解（见例 7.6）。更广泛地说，许多自然的非线性项，例如 $f(x,\ u) = -cu + d\sin(u)$, 其中 $c > \lambda_1$，满足 Lipschitz条件，但具有 $L > \lambda_1$，因此超出了定理 1.3 的适用范围。对于这类问题，我们在较弱的单侧增长条件下证明了存在性，但唯一性可能不再成立。

Theo注 1.4。 假设 (1.2)。设存在常数 $\alpha \in (0,\ \lambda_1)$ 和 $C \geq 0$ ，使得 t

$$f(x,\eta)\,\eta \leq \alpha\eta^2 + C \quad \textit{for all } x \in \Omega,\ \eta \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

那么，边值问题(1.1) 在 $\mathscr{D}$中至少有一个解。

当 $f(x,\eta)\eta$受系数小于 λ_1的二次函数控制时，单侧条件(1.4)成立。定理 1.3 使用压缩映射定理证明，而定理 1.4 使用Leray–Schauder不动点定理证明。两个证明都需要将微分方程(1.1)重新表述为 $u = A^{-1}F(u)$ 形式的算子方程，其中 $A = -\Delta_{\mathbb{T}}$ 的定义域为 $\mathscr{D}$，而 F 是由 f诱导的Nemytskii 算子。这需要发展关于(1.1)的谱理论。我们证明了自伴性、正性和特征函数完备性，由此可知 A^{-1} 是一个紧有界算子。

对时间尺度上的偏动态方程的研究始于 [15, 16], ，该文建立了基础理论及其在热传递和波传播中的应用；随后， [9]针对某些时间尺度以显式形式求解了这类线性模型。 [22, 23],建立了椭圆动态方程的最大值原理，而 [6, 7]建立了多重积分的测度论框架。当 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$时， $\Delta_{\mathbb{T}}$ 算子化为与格点微分方程背景下 [16, 4], [19,(1.2)], 和 [20,(1.1)]中研究的相同空间差分算子。

据我们所知，最早研究时间尺度上的非线性椭圆边值问题的是 [14], ，该研究在 Lipschitz条件下 $L < \lambda_1$ 利用压缩映射定理证明了二维情形下解的存在唯一性。该研究采用带有 μ_∇-测度的 $\Delta\nabla$ 算子，沿袭了 [11], 的一维谱理论，并在未给出证明的情况下援引 [11] ，断言二维情形下乘积特征函数的完备性。推广到 n 维需要用到 [7], 所发展的时间尺度上的多重积分 Lebesgue 理论，该理论基于 Δ-测度构建。由于文献中尚无 n维 Lebesgue ∇积分理论，函数空间框架迫使我们采用 μ_Δ-测度，而相对于该测度自伴的算子是 $\nabla\Delta$，而非 $\Delta\nabla$。然而，文献中关于 $\nabla\Delta$ 算子的谱理论 [11, （注 3.4）] 十分有限： [11] 在一维情形下研究了基于 μ_∇-测度的 $\Delta\nabla$ ，而 [2] 则将其推广到更高阶的$\Delta\nabla$方程，但仍限于一维。因此，我们在第 3–4 节从头发展 $\nabla\Delta$ 算子的谱理论，在 n 维情形下确立其自伴性、正性、特征函数完备性及特征函数展开。除谱理论外，我们还引入了单侧增长条件（1.4），并通过 Leray–Schauder不动点定理（定理 1.4）证明存在性；这一结果在 [14]中没有对应物。对于 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$， $\nabla\Delta$ 理论与 $\Delta\nabla$ 理论是一致的。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍时间尺度微积分的预备知识。第 3 节建立一维狄利克雷问题的谱理论。第 4 节通过分离变量将该理论推广到 n 维。第 5 节和第 6 节证明定理 1.3 和 1.4。第 7 节通过具体例子展示两个定理的适用范围及其锐性，第 8 节则讨论其局限性和未来研究方向。

2 预备知识

我们将介绍本研究所需的背景知识。delta导数 f^Δ 和nabla导数f^∇ 的定义同 [5]。若点 $t \in \mathbb{T}$ 满足 $\sigma(t) > t$，则称其为右散点；若满足 $\sigma(t) = t$，则称其为右稠密点；若满足 $\rho(t) < t$，则称其为左散点；若满足 $\rho(t) = t$，则称其为左稠密点。同时为右散点和左散点的点称为孤立点。

我们首先陈述delta导数与nabla导数之间的基本关系。在 [3,定理 2.5、2.6], 中，证明了 Δ-导数和 ∇-导数满足以下公式：若f： $[a,b]\cap\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 在 $[a,b)\cap\mathbb{T}$ 上连续且 Δ-可导，并且其 f^Δ连续，则 f 在（$a,b]\cap\mathbb{T}$ 上 ∇-可导，并且

$$f^\nabla(t) = f^\Delta(\rho(t)) \quad \text{for all } t \in (a,b]\cap\mathbb{T}; \tag{2.1}$$

如果 f 在 $(a,b]\cap\mathbb{T}$ 上具有连续的 f^∇，则 f 在 $[a,b)$ 上是 Δ-可微的 $\cap\,\mathbb{T}$ 且

$$f^\Delta(t) = f^\nabla(\sigma(t)) \quad \text{for all } t \in [a,b)\cap\mathbb{T}. \tag{2.2}$$

以下分部积分公式 [11, 定理 2.4] 对于确立我们的微分算子的自伴性至关重要：对于 $[a,b]\cap\mathbb{T}$ 上连续的 f 和 g，其中 f^{Δ} 和 g^{∇} 连续且有界，

$$\int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g^{\nabla}(t)\nabla t, \tag{2.3}$$

and

$$\int_a^b f^{\nabla}(t)g(t)\nabla t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t. \tag{2.4}$$

时间尺度上的富比尼定理 [6, 定理 3.10] 指出，对于函数 $f\colon\ \mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2\to\mathbb{R}$ 若其在 $R=[a,b)\times[c,d)\subset\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2$上有界且$\Delta$-可积，并且对每个 $(t,s)\in[a,b)\cap\mathbb{T}_1\times[c,d)\cap\mathbb{T}_2\in[a,b)$，积分 $I(t)=\int_c^d f(t,\ s)\Delta_2 s$和 $K(s)=\int_a^b f(t,\ s)\Delta_1 t$均存在，则迭代积分存在且满足

$$\iint_R f(t,s)\Delta_1 t\Delta_2 s = \int_a^b I(t)\Delta_1 t = \int_c^d K(s)\Delta_2 s. \tag{2.5}$$

最后 ，我们回顾以下与本文目的相关的标准不动点结果 s.

定理 2.1 (希尔伯特-施密特定理)。 设$(\mathscr{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为一个实希尔伯特空间，且 $T\colon\ \mathscr{H}\to\mathscr{H}$为有界紧自伴算子。则存在一列非零实特征值 $\mu_i,i=1,\dots,N$（其中 $N=$秩为 T），满足 $|\mu_i|$单调非增；并且存在一组对应特征函数的标准正交集 $\{\phi_i\}_{i=1}^{N}N$，使得 $Tx=\sum\mu_i\langle\phi_i,x\rangle\phi_i$（对 $x\in\mathscr{H}$成立）。若$\ker(T)=\{0\}$，则 $_{i=1}$特征函数 $\{\phi_i\}_{i=1}^{N}$ 构成 $\mathscr{H}$的正交归一基。

定理 2.2 （压缩映射定理）。设（X,d）是一个非空完备度量空间，且$W\colon\ X\to X$ 是一个压缩映射；也就是说，存在常数 $0<c<1$，使得对所有 $x,y\in X$,d（Wx,Wy）$\le c\,d$（x,y）。那么， W有唯一的不动点 $x^*\in X$，并且对任意 $x_0\in X$，由 $x_{n+1}=W$（x_n）定义的序列收敛到 x^*。

定理 2.3 （Leray–Schauder不动点定理 [17, 第 XII 章]）。设 X 是一个实巴拿赫空间，且$G\colon\ X\to X$ 是一个连续紧算子。假设该集合

$$\{x\in X\colon x=\tau Gx\ \textit{for some}\ \tau\in[0,1]\}$$

有界。那么， G 在 X中至少有一个不动点。

3 一维狄利克雷特征值问题

我们针对 $\nabla\Delta$ 算子发展一维狄利克雷特征值问题的特征函数展开理论。在 [11], 特征函数展开中， $-[p(t)y^{\Delta}(t)]^{\nabla}+q(t)y(t)=\lambda y(t)$是利用带有 μ_{∇}测度的 $\Delta\nabla$ 算子建立的。我们针对带有 μ_{Δ}测度的 $\nabla\Delta$ 算子发展狄利克雷问题的类似理论。

设 $\mathbb{T}$为一个时间尺度，并设 $a,\ b\in\mathbb{T}$为满足 $a<b$的固定点，使得$(a,\ b)\cap\mathbb{T}$非空。我们考虑一维特征值问题

$$\begin{cases} -y^{\nabla\Delta}(t)=\lambda y(t), & t\in(a,b)\cap\mathbb{T},\\ y(a)=y(b)=0. \end{cases} \tag{3.1}$$

记 作 H为所有 Δ-可测函数 $y\colon\ [a,b)\cap\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 构成的实希尔伯特空间，满足 g

(i) $y(a)=0$ 当且仅当 a 为右散点时，以及

(ii) $\int_a^b y^2(t)\,\Delta t<\infty$.

空间 H配备了内积 $\langle y,\ z\rangle = \int_a^b y(t)z(t)\Delta t$ 以及由此诱导的范数 $\|y\| = \sqrt{\langle y,\ y\rangle}$。这是第1节中定义的空间 $\mathscr{H}$的一维类比。

注3.1. 空间 H 是完备的。为此，回顾一下，时间尺度上的勒贝格 Δ-测度 μ_Δ 是通过卡拉泰奥多里扩张构造的，具体如 [7]中所述。关于该测度的平方可积函数空间 $L^2([a,b)\ \mu_\Delta)$ 是一个希尔伯特空间。当 a 为右散点时，条件 $y(a) = 0$ 定义了 $L^2([a,b)\ \mu_\Delta)$的一个闭子空间，因为在右散点处取值是一个连续线性泛函。因此，H 作为完备空间的闭子空间也是完备的。

令 D 表示满足以下条件的所有函数 $y \in H$ 的集合（改编为第1节中引入的定义域的一维类比）

(i) y 在 $[a,b) \cap \mathbb{T}$, $y(a) = 0$上连续，存在 $y(b) := \lim_{t\to b^-} y(t)$且 $y(b) = 0$ ，

(ii) y 在 $(a,b]$ 上连续 ∇-可微，且存在有限极限 $y^\nabla(a) := \lim_{t\to a^+} y^\nabla(t)$ 与$y^\nabla(b) := \lim_{t\to b^-} y^\nabla(t)$，并且

(iii) y^∇ 在 $[a,b)$ 上 Δ-可微，且 $y^{\nabla\Delta} \in H$。

我们定义算子 A: $D \subset H \to H$ 为 $(Ay)(t) = -y^{\nabla\Delta}(t)$。特征值问题 (3.1) 等价于算子方程 $Ay = \lambda y$，其中 $y \in D$ 满足 $y \neq 0$。

注3.2. 集合 D 是 H中的稠密线性子空间。为看出稠密性，注意到在离散情形下，当 $(a,b) \cap \mathbb{T}$ 由有限多个点组成时， H 是有限维的且 $D = H$。在连续情形$\mathbb{T} = \mathbb{R}$中，稠密性由如下标准结果得出： $C_0^\infty(a,b)$ 在 $L^2(a,b)$ 中稠密。对于一般时间尺度，当 a 为右散点时，条件 $y(a) = 0$ （在 H 的定义中所施加）对于保证稠密性至关重要；关于 $\Delta\nabla$ 情形中的类似观察，参见 [11, 注3.4] 。

现在我们来探讨算子 A的自伴性与正性。

定理3.3. 算子 A 是对称且为正的。具体而言，对于所有 $y, z \in D$ ，

$$\langle Ay, z\rangle = \langle y, Az\rangle, \tag{3.2}$$

$$\langle Ay, y\rangle = \int_a^b \left(y^\nabla(t)\right)^2 \nabla t. \tag{3.3}$$

特别地，对于所有满足 $y \neq 0$的 $y \in D$，有 $\langle Ay, y\rangle > 0$。

证明. 对于 $y,\ z \in D$, $\langle Ay,\ z\rangle = -\int_a^b y^{\nabla\Delta}(t)z(t)\Delta t$。将 (2.3) 应用于 $f = y^\nabla$ 和 $g = z$，得到

$$-\int_a^b y^{\nabla\Delta}(t)z(t)\Delta t = -y^\nabla(t)z(t)\Big|_a^b + \int_a^b y^\nabla(t)z^\nabla(t)\nabla t = \int_a^b y^\nabla(t)z^\nabla(t)\nabla t,$$

此处用到了边界条件 $z(a) = z(b) = 0$。现在将 (2.4) 应用于 $f = y$ 和 $g = z^\nabla$，并利用$y(a) = y(b) = 0$，得到

$$\int_a^b y^\nabla(t)z^\nabla(t)\nabla t = y(t)z^\nabla(t)\Big|_a^b - \int_a^b y(t)z^{\nabla\Delta}(t)\Delta t = -\int_a^b y(t)z^{\nabla\Delta}(t)\Delta t = \langle y, Az\rangle, \tag{3.4}$$

从而证明了 (3.2)。令 (3.4) 中的 $z = y$ 取为相应值，即可得到 (3.3)。由于 (3.3) 中的被积函数非负，因此有 $\langle Ay,\ y\rangle \geq 0$。若 $\langle Ay,\ y\rangle = 0$, 则对几乎所有 t, $y^\nabla(t) = 0$，这意味着 y为常数。(3.1) 中的边界条件进而推出 $y \equiv 0$。因此，对于所有非零的 $y \in D$, 都有 $\langle Ay,\ y\rangle > 0$ 。证明完毕。 □

推论 3.4. (3.1)的所有特征值均为实数、正且单。对应于不同特征值的特征函数相互正交。

证明. 设 λ 为特征值，其特征函数为 $y \neq 0$。由于 A 在实希尔伯特空间 H上是对称且正的，特征值 λ 满足 $\lambda\|y\|^2 = \langle Ay, y\rangle > 0$, 这意味着 $\lambda \in \mathbb{R}^+$。

关于正交性，设 $Ay_1 = \lambda_1 y_1$ 和 $Ay_2 = \lambda_2 y_2$ 满足 $\lambda_1 \neq \lambda_2$。由 (3.2) 可得 $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle y_1, y_2\rangle = \langle Ay_1, y_2\rangle - \langle y_1, Ay_2\rangle = 0$, 又由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 因此可得 $\langle y_1, y_2\rangle = 0$。

最后，我们证明所有特征值都是单的。设 y_1 和 y_2 是 (3.1) 的解。定义朗斯基行列式$W(t) := y_1(t)y_2^{\nabla}(t) - y_2(t)y_1^{\nabla}(t)$。我们证明 W在 $(a, b] \cap \mathbb{T}$ 上为常数。利用 delta导数的乘积法则，我们计算得

$$W^{\Delta} = y_1^{\Delta}y_2^{\nabla} + y_1^{\sigma}y_2^{\nabla\Delta} - y_2^{\Delta}y_1^{\nabla} - y_2^{\sigma}y_1^{\nabla\Delta}. \tag{3.5}$$

由 (2.1)–(2.2)，我们有 $y_i^{\Delta} = y_i^{\nabla^\sigma}$。然后，将 $y_i^{\Delta} = y_i^{\nabla^\sigma}$ 和 $y_i^{\nabla\Delta} = -\lambda y_i$ 代入 (3.5)，我们看到

$$W^{\Delta} = y_1^{\nabla^\sigma}y_2^{\nabla} - y_2^{\nabla^\sigma}y_1^{\nabla} - \lambda(y_1^{\sigma}y_2 - y_2^{\sigma}y_1).$$

若 t 是右稠密的，则 $\sigma(t) = t$，从而 $W^{\Delta} = 0$。若 t 是右散点，则 $y_i^{\sigma} = y_i + \mu y_i^{\Delta}$，化简后各项再次抵消，得到 $W^{\Delta} = 0$。因此 W在 $(a, b] \cap \mathbb{T}$ 上为常数。由于$y_1(a) = y_2(a) = 0$，我们有 $W(a) = 0$，从而 $W \equiv 0$ 在 $(a, b] \cap \mathbb{T}$ 上成立。因此 y_1与 y_2线性相关。 □

我们现在证明 算子 A具有平凡核，并用格林函数构造其逆 .

引理 3.5. 核$(A) = \{0\}$。

证明。若 $y \in D$ 且 $Ay = 0$，则由 (3.3)，$0 = \langle Ay, y\rangle = \int_a^b \left(y^{\nabla}(t)\right)^2 \nabla t$，这意味着对所有$t \in (a, b] \cap \mathbb{T}$，有 $y^{\nabla}(t) = 0$。因此边界条件 $y(a) = 0$给出 $y \equiv 0$在 $[a, b] \cap \mathbb{T}$上。 □

由于 $\ker(A) = \{0\}$，逆算子 A^{-1} 存在。为给出显式表示，我们引入格林函数。

定义 3.6. 问题 (3.1) 的格林函数定义为

$$G(t, s) = \frac{1}{b-a}\begin{cases}(t-a)(b-s) & \text{if } t \leq s,\\ (s-a)(b-t) & \text{if } t \geq s.\end{cases} \tag{3.6}$$

现在我们说明如何利用 G 表示 A^{-1}。

定理 3.7. 设 G 如 (3.6)中所定义。则逆算子 $A^{-1}\colon H \to D$ *is*

$$\left(A^{-1}u\right)(t) = \int_a^b G(t, s)u(s)\Delta s. \tag{3.7}$$

此外，A^{-1} 在 H上是对称且紧的。

证明. 设 $u \in H$并定义 $y(t) := \int_a^b G(t, s)u(s)\,\Delta s$。由 (3.6)，对所有 s，$G(a, s) = G(b, s) = 0$，因此$y(a) = y(b) = 0$。对于 $t \in (a, b) \cap \mathbb{T}$,

$$y(t) = \int_a^t G(t, s)u(s)\,\Delta s + \int_t^b G(t, s)u(s)\,\Delta s = \frac{b-t}{b-a}\int_a^t (s-a)u(s)\,\Delta s + \frac{t-a}{b-a}\int_t^b (b-s)u(s)\,\Delta s.$$

定义 $I_1(t) = \int_a^t (s-a)u(s)\,\Delta s$ 和 $I_2(t) = \int_t^b (b-s)u(s)\,\Delta s$，使得 $y(t) = \frac{1}{b-a}\Big[(b-t)I_1(t) + (t-a)I_2(t)\Big]$。

那么 $I_1^{\Delta}(t) = (t-a)u(t)$，且 $I_2^{\Delta}(t) = -(b-t)u(t)$，因此应用乘积法则并化简后，

$$(b-a)y^{\Delta}(t) = I_2(t) - I_1(t) - (b-a)\mu(t)u(t). \tag{3.8}$$

应用 (2.1)，(3.8) 化为

$$(b-a)y^{\nabla}(t) = I_2(\rho(t)) - I_1(\rho(t)) - (b-a)\mu(\rho(t))u(\rho(t)).$$

为完成验证，我们直接计算 $y^{\nabla\Delta}$。根据（2.1），$I_1^{\nabla}(t) = I_1^{\Delta}(\rho(t)) = (\rho(t)-a)u(\rho(t))$，且$I_2^{\nabla}(t) = I_2^{\Delta}(\rho(t)) = -(b-\rho(t))u(\rho(t))$。根据乘积法则，

$$[(b-t)I_1(t)]^{\nabla} = -I_1(t) + (b-\rho(t))(\rho(t)-a)u(\rho(t)),$$
$$[(t-a)I_2(t)]^{\nabla} = I_2(t) - (\rho(t)-a)(b-\rho(t))u(\rho(t)).$$

将这些表达式相加可得（$b-a$）$y^{\nabla}(t) = I_2(t) - I_1(t)$。现在我们计算

$$y^{\nabla\Delta}(t) = \frac{I_2^{\Delta}(t) - I_1^{\Delta}(t)}{b-a} = \frac{-(b-t)u(t) - (t-a)u(t)}{b-a} = -u(t).$$

因此，当 $t \in (a,\ b)$时，$-y^{\nabla\Delta}(t) = u(t)$，从而有 $y = A^{-1}u$。

F由紧性，令 $M = \max_{(t,\ s)\in([a,b]\cap\mathbb{T})_2^{2}} |G(t,\ s)|$。根据柯西–施瓦茨不等式，

$$|(A^{-1}u)(t)|^2 \le \left(\int_a^b |G(t,s)|^2\,\Delta s\right)\|u\|^2 \le M^2(b-a)\|u\|^2.$$

因此 $\|A^{-1}u\|_\infty \le M\sqrt{b-a}\,\|u\|$。此外，对于 $t_1,\ t_2 \in [a,b]$，

$$\left|(A^{-1}u)(t_1) - (A^{-1}u)(t_2)\right| \le \sqrt{b-a}\,\|u\|\left(\int_a^b |G(t_1,s) - G(t_2,s)|^2\,\Delta s\right)^{1/2}.$$

由于 G 在 $([a,b]\cap\mathbb{T})$ 上一致连续，^{2}, 右端项当 $t_1 \to t_2$ 时一致趋于 0。因此，A^{-1} 将 H 中的有界集映射为 $C([a,b]\cap\mathbb{T})$ 中等度连续且一致有界的集合。由 Arzel`a–Ascoli 定理，A^{-1} 在 H 上是紧的。由 (3.6)，由于 $G(t,\ s) = G(s,\ t)$，我们有 $\langle A^{-1}u,\ v\rangle = \langle u,\ A^{-1}v\rangle$，所以 A^{-1} 是对称的。 □

接下来我们使用定理 2.1。

定理 3.8。对于特征值问题 (3.1)，存在一个由 $\{\phi_k\}_{k=1}^N$ 构成的正交归一系，它们分别对应于特征值 $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$，其中 $N =$ 维数 H。每个特征值 λ_k 都是正且为单特征值。这些特征值可以排列为 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$ 系统 $\{\phi_k\}_{k=1}^N$ 构成希尔伯特空间 H 的正交归一基。因此，任意函数 $f \in H$ 都可以展开为

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k(t), \tag{3.9}$$

其中傅里叶系数由 $c_k = \langle f, \phi_k\rangle = \int_a^b f(t)\phi_k(t)\,\Delta t.$ 给出。当 $N < \infty$ 时，该和为有限和，且等式精确成立。当 $N = \infty$时，该级数在 H 的范数意义下收敛于 f，即$\lim_{m\to\infty}\left\|f - \sum_{k=1}^{m} c_k\phi_k\right\| = 0$。此外，帕塞瓦尔等式 $\int_a^b f^2(t)\Delta t = \sum_{k=1}^{N} c_k^2$ 成立。 (3.9)

证明。特征值问题 $Ay = \lambda y$ 与 $y \ne 0$ 等价于 $A^{-1}y = \widehat{\lambda}y$，其中 $\widehat{\lambda} = 1/\lambda$。由定理 3.7，$A^{-1}$ 在 H 上是紧且对称的。由引理 3.5，$\ker(A) = \{0\}$，从而 $\ker(A^{-1}) = \{0\}$：若对某个 $y \in H$ 有 $A^{-1}y = 0$，则对两边应用 A 可得 $y = A(A^{-1}y) = 0$。

根据定理 2.1，存在由 A^{-1} 的特征函数构成的正交归一系 $\{\phi_k\}_{k=1}^N$，对应于非零特征值 $\left\{\widehat{\lambda}_k\right\}_{k=1}^N$，其中 $N = \dim H$。由于 $\ker(A^{-1}) = \{0\}$，该系统构成了 H 的正交归一基。

每个 ϕ_k 都满足 $A^{-1}\phi_k = \widehat{\lambda}_k\phi_k$，其中 $\widehat{\lambda}_k \neq 0$。对两边应用 A 得到 $\phi_k = \widehat{\lambda}_k A\phi_k$，因此 $A\phi_k = \lambda_k\phi_k$，其中 $\lambda_k = 1/\widehat{\lambda}_k$。根据推论 3.4，对于所有 k，$\lambda_k > 0$，而对于 $j \neq k$，$\lambda_j \neq \lambda_k$。由于 $|\lambda_k|$ 是单调非增的，且当 $N = \infty$ 时，$\lambda_k \to 0$ 随 $k \to \infty$ 趋于……，因此特征值满足 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N$。由于 $\{\phi_k\}_{k=1}^{N}$ 是 H 的正交归一基，任意 $f \in H$ 都可以展开为 $f = \sum c_k\phi_k$，其中 $c_k = \langle f,\ \phi_k\rangle$，并且帕塞瓦尔等式 $\|f\|^2 = \sum c_k^2$ 成立。当 $N = \infty$（可数无穷）时，由正交归一性可知，收敛成立，因为 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 < \infty$ 蕴含当 $m \to \infty$ 时 $\left\| f - \sum_{k=1}^{m} c_k\phi_k \right\| = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{m} c_k^2 \to 0$。

□

注 3.9. 问题(3.1)的特征值与特征函数的个数等于$\dim H$。当$(a,b)\cap\mathbb{T}$包含有限多个点，例如 m 个点时，则 $H \cong \mathbb{R}^m$，且问题(3.1) 化为恰有 m 个特征值的矩阵特征值问题。当$(a,b)\cap\mathbb{T}$ 为无限时，空间 H 是可分的无限维希尔伯特空间，因此$\dim H = \aleph_0$，且问题(3.1) 具有可数多个特征值 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$，且$\lambda_k \to \infty$。这既包括连续情形 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$，其中 $H = L^2([a,b))$，也包括离散情形 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$。此时特征函数展开(3.9) 是在 H 的范数下收敛的无穷级数。

下面的估计给出了第一特征值关于区间长度的下界。

定理 3.10. 问题 (3.1) 的第一特征值 λ_1 满足 $\lambda_1 \geq \frac{4}{(b-a)^2}$。

证明. 设 ϕ_1 为对应于 λ_1的归一化特征函数，使得 $\|\phi_1\| = 1$ 且 $A\phi_1 = \lambda_1\phi_1$。由积分方程 $\phi_1 = \lambda_1 A^{-1}\phi_1$，根据 (3.7)，可得 $\phi_1(t) = \lambda_1 \int_a^b G(t,\ s)\phi_1(s)\Delta s$。取绝对值并应用柯西–施瓦茨不等式，

$$|\phi_1(t)|^2 \leq \lambda_1^2 \left(\int_a^b |G(t,s)|^2\Delta s\right)\left(\int_a^b |\phi_1(s)|^2\Delta s\right) = \lambda_1^2 \left(\int_a^b |G(t,s)|^2\Delta s\right)\|\phi_1\|^2.$$

由于 $\|\phi_1\| = 1$，我们有 $|\phi_1(t)|^2 \leq \lambda_1^2 \int_a^b |G(t,\ s)|^2\Delta s$. 对两边关于 t积分，

$$\int_a^b |\phi_1(t)|^2\Delta t \leq \lambda_1^2 \int_a^b \int_a^b |G(t,s)|^2\Delta s\,\Delta t.$$

左边恰好为 $\|\phi_1\|^2 = 1$，因此

$$1 \leq \lambda_1^2 \int_a^b \int_a^b |G(t,s)|^2\Delta s\,\Delta t. \tag{3.10}$$

接下来需要给出二重积分的上界。由 (3.6)，格林函数满足 $0 \leq G(t,\ s) \leq (b-a)/4$，对所有 $t,\ s \in [a,b]$均成立，因为定义域上 $(t-a)(b-s)/(b-a)$ 和 $(s-a)(b-t)/(b-a)$ 的最大值在$t = s = \frac{a+b}{2}$时取得（见图 2），从而对所有 $s,\ t \in [a,b]$，都有 $|G(t,\ s)| \leq \frac{b-a}{4}$。因此 $|G(t,\ s)|^2 \leq (b-a)^2/16$，且

$$\int_a^b \int_a^b |G(t,s)|^2\Delta s\,\Delta t \leq \frac{(b-a)^2}{16}\int_a^b \int_a^b \Delta s\,\Delta t = \frac{(b-a)^2}{16}\cdot(b-a)^2 = \frac{(b-a)^4}{16}.$$

结合式(3.10)，我们得到 $1 \leq \lambda_1^2 \cdot (b-a)^4/16$，整理并开平方后即完成证明。

□

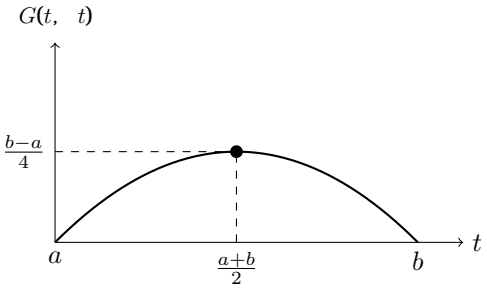


图 2： $G(t,\ t) = (t-a)(b-t)\,b-a$ 在值 $t=\dfrac{a+b}{2}$ 处达到其最大值。 ——

4 n维特征值问题

本节利用分离变量法，将一维理论推广到 n 维。回顾第1节中定义1.1和定义1.2所述的希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 和定义域 $\mathscr{D}$，其内积为

$$\langle u,v\rangle=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n}u(x)v(x)\,\Delta_n x_n\cdots\Delta_2 x_2\,\Delta_1 x_1, \tag{4.1}$$

以及诱导范数 $\|u\|=\sqrt{\langle u,\ \overline{u\rangle}}$。

命题4.1. 空间 $\mathscr{H}$ 是一个实希尔伯特空间。

证明. 该证明由如下事实得出： $\mathscr{H}$ 是 $L^2(\Omega\ \mu_\Delta)$的一个闭子空间，其中 μ_Δ 是按 [7]中的方式构造的乘积Δ-测度。该论证类似于注3.1中所讨论的一维情形。

□

定义线性算子 A： $\mathscr{D}\subset\mathscr{H}\to\mathscr{H}$，其定义如下

$$(Au)(x)=-\Delta_{\mathbb{T}}u(x)=-\sum_{i=1}^{n}u^{\nabla_i\Delta_i}(x). \tag{4.2}$$

现在证明 A 是对称且正的。

定理 4.2. 算子 A 是对称且正的。具体而言，对于所有 u、$v\in\mathscr{D}$ ，

$$\langle Au,v\rangle=\langle u,Av\rangle, \tag{4.3}$$

$$\langle Au,u\rangle=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(u^{\nabla_i}(x)\right)^2\nabla_i x_i\prod_{j\neq i}\Delta_j x_j. \tag{4.4}$$

此外，对于所有满足 $u\neq 0$ 的 $u\in\mathscr{D}$，都有 $\langle Au、\ u\rangle>0$。

证明。 我们证明求和式中定义 A 的 i^{th} 项的结论。考虑 $I_i=-\int_\Omega u^{\nabla_i\Delta_i}(x)v(x)\Delta^n x$，其中 $\Delta^n x=\Delta_n x_n\cdots\Delta_1 x_1$。根据富比尼定理，我们先对 x_i 积分，得到

$$I_i=-\int_{\Omega_{-i}}\left(\int_{a_i}^{b_i}u^{\nabla_i\Delta_i}(x)v(x)\Delta_i x_i\right)\prod_{j\neq i}\Delta_j x_j,$$

其中Ω_{-i} 表示对除 x_i之外的所有坐标进行积分。对于内积分，我们对 $f=u^{\nabla_i}$ 和 $g=v$应用分部积分公式(2.3)，得到

$$\int_{a_i}^{b_i}u^{\nabla_i\Delta_i}(x)v(x)\Delta_i x_i=u^{\nabla_i}(x)v(x)\Big|_{x_i=a_i}^{x_i=b_i}-\int_{a_i}^{b_i}u^{\nabla_i}(x)v^{\nabla_i}(x)\nabla_i x_i.$$

由于 $v=0$ 在 $\partial\Omega$上，边界项消失。因此

$$I_i=\int_{\Omega_i}\int_{a_i}^{b_i}u^{\nabla_i}(x)v^{\nabla_i}(x)\nabla_i x_i\prod_{j\neq i}\Delta_j x_j.$$

现在利用分部积分公式 (2.4) 和 $f=u$ 、 $g=v^{\nabla_i}$ ，得到

$$\int_{a_i}^{b_i}u^{\nabla_i}(x)v^{\nabla_i}(x)\nabla_i x_i=u(x)v^{\nabla_i}(x)\Big|_{x_i=a_i}^{x_i=b_i}-\int_{a_i}^{b_i}u(x)v^{\nabla_i\Delta_i}(x)\Delta_i x_i.$$

由于 $u=0$ 在 $\partial\Omega$ 上，边界项为零，因此得到 $I_i=-\int_\Omega u(x)v^{\nabla_i\Delta_i}(x)\Delta^n x$。对 i 求和即可证明 (4.3)。在中间步骤中令 $v=u$ ，即可得到 (4.4)。正性断言成立，因为若 $\langle Au,u\rangle=0$，则对所有 i， $u^{\nabla_i}=0$ 几乎处处成立；结合边界条件可知 $u\equiv 0$。 □

现在我们证明，可以通过分离变量求解 n 维特征值问题。考察该特征值问题

$$\begin{cases}Au=\lambda u & \text{in }\Omega,\\ u=0 & \text{on }\partial\Omega.\end{cases}\tag{4.5}$$

我们将用分离变量法求解 (4.5)。

定理 4.3。 特征值问题 (4.5) 存在如下形式的解

$$u(x)=u(x_1,x_2,\dots,x_n)=X_1(x_1)X_2(x_2)\cdots X_n(x_n),\tag{4.6}$$

其中每个 X_i 都满足一维特征值问题

$$\begin{cases}-X_i^{\nabla_i\Delta_i}(x_i)=\mu_i X_i(x_i), & x_i\in(a_i,b_i),\\ X_i(a_i)=X_i(b_i)=0,\end{cases}\tag{4.7}$$

$\lambda=\sum_{i=1}^{n}\mu_i$与

证明。 我们寻求形如 (4.6) 的非平凡解。代入特征值方程 $Au=\lambda u$，必须针对每个 $i\in\{1,\dots,n\}$计算 $u^{\nabla_i\Delta_i}$。由于 u是若干函数的乘积，且每个函数都仅依赖于一个变量，而算子 ∇_i 和 Δ_i 仅作用于变量 x_i，因此有 $u^{\nabla_i\Delta_i}(x)=\left(\prod_{j\neq i}X_j(x_j)\right)X_i^{\nabla_i\Delta_i}(x_i)$，于是 $Au=-\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}X_j(x_j)\right)X_i^{\nabla_i\Delta_i}(x_i)$。特征值方程 $Au=\lambda u$变为 $-\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}X_j(x_j)\right)X_i^{\nabla_i\Delta_i}(x_i)=\lambda\prod_{k=1}^{n}X_k(x_k)$。由于我们寻求非平凡解，因此在 $u(x)\neq 0$的点处，将等式两n边除以 $u(x)=\prod_{k=1}X_k(x_k)$，得到$k=1$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^{\nabla_i\Delta_i}(x_i)}{X_i(x_i)}=\lambda.\tag{4.8}$$

现在我们应用分离变量的基本原理。对每个 $n\ i\in\{1,\dots,n\}$，定义 $\Phi_i(x_i):=-X_i^{\nabla_i\Delta_i}(x_i)\underline{X_i(x_i)}$。方程 (4.8) 表明 $\sum\Phi_i(x_i)=\lambda$。关键的观察是，每个函数$i=1\Phi_i$ 仅依赖于单个变量 x_i，而它们的和等于常数 λ。我们断言，每个 Φ_i 本身都必须是常数。

为此，固定任意指标 $k \in \{1,\dots,n\}$，并考虑两个任意的点 $t_1, t_2 \in (a_k, b_k) \cap \mathbb{T}_k$。在 $x_k = t_1$ 和 $x_k = t_2$ 处（固定所有其他坐标）分别计算 $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x_i) = \lambda$，再将两式相减，得到 $\Phi_k(t_1) - \Phi_k(t_2) = 0$，因为对于 $i \neq k$，各项 $\Phi_i(x_i)$ 与 x_k 无关，因此相减后抵消。由于 t_1 和 t_2 是任意的，Φ_k 为常数。将此常数记为 μ_k，则对每个 $k \in \{1,\dots,n\}$，有 $X_k^{\nabla_k \Delta_k}(x_k)\, X_k(x_k) = \mu_k$，可改写为 $-X_k^{\nabla_k \Delta_k}(x_k) = \mu_k X_k(x_k)$。此外，这些常数满足 $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \lambda$。

还需验证边界条件。$u = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上的条件要求：只要任一坐标 x_j 等于 a_j 或 b_j，u 就必须为零。考虑如下边界面，其中 $x_j = a_j$，而 j 为某个固定值：

$$u(x_1,\dots,x_{j-1},a_j,x_{j+1},\dots,x_n) = X_1(x_1)\cdots X_{j-1}(x_{j-1})\cdot X_j(a_j)\cdot X_{j+1}(x_{j+1})\cdots X_n(x_n) = 0.$$

要使该条件对所有满足 $i \neq j$ 的 $x_i \in (a_i, b_i)$ 取值都成立，并且由于每个 X_i 都不恒为零，我们必须有 $X_j(a_j) = 0$。同理，$X_j(b_j) = 0$。由于 j 是任意的，我们得出，对于每个 $i \in \{1,\dots,n\}$，$X_i(a_i) = X_i(b_i) = 0$。

因此，每个因子 X_i 都满足一维特征值问题 (4.7)，其解由定理 3.8 刻画，而特征值 λ 可分解为各一维特征值 $\sum_{i=1}^{n}$ 之和 $\lambda = \sum \mu_i$。

□

根据定理 3.8，每个一维问题 (4.7) 的特征值为 $0 < \mu_1^{(i)} < \mu_2^{(i)} < \cdots$，对应的正交归一特征函数为 $\phi_1^{(i)}$，$\phi_2^{(i)}$，...，它们构成一维希尔伯特空间 $\mathscr{H}_i = L^2([a_i, b_i)\ \Delta_i)$ 的一组基。

定理 4.4. *n 维问题 (4.5) 的特征值为*

$$\lambda_{p_1,p_2,\dots,p_n} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{p_i}^{(i)}, \quad p_i \in \{1,2,3,\dots\},$$

$\prod_{i=1}^{n}$ 对应的正交归一特征函数为 $u_{p_1,p_2,\dots,p_n}(x) = \prod \phi_{p_i}^{(i)}(x_i)$。系统 $\{u_{p_1,\dots,p_n}\}$ 构成 $\mathscr{H}$ 的完备正交归一基。

证明。我们首先证明正交归一性。由富比尼定理 (2.5)，对 $\Omega = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ 的 n 维积分可分解为一维积分的乘积：

$$\langle u_{p_1,\dots,p_n}, u_{q_1,\dots,q_n} \rangle = \int_\Omega \prod_{i=1}^{n} \phi_{p_i}^{(i)}(x_i)\phi_{q_i}^{(i)}(x_i)\, \Delta^n x = \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \phi_{p_i}^{(i)}(x_i)\phi_{q_i}^{(i)}(x_i)\, \Delta_i x_i = \prod_{i=1}^{n} \delta_{p_i q_i},$$

其中，最后一个等式利用了每个 $\mathscr{H}_i$ 中一维特征函数 $\{\phi_k^{(i)}\}$ 的正交归一性。乘积 $\prod \delta_{p_i q_i}$ 当且仅当对所有 $i \in \{1,\dots,n\}$，$p_i = q_i$ 时等于 1，否则等于 0。

我们现在证明正交归一系的完备性，即集合 $\{u_{p_1,\dots,p_n}\}$ 张成 $\mathscr{H}$。假设 $f \in \mathscr{H}$ 满足 $\langle f, u_{p_1,\dots,p_n} \rangle = 0$ 对所有指标 $(p_1,\dots,p_n)$。我们通过对 n 使用归纳法来证明 $f = 0$。情形 $n = 1$ 即为定理 3.8。对于归纳步骤，假设该结果对维数 $n-1$ 成立。定义

$$g_{p_1,\dots,p_{n-1}}(x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} f(x) \prod_{i=1}^{n-1} \phi_{p_i}^{(i)}(x_i)\, \Delta_{n-1}x_{n-1} \cdots \Delta_1 x_1.$$

于是 $\langle f, u_{p_1,\ldots,p_n}\rangle = \int_{a_n}^{b_n} g_{p_1,\ldots,p_{n-1}}(x_n)\phi_{p_n}^{(n)}(x_n)\,\Delta_n x_n = 0$ 对所有 p_n 成立。由于 $\{\phi_{p_n}^{(n)}\}$ 是 $\mathscr{H}_n$ 中的完备标准正交系，我们得出 $g_{p_1,\ldots,p_{n-1}}(x_n) = 0$ 对几乎每一个 x_n 成立。也就是说，

$$\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)\prod_{i=1}^{n-1}\phi_{p_i}^{(i)}(x_i)\,\Delta_{n-1}x_{n-1}\cdots\Delta_1 x_1 = 0$$

对所有 $(p_1,\ldots,p_{n-1})$。根据归纳假设，$f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) = 0$ 几乎对所有 $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ 成立。因此，在 Ω 上几乎处处有 $f = 0$。 □

$_n$**推论 4.5**。 n 维问题的最小特征值为 $\lambda_1 = \lambda_{1,1,\ldots,1} = \sum \mu_1^{(i)}$，其中 $\mu_1^{(i)}{}_{i=1}$ 是 i^{th} 一维问题的第一特征值。此外，

$$\lambda_1 \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{(b_i-a_i)^2}. \tag{4.9}$$

$_n$证明。第一个结论源于这样一个事实：在所有正整数 p_i 的取值中，$\sum \mu_{p_i}^{(i)}$ 的最小值在每个 $p_i = 1$ 时取得。由定理 3.10 应用于每个一维问题，可得界 (4.9)。

□

由于算子 A 是正的，它的核是平凡核，因此其逆算子 A^{-1} 存在。我们利用特征函数展开来刻画 A^{-1}。

定理 4.6. 对于任意 $u \in \mathscr{H}$，特征函数展开

$$u = \sum_k c_k u_k, \quad c_k = \langle u, u_k\rangle, \tag{4.10}$$

在 $\mathscr{H}$ 中收敛，其中求和遍及所有多重指标 $k = (p_1,\ldots,p_n)$，且 u_k 表示相应的特征函数。逆算子 A^{-1}: $\mathscr{H} \to \mathscr{D}$ 由下式给出

$$A^{-1}u = \sum_k \frac{c_k}{\lambda_k}u_k, \tag{4.11}$$

并满足以下界

$$\|A^{-1}u\| \leq \frac{1}{\lambda_1}\|u\| \quad for\ all\ u \in \mathscr{H}. \tag{4.12}$$

证明. 展开式 (4.10) 由定理 4.4 得出。对于逆算子，若 $Au = f$，且满足 $u \in \mathscr{D}$ 和 $f \in \mathscr{H}$，则将等式两边按特征函数展开可得

$$\sum_k \lambda_k c_k u_k = \sum_k d_k u_k,$$

其中 $c_k = \langle u, u_k\rangle$ 和 $d_k = \langle f, u_k\rangle$。由展开的唯一性可知，$c_k = d_k/\lambda_k$，从而得到 (4.11)。对于该界，我们计算

$$\|A^{-1}u\|^2 = \sum_k \frac{c_k^2}{\lambda_k^2} \leq \frac{1}{\lambda_1^2}\sum_k c_k^2 = \frac{1}{\lambda_1^2}\|u\|^2,$$

利用帕塞瓦尔等式。开平方后得到 (4.12)，证明完毕。 □

5 定理 1.3 的证明

本节将边值问题重新表述为不动点方程，并应用压缩映射定理，从而证明定理 1.3。

定理 *1.3* 的证明。 定义线性算子 A: $\mathscr{D} \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$by $(Au)(x) = -\Delta_{\mathbb{T}} u(x)$，以及非线性算子 F: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ by $(Fu)(x) = f(x, u(x))$。边值问题 (1.1) 等价于算子方程

$$Au = Fu \quad \text{for } u \in \mathscr{D}. \tag{5.1}$$

我们必须验证 F 将 $\mathscr{H}$映射到 $\mathscr{H}$。对于任意 $u \in \mathscr{H}$，由 $\gamma = 0$ 可得 Lipschitz条件 (1.2):

$$|f(x, u(x))| \le |f(x, u(x)) - f(x, 0)| + |f(x, 0)| \le L|u(x)| + |f(x, 0)|.$$

由于 f在有界区域 $\Omega \times \mathbb{R}$ 上连续，且 $f(\cdot, 0) : \Omega \to \mathbb{R}$ 在紧集 Ω 上连续，因此函数 $f(\cdot, 0)$ 有界，记作 $|f(x, 0)| \le M$，对所有 $x \in \Omega$ 均成立。因此，由杨氏不等式可得

$$|f(x, u(x))|^2 \le 2L^2|u(x)|^2 + 2M^2,$$

并在 Ω 上积分，

$$\|Fu\|^2 = \int_\Omega |f(x, u(x))|^2 \Delta^n x \le 2L^2\|u\|^2 + 2M^2|\Omega| < \infty,$$

其中 $|\Omega| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ 是 Ω 的体积。因此 $Fu \in \mathscr{H}$，且 F: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$有定义。

By 定理 4.2 A 是正的，且具有平凡核。因此， A^{-1} 存在，且（5.1）可写为

$$u = A^{-1}Fu \quad \text{for } u \in \mathscr{H}. \tag{5.2}$$

注意， A^{-1} 将 $\mathscr{H}$ 映射到 $\mathscr{D}$ 上，这保证了任何解都会自动满足边界条件。定义 G: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$，使得 $G = A^{-1}F$。于是，（5.2）变为不动点方程 $u = Gu$。

接下来证明 G 在 $\mathscr{H}$上是一个压缩映射。对于任意 $u,\ v \in \mathscr{H}$，

$$\|Gu - Gv\| = \|A^{-1}Fu - A^{-1}Fv\| = \|A^{-1}(Fu - Fv)\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|Fu - Fv\| \le \frac{1}{\lambda_1}\|Fu - Fv\|,$$

这里用到了估计（4.12）。利用 Lipschitz条件（1.2），

$$\|Fu - Fv\|^2 = \int_\Omega |f(x, u(x)) - f(x, v(x))|^2 \Delta^n x \le \int_\Omega L^2|u(x) - v(x)|^2 \Delta^n x = L^2\|u - v\|^2.$$

因此， $\|Fu - Fv\| \le L\|u - v\|$，结合前一个不等式，可得估计$\|Gu - Gv\| \le \frac{L}{\lambda_1}\|u - v\|$。

最后，我们得到$\frac{L}{\lambda_1} < 1$。因此， G 是完备度量空间 $\mathscr{H}$ 上的压缩映射。由定理 2.2， G 有唯一不动点 $u^* \in \mathscr{H}$，它是边值问题 (1.1) 的唯一解。

□

注 5.1. 由推论 *4.5*，只要 $L < \sqrt[4]{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}$，条件 $\frac{L}{\lambda_1} < 1$ 即成立。这给出了一个用区域几何表述的显式判据。

6 定理 1.4 的证明

本节我们证明定理 1.4。我们始终在第1节所定义的希尔伯特空间 $\mathscr{H}$中工作，其内积为 (4.1)，并使用由 (4.2) 给出的线性算子 A: $D \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$。相应特征值问题 (4.5) 的第一特征值记为 $\lambda_1 > 0$ ，如推论 4.5 中所述。

我们首先说明，(1.1) 中的非线性项在 上定义了一个良定算子 $\mathscr{H}$.

引理 6.1。 设 $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续。则，

(i) 对每个固定的 $\eta \in \mathbb{R}$，函数 $x \mapsto f(x,\eta)$ 在 Ω 上是 $\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_n$-可测的，

(ii) 若 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 是 $\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_n$-可测的，则复合函数 $x \mapsto f(x,u(x))$ 在 Ω 上是 $\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_n$-可测的。

证明。 每个时间尺度 $\mathbb{T}_i$ 都是 $\mathbb{R}$ 的一个闭子集，并带有子空间拓扑。因此，其闭包 $\Omega := \prod_{i=1}^{n} [a_i,b_i] \cap \mathbb{T}_i$ 在乘积拓扑下是紧的。Ω 上的 Δ-测度通过从半开区间出发的 Carath´eodory 扩张构造为一种 Lebesgue 型测度；特别地，Ω 的每个博雷尔子集都是$\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_n$-可测的 [7]。 □

为证明 (i)，固定 $\eta \in \mathbb{R}$。由于 f在 $\Omega \times \mathbb{R}$上连续，将f限制在 $\Omega \times \{\eta\}$上得到的映射 $x \mapsto f(x,\eta)$ 关于 Ω 上的乘积拓扑是连续的。因此，它是博雷尔可测的，进而是 $\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_n$-可测的。

为证明 (ii)，设 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$是 $\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_n$-可测的。定义 $U\colon \Omega \to \Omega \times \mathbb{R}$, $U(x) = (x,u(x))$.由底层测度空间的定义可知，第一个坐标 $x \mapsto x$ 是可测的；根据假设，第二个坐标 $x \mapsto u(x)$也是可测的。因此，U 关于 $\Omega \times \mathbb{R}$上的乘积σ-代数是可测的。由于 f 在 $\Omega \times \mathbb{R}$上连续，所以它是博雷尔可测的。因此，复合映射$x \mapsto f(x,u(x)) = f\big(U(x)\big)$ 在 Ω 上是 $\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_n$-可测的。 □

现在定义非线性算子。

Lem引理 6.2. 假设 f 连续且满足 *Lipschitz*条件(1.2)。定义 e

$$(Fu)(x) := f(x,u(x)), \qquad x \in \Omega, \quad u \in \mathscr{H}.$$

那么，

(i) $F\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$是良定义的。

(ii) F 是全局 *Lipschitz* 连续的，其常数为 L，即

$$\|Fu - Fv\| \le L\|u - v\| \quad \textit{for all } u,v \in \mathscr{H}. \tag{6.1}$$

证明。 为证明 (i)，令 $u \in \mathscr{H}$。根据 $\mathscr{H}$ 的定义， u是 Ω 上的 $\Delta_1\cdots\Delta_n$-可测且平方可积的。由引理 6.1(ii)，函数 $x \mapsto f(x,u(x))$ 是 $\Delta_1\cdots\Delta_n$-可测的。

现在我们证明 $f(\cdot,\ u(\cdot))$ 在 Ω 上平方可积。由 (1.2) 结合 $\gamma = 0$ 可得

$$|f(x,u(x))| \le |f(x,u(x)) - f(x,0)| + |f(x,0)| \le L|u(x)| + |f(x,0)|.$$

由于 f连续且 Ω 是紧的，存在 $M \ge 0$，使得对所有 $x \in \Omega$， $|f(x,0)| \le M$。因此，对所有 $x \in \Omega$，$|f(x,u(x))|^2 \le 2L^2|u(x)|^2 + 2M^2$。在 Ω 上积分，并利用 $u \in \mathscr{H}$以及$\mu_\Delta(\Omega)$的有限性，可得

$$\begin{aligned}
\|Fu\|^2 &= \int_\Omega |f(x,u(x))|^2 \,\Delta^n x \\
&\le 2L^2 \int_\Omega |u(x)|^2 \,\Delta^n x + 2M^2 \int_\Omega 1 \,\Delta^n x \\
&= 2L^2\|u\|^2 + 2M^2|\Omega| < \infty.
\end{aligned}$$

因此 $Fu \in \mathscr{H}$, 且 $F\colon\ \mathscr{H} \to \mathscr{H}$是良定义的。为证明 (ii)，令 $u, v \in \mathscr{H}$。由 (1.2)，对所有 $x \in \Omega$,

$$|f(x,u(x)) - f(x,v(x))| \le L|u(x) - v(x)|.$$

平方后积分,

$$\|Fu - Fv\|^2 = \int_\Omega |f(x,u(x)) - f(x,v(x))|^2 \,\Delta^n x \le L^2 \int_\Omega |u(x) - v(x)|^2 \,\Delta^n x = L^2 \|u - v\|^2.$$

开平方后得到 (6.1)。 □

接下来证明一个联系 A 与第一特征值 λ_1 的不等式。

引理 6.3. 设 A 和 λ_1 如上所述。则对每个 $u \in \mathscr{D}$,

$$\langle Au, u\rangle \ge \lambda_1 \|u\|^2. \tag{6.2}$$

证明. 由定理 4.4，存在 $\mathscr{H}$ 的一个正交归一基 $\{u_k\}$，其由 A 的特征函数组成，对应的特征值为 $\{\lambda_k\}$, 且满足 $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots$。对于 $u \in \mathscr{D}$，我们写作 $u = \sum_k c_k u_k$, $c_k = \langle u,\ u_k\rangle$, , 且在 $\mathscr{H}$ 中收敛。于是，由帕塞瓦尔恒等式可得 $\|u\|^2 = \sum c_k^2$。另一方面，$_k$ $Au = \sum \lambda_k c_k u_k$, 因此 $_k$

$$\langle Au, u\rangle = \left\langle \sum_k \lambda_k c_k u_k,\ \sum_j c_j u_j \right\rangle = \sum_k \lambda_k c_k^2.$$

对所有 k使用 $\lambda_k \ge \lambda_1$，我们得到

$$\langle Au, u\rangle = \sum_k \lambda_k c_k^2 \ge \lambda_1 \sum_k c_k^2 = \lambda_1 \|u\|^2,$$

这就是（6.2），从而完成了该引理的证明。 □

现在我们结合 A^{-1} 和 F 的性质。

引理 6.4。 设 $G\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$由 $Gu := A^{-1}Fu$对 $u \in \mathscr{H}$ 定义。那么 G是连续且紧的。

证明。 由引理 6.2， $F\colon\ \mathscr{H} \to \mathscr{H}$定义良好且连续。由定理 4.6，算子 $A^{-1}\colon\ \mathscr{H} \to \mathscr{H}$是线性、有界且紧的。因此, 复合算子 $G = A^{-1} \circ F$连续且紧。 □

接下来，我们为同伦方程 $u = \tau Gu$ 的解推导一个先验界。

L引理 6.5. 假设 f 满足 (1.4)。令 G 如引理 *6.4* 中所述。则该集合

$$\mathcal{S} = \{u \in \mathscr{H} \colon u = \tau Gu \text{ for some } \tau \in [0,1]\}$$

在 $\mathscr{H}$ 中有界。

证明。 设 $u \in \mathcal{S}$。则存在 $\tau \in [0,1]$使得 $u = \tau Gu = \tau A^{-1}Fu.$对两边应用 A，得到 $Au = \tau Fu.$由于 $A\colon\ \mathscr{D} \to \mathscr{H}$ 且 $A^{-1}\colon\ \mathscr{H} \to \mathscr{D}$，我们有 $u \in \mathscr{D}$。与 u取内积，并应用引理 6.3，得到

$$\lambda_1 \|u\|^2 \le \langle Au, u\rangle = \tau \langle Fu, u\rangle. \tag{6.3}$$

利用能量条件 (1.4) 和 $\eta = u(x)$，我们有 $f(x,u(x))\ u(x) \le \alpha u(x)^2 + C$对所有 $x \in \Omega.$在 Ω 上积分,

$$\langle Fu, u\rangle = \int_\Omega f(x,u(x))\, u(x) \,\Delta^n x \le \alpha \|u\|^2 + C|\Omega|. \tag{6.4}$$

结合 (6.3) 和 (6.4)，并利用 $\tau \le 1$，我们得到

$$\lambda_1 \|u\|^2 \le \tau \langle Fu, u\rangle \le \alpha \|u\|^2 + C|\Omega|.$$

重新排列 ，$(\lambda_1 - \alpha)\|u\|^2 \le C|\Omega|$. 由于 $\alpha \in (0, \lambda_1)$，系数 $(\lambda_1 - \alpha)$ 为正，因此 e

$$\|u\|^2 \le \frac{C|\Omega|}{\lambda_1 - \alpha}. \tag{6.5}$$

因此，每个 $u \in \mathcal{S}$ 都满足 (6.5)，所以 $\mathcal{S}$ 在 $\mathscr{H}$中有界。 □

现在证明定理 1.4。

定理 *1.4* 的证明。令 $G\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$由引理 6.4 中的 $Gu = A^{-1}Fu$ 定义。根据引理 6.4， G是连续且紧的。根据引理 6.5，Leray–Schauder 集 $\{u \in \mathscr{H}\colon\ u = \tau Gu$ 对某个 $\tau \in [0,1]\}$在 $\mathscr{H}$中有界。因此，根据定理 2.3，存在 $u^* \in \mathscr{H}$使得 $u^* = Gu^* = A^{-1}Fu^*$.对两边应用 A，得到 $Au^* = Fu^*$， 所以 u^*是算子方程 $Au = Fu$.的一个解。由于 $A^{-1}\colon \mathscr{H} \to \mathscr{D}$，我们有 $u^* \in \mathscr{D}$，因此 u^* 满足 (1.1) 中的边界条件。这表明 (1.1) 在 $\mathscr{D}$中至少有一个解，从而完成定理 1.4 的证明。 □

7 个例子

本节通过具体例子说明我们的主要结果。这些例子展示了定理 1.3 和 1.4 的适用范围。我们首先考察一个二维例子。

例 7.1 (二维区域)。 考虑 $n = 2$，其中 $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_2 = \{0,1,2,3\}$。定义域为

$$\Omega = \{1,2\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}.$$

边界 $\partial\Omega$ 由所有满足 $x_1 \in \{0,3\}$ 或 $x_2 \in \{0,3\}$ 的点 $(x_1, x_2) \in \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ 组成。

*Fo*对于函数 $u\colon \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \to \mathbb{R}$，在内部点 $(i, j) \in \Omega$ 处的时间尺度拉普拉斯算子为 s

$$\Delta_{\mathbb{T}} u(i,j) = u^{\nabla_1\Delta_1}(i,j) + u^{\nabla_2\Delta_2}(i,j) = u(i+1,j) + u(i-1,j) + u(i,j+1) + u(i,j-1) - 4u(i,j).$$

记作 $u_{ij} = u(i, j)$，并在 $\partial\Omega$ 上使用边界条件 $u = 0$，则边值问题 (1.1) 连同 $f(x, u) = C$ 化为以下方程组

$$\begin{aligned} 4u_{11} - u_{21} - u_{12} + C &= 0,\\ 4u_{12} - u_{22} - u_{11} + C &= 0,\\ 4u_{21} - u_{11} - u_{22} + C &= 0,\\ 4u_{22} - u_{12} - u_{21} + C &= 0. \end{aligned}$$

将四个方程全部相加得到$8(u_{11} + u_{12} + u_{21} + u_{22}) + 4C = 0$。由该系统的对称性， $u_{11} = u_{12} = u_{21} = u_{22}$，代入后得到

$$u_{11} = u_{12} = u_{21} = u_{22} = -\frac{C}{2}. \tag{7.1}$$

对于该二维区域，特征值由定理 *4.4* 给出为

$$\lambda_{k,m} = \mu_k^{(1)} + \mu_m^{(2)} = 4\sin^2\left(\frac{\pi k}{6}\right) + 4\sin^2\left(\frac{\pi m}{6}\right), \quad k, m \in \{1,2\},$$

得到$\lambda_{1,1} = 1 + 1 = 2$, $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 1 + 3 = 4$，以及$\lambda_{2,2} = 3 + 3 = 6$。第一特征值为 $\lambda_1 = 2$，它等于 $\mu_1^{(1)} + \mu_1^{(2)}$ ，如推论 *4.5* 所述。

由于 $f(x, u) = C$满足(1.2) 且取 $L = 0 < \lambda_1 = 2$，定理 *1.3* 保证唯一解(7.1)。

下面的例子探讨一维混合离散-连续区域上的解。

例7.2（混合连续-离散域）。考虑时间尺度 $\mathbb{T} = [0,1] \cup \{2,3\}$，它由一个连续区间和若干孤立点组成。令 $a = 0$ 和 $b = 3$，则内部为 $(0,3) \cap \mathbb{T} = (0,1] \cup \{2\}$。边界条件为 $u(0) = u(3) = 0$。在 $(0,1)$ 上，特征值方程 $-y^{\nabla\Delta} = \lambda y$ 化为经典常微分方程 $-y'' = \lambda y$。取 $y(0) = 0$，解为 $y(t) = A\sin(\sqrt{\lambda}t)$，其中 $t \in [0,1]$。由 $\mathscr{D}$ 中解的连续性可知，$y(1) = A\sin(\sqrt{\lambda})$。在孤立点 $t = 2$ 处，方程 $-y^{\nabla\Delta}(2) = \lambda y(2)$ 化为 $-y^{\nabla}(2) - y^{\nabla}(2)\,\mu(2) = \lambda y(2)$，而边界条件可将其化简为

$$2y(2) - y(1) = \lambda y(2). \tag{7.2}$$

在 $t = 1$ 处，通过 $-y^{\nabla\Delta}(1) = \lambda y(1)$ 匹配连续部分与离散部分，得到

$$y(2) = (1-\lambda)y(1) + y'(1^-), \tag{7.3}$$

其中，$y'(1^-) = A\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda})$ 是连续部分在 $t = 1$ 处的左导数。

消去 (7.2) 与 (7.3)之间的 $y(2)$，得到超越方程

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 1)\sin(\sqrt{\lambda}) + (2-\lambda)\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

该方程必须 通过数值方法求解。前三个特征值为 $\lambda_1 \approx 0.840$、$\lambda_2 \approx 2.600$、$\lambda_3 \approx 11.907$.

对于问题 (1.1)，其中 $f(x,u) = C$，利普希茨常数为 $L = 0 < \lambda_1 \approx 0.840$，因此定理 1.3 保证了存在唯一性。我们可以显式求解：在连续部分上，$-u'' + C = 0$ with $u(0) = 0$ 得到 $u(t) = \dfrac{C}{2}t^2 + Bt$，其中 B 为某个常数。在离散点处，方程变为

$$\begin{aligned} u(1) - u(2) + u'(1^-) + 2C &= 0, \\ 2u(2) - u(1) + C &= 0. \end{aligned}$$

求解得到 $B = -\dfrac{11C}{6}$，且唯一解为 $u(t) = \dfrac{C}{6}\left(3t^2 - 11t\right)$ 当 $t \in [0,1]$ 时，以及 $u(2) = -\dfrac{7C}{6}$。

这表明，谱界 λ_1 取决于时间尺度的内部结构，而不仅仅取决于其端点。这也表明，在混合区域上，解同时涉及连续函数（在$[0,1]$上）和离散值（在 $t = 2$处），并由时间尺度框架统一起来。

现在考虑共振情形 $f(x,u) = -\lambda_1 u$。利普希茨常数为 $L = \lambda_1$，因此定理 1.3 所要求的严格不等式 $L < \lambda_1$ 不成立。然而，单侧条件 (1.4) 满足，因为 $f(x,\eta)\,\eta = -\lambda_1\eta^2 \le 0$，所以定理 1.4 保证了存在性。

在连续部分上，$-u'' - \lambda_1 u = 0$ 当 $u(0) = 0$ 时，对任意常数 A，都有 $u(t) = A\sin(\sqrt{\lambda_1}\,t)$。在 $t = 2$ 处，方程 $(2-\lambda_1)u(2) = u(1)$ 确定了 $u(2) = A\sin(\sqrt{\lambda_1})\,2 - \lambda_1$。在 $t = 1$ 处的方程对 A 的任何取值都自动成立。因此，解族为

$$u(t) = A\sin(\sqrt{\lambda_1}\,t) \approx A\sin(0.917\,t) \ \textit{for}\ t \in [0,1], \quad u(2) \approx 0.684A,$$

对于任意 $A \in \mathbb{R}$。这个解族表明，定理 1.4 保证了存在性，但不能保证唯一性 $s.$

表 1 比较了具有相同端点 $a = 0, b = 3$的不同时间尺度上的 λ_1 .

时间尺度 $\mathbb{T}$	内部	λ_1
$[0,3]$ (连续)	$(0,3)$	$\pi^2/9 \approx 1.097$
$\{0,1,2,3\}$ (离散)	$\{1,2\}$	1
$[0,1] \cup \{2,3\}$ (混合)	$(0,1] \cup \{2\}$	≈ 0.840

表 1：端点为 0 和 3 的不同时间尺度对应的第一特征值。

现在考虑离散时间尺度 $\mathbb{T} = \{0,1,2,3\}$ 下的一维情形 $a = 0, b = 3$，其内部为 $(0,3) \cap \mathbb{T} = \{1,2\}$。对于函数 u: $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$，边界条件 $u(0) = u(3) = 0$成立，我们要求解 $u_1 := u(1)$ 和 $u_2 := u(2)$ 的值。在这种情形下，我们计算 $\nabla\Delta$ 算子。对于 $t \in \{1,2\}$,

我们有 $u^{\nabla\Delta}(t) = u^{\nabla}(\sigma(t)) - u^{\nabla}(t) = u(\sigma(t)) - 2u(t) + u(\rho(t))$。因此，边值问题 (1.1) 化为以下方程组

$$\begin{aligned} -(u_2 - 2u_1 + u_0) + f(1, u_1) = 0, \\ -(u_3 - 2u_2 + u_1) + f(2, u_2) = 0, \end{aligned}$$

利用 $u_0 = u_3 = 0$，可简化为

$$\begin{aligned} 2u_1 - u_2 + f(1, u_1) = 0, \\ -u_1 + 2u_2 + f(2, u_2) = 0. \end{aligned} \tag{7.4}$$

对于这个离散域，特征值问题 (1.3) 的特征值为 $\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{\pi k}{6}\right)$（当 $k = 1,\ 2$ 时），得到$\lambda_1 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$和 $\lambda_2 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3$。对应的特征函数为 $\phi_1(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$和$\phi_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$（当 $t \in \mathbb{T}$ 时），它们满足边界条件 $\phi_k(0) = \phi_k(3) = 0$。在内部点处，它们的取值为 $\phi_1(1) = \phi_1(2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $\phi_2(1) = -\phi_2(2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$。

以下例子展示了不同的行为，具体取决于非线性项 f 与定理 1.3 和 1.4 的假设如何相关。表2对此作了总结。

	定理 1.3	仅定理 1.4	都不是
例 + 唯一	例 7.3、7.4	例 7.5	例 7.7
例. + 非唯一	不可能	例 7.6	例 7.9
不存在性	不可能	不可能	例7.8

表2：按定理适用性和解的行为对例子进行分类。

首先考虑 f 为常数的情形。

例 7.3 (常数非线性)。 设 $f(x, u) = C$，其中 $C \in \mathbb{R}$ 为某个常数。此函数满足(1.2)，且 $L = 0 < \lambda_1 = 1$，因此定理 *1.3* 保证存在唯一解。系统 (7.4) 变为

$$\begin{aligned} 2u_1 - u_2 + C = 0, \\ -u_1 + 2u_2 + C = 0. \end{aligned}$$

将这些方程相加，得 $u_1 + u_2 = -2C$。将它们相减，得 $3u_1 - 3u_2 = 0$，因此 $u_1 = u_2$。于是 $u_1 = u_2 = -C$，这就是唯一解。

现在考虑 f 不依赖于 u 的情形。

例 7.4 (位置依赖非线性)。 设 $f(x, u) = g(x)$，其中 g 是某个函数: $\Omega \to \mathbb{R}$，且独立于 u。这满足(1.2)，且 $L = 0 < \lambda_1$，因此定理 *1.3* 适用。令 $g_1 = g(1)$ 且 $g_2 = g(2)$，系统 (7.4) 变为

$$\begin{aligned} 2u_1 - u_2 + g_1 = 0, \\ -u_1 + 2u_2 + g_2 = 0. \end{aligned}$$

解这个线性方程组可得唯一解 $u_1 = \frac{-2g_1 - g_2}{3}$ 和 $u_2 = \frac{-g_1 - 2g_2}{3}$。

现在我们举一个例子，说明定理 1.3 不适用，但定理 1.4 适用且有唯一解。

例 7.5 （负线性：存在唯一性）。 设 $f(x, u) = -cu$，其中 $c > \lambda_1 = 1$，但对任意 k，$c \neq \lambda_k$。具体而言，取 $c = 2$。利普希茨常数为 $L = 2 > \lambda_1$，因此定理 *1.3* 不适用。然而，由于对任意$\alpha \in (0,\ \lambda_1)$ 以及 $C \geq 0$，$f(x, \eta)\ \eta = -2\eta^2 \leq 0 < \alpha\eta^2 + C$，故满足单侧条件（1.4）。因此，定理 *1.4* 保证了存在性。

系统（7.4） 变为

$$2u_1 - u_2 - 2u_1 = 0,$$
$$-u_1 + 2u_2 - 2u_2 = 0,$$

化简后得到 $u_2 = 0$ 和 $u_1 = 0$。唯一解为 $u \equiv 0$。尽管定理 *1.4* 只保证存在性，但这里的唯一性成立，因为 $c = 2$ 不是线性问题的特征值。

现在我们展示一个类似但不具有唯一性的例子。

例 7.6 (共振：存在但不唯一**)**。 令 $f(x,u) = -\lambda_1 u = -u$。利普希茨常数为 $L = \lambda_1 = 1$，因此定理 *1.3* 中的严格不等式 $L < \lambda_1$ 不成立。然而，与例 *7.5* 一样，单侧条件 (1.4) 成立，因为 $f(x,\eta)\eta = -\eta^2 \le 0$。因此，定理 *1.4* 保证至少存在一个解。

系统 (7.4) 变为

$$2u_1 - u_2 - u_1 = 0,$$
$$-u_1 + 2u_2 - u_2 = 0,$$

化简后得到 $u_1 = u_2$。对于 $t \in \mathbb{R}$ ，任何形如 $u_1 = u_2 = t$ 的函数都是一个解。这个无穷多个解族对应于第一特征函数 ϕ_1的倍数。这个例子表明，定理 *1.4* 能保证存在性，但不能保证唯一性；定理 *1.3* 中的严格不等式 $L < \lambda_1$ 对于唯一性是必要的。

下一个例子表明，定理 1.3 和 1.4 给出的是存在唯一性的充分条件，而非必要条件。

例 7.7 (正线性：无需定理即可保证存在唯一性**)**。 令 $f(x,u) = cu$，其中 $c > \lambda_1 =$1。具体而言，取 $c = 2$。利普希茨常数为 $L = 2 > \lambda_1$，因此定理 *1.3* 不适用。单侧条件要求存在某个 $\alpha < \lambda_1 = 1$，使得 $f(x,\eta)\eta = 2\eta^2 \le \alpha\eta^2 + C$，但当 $|\eta|$ 足够大时，该条件不成立。因此，定理 *1.4* 也不适用。

尽管如此，系统 (7.4) 可化为

$$2u_1 - u_2 + 2u_1 = 0,$$
$$-u_1 + 2u_2 + 2u_2 = 0,$$

化简后得到

$$4u_1 - u_2 = 0,$$
$$-u_1 + 4u_2 = 0.$$

将 $u_2 = 4u_1$ 代入第二个方程，得到 $-u_1 + 16u_1 = 0$，因此 $u_1 = 0$ ，进而 $u_2 = 0$。唯一解为 $u \equiv 0$。

接下来举一个不存在（实值）解的例子。

例 7.8 (超线性增长：不存在解**)**。 设 $f(x,u) = 1 + u^2$。此函数不是全局 *Lipschitz* 连续的，因为 $|f(x,u) - f(x,v)| = |u^2 - v^2| = |u - v||u + v|$随着 $|u| + |v| \to \infty$ 增大而无界。此外，单侧条件 (1.4) 不成立，因为对于任意常数 α, C，当 $\eta \to +\infty$ 时， $f(x,\eta)\eta = \eta + \eta^3$ 的增长速度都快于 $\alpha\eta^2 + C$。因此，这两个定理都不适用。

系统 (7.4) 变为

$$2u_1 - u_2 + 1 + u_1^2 = 0,$$
$$-u_1 + 2u_2 + 1 + u_2^2 = 0.$$

由第一个方程， $u_2 = 2u_1 + 1 + u_1^2$。代入第二个方程可得

$$-u_1 + 2(2u_1 + 1 + u_1^2) + 1 + (2u_1 + 1 + u_1^2)^2 = 0.$$

展开并化简后，得到

$$u_1^4 + 4u_1^3 + 8u_1^2 + 7u_1 + 4 = 0.$$

这个四次多项式没有实根，因此不存在实值解。

现在我们考虑一个三维例子。

例 7.9（三维例子）。考虑时间尺度 $\mathbb{T}_1 = \{0,1,2,3\}$、$\mathbb{T}_2 = \{5,7,10\}$ 和$\mathbb{T}_3 = \{4,6,7\}$。则 $\Omega = \{$（1，7，6），（2，7，6）$\}$。在这种情况下，将Ω 中的点代入（1.1），可化简为以下方程

$$u(2,7,6) = \frac{34}{9}u(1,7,6) + f((1,7,6), u(1,7,6)) \tag{7.5}$$

$$\frac{34}{9}u(2,7,6) - u(1,7,6) + f((2,7,6), u(2,7,6)) = 0. \tag{7.6}$$

将(7.5)代入(7.6)，可得

$$\left(\left(\frac{34}{9}\right)^2 - 1\right) u(1,7,6) + \frac{34}{9} f((1,7,6), u(1,7,6)) + f((2,7,6), u(2,7,6)) = 0. \tag{7.7}$$

设 f是关于 u的二阶多项式，即 $f(x,u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2$。在这种情况下，(7.7) 变为关于变量 u(1,7,6)的多项式。改变系数会得到不同的情形。例如，若$c_0 = c_1 = 0$ 且 $c_2 \neq 0$，我们会观察到四个不同的实根，对应四个不同的解。取 $c_0 = 1$、$c_2 = 2$和 $c_1 = 0$时，可得到复根；这意味着函数空间 $\mathscr{D}$中不存在解。

8 结论

我们证明了 n维时间尺度域上非线性椭圆Dirichlet边值问题的存在唯一性结果。在受第一特征值 λ_1约束的Lipschitz条件下，定理 1.3通过压缩映射定理给出存在唯一性。在较弱的单侧增长条件下，定理 1.4通过Leray–Schauder不动点定理给出存在性。这两个结果都依赖于第3–4节建立的谱理论，该理论将 [14] 的二维结果推广到 n 维，并证明了关于 μ_Δ-测度的 $\nabla\Delta$-拉普拉斯算子的乘积特征函数的完备性。第7节中的例子展示了这些假设在离散、混合和高维情形下的适用范围与锐性；例子与定理之间的关系见表2。

A principal limitation of th呈现 t work is th结果triction t接收tangular domains $\Omega = \prod_{i}^{n}(a_i, b_i) \cap \mathbb{T}$，这源于谱理论中分离变量的使用。将结果推广到一般定义域，需要通过变分方法构造算孚 $\nabla\Delta$ 的 n 维格林函数。采用 Lax–Milgram 定理的自然方法会遇到一个根本障碍：对混合算子 $\nabla_i\Delta_i$ 应用分部积分会得到双线性型

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u^{\nabla_i}(y)\, v^{\nabla_i}(\sigma_i(y))\, \Delta^n y,$$

当 y_i 为右散点时，它会在不同的点取值 u^{∇_i} 和 v^{∇_i}。这种测度不匹配使强制性无法成立，因为 a（v，v）包含形如 v^{∇_i}（y）v^{∇_i}（σ_i（y））的乘积，而非 $|v^{\nabla_i}$（y）$|^2$，且被积函数不一定非负。在连续情形 $\mathbb{T}_i = \mathbb{R}$（此时 σ_i 是恒等映射）和纯离散情形 $\mathbb{T}_i = \mathbb{Z}$（此时 delta 与 nabla 测度相同）中不存在这一障碍，但对于含有右散点的一般时间尺度，该障碍确实存在。

未来工作的若干方向已经显现出来。Banach–Ne˘cas–Babu˘ska（inf-sup）框架以较弱的 inf-sup 条件取代强制性，或许能够为一般时间尺度上的双线性形式 $a(u,v)$ 的适定性提供一条途径。或者，按照 [24, 21], ，可以将通过 Picard–Lindel¨of 方法获得的局部存在性与用于先验界的最大值原理相结合，从而完全绕过变分方法；这一方法已被证明对格点微分方程十分有效，因为这类方程结合了连续时间与离散空间结构。在本文的谱框架内，还可以利用拓扑方法、Sturm–Liouville 或 Robin 边界条件，或通过截断和近似技巧处理奇异非线性项，进一步研究 $L \geq \lambda_1$ 时的多重性结果。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

利益冲突声明

作者声明不存在利益冲突。

致谢

作者感谢 Petr Stehl´ık 提供有益见解，帮助改进了稿件。Tom Cuchta 获得美国国家科学基金会资助（项目编号：#2532829）。Shalmali Bandyopadhyay 获得部分 AMS-Simons 旅行资助。

参考文献

[1] Ravi Agarwal、Martin Bohner、Donal O'Regan 和 Allan Peterson。时间尺度上的动力学方程：综述。计算与应用数学杂志，141(1-2):1–26，2002。[2] Douglas R Anderson、Gusein Sh Guseinov 和 Joan Hoffacker。时间尺度上的高阶自伴边值问题。计算与应用数学杂志，194(2):309–342，2006。[3] F. M. Atici 和 G. Sh. Guseinov。关于时间尺度上边值问题的格林函数和正解。*J. Comput. Appl. Math.*，141(1-2):75–99，2002。[4] Amar Ba˘si´c、Lejla Smajlovi´c 和 Zenan ˘Sabanac。离散贝塞尔函数与离散波动方程。数学研究成果，79(5):216，2024。[5] M. Bohner 和 A. Peterson。时间尺度上的动力学方程。Birkh¨auser，2001。[6] Martin Bohner 和 Svetlin G Georgiev。时间尺度上的多重积分。载于时间尺度上的多变量动力学微积分，第449–515页。施普林格，2017。[7] Martin Bohner 和 Gusein Sh Guseinov。时间尺度上的多重勒贝格积分。差分方程进展，2006(1):026391，2006。[8] Martin Bohner 和 Allan Peterson（编）。时间尺度上的动力学方程进展。波士顿，马萨诸塞州：Birkh¨auser，2003。[9] Tom Cuchta 和 Rui A.C. Ferreira。时间尺度上的热方程。数学小品，43(4):475–491，2023。[10] Emily B Dennis、Marc K´ery、Byron JT Morgan、Armin Coray、Michael Schaub 和 Bruno Baur。在两个时间尺度上对昆虫种群动态进行综合建模。生态建模，441:109408，2021。[11] Gusein Sh. Guseinov。时间尺度上斯图姆–刘维尔问题的特征函数展开。国际差分方程杂志，2(1):93–104，2007。[12] Ma˙lgorzata Guzowska、Agnieszka B Malinowska 和 Moulay Rchid Sidi Ammi。时间尺度上的变分法：在经济模型中的应用。差分方程进展，2015(1):203，2015。[13] Stefan Hilger。测度链上的分析——连续与离散微积分的统一方法。数学研究成果，18(1):18–56，1990。

[14] Aydin Huseynov。时间尺度上非线性椭圆边值问题解的存在唯一性。*Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*，15(5):1124–1131，2010。[15] B. Jackson。时间尺度上的偏动态方程。*J. Comput. Appl. Math.*，186(2):391–415，2006。[16] Billy Joe Jackson。时间尺度上的一般线性系统理论：变换、稳定性与控制。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2007。博士学位论文——贝勒大学。[17] A N Kolmogorov 和 S V Fomin。实分析导论。多佛数学丛书。Dover Publications，米尼奥拉，纽约州，1975年6月。[18] Stefan Siegmund 和 Petr Stehlik。时间尺度诱导的异步离散动力系统。*Dis-crete & Continuous Dynamical Systems-Series B*，26(2)，2021。[19] Anton´ın Slav´ık。离散贝塞尔函数与偏差分方程。*Journal of Difference Equa-tions and Applications*，24(3):425–437，2018。[20] Anton´ın Slav´ık 和 Petr Stehl´ık。动态扩散型方程及其时间积分的显式解。*Applied Mathematics and Computation*，234:486–505，2014。[21] Anton´ın Slav´ık、Petr Stehl´ık 和 Jon´aˇs Volek。格点反应扩散方程的适定性与最大值原理。*Advances in Nonlinear Analysis*，8(1):303–322，2019。[22] Petr Stehl´ık。椭圆动态方程的最大值原理。*Math. Comput. Modelling*，51(9-10):1193–1201，2010。[23] Petr Stehlik 和 Bevan Thompson。时间尺度上二阶动态方程的最大值原理。*Journal of Mathematical Analysis and Applications*，331(2):913–926，2007。[24] Petr Stehl´ık 和 Jon´aˇs Volek。离散与半离散反应扩散方程的最大值原理。*Discrete Dynamics in Nature and Society*，2015:791304，2015。