arXiv:2602.10358v1 [math.FA] 10 Feb 2026

有序巴拿赫空间上有界线性算子的基本再生数

Zachary Gregg，Patrick De Leenheer

2026年1月

摘要

基本再生数 R_0，是生态学和流行病学模型研究中经常遇到的概念。它通常用于确定灭绝状态或无病不动点或稳态的稳定性。众所周知，对于由非负矩阵描述的线性模型，矩阵的谱半径总是包含在端点为 1 和 R_0 的区间内。在此，我们将这些结果推广到作用于巴拿赫空间上的更一般的保锥有界线性算子。

1 引言

基本再生数记为R_0, ，是生态学和流行病学建模中使用的一种工具，用作灭绝状态或无病不动点或稳态稳定性的标志；示例见 [1, 4, 5, 6, 8, 22]。基本再生数的数学基础至少可以追溯到 20 世纪 60 年代 Varga [24] 和 Vandergraft [23] 的研究。从本质上说，对于谱半径难以甚至不可能计算的线性算子，基本再生数可作为其谱半径的替代指标，并且其自身定义为一个相关线性算子的谱半径。为使这一表述更加明确，我们回顾 Li 和 Schneider 在 [17] 中的一项结果。他们为如下形式的离散时间动力系统定义了基本再生数：$x_{n+1} = Ax_n$，其中x_n 是一个逐分量非负向量，表示系统在时间步n的状态，而A 是一个逐分量非负矩阵。矩阵A 的谱半径记为$r(A)$，定义为

$$r(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ is an eigenvalue of } A\}.$$

定理 1.1。 （*[17]*中的定理 *3.3*）

设 A 是一个逐项非负矩阵。假设 A 可分解为 $A = T + F$，其中 T 和 F 是非负矩阵，且 $r(T) < 1$。定义基本再生数 $R_0 := r(F(I - T)^{-1})$。若 $R_0 > 0$，则 $r(T + {}^1R_0F) = 1$，且以下情况恰有一种成立： —

1. $R_0 = r(A) = 1$,
2. $R_0 \leq r(A) < 1$,
3. $R_0 \geq r(A) > 1$.

由于$r(A)$小于或大于 1 决定了矩阵A下零不动点的稳定性，这表明R_0 也可用于确定零不动点的稳定性。该定理给出了基本再生数的一个一般形式，可应用于R^n中任意非负离散时间动力系统的零稳态线性化。注意，基本再生数

取决于所使用的特定分解$A = T + F$。有关R_0 的注意事项和示例可见于 [6]。

2009年，Thieme 对该定理作了扩展，将预解正算子理论[2][25], 完全单调函数 [14][20],与超凸（对数凸）算子族 [13][12]结合起来。定理陈述中使用的定义将在后续章节中介绍；此处先陈述该定理，以便与前一个定理进行比较。

定理 1.2. （*[21]*中的定理 *3.10*）设 X 是一个具有生成正规锥 K 的巴拿赫空间。假设 A 是一个保持 K 的有界线性算子，且 A 可分解为 $A = T + F$，其中 T 和 F 都是保持 K 的线性算子，且 $r(T) < 1$。定义 $R_0 := r(F(I - T)^{-1})$。则

1. $R_0 = 1 \iff r(A) = 1$

2. $R_0 < 1 \iff r(A) < 1$

3.$R_0 > 1 \iff r(A) > 1$

请注意，与 Li 和 Schneider 的定理不同，前一个定理并未保证 R_0 是算子 A 的谱半径上界。我们的主要目标是在这一巴拿赫空间框架下证明，无需任何额外假设，我们仍可将 R_0 恢复为 $r(A)$ 的上界。

为了证明这一扩展，我们需要用到 Thieme [20] 的另一个定理。该定理表明，映射 $\lambda \to r(F(\lambda I - T)^{-1})$ 在 $(r(T), \infty)$ 上是一个非增凸函数，并且会在某个 $\lambda^* > r(T)$ 处取到$r(F(\lambda^* I - T)^{-1}) < 1$。下一节将介绍陈述该定理所需的背景知识。

2 背景

2.1 锥

下面将非负性的概念推广到巴拿赫空间的情形。以下设 $X \neq \{0\}$为实巴拿赫空间，X^* 为 X 上有界（连续）线性泛函构成的对偶空间，而 $\mathcal{B}(X)$ 为从 X 到 X 的连续线性算子所构成的巴拿赫空间。

定义锥 $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{X}$ 为一个闭凸集，该集合正齐次（若 $\mathrm{x} \in \mathrm{K}$ 且 $\alpha \geq 0$，则$\alpha\mathrm{x} \in \mathrm{K}$），并且是尖锐的（若 $\mathrm{x} \in \mathrm{K}$ 且 $-\mathrm{x} \in \mathrm{K}$，则 $\mathrm{x} = 0$）。若 $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{X})$ 是关于 K 的保锥算子，或称保持 K，则 $\mathrm{A}(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{K}$，即对所有 $\mathrm{x} \in \mathrm{K}$，都有 $\mathrm{Ax} \in \mathrm{K}$。当锥 K 的含义明确时，我们简称 A 为保锥算子。注意，锥在巴拿赫空间 X 上定义了一个偏序“ $\geq$”：对于 y、$\mathrm{z} \in \mathrm{X}$，若 $\mathrm{z} \geq \mathrm{y} \in \mathrm{K}$，则记作 $\mathrm{z} - \mathrm{y}$。除了假设 X 是巴拿赫空间外，以下还假设我们固定了一个锥 K，以此对巴拿赫空间进行上述偏序。

若**锥是生成的**，则称其为生成锥，即对于任意$x \in X$，都存在y、$z \in K$，使得$x = y - z$。容易验证，当K是X上的生成锥时，保锥线性算子构成 $\mathcal{B}(X)$ 中的一个锥。类似地，若A 和B 是X 上相对于K的保锥算子，我们记作$A \geq B$ （这里稍微滥用了记号，因为根据上下文应该能清楚我们的对象是X 中的向量，还是 $\mathcal{B}(X)$中的对象），表示$A - B$ 相对于K保持锥。

给定一个锥K，定义其**对偶锥**为以下集合

$$K^* = \{f \in X^* : f(x) \geq 0 \ \forall x \in K\}.$$

尽管术语如此，K^* 仍可能不满足锥的定义。例如，在 $\mathbb{R}^2$ 采用通常的内积时，

乘积，一个由非负x–轴构成的锥$K = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\}$，其对偶锥为 s

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^2 : \langle x, y\rangle \geq 0 \ \forall x \in K\} = \{(a, b) : a \geq 0\},$$

它不是尖锐的。然而，只要K 是生成的，K^* 就是一个锥。（事实上，根据 Hahn-Banach 分离定理的一个简单推论，K^* 是锥，当且仅当$X = K - K$，即$K - K$的拓扑闭包。相关讨论见 [7] 中的第六章）。

我们称锥**normal** ，如果存在常数 $\gamma > 0$ ，使得只要 $0 \leq x \leq y$，就有 $||x|| \leq \gamma||y||$。众所周知，一个锥是正规锥，当且仅当它的对偶锥是生成的；类似地，一个锥是生成的，当且仅当它的对偶锥是正规锥（见 [7]中的命题 19.4）。

备注： 在定理 1.1 中，Li 和 Schneider 考虑了按非负正交锥$K = \{$排序的巴拿赫空间 $\mathbb{R}^n$ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \geq 0 \ \forall i = 1, 2, ..., n\}$。这个锥显然是生成的： $\mathbb{R}^n$ 中的任意向量都等于两个仅含非负分量的向量之差。这个锥也是正规的；事实上，根据下面的引理，有限维向量空间中的任意锥都是正规的：

引理 2.1。**(引理** *1.2.5，见 [16])* 在有限维实赋范向量空间上定义的任何锥都是正规 *l.*

因此，虽然我们稍后会要求巴拿赫空间X 由一个生成正规锥赋序，但与定理 1.1 相比，这并非限制，因为非负正交锥满足这两个要求。

2.2 谱理论

这里我们回顾一些谱理论。虽然我们的主要结果是针对有界算子给出的，但对于不一定有界的线性算子，我们确实需要一些广义概念。关于这一理论的更全面讨论，请参阅 [10] 中的第四章。对于下文，设A 是一个定义在稠密定义域$D(A) \subseteq X$上的线性算子。假设A 是一个闭算子，即A 的图在$X \times X$中是闭的。注意，根据闭图定理，X 上的任何有界算子必然是闭算子。

虽然我们考虑的是实巴拿赫空间上的算子，但在谱理论的各种应用中，我们会考虑$(X, ||\cdot||)$的复化，$X_{\mathbb{C}} := X + iX$，其范数定义为

$$||x + iy||_{X_{\mathbb{C}}} = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} ||\cos(\theta)x + \sin(\theta)y||,$$

对于 $x, y \in X$。给定一个定义域为 $D(A) \subseteq X$ 的闭算子 A，我们可以将 A 扩展到它的复化$\tilde{A}$。算子 $\tilde{A}$ 是一个定义域为 $D(\tilde{A}) = \{x + iy : x, y \in D(A)\}$ 在 X 中稠密$_{\mathbb{C}}$的线性算子。算子$\tilde{A}$ 在 $X_{\mathbb{C}}$ 上的定义为 $\tilde{A}(x + iy) = Ax + iAy$；若 A 是闭算子，则它也是闭算子。若 $A : X \to X$ 有界，则 $X_{\mathbb{C}}$ 上的范数满足 $||A|| = ||\tilde{A}||_{X_{\mathbb{C}}}$。在本节余下部分中，我们默认 $\tilde{A}$指其复化 A。定义算子 A 的预解集为

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ is a bijection from } D(A) \text{ onto } X.\}.$$

对于 $\lambda \in \rho(A)$，$(\lambda I - A)^{-1}$ 是 X上的良定义线性算子，称为**关于A 的预解式** λ。此外，由于A 是闭算子，$(\lambda I - A)^{-1}$ 实际上是有界线性算子。我们通常默认省略I，改写为$(\lambda - A)^{-1}$。定义算子A的**谱**为$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$。

对于任意闭算子，定义**谱横坐标**$s(A) := \sup\{Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$，其中$Re(\lambda)$ 表示 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的实部。注意，如果该上确界不是有限值，我们允许$s(A) = \infty$；如果 $\sigma(A) = \emptyset$，则$s(A) = -\infty$。

如果A 是一个有界线性算子，众所周知，$\sigma(A)$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个非空紧子集（例如参见 [10]第四章中的推论1.4）。对于任意有界线性算子A，我们将A 的**谱半径**定义为

$$r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

注意，只要A 是有界的，$r(A)$ 就有明确定义。

定理 2.2。（多项式谱映射定理；参见 *[15]* 中的定理 *7.4-2*）设 A 是复巴拿赫空间 X 上的有界线性算子，并且

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

是满足 $\alpha_n \neq 0$ 的多项式。则

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)),$$

即，$p(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1}A^n + \cdots + \alpha_0 I$ 的谱是 $\{\alpha_n \mu^n + \alpha_{n-1}\mu^{n-1} + \cdots + \alpha_0 : \mu \in \sigma(A)\}$。

由上述谱映射定理可得到以下有用的推论：

推论 2.3。如果 A 是有界线性算子且 $\alpha \geq 0$，则 $\alpha r(A) = r(\alpha A)$。

当X 是一个由生成正规锥赋序的有限维巴拿赫空间时，Perron-Frobenius定理保证A 的谱半径是一个特征值，并且存在相应的特征向量属于K。然而，当X 是无限维时，不能保证$r(A)$是特征值，但可以保证它是谱中的一个点。

定理 2.4。（*[7]*第 *6* 章第 *19* 节习题 *11*）设 A 是保持一个生成正规锥的有界线性算子。则 $r(A) \in \sigma(A)$。

我们还需要以下比较定理：

定理 2.5。（谱半径的序关系 *[18]*）设 X 是带有生成正规锥 K 的巴拿赫空间。设 A 和 B 是保锥算子，且 $B \leq A$。则

$$r(B) \leq r(A).$$

2.3 预解正算子

设 X 是由锥K定义序的巴拿赫空间，并设A 是定义在X上的稠密定义域闭线性算子。若存在一条射线$(\omega, \infty) \subset \rho(A)$，使得对所有 $\lambda \in (\omega, \infty)$，$A$ 都有**预解正** 性质，即$(\lambda - A)^{-1}$ 是保锥算子，则称A 为**预解正** 。

若A 是强连续C_0半群的生成元，则当A 预解正时，该半群保持此锥。这可通过调用以下强连续半群的表示结果来证明：

定理 2.6。（*[19]*第 *1* 章中的定理 *8.3*）若 A 是作用于巴拿赫空间 X 上的 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，则对所有 $t > 0$以及所有 $x \in X$,

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right]^n x.$$

此极限关于任意有界区间 $(0, \infty)$上的 t 一致。

注意，对于任意 $t > 0$, $\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}$，当 A 是预解正时，充分大的 n 下它保持锥。因此，$\left[nt\left(\frac{n}{t} - A\right)^{-1}\right]^n$ 在充分大的 n下保持锥。由于 K是闭集，因此当$x \in K$时，$T(t)x$ 属于 K。

接下来我们将证明逆命题也成立；也就是说，保持锥的C_0 半群具有预解正的无穷小生成元。为说明这一点，假设A 是C_0 半群$T(t)$的无穷小生成元。那么存在$M \geq 1$和 $\omega \in \mathbb{R}$，使得

$$||T(t)|| \leq Me^{\omega t}$$

对所有$t \geq 0$ 均成立（根据 [19] 中的定理 2.2）。此外，若 $\lambda > \omega$，则 $\lambda \in \rho(A)$，并且我们有关于A 相对于 λ 的预解式的如下表示公式：

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

对所有 $x \in X$ （更多详情请参见 [19] 第 1 章中的定理 5.3）。由此可知，只要对所有 $t \geq 0$，(t) 保持锥，则对所有 $x \in K$ 及所有 $\lambda > \omega$，都有 $(\lambda - A)^{-1}x \in K$；这里用到了 K 正齐次且闭这一事实。回顾一下，C_0 半群的无穷小生成元是闭稠定算子。因此，当 A 的 $T(t)$ 构成保锥半群时，A 是预解正的。

保锥有界线性算子是预解正算子的特别简单的例子。为此，考虑A 的预解式表示为诺依曼级数：

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}A^n,$$

该式在 $\lambda > r(A)$ 时成立。

2.4 $r(F(\lambda - T^{-1})$ 的凸性与单调性

接下来，我们陈述定理 1.1 在 [20], 关于谱半径映射$\lambda \to r(F(\lambda - T)^{-1})$行为方面的一个特例，该特例针对我们的需求而设。

定理 2.7。（*[20]*中的定理 *1.1*）设 X 是一个有序巴拿赫空间，其锥 K 为生成正规锥。假设 A 是定义域为 $D(A)$ 的预解正算子，且 A 分解为 $A = B + C$，其中 B 是定义域为 $D(B) = D(A)$、$s(B) < 0$ 的预解正算子，并且 C 将 $D(B) \bigcap K$ 映射到 K 中。那么，$r(C(\lambda - B)^{-1})$ 是关于 $\lambda \in (s(B), \infty)$ 的非增凸函数，并且下列情形恰有一种成立：

1. $r(C(\lambda - B)^{-1}) < 1$ *for all* $\lambda > s(B)$. *In this case,* $s(A) = s(B)$.

2. 存在 $\lambda_1 < \lambda_2$ *in* $(s(B), \infty)$ 使得 $r(C(\lambda_1 - B)^{-1}) \geq 1$ 且 $r(C(\lambda_2 - B)^{-1}) < 1$。在此情形下，$s(A) > s(B)$，并且 $r(C(s(A)I - B)^{-1}) = 1$。

接下来，我们将　这一结果转化为适用于有界保锥线性算子的版本　　.

推论 2.8. 设 X 是一个有序巴拿赫空间，其锥 K 是生成正规锥。假设$\hat{}A$ 是 X 上的有界保锥线性算子。此外，假设$\hat{}A$ 可分解为$\hat{}A = T + F$，其中 T 和 F 是有界保锥算子，且 $r(T) < 1$。那么，$r(F(\lambda - T)^{-1})$ 是 $\lambda \in (r(T), \infty)$的非增凸函数，并且下列情形中恰有一种成立：

1. $r(F(\lambda - T)^{-1}) < 1$ *for all* $\lambda > r(T)$. *In this case,* $r(\hat{A}) = r(T)$.

2. 存在 $\lambda_1 < \lambda_2$ *in* $(r(T), \infty)$ 使得 $r(F(\lambda_1 - T)^{-1}) \geq 1$ 且 $r(F(\lambda_2 - T)^{-1}) < 1$。在此情形下，$r(\hat{}A) > r(T)$，并且 $r(F(r(\hat{}A)I - T)^{-1}) = 1$。

证明。我们证明，可以在定理 2.7 的表述中取 $A = \hat{}A - I$、$B = T - I$，且 $D(A) = D(B) = X$，$C = F$。注意，由定理 2.4 可知 $r(T) \in \sigma(T)$，因此 $s(T) = r(T)$。由谱映射定理（定理 2.2）可得，$s(B) = s(T - I) = s(T) - 1$。因此，$s(B) = r(T) - 1$。此外，若 $\lambda > s(B)$，则 $\lambda + 1 > r(T)$，且

$$(\lambda - B)^{-1} = (\lambda - (T - I))^{-1} = ((\lambda + 1) - T)^{-1}$$

是保持锥的，因为T 是保持锥的（因此也是预解正的）。这表明B 是预解正的。对$A = \hat{}A - I$ 应用相同的论证，可得A 也是预解正的。另请注意，$s(B) = r(T) - 1$ 是负的，因为$r(T) < 1$。根据假设，$C = F$ 保持锥，因此C 将$D(B) \bigcap K = K \bigcap K = K$ 映入K。

因此，我们可以应用定理 2.7。下文还将用到以下事实：s(T − I) = r(T) − 1 且 s(ˆA − I) = r(ˆA) − 1，并作代换 $\mu = \lambda + 1$。首先，我们得出，对于$\lambda \in$ (s(T − I), ∞)，r(F(λ − (T − I))$^{-1}$) 是关于 λ 的非增凸函数；等价地，对于 $\mu \in$ (r(T), ∞)，r(F(μ − T)$^{-1}$) 是关于 μ 的非增凸函数。

在情形 1 中，对所有 $\lambda >$ s(T − I)，r(F(λ −(T − I))$^{-1}$) < 1 等价于对所有 $\mu >$ r(T)，r(F(μ − T)$^{-1}$) < 1。在此情形下，s(ˆA − I) = s(T − I) 蕴含 r(ˆA) − 1 = r(T) − 1，且 r(ˆA) = r(T)。

在情形 2 中，存在 $\lambda_1 < \lambda_2$ 属于 (s(T − I), ∞)，使得 r(F(λ_1 −(T − I))$^{-1}$) ≥ 1 且 r(F(λ_2 −(T − I))$^{-1}$) < 1，等价于存在 $\mu_1 < \mu_2$ 属于 (r(T), ∞)，使得 r(F(μ_1 − T)$^{-1}$) ≥ 1 且 r(F(μ_2 − T)$^{-1}$) < 1。在此情形下，s(ˆA − I) > s(T − I) 蕴含 r(ˆA) > r(T)。最后，r(F[s(ˆA − I)I −(T − I)]$^{-1}$) = 1 蕴含

$$r(F[(r(\hat{A})-1)I + I - T]^{-1}) = r(F(r(\hat{A})I - I + I - T)^{-1}) = r(F(r(\hat{A})I - T)^{-1}) = 1. \square$$

我们还需要以下结果：

引理 2.9。 （*[20]*中的命题 *4.3*）设 X、K、A、T 和 F 满足推论 *2.8* 中的假设，其中 $A = T + F$。令 $\lambda \in \rho$（T）。则

$\lambda \in \rho$（A）当且仅当 $1 \in \rho$（F（$\lambda - T$）$^{-1}$）。此外，在此情况下，

$$(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - T)^{-1}(I - F(\lambda - T)^{-1})^{-1}.$$

证明。 通过简单的代数运算可以很容易地看出该命题：

$$\begin{aligned} \lambda - A &= \lambda - T - F \\ &= I(\lambda - T) - F(\lambda - T)^{-1}(\lambda - T) \\ &= (I - F(\lambda - T)^{-1})(\lambda - T). \end{aligned}$$

Then

$$(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - T)^{-1}(I - F(\lambda - T)^{-1})^{-1}$$

当且仅当 $\lambda \in \rho$（A），并且当且仅当 $1 \in \rho$（F（$\lambda - T$）$^{-1}$）。 □

3 结果

为证明矩阵情形下 R_0 的三分法，Li 和 Schneider 首先证明：若 $R_0 > 0$，则$T + {}^{1}_{R_0}F$ 的谱半径为 1。这里我们证明，在无限维情形下，定理 1.1 的假设仍能保证这一性质成立。

3.1 $T + {}^{1}_{R_0}F$ 的谱半径为 1

引理 3.1. 设 X 是由生成正规锥 K 定序的巴拿赫空间。设 A 是保持 K 的有界线性算子，并假设 A 可分解为 $A = T + F$，其中 $r(T) < 1$，且 T 和 F 也是保持 K 的有界线性算子。定义 $R_0 := r(F(I - T)^{-1})$，并假设 $R_0 > 0$。那么 $T + {}^{1}_{R_0}F$ 的谱半径为 *1*。

证明。 设 $A' := T + {}^{1}_{R_0}F$。我们首先证明 $r(A') \geq 1$。对于 $\lambda > r(T)$，注意到

$$(\lambda - A') = (I - \frac{1}{R_0}F(\lambda - T)^{-1})(\lambda - T)$$

并且根据引理 2.9，有 $\lambda \in \rho(A') \iff 1 \in \rho\left({}^{1}R_0 F(\lambda - T)^{-1}\right)$。因此，

$$\lambda \in \sigma(A') \iff 1 \in \sigma\left(\frac{1}{R_0} F(\lambda - T)^{-1}\right). \tag{$*$}$$

由于根据定义$R_0 = r\left(F(I - T)^{-1}\right)$，推论 2.3 和定理 2.4 可推出

$$1 = r\left(\frac{1}{R_0} F(I - T)^{-1}\right) \in \sigma\left(\frac{1}{R_0} F(I - T)^{-1}\right).$$

注意，这是由（$*$）得到 $\lambda = 1$ 的情形，因此可知 $\lambda = 1 \in \sigma(A')$。这意味着$r(A') \geq 1$。为简洁起见，定义

$$\tilde{r}(\lambda) := r\left(\frac{1}{R_0} F(\lambda - T)^{-1}\right)$$

对于定义域 $(\mathrm{r(T)}, \infty)$ 中的 λ，并回忆上文中的 $\tilde{}\mathrm{r(1)} = 1$。接下来，我们通过与推论 2.8 所述 $\tilde{}\mathrm{r}(\lambda)$ 为凸集这一事实矛盾，证明 $\mathrm{r(A')} = 1$。假设 $\mathrm{r(A')} > 1$。那么存在 $\lambda_1 > 1$ 使得$\lambda_1 \in \sigma\mathrm{(A')}$（注意，通过应用定理 2.4，我们总可以取 $\lambda_1 = \mathrm{r(A')} \in \sigma\mathrm{(A')}$）。由此可得 $1 \in \sigma\left({}^{1}\mathrm{R}_0\,\mathrm{F}(\lambda_1 - \mathrm{T})^{-1}\right)$，根据（$*$）。因此 $\tilde{}\mathrm{r}(\lambda_1) \geq 1$。然而，由推论 2.8 可知，由于 $\tilde{}\mathrm{r}(\lambda)$ 是非增函数，且 $\tilde{}\mathrm{r(1)} = 1$，必有 $\tilde{}\mathrm{r}(\lambda_1)$=1。

注意，我们必然处于推论 2.8 的情形 2，因此存在 $\lambda_2 > \lambda_1$ 使得 $\tilde{}r(\lambda_2) < 1$。令$t \in (0, 1)$，使得 $1t + \lambda_2 (1 - t) = \lambda_1$。利用 $\tilde{}r(\lambda)$ 的凸性以及 $\tilde{}r(\lambda_2) < 1$这一事实，得到如下矛盾：

$$1 = \tilde{r}(\lambda_1) \leq t\tilde{r}(1) + (1 - t)\tilde{r}(\lambda_2) = t + (1 - t)\tilde{r}(\lambda_2) < 1.$$

因此，$r(A')$ 不可能大于 1。所以$r(A')$ 必定恰好等于 1。 □

3.2 非严格三分法

我们从三分法最一般的形式开始，其中包含非严格不等式。

定理 3.2. 有界算子的非严格三分法

设 X 是一个由生成正规锥 K 定序的巴拿赫空间。设 A 是一个保持 K 的有界线性算子，并且可分解为 $A = T + F$，其中 T 和 F 也是保持 K 的有界线性算子，且 $r(T) < 1$。定义 $R_0 := r(F(I - T)^{-1})$。那么以下情况恰有一种成立：

$$\begin{aligned} &(a)\ R_0 \geq r(A) > 1, \\ &(b)\ R_0 = r(A) = 1, \\ &(c)\ R_0 \leq r(A) < 1. \end{aligned}$$

证明。

首先假设 $R_0 = 0$。那么根据定理 1.2，$r(A) < 1$，显然我们有 $R_0 = 0 \leq r(A)$，这正是所需的结论，因为谱半径总是非负的。

现在假设 $\mathrm{R_0} > 0$。根据引理 3.1，我们有 $\mathrm{r(T + {}^{1}R_0F)} = 1$。考虑以下三种情况：$\mathrm{R_0} = 1$、$\mathrm{R_0} > 1$ 和$0 < \mathrm{R_0} < 1$。根据定理 1.2，我们已经知道，当 $\mathrm{R_0} = 1$ 时，$\mathrm{r(A)} = 1$。剩下的只需证明：当 $\mathrm{R_0} > 1$ 时，$\mathrm{R_0} \geq \mathrm{r(A)}$；当 $\mathrm{R_0} < 1$ 时，$\mathrm{R_0} \leq \mathrm{r(A)}$。

假设$R_0 > 1$。那么

$$R_0(T + \frac{1}{R_0}F) \geq A$$

由于$(R_0 - 1)T$保持锥。根据定理 2.5，可得

$$r(R_0(T + \frac{1}{R_0}F)) \geq r(A).$$

根据推论 2.3，我们有

$$R_0 r(T + \frac{1}{R_0}F) \geq r(A).$$

最后，根据引理 3.1，我们有

$$R_0 \geq r(A).$$

反之，如果$0 < R_0 < 1$，同样的论证可得

$$R_0 \leq r(A).\square$$

3.3 严格三分法

通过对算子A、T和F施加进一步的几何和谱假设，可以得到定理 3.2 的一个严格不等式版本。首先，我们介绍文献中的若干概念和结果，以便陈述这些假设。

若点$\mathrm{x} \in \mathrm{K}$满足对所有$\mathrm{f} \in \mathrm{K}^* \setminus \{0\}$，均有$\mathrm{f}(\mathrm{x}) > 0$，则称其为几乎内点；参见 [11]。类似地，严格正泛函$\mathrm{f} \in \mathrm{K}^*$是指满足以下条件的泛函：只要$\mathrm{x} \in \mathrm{K} \setminus \{0\}$，便有$\mathrm{f}(\mathrm{x}) > 0$。若有界保锥算子 A 满足：对任意一对$(\mathrm{x}, \mathrm{f}) \in (\mathrm{K} \setminus \{0\}) \times (\mathrm{K}^* \setminus \{0\})$，都存在一个$\mathrm{n} = \mathrm{n}(\mathrm{x}, \mathrm{f})$（可能取决于 x 和 f），使得$\mathrm{f}(\mathrm{A}^n\mathrm{x}) > 0$，则称 A 为半非支撑算子。半非支撑算子推广了不可约矩阵的概念。对于这类算子，我们有以下结论：

定理 3.3。（*[18]*中的定理 *2.2*）设 X 是由生成正规锥 K 定序的巴拿赫空间。设 A 是定义在生成正规锥上的有界保锥半非支撑算子，并假设 $r(A)$ 是 A 的预解映射的极点（该映射从 $\rho(A)$ 到 $\mathcal{B}(X)$，由 $\lambda \to (\lambda - A)^{-1}$ 给出）。那么

> *1.* $r(A)$ 是预解映射的单极点。*2.* 存在唯一的特征向量 x（正比例意义下）属于 K，且 x 是几乎内点，对应于 $r(A)$。此外，若 $v \in K$ 是 A 的特征向量，则 $v = cx$，其中 c 为某个正数。*3.* 存在一个严格正的特征泛函 f，对应于 A 的 $r(A)$。

条件 $r(A)$ 是预解映射的极点，保证 $r(A)$ 将是 A 的特征值（例如参见 [3] 第七章中的推论 6.12）。使 $r(A)$ 成为极点的一个充分条件是，假设 A 是 X 上的保持锥紧算子，且 $r(A) > 0$（[9] 中的定理 VII.4.5 保证紧算子的非零谱值都是极点，而定理 2.4 保证 $r(A)$ 是其中一个谱值）。

下面给出定理 2.5 的一个版本，它在附加假设下给出了谱半径的严格序。

定理 3.4.（*[18]*中的定理 *4.3*）设 X 是由生成正规锥 K 赋序的巴拿赫空间。设 A 和 B 是有界保锥算子，且 $B \leq A$ 且 $B \neq A$。此外，假设 A 是半非支撑算子，其特征向量 $x \in K$ 和特征泛函 $f \in K^*$ 均对应于 $r(A)$，并假设 $g \in K^*$ 是 B 的一个特征泛函，对应于 $r(B)$。那么

$$r(B) < r(A).$$

下面的引理使我们能够证明：若 $R_0 > 0$，则只要 A 是半非支撑的，$T + {}^1_{R_0}F$ 也是半非支撑的。

引理 3.5. 设 X 是由锥 K 定序的巴拿赫空间。假设 B 和 C 是有界保锥线性算子，且 $B \leq C$。若 B 是半非支撑的，则 C 也是半非支撑的。

证明。 我们先证明，对于任意$n \in \mathbb{N}$，只要 $0 \leq B \leq C$，就有$B^n \leq C^n$。设整数i、j满足$i \geq 1$、$j \geq 0$，且$i + j = n$。那么$B^i C^j \leq B^{i-1} C^{j+1}$，由下式可得

$$B^{i-1}C^{j+1} - B^i C^j = (B^{i-1}C - B^i)C^j = B^{i-1}(C - B)C^j,$$

因为这个表达式是保锥算子的复合。于是

$$B^n \leq B^{n-1}C \leq B^{n-2}C^2 \leq \cdots \leq BC^{n-1} \leq C^n.$$

现在假设B是半非支撑的。那么对于任意一对$(x、f) \in (K \setminus \{0\}) \times (K^* \setminus \{0\})$，存在一个$n = n(x、f)$，使得$f(B^n x) > 0$。显然，对于此处的$x$、$f$以及同一个$n$，我们有

$$f(C^n x) \geq f(B^n x) > 0,$$

这表明C 也是半非支撑的。 □

推论 3.6. 设 X 是由锥 K 定序的巴拿赫空间。假设 A 是一个有界、保持锥的半非支撑算子，且可分解为 $A = T + F$，其中 T 和 F 是有界保锥算子。那么对于任意 $a,b > 0$，$aT + bF$ 是半非支撑的。

证明。设 $\alpha = \min\{a, b\}$。则 $aT + bF \geq \alpha(T + F) = \alpha A$。显然， αA 是半非支撑的，因为只要 $f(A^n x) > 0$，就有 $f((\alpha A)^n x) > 0$，其中 $(x, f) \in (K \setminus \{0\}) \times (K^* \setminus \{0\})$。因此，根据引理 3.5，$aT + bF$ 是半非支撑的。 □

定理 3.7. 有界算子的严格三分法

设 X 是由生成正规锥 K 定序的巴拿赫空间。设 A 是一个有界、保持锥的半非支撑线性算子，其谱半径是其预解映射的极点。假设 A 可分解为 $A = T + F$，其中 T 和 F 是有界保锥线性算子，且 $r(T) < 1$。此外，假设 T 不是零算子。定义 $R_0 := r(F(I - T)^{-1})$，并假设 $R_0 > 0$。假设 $F(I - T)^{-1}$ 以 R_0 为其预解式的极点。那么以下情形恰有一种成立：

$$(a)\ R_0 > r(A) > 1,$$
$$(b)\ R_0 = r(A) = 1,$$
$$(c)\ R_0 < r(A) < 1.$$

证明。

应用定理 3.2 后，只需证明当$R_0 > r(A)$ 时$R_0 \geq r(A)$，以及当$R_0 < r(A)$时$R_0 \leq r(A)$。

根据定理 3.3，R_0 是$F(I - T)^{-1}$ 的一个特征值，其特征向量为v，特征泛函为f，二者分别属于锥和对偶锥。接下来证明，$T + {}^1_{R_0}F$ 也有属于锥和对偶锥的特征向量和特征泛函，且对应于其谱半径。由引理 3.1 可知，$r(T + {}^1_{R_0}F) = 1$。首先注意到，f也是对应于$r\left(T + {}^1_{R_0}F\right) = 1$ 的特征泛函，理由如下：

$$\begin{aligned} & [F(I-T)^{-1}]^* f = R_0 f \\ \Longrightarrow \quad & \frac{1}{R_0} F^* f = (I - T^*) f \\ \Longrightarrow \quad & (T + \frac{1}{R_0} F)^* f = f. \end{aligned}$$

注意，若 v 是对应于 R_0，的 $F(I - T)^{-1}$ 的一个特征向量，则令 $y = (I - T)^{-1}v$，并注意到 $(I - T)^{-1}Fy = R_0y$ 可推出 $(T + {}^1R_0F)y = y$。这表明 $y \in K \setminus \{0\}$ 是对应于其谱半径 1 的 $T + {}^1R_0F$ 的一个特征向量。

注意到，由于A 的谱半径是预解式的一个极点，定理 3.3 表明，$r(A)$ 是A 的特征值，并且相应的特征向量和特征泛函分别属于锥和对偶锥。

考虑 $R_0 > 1$ 的情形。于是 $R_0(T + {}^1R_0F) \geq A$，假设算子 A 是半非支撑的，因此根据推论 3.6，$R_0(T + {}^1R_0F)$ 是半非支撑的。显然，$R_0(T + {}^1R_0F) \neq A$，因为 $R_0 \neq 1$。我们已经证明，$T + {}^1R_0F$，即 $R_0(T + {}^1R_0F)$，具有一个属于 K 的特征向量和一个属于 K^*的特征泛函，二者均对应于其谱半径。类似地，根据定理 3.3，A 具有一个属于 K^* 的特征泛函，对应于 r(A)。因此，根据引理 3.1、推论 2.3 和定理 3.4，

$$R_0 = R_0 r(T + \frac{1}{R_0}F) = r(R_0(T + \frac{1}{R_0}F)) > r(A).$$

考虑 $0 < R_0 < 1$ 的情况。此时 $R_0(T + {}^1R_0F) \leq A$。显然，由于 $R_0 \neq 1$，再次有 $R_0(T + {}^1R_0F) \neq A$。我们已经证明 $T + {}^1R_0F$，因此 $R_0(T + {}^1R_0F)$ 有一个属于 K^* 的特征泛函，对应其谱半径。类似地，根据定理 3.3，A 在 K 中有一个特征向量和一个属于 K^* 的特征泛函，对应于 r(A)。最后，再根据引理 3.1、推论 2.3 和定理 3.4，

$$R_0 = R_0 r(T + \frac{1}{R_0}F) = r(R_0(T + \frac{1}{R_0}F)) < r(A). \square$$

4 示例：在 ℓ_p 上的种群增长莱斯利模型

考虑一个具有可数无限个离散年龄组的年龄结构种群模型。在时间步 t，种群的状态表示为 $x(t) = (x_i(t)) \in \ell_p$，其中 $p \in [1, \infty]$，$i \in \mathbb{N}$，$t \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$；每个分量 $x_i(t)$ 表示时间 t 年龄组 i 的种群规模。为在此情形下构造莱斯利模型，我们考虑如下形式的动力系统：$x(t + 1) = Ax(t)$，其中 $A = T + F$，由存活算子 T 和生育算子 F 组合而成，定义如下。

令 $f = (f_i) \in \ell_q$ (q，使得 ${}^1p + {}^1q = 1$)，且对所有 i，$f_i \geq 0$。每个 f_i 表示年龄组 i 中每个个体在一个时间步内预期产生的后代数。对于 $x = (x_i)$，定义 $Fx := (\sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i, 0, 0, 0, ...)$。定义一个序列 (t_i)，其中每个 t_i 表示年龄组 i 的个体在一个时间步内存活至年龄组 $i + 1$ 的预期比例。假设对所有 $i \in \mathbb{N}$，$t\, 0 \leq t_i \leq 1$，且 $\limsup_{i \to \infty} t_i < 1$。后一个条件将用于证明 $r(T) < 1$。对于 $x = (x_i)$，定义 $Tx = (0, t_1x_1, t_2x_2, t_3x_3, ...)$。

算子$A = T$的作用 $+F$ 作用于元素$x = (x_i) \in \ell_p$ 时，可用一个无限维矩阵表示 ：

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & ... \\ t_1 & 0 & 0 & 0 & .... \\ 0 & t_2 & 0 & 0 & .... \\ 0 & 0 & t_3 & 0 & .... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & .... \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i \\ t_1 x_1 \\ t_2 x_2 \\ t_3 x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

T 和F （因此A也如此）在 ℓ_p 中保持标准锥，该锥为

$$K = \ell_p^+ := \{x \in \ell_p : x_i \geq 0\ \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

显然，这个锥是生成的且正规，正规常数为 $\gamma = 1$。

断言1： $T : \ell_p \to \ell_p$ 是一个K-保持锥的有界线性算子，并且$r(T) < 1$。

证明。 T 保持锥显然，因为 $0 \le t_i \le 1$。又因为 $0 \le t_i \le 1$, $|t_i x_i| \le |x_i|$ 对所有$i \in \mathbb{N}$都成立。因此 $||Tx||_p \le ||x||_p$ 对所有$x \in \ell_p$都成立，所以T 是有界的。

由于 $\limsup_{i\to\infty} t_i < 1$，存在某个$m \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，使得对所有$i > m$，都有$t_i < 1-\varepsilon$。序列(t_i)逐分量有上界，其上界为序列(s_i)，该序列定义如下

$s_i := \begin{cases} 1 & \text{若} i \le m \\ 1-\varepsilon & \text{否则。} \end{cases}$ 定义算子S 为$Sx = (0, s_1x_1, s_2x_2, s_3x_3, ...)$。显然$S \ge T \ge 0$，因此根据定理 2.5，如果我们证明$r(S) < 1$，那么$r(T) < 1$。考虑谱半径的盖尔范德公式，

$$r(S) = \lim_{n\to\infty} ||S^n||^{\frac{1}{n}},$$

我们固定$x \in \ell_p$，其中 $||x||_p = 1$。那么对于$n > m$,

$$||S^n x||_p \le (1-\varepsilon)^{n-m} ||x||_p = (1-\varepsilon)^{n-m}.$$

Then

$$\begin{aligned} ||S^n|| = \sup_{||x||_p=1} ||S^n x||_p &\le (1-\varepsilon)^{n-m}, \\ ||S^n||^{\frac{1}{n}} &\le (1-\varepsilon)^{\frac{n-m}{n}}, \\ r(S) = \lim_{n\to\infty} ||S^n||^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty} (1-\varepsilon)^{\frac{n-m}{n}} &= (1-\varepsilon) < 1. \square \end{aligned}$$

断言 2： F 是一个保K的有界线性算子。

证明。 显然F 是保K的，因为对所有$i \in \mathbb{N}$，都有$f_i \ge 0$。要证明F 有界，注意对于$x = (x_i) \in \ell_p$,

$$||Fx||_p = \left| \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i \right| \le \sum_{i=1}^{\infty} |f_i x_i| \le ||f||_q ||x||_p$$

根据 Hölder 不等式。 □

由于定理 3.2 的所有条件均已满足，我们可以定义 $R_0 := r(F(I-T)^{-1})$。将 $(I-T)^{-1}$写成无限矩阵可得

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ t_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ t_1t_2 & t_2 & 1 & 0 & 0 & ... \\ t_1t_2t_3 & t_2t_3 & t_3 & 1 & 0 & ... \\ t_1t_2t_3t_4 & t_2t_3t_4 & t_3t_4 & t_4 & 1 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

由此可得

$$F(I-T)^{-1} = \begin{bmatrix} f_1 + \sum_{i=2}^{\infty}(f_i \prod_{j=1}^{i-1} t_j) & f_2 + \sum_{i=3}^{\infty}(f_i \prod_{j=2}^{i-1} t_j) & f_3 + \sum_{i=4}^{\infty}(f_i \prod_{j=3}^{i-1} t_j) & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... \end{bmatrix}.$$

由于$F(I-T)^{-1}$是具有唯一归一化特征向量(1, 0,0, 0, ...)的秩一算子，容易看出R_0由表达式$f_1+\sum_{i=2}^{\infty}(f_i\prod_{j=1}^{i-1}t_j)$给出。根据定理 3.2，该表达式给出了$r(A)$与1的偏离程度的一个界，并判定$r(A)$是大于、小于还是等于1。

参考文献

[1] Linda J.S. Allen与P. van den Driessche. 若干离散时间流行病模型中的基本再生数. 差分方程与应用杂志, 14(10-11):1127–1147, 2008年.[2] Wolfgang Arendt. 预解正算子. 伦敦数学会会刊, s3-54(2):321–349, 1987年.[3] John B. Conway. 泛函分析教程. 数学研究生教材 ; 96. Springer Science+Business Media, 纽约, 第2版, 2010年.[4] J.M. Cushing与Odo Diekmann. 基本再生数的多种面貌（一篇教学札记）. 理论生物学杂志, 404:295–302, 2016年.[5] J.M. Cushing与Zhou Yicang. 种群矩阵模型中的净繁殖值与稳定性. 自然资源建模, 8(4):297–333, 1994年.[6] Patrick De Leenheer、Zachary Gregg与Jordan McCaslin. 基本再生数使用上的若干局限性. 差分方程与应用杂志, 30(8):1147–1171, 2024年.[7] Klaus Deimling. 非线性泛函分析. Springer-Verlag, 柏林, 1985年.[8] O DIEKMANN, J. A. P HEESTERBEEK与J. A. J METZ. 异质种群传染病模型中基本再生数的定义与计算. 数学生物学杂志, 28(4):365–382, 1990年.[9] Nelson Dunford与Jacob T. Schwartz. 线性算子. 纯粹与应用数学; 第VII卷. Interscience Publishers, 纽约, 1958年.[10] Klaus-Jochen. Engel与R. Nagel. 线性演化方程的单参数半群. 数学研究生教材 ; 194. Springer, 纽约, 2000 年 .[11] Jochen Gl¨uck 与 Martin R. Weber. 序 Banach 空间中的几乎内点与强正算子半群的长期行为. 数学研究, 254(3):237–263, 2020年.[12] Tosio Kato. 谱半径的超凸性， 以及谱界与型的凸性.数学杂志, 180(3):265–273, 1982年.[13] J. F. C. Kingman. 正矩阵的凸性. 数学季刊, 12(1):283–284, 1961年.[14] B. Korenblum、R. O'Neil、K. Richards与K. Zhu. 全单调函数及其在伯格曼空间中的应用. 美国数学会汇刊, 337(2), 1993年.[15] Erwin Kreyszig. 泛函分析导论及其应用. Wiley, 纽约, 1978年.[16] Bas Lemmens与Roger D. Nussbaum. 非线性 *Perron-Frobenius* 理论. 剑桥数学专著 ; 189. 剑桥大学出版社, 剑桥, 第1版, 2012年.[17] Chi-Kwong Li与Hans Schneider. Perron-Frobenius 理论在种群动力学中的应用.数学生物学杂志, 44(5):450–462, 2002年.[18] Ivo Marek. 正算子的 Frobenius 理论：比较定理及其应用. *SIAM* 应用数学杂志, 19(3):607–628, 1970年.

[19] A. Pazy. 线性算子半群及其在偏微分方程中的应用. 应用数学科学, 44. Springer New York, 纽约州纽约市, 1983年.[20] Horst R. Thieme. 关于预解正算子及其扰动的注记. 离散与连续动力系统. *A*辑, 4(1):73–90, 1998年.[21] Horst R. Thieme. 无限维种群结构与时间异质性情形下的谱界与再生数. *SIAM* 应用数学杂志, 70(1):188–211, 2009年.[22] P. van den Driessche与James Watmough. 疾病传播舱室模型的再生数与阈下地方病平衡点. 数学生物科学, 180(1):29–48, 2002年.[23] James S. Vandergraft. 具有不变锥的矩阵的谱性质. *SIAM* 应用数学杂志, 16(6):1208–1222, 1968年.[24] Richard S. Varga. 矩阵迭代分析. Springer计算数学丛书 ; 27. Springer, 柏林 ;, 第2版修订扩充版, 2009年.[25] J¨urgen Voigt. 关于AL空间上的预解正算子与正C_0-半群. 半群论坛, 38(1):263–266, 1989年.