arXiv:2602.10373v1 [math.FA] 10 Feb 2026

卷积比较测度

¨OTTE HEINAVAARA

Abstract. 我们给出了经典卷积与自由卷积之间精确的泛函比较。若 μ和 ν 是紧支撑概率测度，我们证明，只要 f 的四阶导数非负， f 在经典卷积 $\mu*\nu$上的期望就不小于 f在自由卷积 $\mu\boxplus\nu$上的期望。反过来，四阶导数非负是进行这种比较的必要条件。

这一比较基于 $\mathbb{R}^2$上一个相关测度的正性，我们将其称为*convolution comparison measure*。我们利用一个涉及厄米矩阵的奇妙恒等式，给出了该测度的表达式。

1. 引言

1.1.比较经典卷积与自由卷积。 自由独立性由 Voiculescu [Voi85] 于1983年提出，作为张量积中（经典）独立性的类比，不过对应的是自由积。

具体来说，若 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 是带有态 τ_1, τ_2 的含幺 C^*-代数，且 $a_i \in \mathcal{A}_i$ 是自伴的，那么我们可以将 a_i 视为一个支撑集紧致的实值随机变量，其矩为 $\tau(a_i^k)$。取张量积 $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ 上的态 $\tau := \tau_1 \otimes \tau_2$ 后，这些随机变量便在经典意义下相互独立。特别地，元素 $a_1 + a_2 := a_1 \otimes 1 + 1 \otimes a_2$ 的分布仅取决于 a_1 和 a_2 的分布；它等于二者的（经典）卷积。

Voiculescu 注意到，自由积 $\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$ 上存在一个态 τ，具有以下性质：若 $a_i^{(j)} \in \mathcal{A}_i$ 满足对所有 $i \in \{1,2\}$ 和 $j \in \{1,\dots,n\}$，均有 $\tau_i\left(a_i^{(j)}\right) = 0$，则

$$\tau\left(a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_1^{(2)} a_2^{(2)} \cdots a_1^{(n)} a_2^{(n)}\right) = 0. \tag{1}$$

这引出了对 C^* 代数的子代数自由独立性的定义。若按照此意义， a_1和 a_2 是自伴且自由独立的，那么 Voiculescu [Voi86] 证明， $a_1 + a_2$ 的分布仍只取决于 a_1 和 a_2 的分布； $a_1 + a_2$ 的分布就是自由卷积。

设 μ 和 ν 是取实数值且支撑紧的随机变量。计算经典卷积通常很简单：如果 μ 和 ν 关于勒贝格测度绝对连续，那么它们的经典卷积 $\mu * \nu$ 也绝对连续，其密度是各自密度的卷积。如果 μ 和 ν 是有限支撑的，那么它们的卷积也具有有限支撑；卷积的支撑和概率有简单的描述。（关于相关计算，参见 [Dur19, 2.1.2] 。）

对于自由卷积 $\mu\boxplus\nu$，情况要复杂得多。Voiculescu 借助 R-变换 [Voi86]研究了自由卷积。 R-变换在解析意义上刻画了自由性，这与特征函数在研究交换随机变量时的作用十分相似。除了一些特殊情形 [MS17，第 3]，章外， R-变换通常没有显式表达式，自由卷积也一样。例如，有限支撑概率测度的自由卷积没有简单的公式，除非两个测度的支撑集都至多包含两个点。Bercovici 和 Voiculescu [BV98，定理 7.4]证明，一般而言，有限支撑测度的自由卷积既不是有限支撑的，也不含任何点质量。

Date: 2026年2月10日。

在经典情形下， $\mu*\nu$ 的支撑集是各加数支撑集的闵可夫斯基和。因此，凸包 Conv(supp($\mu * \nu$)) 也等于 Conv(supp(μ)) +Conv(supp(ν))；这一事实也可由卷积的 C^*-代数描述推出。

对于自由卷积，根据算子理论考量，仍可推出 Conv(supp($\mu \boxplus \nu$)) 是 Conv(supp(μ)) + Conv(supp(ν)) 的子集；然而，一般而言，这一包含关系是严格的。从这个意义上说，我们可以说，自由卷积比经典卷积的分布范围更小。

自由卷积 $\mu\boxplus\nu$的矩——虽然比经典情形复杂得多——确实可以用 μ 和 ν的矩来作组合描述。Speicher [Spe94] 发现，自由卷积的矩可以用所谓的自由累积量表示。然而，对于更高阶的矩，由此得到的表达式会变得愈发复杂，难以处理。

设 $m_k(\mu)$ 为 μ 的第 k阶矩。很容易验证，经典卷积与自由卷积的前三阶矩相同，但一般从第四阶矩开始便有所不同。事实上， $m_4(\mu*\nu)$ 几乎总是严格大于 $m_4(\mu\boxplus\nu)$；两者之差为 2 Var(μ) Var(ν)，其中 Var 表示方差。同样，

$$\limsup_{k\to\infty} m_{2k}(\mu*\nu)^{1/(2k)} \geq \limsup_{k\to\infty} m_{2k}(\mu\boxplus\nu)^{1/(2k)};$$

这是一个 关于支撑集凸包包含关系的重新表述 .

一个自然的问题是，类似的排序关系是否也适用于更高阶的偶数阶矩。

1.2. 卷积比较测度。 我们的首个结果给出了经典卷积与自由卷积的精确排序，尤其是，它立即肯定地回答了关于矩排序的问题。

定理 1.3。 设 μ 和 ν 是 $\mathbb{R}$上的紧支撑概率测度。那么，对于任意$f \in C^4(\mathbb{R})$ 且满足 $f^{(4)} \geq 0$的情形，我们有

$$\int f(t)\,\mathrm{d}(\mu*\nu)(t) \geq \int f(t)\,\mathrm{d}(\mu\boxplus\nu)(t), \tag{2}$$

其中， $*$ 和 $\boxplus$ 分别表示经典卷积和自由卷积。反过来，如果 $f \in C^4(\mathbb{R})$ 满足对任意 μ 和 ν都有*(2)*成立，那么 f 的四阶导数非负。

特别地，对于任意 $k \in \mathbb{N}$,

$$m_{2k}(\mu*\nu) \geq m_{2k}(\mu\boxplus\nu). \tag{3}$$

定理 1.3 可以表面上改述为关于某个辅助测度正性的问题，该辅助测度由 μ 和 ν 导出，定义为将 $f^{(4)}$ 映射到式 (2) 中“左侧 - 右侧”的线性泛函所对应的测度。本文的关键见解是，我们可以从 $\mathbb{R}^2$ 上的一个测度中提取这种正性。这个正测度，我们称之为 μ 和 ν 的卷积比较测度 ，支撑于 Conv(supp(μ)) $\times$ Conv(supp(ν))。定理 1.3 可以由该卷积比较测度的切片的正性推导得出。

定理 1.4。 </style}设和为 上的紧支撑概率测度。那么，存在一个正Radon测度 ， ν ，它关于勒贝格测度 m_2 绝对连续，且支撑于 $\mathrm{Conv}(\mathrm{supp}(\mu))\times\mathrm{Conv}(\mathrm{supp}(\nu)) \subset \mathbb{R}^2$，使得对于任意 a、$b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 和 $f \in C^4(\mathbb{R})$，有

$$\widetilde{m}_{\mu,\nu}((x,y)\mapsto f^{(4)}(ax+by)) = \frac{1}{a^2b^2}\left(\int f(t)d(a\mu*b\nu)(t) - \int f(t)d(a\mu\boxplus b\nu)\right). \tag{4}$$

$\widetilde{m}_{\mu,\ \nu}$ 是卷积比较测度，作用于 μ 和 ν。

这里， $a\mu$ 是满足条件（$a\mu$）（aU）$=\mu$（U）的概率测度，其中 $U\subseteq\mathbb{R}$。

根据 (4)，我们可以验证 $\widetilde{m}_{\mu,\nu}(\mathbb{R}^2)=1/12\,\mathrm{Var}(\mu)\,\mathrm{Var}(\nu)$；因此，当且仅当其中一个概率测度为常数时，该测度才会消失。

注意到 f 无需在某个（适当的）紧集之外定义，因此可以对定理 1.3 和 1.4 给出略微推广的表述。不过，这种推广只是表面上的，因为无论如何，这类 C^4 函数都可以扩展到整个 $\mathbb{R}$ 上。

此前，Arizmendi 和 Johnston 在 $f(t)=-\log|z-t|$ 的特殊情形下证明了定理 1.3（对于任意位于 $\mathrm{Conv}(\mathrm{supp}(\mu))+\mathrm{Conv}(\mathrm{supp}(\nu))$ 之外的参数 z）[AJ23]。Arizmendi 和 Johnston 将这一结果作为研究熵最优传输的副产品推导出来；此外，他们还借助了自由卷积与随机矩阵理论中求积公式之间的联系 [MSS18]。目前尚不清楚他们的方法能否推广以证明定理 1.3。

作为定理 1.4 的推论，我们还得到以下具体的比较准则。对于二元实多项式 $p(x,y)=\sum_{i,j}c_{i,j}x^iy^j$，考虑其对称非交换提升

$$\widetilde{p}(a,b)=\sum_{i,j}c_{i,j}m_{i,j}(a,b),$$

其中，$m_{i,j}(a,b)$ 是 a^ib^j 的所有非交换重排的平均值。等价地，$m_{i,j}(a,b)$ 由以下关系隐式定义

$$(ta+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^km_{k,n-k}(a,b),$$

当 a 和 b 不对易时，且 t 是一个标量。

推论 1.5。设 $p(x,y)=\sum_{i,j}c_{i,j}x^iy^j$ 是二元实多项式。以下条件等价：

(a) 对于独立的 a 和 b，$\widetilde{p}(a,b)$ 的期望不小于对于自由独立的 a 和 b，$\widetilde{p}(a,b)$ 的期望，其中 a 和 b 是有界自伴算子。*(b)* 对于任意 $x,y\in\mathbb{R}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}p(x,y)=\sum_{i,j}c_{i,j}i(i-1)j(j-1)x^{i-2}y^{j-2}\geq 0.$$

证明。我们声称

$$\mathbb{E}_{\substack{a\sim\mu,b\sim\nu\\ a,b\text{ are independent}}}\widetilde{p}(a,b)-\mathbb{E}_{\substack{a\sim\mu,b\sim\nu\\ a,b\text{ are freely}\\ \text{independent}}}\widetilde{p}(a,b)=\widetilde{m}_{\mu,\nu}\left((x,y)\mapsto\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}p(x,y)\right).\tag{5}$$

事实上，根据对称提升的性质，要证明 (5)，只需考虑多项式 $(x,y)\mapsto(tx+y)^n$。对于这些多项式，利用 $\widetilde{m}_{\mu,\nu}(4)$ 的定义，左侧可化简为

$$t^2\widetilde{m}_{\mu,\nu}\left((x,y)\mapsto n(n-1)(n-2)(n-3)(tx+y)^{n-4}\right)=\widetilde{m}_{\mu,\nu}\left((x,y)\mapsto\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}(tx+y)^n\right).$$

由 (5) 可知，$\widetilde{m}_{\mu,\nu}$ 的正性推出 (b) $\Longrightarrow$ (a)。

当 μ 和 ν 支撑于 x 和 y 附近时，$\widetilde{m}_{\mu,\nu}$ 支撑于 (x,y) 附近。由连续性，(5) 的右侧约等于 $\mathrm{d}^2\,\mathrm{d}^2p(x,y)/\mathrm{d}y^2\,\mathrm{d}x^2$，因此，(a) $\Longrightarrow$ (b)。□

1.6. **交换测度**。卷积比较测度 $\widetilde{m}_{\mu,\nu}$ 对于有限支撑 μ 和 ν具有显式表达式。该表达式基于一个特殊的线性代数恒等式，其灵感源自作者早期关于迹联合谱测度 [Hei25]的研究。

对于 Hermit ian A, $B \in M_d(\mathbb{C})$，我们考虑由非负函数给出的测度

$$(a,b) \mapsto \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{d} |\Im(\lambda_i((A-aI)(B-bI)))|\,. \tag{6}$$

我们将看到，当且仅当 A与 B 可交换时，这个测度才为零。在引理 2.5 中，我们给出了这个测度的矩的一个组合表达式。例如，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{d} |\Im(\lambda_i((A-aI)(B-bI)))|\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b &= \frac{1}{3}\left(\mathrm{tr}(A^2B^2)-\mathrm{tr}(ABAB)\right)\\ &= \frac{1}{6}\,\mathrm{tr}((AB-BA)^*(AB-BA)).\end{aligned}$$

从一个有限支撑测度 μ出发，我们可以适当选取 A 和 B，使得 (6) 的矩能够用测度 μ的矩表示；这正是它在我们所研究情形中的应用。(6) 的正性是证明卷积比较测度具有正性的关键。我们认为，进一步研究函数 (6) 及其定义的测度本身也很有意义。

1.7. 证明与论文概述。 如前所述，我们将得到卷积比较测度 $\widetilde{m}_{\mu,\,\nu}$的一个显式表达式；利用该表达式证明定理 1.4，相当于证明一个恒等式。主要步骤如下：

(1) 在命题 4.2 中，我们从定义恒等式 (4) 的右端开始，其中$f(t) = t^n$，并设法将其表示为 μ 和 ν的矩的形式。由此得到 (37) 中 n_ν，$n_\mu \in \mathbb{N}$所对应的 $\widetilde{m}_{\mu,\,\nu}((t_\mu,\ t_\nu) \mapsto t_\mu^{n_\mu}t_\nu^{n_\nu})$ 的表达式，其中涉及某些线性泛函 I_l。(2) 对于有限支撑的 μ和 ν，我们设法利用 Gegenbauer 多项式以及密度 (6) 来表示泛函 I_l，其中适当选取了 A和 B。(3) 在命题 4.7 中，我们计算一个涉及 Gegenbauer 多项式的级数，从而得到卷积比较测度的一个显然为正的表达式。(4) 通过稍作逼近，我们可以将结论推广到多项式 f 以及有限支撑的μ 和 ν。这就证明了定理 1.4。定理 1.3 则可轻易推出。

在第 2 节中，我们详细概述所需的工具，并证明我们所依赖的一些恒等式。在第 3 节中，我们给出关于四阶导数条件必要性的简短但略显粗略的论证，并说明该条件为何是充分的（至少在主导阶上）。最后，在第 4 节中我们证明定理 1.3 和 1.4。第 5 节留作进一步的评论与问题。

2. Preliminaries and some identities

2.1. 差商。 阶为 k 的差商递归定义如下：设

$$[x_0]_f = f(x_0),$$

并对任意正整数 k，递归定义

$$[x_0,x_1,\dots,x_k]_f = \frac{[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]_f - [x_1,x_2,\dots,x_k]_f}{x_0-x_k}, \tag{7}$$

对于两两不同的点 x_0，x_1，.....，x_k。经过简短计算可得一个显式表达式

$$[x_0,x_1,\dots,x_k]_f = \sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}. \tag{8}$$

如果 f 是 C^k，则 k 阶差商可连续延拓到所有由 $k+1$ 个点构成的元组上。当 $x_0 \neq x_k$时，该延拓满足式（7）；并且有一个中值定理

$$[x_0, x_1, \ldots, x_k]_f = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}, \tag{9}$$

对于某个 $x \in$凸包$\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$。

我们将采用以下幂函数差商的表达式

$$[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k]_{t\mapsto t^n} = \sum_{\substack{i_0,i_1,\ldots,i_m\geq 0 \\ i_0+i_1+\ldots+i_k=n-k}} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}. \tag{10}$$

关于这一点以及许多其他内容，请参阅 de Boor 的综述 [dB05]。

2.2. 厄米矩阵恒等式。

我们需要用到迹联合谱测度理论中的一些恒等式 [Hei25]。

我们将 $A \in M_d(\mathbb{C})$ 的特征值记为 $\lambda(A) = \{\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots, \lambda_d(A)\}$，并按代数重数重复计数；排序对我们而言并不重要。

定理 2.3。设 d 为正整数，且 $A, B \in M_d(\mathbb{C})$ 为厄米矩阵。则存在唯一的正测度 $\mu_{A,B}$ 定义在 $\mathbb{R}^2$ 上，使得以下结论成立：

取 $\mathbb{R}$ 上的任意可测函数 f，使得 $f(0) = 0$，并且对任意 $M > 0$，

$$\int_{-M}^{M} \left| \frac{f(t)}{t} \right| \mathrm{d}t < \infty.$$

定义函数 $H(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$H(f)(x) = \int_0^1 \frac{1-t}{t} f(xt)\, \mathrm{d}t.$$

于是，对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，有

$$\operatorname{tr} H(f)(xA + yB) = \int_{\mathbb{R}^2} f(ax + by)\, \mathrm{d}\mu_{A,B}(a, b). \tag{11}$$

记 $\mu_{A,B}$ 关于 $\mathbb{R}^2$上的勒贝格测度 m_2 的连续部分和奇异部分分别为 $\mu_c = \mu_{c,A,B}$ 和 $\mu_s = \mu_{s,A,B}$ 。我们假设 A 和 B 的某个线性组合是可逆的。则连续部分 μ_c 为

$$\rho_{A,B}(a,b) := \frac{\mathrm{d}\mu_c}{\mathrm{d}m_2}(a,b) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{d} \left| \Im \left(\lambda_i \left(\left(I - \frac{aA+bB}{a^2+b^2} \right) (bA - aB)^{-1} \right) \right) \right|. \tag{12}$$

此外，若 A 可逆且 $A^{-1}B$ 有 d个互异特征值，则奇异部分 μ_s 满足

$$\mu_s(\varphi) = \sum_{v \in E(A^{-1}B)} \int_0^1 \frac{1-t}{t} \varphi \left(\frac{\langle Av, v\rangle}{\langle v, v\rangle} t, \frac{\langle Bv, v\rangle}{\langle v, v\rangle} t \right) \mathrm{d}t. \tag{13}$$

其中 $E(C)$ 表示矩阵 $C \in M_d(\mathbb{C})$ 的一个特征向量集合，并且 φ 是一个紧支撑不包含0的光滑函数。

引理 2.4. 设 $A, B \in M_d(\mathbb{C})$ 为厄米矩阵，其中 A 可逆，且 $k \geq 2$。那么，函数$t \mapsto \operatorname{tr}(A + tB)_+^{k-1}$ 在 $t = 0$ 处光滑，并且

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \operatorname{tr}(A + sB)_+^{k-1} \Big|_{s=0} = (k-1)k! \int_{\mathbb{R}} b^k \rho_{A,B}(0, b)\, \mathrm{d}b, \tag{14}$$

其中 $\rho_{A,\ B}$ 与式 *(12)* 中相同。

证明。我们将定理 2.3 应用于 $f\colon\ t \mapsto t_+^{k-1}$。可以验证，$H(f) = f/(k(k-1))$，并产生 (11)

$$\operatorname{tr}(A+sB)_+^{k-1} = k(k-1)\int_{\mathbb{R}^2}(a+bs)_+^{k-1}\,\mathrm{d}\mu_{A,B}(a,b).$$

对于固定的 $\delta > 0$，我们可以将 $\mathbb{R}^2$ 划分为楔形区域 $S_\delta = \{(a,\ b) \in \mathbb{R}^2 \mid |a| \le \delta|b|\}$ 及其补集。注意

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus S_\delta}(a+bs)_+^{k-1}\,\mathrm{d}\mu_{A,B}(a,b)$$

是一个多项式 在 s 中，关于 $|s| \le |\delta|$的次数至多为 $k-1$，因此其第 k阶导数为零。

根据 (13)，只要 S_δ 不包含任何形如 $(\langle Av,\ v\rangle/\langle v,\ v\rangle,\ \langle Bv,\ v\rangle/\langle v,\ v\rangle)$ 的非零点，$\mu_s(S_\delta) = 0$。其中，v是 $A^{-1}B$的特征向量（对应特征值 λ）。注意，当$\lambda\langle Av,\ v\rangle = \langle Bv,\ v\rangle$时，$S_\delta$ 中的非零点对应于 $1 \le |\lambda|\delta$。通过让 δ 足够小，我们可以确保 $\mu_s(S_\delta) = 0$。

由 (12) [Hei25，注 3.2], 可将连续部分改写为

$$\rho_{A,B}(a,b) = \frac{1}{2\pi b^2}\sum_{i=1}^{d}\left|\Im\left(\lambda_i\left((bI-B)\left(A-\frac{a}{b}B\right)^{-1}\right)\right)\right|.$$

利用标准的特征值正则性结果 [Bha97], ，我们看到 $b^2\rho_{A,B}(a,b)$ 在 S_δ上有界，并在 $S_\delta \setminus \{(0,0)\}$上连续。因此，(14) 的左端仅取决于函数$\rho(0,b)$。为了确定其具体依赖关系，通过逼近，只需计算其 k 阶导数

$$k(k-1)\int_{b_1}^{b_2}\int_{-|b|}^{|b|}(a+bs)_+^{k-1}b^{l-2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b$$

在 $s=0$处，并确认它与下式一致

$$(k-1)k!\int_{b_1}^{b_2}b^{k+l-2}\,\mathrm{d}b.$$

这相当于计算

$$\begin{aligned}k(k-1)\int_{b_1}^{b_2}\int_{-|b|}^{|b|}(a+bs)_+^{k-1}b^{l-2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b &= (k-1)\int_{b_1}^{b_2}|b|^k\left(s\operatorname{sign}(b)+1\right)^k b^{l-2}\,\mathrm{d}b\\ &= s^k(k-1)\int_{b_1}^{b_2}b^{k+l-2}\,\mathrm{d}b + p(s),\end{aligned}$$

其中 p 是关于 s 的次数小于 k的多项式。显然，最后这个表达式具有正确的 k 阶导数。□

引理 2.5. 设 $A, B \in M_d(\mathbb{C})$ 为厄米矩阵。定义函数 $\omega_{A,B}$ 如下

$$\omega_{A,B}(a,b) := \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{d}\left|\Im(\lambda_i((A-aI)(B-bI)))\right|.$$

那么，$\omega_{A,\ B}$ 在凸包$(\lambda(A)) \times$ 凸包$(\lambda(B))$上连续且紧支撑，并且对于任意k、$l \in \mathbb{N}$，我们有

(15)

$$\int a^k b^l \omega_{A,B}(a,b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b = \frac{1}{(k+l+2)(k+l+3)}\sum_{n=1}^{\min(k,l)+2}\frac{(-1)^{n-1}}{\binom{k+l+1}{n-1}}\sum_{\substack{i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_n\ge 1\\ i_1+\dots+i_n=k+2\\ j_1+\dots+j_n=l+2}}\operatorname{tr}(A^{i_1}B^{j_1}\cdots A^{i_n}B^{j_n}).$$

证明。$\omega_{A,\ B}$ 的连续性可由特征值 [Bha97], 的连续性推出，而其支撑方面的结论则由 [LR05,定理 10.1]推出。

对于 $a \quad \notin \quad \lambda(A)$，考虑关于这对 $(A', B') = ((A-aI)^{-1}, B)$ 的迹联合谱测度 $\mu_{A',B'}$ 。如引理 2.4 的证明所示， $\rho_{A',B'}$ 满足

$$\rho_{A',B'}(0,b) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{d}\left|\Im\left(\lambda_i\left(\left(I-\frac{B'}{b}\right)(bA')^{-1}\right)\right)\right| = \frac{1}{2\pi b^2}\sum_{i=1}^{d}\left|\Im\left(\lambda_i\left((A-aI)(B-bI)\right)\right)\right| = \frac{\omega_{A,B}(a,b)}{b^2}.$$

因此，引理 2.4 表明，对于任意 $l \in \mathbb{N}$,

$$\int b^l \omega_{A,B}(a,b)\,\mathrm{d}b = \frac{1}{(l+1)(l+2)!}\frac{\mathrm{d}^{l+2}}{\mathrm{d}s^{l+2}}\operatorname{tr}((A-aI)^{-1}+sB)_+^{l+1}\Big|_{s=0}. \tag{16}$$

利用 [Hei24、引理 2.2，3], 右侧的表达式可用差商改写为

$$\frac{1}{l+2}\sum_{i_1=1}^{d}\sum_{i_2=1}^{d}\cdots\sum_{i_{l+2}=1}^{d}[(\lambda_{i_1}-a)^{-1},(\lambda_{i_2}-a)^{-1},\ldots,(\lambda_{i_{l+2}}-a)^{-1}]_{t\mapsto t_+^l}B_{i_1,i_2}B_{i_2,i_3}\cdots B_{i_{k+2},i_1}, \tag{17}$$

其中， $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_d$ 是 A 的特征值，而 $(B_{i,j})_{i,j}^d$ 是 B 在相应特征基下的矩阵。

暂且假设这些 λ_{i_j}s 两两不同。然后，利用差商的显式表达式 (8)，我们可以写成

$$\begin{aligned}[(\lambda_{i_1}-a)^{-1},\ldots,(\lambda_{i_{l+2}}-a)^{-1}]_{t\mapsto t_+^l} &= \sum_{j:\lambda_{i_j}>a}\frac{(\lambda_{i_j}-a)^{-l}}{\prod_{j'\neq j}((\lambda_{i_j}-a)^{-1}-(\lambda_{i_{j'}}-a)^{-l})}\\ &= \sum_{j:\lambda_{i_j}>a}\frac{\prod_{j'=1}^{l+2}(\lambda_{i_{j'}}-a)}{\prod_{j'\neq j}(\lambda_{i_{j'}}-\lambda_{i_j})}.\end{aligned} \tag{18}$$

若 F_k 是函数 $a\mapsto\prod_{j'=1}^{l+2}(\lambda_{i_{j'}}-a)a^k$的原函数，则可得

$$\int\sum_{j:\lambda_{i_j}>a}\frac{\prod_{j'=1}^{l+2}(\lambda_{i_{j'}}-a)}{\prod_{j'\neq j}(\lambda_{i_{j'}}-\lambda_{i_j})}a^k\,\mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{l+2}\frac{F_k(\lambda_{i_j})}{\prod_{j'\neq j}(\lambda_{i_{j'}}-\lambda_{i_j})} = (-1)^{l+1}[\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\ldots,\lambda_{i_{l+2}}]_{F_k}.$$

即使 λ_{i_j}彼此不全相异，差商的连续性也意味着

$$\int a^k[(\lambda_{i_1}-a)^{-1},(\lambda_{i_2}-a)^{-1},\ldots,(\lambda_{i_{l+2}}-a)^{-1}]_{t\mapsto t_+^l}\,\mathrm{d}a = (-1)^{l+1}[\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\ldots,\lambda_{i_{l+2}}]_{F_k}. \tag{19}$$

用 e_j 表示 $\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\ldots,\lambda_{i_{l+2}}$的 j 次初等对称多项式。然后，对幂函数的差商应用公式 (10)，可得

$$(-1)^{l+1}[\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\ldots,\lambda_{i_{l+2}}]_{F_k} = \sum_{j=0}^{l+2}\frac{(-1)^{j-1}e_j}{l+k+3-j}\sum_{\substack{p_1,p_2,\ldots,p_{l+2}\geq 0\\ p_1+p_2+\ldots+p_{l+2}=k-j+2}}\lambda_{i_1}^{p_1}\lambda_{i_2}^{p_2}\cdots\lambda_{i_{l+2}}^{p_{l+2}}. \tag{20}$$

右侧的和展开后为

$$\sum_{\substack{p_1,p_2,\ldots,p_{l+2}\geq 0\\ p_1+p_2+\ldots+p_{l+2}=k+2}}c_{k,l}(p_1,p_2,\ldots,p_{l+2})\lambda_{i_1}^{p_1}\lambda_{i_2}^{p_2}\cdots\lambda_{i_{l+2}}^{p_{l+2}},$$

其中 $c_{k\,l}$ 仅取决于正 p_i的数量。如果正 p_i的数量为 n ，

$$c_{k,l}(p_1,p_2,\dots,p_{l+2}) = \sum_{j=0}^{l+2} \frac{(-1)^{j-1}}{l+k+3-j}\binom{n}{j} = \frac{(-1)^{n-1}}{(l+k+3)\binom{l+k+2}{n}}. \tag{21}$$

最后一个等式是 Chu–Vandermonde 恒等式 (23) 的一个特例；我们将在下一节讨论这一恒等式及相关恒等式。

利用恒等式 (16)、(17)、(19)、(20) 和 (21)，我们有

$$\begin{aligned}
&\int a^k b^l \omega_{A,B}(a,b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b \\
=&\frac{1}{l+2}\sum_{n=1}^{\min(k,l)+2} \frac{(-1)^{n-1}}{(l+k+3)\binom{l+k+2}{n}} \sum_{i_1=1}^{d}\cdots\sum_{i_{l+2}=1}^{d} \sum_{\substack{p_1,p_2,\dots,p_{l+2}\geq 0\\ p_1+p_2+\dots+p_{l+2}=k+2\\ \#\{j\in\{1,\dots,l+2\}\mid p_j>0\}=n}} \lambda_{i_1}^{p_1} B_{i_1,i_2}\cdots\lambda_{i_{k+2}}^{p_{k+2}} B_{i_{k+2},i_1} \\
=&\frac{1}{l+2}\sum_{n=1}^{\min(k,l)+2} \frac{(-1)^{n-1}}{(l+k+3)\binom{l+k+2}{n}} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_n\geq 1\\ i_1+\dots,i_n=k+2\\ j_0+j_1+\dots,j_n=l+2}} \operatorname{tr}(B^{j_0}A^{i_1}B^{j_1}\cdots A^{i_n}B^{j_n}).
\end{aligned}$$

还需注意

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_n\geq 1\\ i_1+\dots,i_n=k+2\\ j_0+j_1+\dots,j_n=l+2}} \operatorname{tr}(B^{j_0}A^{i_1}B^{j_1}\cdots A^{i_n}B^{j_n}) &= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_n\geq 1\\ i_1+\dots,i_n=k+2\\ j_1+\dots,j_n=l+2}} j_n \operatorname{tr}(A^{i_1}B^{j_1}\cdots A^{i_n}B^{j_n}) \\
&= \frac{l+2}{n} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_n\geq 1\\ i_1+\dots,i_n=k+2\\ j_1+\dots,j_n=l+2}} \operatorname{tr}(A^{i_1}B^{j_1}\cdots A^{i_n}B^{j_n});
\end{aligned}$$

稍作整理后，即可得到所需结果 (15)。 □

2.6. 超几何恒等式与 Gegenbauer 多项式。 我们需要使用涉及二项式系数和阶乘的各种恒等式；这些恒等式可由超几何函数的已知性质推得。参见 [Duv24]，了解超几何函数的现代处理方法。

对于 p、$q\in\mathbb{N}$ 和实数 a_1、……、a_p、b_1、……、b_q，广义超几何函数 ${}_pF_q$定义为级数

$${}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_p\\ b_1,\dots,b_q\end{matrix};z\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_1^{(k)}\cdots a_p^{(k)}}{b_1^{(k)}\cdots b_p^{(k)}}\frac{z^k}{k!}. \tag{22}$$

我们只需在 $(p、\ q)=(2、\ 1)$ 或 $(3、\ 2)$ 的情况下计算 ${}_pF_q$，并且其中一个 a_i 是负整数；在这种情况下，定义级数 (22) 是有限和。这里，$a^{(k)}$ 表示上升阶乘$a^{(k)}=a(a+1)\cdots(a+k-1)$。我们用 $a_{(k)}=a(a-1)\cdots(a-k+1)$ 表示下降阶乘。

Chu–Vandermonde 恒等式 [Duv24, 4.5.1] 给出了情形 $(p,q)=(2,1)$ 下的求值：若$n\in\mathbb{N}$,

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,-n\\ c\end{matrix};1\right] = \frac{(c-a)^{(n)}}{c^{(n)}}. \tag{23}$$

Saalsch¨utz 定理 [Duv24, 4.8] 讨论了 $(p,\ q)=(3,\ 2)$ 的情形：若 $n\in\ \mathbb{N}$,

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\ c,1+a+b-c-n\end{matrix};1\right] = \frac{(c-a)^{(n)}(c-b)^{(n)}}{c^{(n)}(c-a-b)^{(n)}}. \tag{24}$$

引理 2.7。设 $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$。则，

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(-1)^l\frac{(n_1)_{(l)}}{(n_1+l+1)!}\frac{(n_2)_{(l)}}{(n_2+l+1)!}=\frac{1}{(n_1+n_2+1)!}.$$

证明。 不失一般性，我们假设 $n_1 \le n_2$。经过一些简单的重排，该命题等价于

$$\sum_{l=0}^{n_1}\overbrace{(2n_1+1-2l)(-1)^{n_1-l}\frac{(n_1+n_2+1)_{(2n_1+1-l)}(n_1+n_2+1)_{(l)}}{(l)!(2n_1+1-l)!}}^{\text{denoted } q(l)}=\frac{(n_1+n_2+1)!}{n_1!n_2!}.$$

注意，该和以回文方式延伸至 $2n_1+1$，因为 $q(l) = q(2n_1+1-l)$。从 $l=0$ 到 $l=2n_1+1$ 求和会使等式两边都加倍。

展开第一个因子，写成 $q(l) = (2n_1+1)(-1)^{n_1-l}(\cdots) + (-2l)(-1)^{n_1-l}(\cdots)$。这将该和拆成两部分；第一个和为零，因为第 l 项与第 $(2n_1+1-l)$ 项相消。第二个和可以用以下形式表示：

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}-2n_1, -n_1-n_2\\ n_2-n_1+2\end{matrix};-1\right],$$

对于它，我们在 [LGR96，第 3] 节中找到了一个表达式。 □

我们用 $C_k^{3/2}$ 表示参数为 3/2、在 1 处归一化为 1 的第 k 个 Gegenbauer 多项式。这些是在 $[-1,1]$ 上关于权函数 $1-x^2$ 的正交多项式。按我们的归一化方式，它们满足 [Duv24, 9.2.2],，其中适当选取 $x,\ t,\ k$ 和 l，

$$(1-2xt+t^2)^{-3/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{2}C_k^{3/2}(x)t^k, \tag{25}$$

$$\int_{-1}^{1} C_k^{3/2}(x)C_l^{3/2}(x)(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \delta_{k,l}\frac{8}{(2k+3)(k+1)(k+2)}, \tag{26}$$

$$C_k^{3/2}(x) = {}_2F_1\left[\begin{matrix}k+3, -k\\ 2\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right]. \tag{27}$$

2.8. 自由概率。我们简要概述自由概率；感兴趣的读者可参阅 [MS17]，了解全面的介绍。

我们研究具有紧支撑的概率测度。此类测度的矩 μ记为 $m_k(\mu) := \mathbb{E}_{X\sim\mu}X^k$。

自由卷积的核心概念是自由累积量，我们将其记为 $\kappa_k(\mu)$。如果

$$\psi_\mu(z) = z\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}m_k(\mu)z^k\right) \tag{28}$$

那么，可以从 z中 $\psi_\mu(z)$的形式逆提取 μ 的自由累积量，其中

$$\psi_\mu^{-1}(z) = \frac{z}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\kappa_k(\mu)z^k}.$$

自由累积量的基本性质见 [Spe94, Voi86]

$$\kappa_k(a\mu) = a^k\kappa_k(\mu), \tag{29}$$

$$\kappa_k(\mu \boxplus \nu) = \kappa_k(\mu)+\kappa_k(\nu). \tag{30}$$

矩与自由累积量之间存在以下恒等式。

Lem命题 2.9. 设 μ 为一个紧支撑概率测度。对于 $n \geq k \geq 1$，令 t

$$M_{n,k}(\mu) = \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_k \geq 1 \\ i_1+i_2+\ldots+i_k=n}} m_{i_1}(\mu)m_{i_2}(\mu)\cdots m_{i_k}(\mu),$$

$$K_{n,k}(\mu) = \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_k \geq 1 \\ i_1+i_2+\ldots+i_k=n}} \kappa_{i_1}(\mu)\kappa_{i_2}(\mu)\cdots\kappa_{i_k}(\mu).$$

那么，对于 $n \geq k \geq 1$，我们有以下恒等式

$$M_{n,k}(\mu) = \sum_{r=k}^{n} \frac{k}{r}\binom{n}{r-k} K_{n,r}(\mu), \tag{31}$$

$$K_{n,k}(\mu) = \sum_{r=k}^{n} (-1)^{k-r}\frac{k}{r}\binom{n+r-k-1}{r-k} M_{n,r}(\mu). \tag{32}$$

我们证明引理 2.9 的论证将是 Mottelson 的 [Mot12]，的一个略微推广，其进一步依赖于拉格朗日反演定理 [Sta24, Theorem 5.4.2]。用 $[z^k]f(z)$ 表示 $f(z)$ 中 z^k 的系数。

定理 2.10。 设 $f(z)$ 是一个复系数形式幂级数，其中 $[z^0]f(z) = 0$ 且$[z^1]f(z) \neq 0$。那么， $f(z)$ 存在形式逆 $g(z)$，并且对于任意 k、 $n \in \mathbb{Z}$,

$$k[z^k]g^n = n[z^{-n}]f^{-k}. \tag{33}$$

引理 *2.9* 的证明。 设 ψ_μ 为式（28）中的幂级数。

用 $\psi_\mu(z)$ 表示矩后，我们得到

$$M_{n,k}(\mu) = [z^n]\sum_{n=k}^{\infty} M_{n,k}(\mu)z^n = [z^n]\left(\frac{\psi_\mu(z)}{z} - 1\right)^k = \sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}[z^{n+l}]\left(\psi_\mu(z)^l\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}\frac{l}{n+l}[z^{-l}](\psi_\mu^{-1}(z))^{-(n+l)} = \sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}\frac{l}{n+l}[z^n]\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j(\mu)z^j\right)^{n+l}$$

$$= \sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}\frac{l}{n+l}\sum_{r=1}^{n}\binom{n+l}{r}K_{n,r}(\mu).$$

剩下需要验证的是

$$\sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}\frac{l}{n+l}\binom{n+l}{r} = \frac{k}{r}\binom{n}{r-k},$$

这归结为求值 ${}_2F_1\left[\begin{smallmatrix}1-k & n+1\\ n-r+2\end{smallmatrix}; 1\right]$。

这就证明了（31）。第二个恒等式（32）也可以用类似的方法证明；或者可以通过验证线性系统（31）和（32）互为逆系统来证明；这同样归结为一个超几何恒等式。□

3. Leading order calculation

定理 1.4 表明，对于定理 1.3 中的卷积比较 (2)， $f^{(4)} \geq 0$ 是必要的。下面的命题中，我们简要给出一个更简单且独立的论证，说明这一必要性。该论证还表明， $f^{(4)} \geq 0$ 在主导阶上是充分的。

命题 3.1。 设 μ 和 ν 是紧支撑概率测度，且 $f \in C^4(\mathbb{R})$。则 ，

$$\int f(t)\,\mathrm{d}(\mu * \varepsilon\nu)(t) - \int f(t)\,\mathrm{d}(\mu \boxplus \varepsilon\nu)(t) = \varepsilon^2 \operatorname{Var}(\nu) \int f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}(t) + o(\varepsilon^2), \tag{34}$$

对于一个正测度 $\widetilde{\mu}$，其支撑于 凸包(supp(μ))，且仅依赖于 μ。

证明概要。 从 (34) 的左侧开始，考虑 $f(t) = t^k$ 的情形；也就是说，考虑表达式$m_k(\mu * \varepsilon\nu) - m_k(\mu \boxplus \varepsilon\nu)$。经典卷积的矩可以利用二项式定理展开。对于自由卷积，我们可以利用主要的自由性性质 (1)，将自由卷积的矩表示为 μ和 ν的矩，至少对于 $o(\varepsilon^2)$是如此；关于如何处理此类表达式的入门介绍，参见 [MS17, 1.12]。我们得到

(35)

$$\int t^k\,\mathrm{d}(\mu * \varepsilon\nu)(t) - \int t^k\,\mathrm{d}(\mu \boxplus \varepsilon\nu)(t) = \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Var}(\nu) \left(k(k-1)m_{k-2} - k \sum_{\substack{i_0, i_1 \geq 0 \\ i_0 + i_1 = k-2}} m_{i_0} m_{i_1} \right) + o(\varepsilon^2),$$

其中 $m_k = m_k(\mu)$。

经过一些简单的处理，我们看到

$$\left(k(k-1)m_{k-2} - k \sum_{\substack{i_0, i_1 \geq 0 \\ i_0 + i_1 = k-2}} m_{i_0} m_{i_1} \right) = \mathbb{E}_{X \sim \mu} f''(X) - \mathbb{E}_{\substack{X, X' \sim \mu \\ X, X' \text{iid}}} [X, X']_{f'} =: I_\mu \left(f^{(4)} \right),$$

对于 $f(t) = t^k$；并且通过逼近，对任意 $f \in C^4(\mathbb{R})$,

$$\int f(t)\,\mathrm{d}(\mu * \varepsilon\nu)(t) - \int f(t)\,\mathrm{d}(\mu \boxplus \varepsilon\nu)(t) = \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Var}(\nu) I_\mu \left(f^{(4)} \right) + o(\varepsilon^2).$$

剩下要验证的是， I_μ是一个正线性泛函，参见（34）。考虑 $f(t) = \frac{1}{6} t_+^3$。我们有 $f^{(4)} = \delta_0$, 因此

$$I_\mu(\delta_0) = \mathbb{E}_{X \sim \mu} X_+ - \frac{1}{2} \mathbb{E}_{\substack{X, X' \sim \mu \\ X, X' \text{iid}}} \frac{X X_+ - X' X'_+}{X - X'} = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{\substack{X, X' \sim \mu \\ X, X' \text{iid}}} \frac{X X'_+ - X' X_+}{X - X'}.$$

期望中的最后一个表达式逐点非负，因此 $I_\mu(\delta_0) \geq 0$。类似地，对于任意 $c \in \mathbb{R}$，有 $I_\mu(\delta_c) \geq 0$。由此可得 I_μ的正性。□

4. 定理 1.4 和定理 1.3 的证明

我们分四个主要步骤证明定理 1.4。

4.1. 步骤 1. 我们首先引入辅助泛函，用以表示经典卷积与自由卷积之差。对于 $l \in \mathbb{N}$，定义泛函 I_l^μ 如下:

$$I_l^\mu \left(t \mapsto t^n \right) = \frac{n!}{(n+l+3)!(n-l)!} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}(n-k+2)!}{k!} \frac{(l+k)!}{(l-k+2)!} M_{n+2,k}(\mu), \tag{36}$$

并作线性延拓；这里，$M_{n,k}(\mu)$ 依赖于 μ ，如引理 2.9 所述。令 $1/m!$ 在负的 m 时取 0，这样 I_l^μ 在次数小于 l 的多项式上消失。还要注意， I_l^μ 的和有 $l+2$ 项。

I_l 帮助我们实现定义测度 μ 和 ν 的卷积比较测度 的目标；定义 $\widetilde{m}_{\mu,\nu}$ 如下：

$$\widetilde{m}_{\mu,\nu}((t_\mu,t_\nu)\mapsto t_\mu^{n_\mu}t_\nu^{n_\nu})=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(2l+3)I_l^\mu\left(t\mapsto t^{n_\mu}\right)I_l^\nu\left(t\mapsto t^{n_\nu}\right), \tag{37}$$

并线性扩展至二元实多项式。在证明的其余部分，我们验证 $\widetilde{m}_{\mu,\ \nu}$满足 (4)，并给出它的另一种表达式，以验证它是正测度。

命题 4.2。 设 p 为一个多项式，且 a、$b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。那么，

$$\widetilde{m}_{\mu,\nu}((x,y)\mapsto p^{(4)}(ax+by))=\frac{(a\mu*b\nu)(p)-(a\mu\boxplus b\nu)(p)}{a^2b^2}. \tag{38}$$

证明。 首先，由引理 2.9 可得

$$\begin{aligned}m_n(\mu*\nu)&=m_n(\mu)+m_n(\nu)+\sum_{\substack{n_\mu,n_\nu\geq 1\\ n_\mu+n_\nu=n}}\binom{n}{n_\mu}m_{n_\mu}(\mu)m_{n_\nu}(\nu)\\&=m_n(\mu)+m_n(\nu)\\&\quad+\sum_{k_\mu,k_\nu\geq 1}\sum_{\substack{n_\mu,n_\nu\geq 1\\ n_\mu+n_\nu=n}}\frac{1}{(1+n_\mu)(1+n_\nu)}\binom{n}{n_\mu}\binom{n_\mu+1}{k_\mu}\binom{n_\nu+1}{k_\nu}K_{n_\mu,k_\mu}(\mu)K_{n_\nu,k_\nu}(\nu).\end{aligned}$$

在自由侧，累积量的可加性 (30) 加上一些组合学论证，可为$n\geq k\geq 1$ 证明

$$K_{n,k}(\mu\boxplus\nu)=K_{n,k}(\mu)+K_{n,k}(\nu)+\sum_{\substack{k_\mu,k_\nu\geq 1\\ k_\mu+k_\nu=k}}\sum_{\substack{n_\mu,n_\nu\geq 1\\ n_\mu+n_\nu=n}}\binom{k}{k_\mu}K_{n_\mu,k_\mu}(\mu)K_{n_\nu,k_\nu}(\nu),$$

由此我们可以计算

$$\begin{aligned}m_n(\mu\boxplus\nu)&=m_n(\mu)+m_n(\nu)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{k_\mu,k_\nu\geq 1\\ k_\mu+k_\nu=k}}\sum_{\substack{n_\mu,n_\nu\geq 1\\ n_\mu+n_\nu=n}}\frac{1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{k}{k_\mu}K_{n_\mu,k_\mu}(\mu)K_{n_\nu,k_\nu}(\nu)\\&=m_n(\mu)+m_n(\nu)+\frac{1}{n+1}\sum_{k_\mu,k_\nu\geq 1}\sum_{\substack{n_\mu,n_\nu\geq 1\\ n_\mu+n_\nu=n}}\binom{n+1}{k_\mu+k_\nu}\binom{k_\mu+k_\nu}{k_\mu}K_{n_\mu,k_\mu}(\mu)K_{n_\nu,k_\nu}(\nu).\end{aligned}$$

将这两个表达式相减，得到

$$\begin{aligned}m_n(\mu*\nu)-m_n(\mu\boxplus\nu)=&\sum_{\substack{n_\mu,n_\nu\geq 1\\ n_\mu+n_\nu=n}}\sum_{k_\mu,k_\nu\geq 1}\frac{n!}{k_\mu!k_\nu!}\\&\left(\frac{1}{((n_\mu-k_\mu)+1)!((n_\nu-k_\nu)+1)!}-\frac{1}{((n_\mu-k_\mu)+(n_\nu-k_\nu)+1)!}\right)K_{n_\mu,k_\mu}(\mu)K_{n_\nu,k_\nu}(\nu).\end{aligned}$$

请注意，如果 $\min(n_\mu,n_\nu)=1$，各加数均为零。通过比较 (38) 中 $a^{n_\mu-2}b^{n_\nu-2}\text{for}p(t)=t^n$ 的系数，我们可以看出，必要且充分的条件是

$$\begin{aligned}\widetilde{m}_{\mu,\nu}((t_\mu,t_\nu)\mapsto t_\mu^{n_\mu-2}t_\nu^{n_\nu-2})=&\sum_{k_\mu,k_\nu\geq 1}\frac{(n_\mu-2)!(n_\nu-2)!}{k_\mu!k_\nu!}\\&\left(\frac{1}{((n_\mu-k_\mu)+1)!((n_\nu-k_\nu)+1)!}-\frac{1}{((n_\mu-k_\mu)+(n_\nu-k_\nu)+1)!}\right)K_{n_\mu,k_\mu}(\mu)K_{n_\nu,k_\nu}(\nu).\end{aligned} \tag{39}$$

若记作

$$J_l^\mu(n)=\sum_{k\geq 1}\frac{(n+2-k)!}{(n-k-l+1)!(n-k+l+4)!}\frac{n!}{k!}K_{n+2,k}(\mu),$$

于是，引理 2.7 中的组合论推理表明，(39) 等价于

$$\widetilde{m}_{\mu,\nu}((t_\mu,t_\nu)\mapsto t_\mu^{n_\mu}t_\nu^{n_\nu})=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(2l+3)J_l^\mu(n_\mu)J_l^\nu(n_\nu).$$

剩下只需验证 $J_l^\mu(n)=I_l^\mu(t\mapsto t^n)$，参见 (37)。事实上，

$$\begin{aligned}J_l^\mu(n)&=\sum_{k\geq 1}\frac{(n+2-k)!}{(n-k-l+1)!(n-k+l+4)!}\frac{n!}{k!}\sum_{r=k}^{n}(-1)^{k-r}\frac{k}{r}\binom{n+r-k+1}{r-k}M_{n+2,r}(\mu)\\&=\frac{n!}{(n-l)!(n+l+3)!}\sum_{r\geq 1}\frac{(-1)^{r-1}(n+r)!}{r!}{}_3F_2\left[\begin{matrix}l-n,-n-l-3,1-r\\-n-1,-n-r\end{matrix};1\right]M_{n+2,r}(\mu)\\&=\frac{n!}{(n-l)!(n+l+3)!}\sum_{r\geq 1}\frac{(-1)^{r-1}}{r!}\frac{(l+r)!(n-r+2)!}{(l-r+2)!}M_{n+2,r}(\mu)=I_l^\mu\left(t\mapsto t^n\right),\end{aligned}$$

其中，第一处和第三处等号分别用到了引理 2.9 和 Saalsch¨utz 定理 (24)。□

4.3. **步骤 2。**

命题 4.4. 设 μ 是一个支撑于 d 个点上的概率测度，$A\in M_d(\mathbb{C})$ 是厄米的，并且 $v\in\mathbb{C}^d$，使得对任意 $k\in\mathbb{N}$，都有 $m_k(\mu)=\langle A^kv,v\rangle$。那么，对任意 $k,l\in\mathbb{N}$，

$$I_l^\mu\left(t\mapsto t^k\right)=\int a^kC_l^{3/2}(2b-1)\omega_{A,vv^*}(a,b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b,\tag{40}$$

其中 $\omega_{A,\ vv^*}$ 与引理 *2.5* 中相同，而 $C_l^{3/2}$ 是第 *2.6* 节中的 *Gegenbauer* 多项式。

证明。由于 $\mathrm{tr}\left(A^{i_1}(vv^*)^{j_1}\cdots A^{i_n}(vv^*)^{j_n}\right)=m_{i_1}(\mu)m_{i_2}(\mu)\ldots,\ m_{i_n}(\mu)$，由引理 2.5 并结合一些组合计算可得

$$\int a^kb^l\omega_{A,vv^*}(a,b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b=\frac{1}{(k+l+2)(k+l+3)}\sum_{n=1}^{k+2}\frac{(-1)^{n-1}\binom{l+1}{n-1}}{\binom{k+l+1}{n-1}}M_{k+2,n}(\mu).$$

根据 Gegenbauer 多项式的级数展开（27），我们得到

$$\begin{aligned}&\int a^kC_l^{3/2}(2b-1)\omega_{A,vv^*}(a,b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\\&=\sum_{n=1}^{k+2}\sum_{l'=0}^{l}\frac{1}{(k+l'+2)(k+l'+3)}\frac{(-1)^{n-1}\binom{l'+1}{n-1}}{\binom{k+l'+1}{n-1}}\frac{(l+3)^{(l')}(-l)^{(l')}}{2^{(l')}l'!}M_{k+2,n}(\mu)\\&=\sum_{n=1}^{k+2}\frac{1}{(l+1)(l+2)}\sum_{l'=0}^{l}(-1)^{l'+n-1}\frac{(k+l-n-l'+2)!}{(k+l-l'+3)!(l-n-l'+2)!}\frac{(2l-l'+2)!}{l'!(l-l')!}M_{k+2,n}(\mu)\\&=\sum_{n=1}^{k+2}\frac{(-1)^{n-1}}{(l+1)(l+2)}\frac{(k+l-n+2)!(2l+2)!}{(k+l+3)!(l-n+2)!l!}{}_3F_2\left[\begin{matrix}-k-l-3,-l+n-2,-l\\-k-l+n-2,-2l-2\end{matrix};1\right]M_{k+2,n}(\mu)\\&=\sum_{n=1}^{k+2}\frac{k!}{(k+l+3)!(k-l)!}\frac{(-1)^{n-1}(k-n+2)!}{n!}\frac{(l+n)!}{(l-n+2)!}M_{k+2,n}(\mu)=I_l^\mu\left(t\mapsto t^k\right),\end{aligned}$$

其中我们在倒数第二个等式中使用了 Saalsch¨utz 定理 (24)。□

对于有限支撑概率测度 μ，我们记 $\omega_\mu = \omega_{A,\ vv^*}$，其中 A 和 v 如命题 4.4 中所述。

命题 4.5。设 $A \in M_d(\mathbb{C})$ 为厄米矩阵，$v \in \mathbb{C}^d$ 满足 $\|v\|_2 = 1$，且 $a, b \in \mathbb{R}$。那么，矩阵

$$(A - aI)(vv^* - bI) \tag{41}$$

至多有一对非实特征值共轭对，其虚部的绝对值不超过长度(凸包($\lambda(A)$))。因此，

$$\omega_\mu(a,b) \leq \frac{1}{\pi}\,\mathrm{length}(\mathrm{Conv}(\mathrm{supp}(\mu))), \tag{42}$$

对任意有限支撑概率测度 μ，

证明。行列式的秩一更新公式 [HJ13, 0.8.5.11] 表明，(41) 的特征值 z满足

$$0 = \frac{1-b}{(a-\frac{z}{b})-a} - \left\langle \left(\left(a-\frac{z}{b}\right)I - A\right)^{-1} v, v \right\rangle = \frac{1-b}{w-a} - \left\langle (wI-A)^{-1}v, v\right\rangle, \tag{43}$$

其中 $w = a - z/b$。注意，(43) 是关于 w 的有理函数，其次数至多为 $d+1$，且至多有 d 个有限根。在 A 的两个相邻特征值之间的区间上，该有理函数从上方和下方都无界；因此，除非 a 位于该区间上，否则该区间内必有一个实根。因此，至少有 $d-2$ 个根是实数。这就说明了非实根数量上界的断言。我们还可得出结论：若 $a \notin$凸包($\lambda(A)$)，则不存在非实根。

对于虚部的界，(43) 可以改写为

$$-b = \left\langle (wI-A)^{-1}(A-aI)v, v\right\rangle.$$

若 $|\Im(w)| >$ 长度(凸包($\lambda(A)$))$/b$，则二次型内部的算子的算子范数小于 b，因此 w 不是 (43) 的解。但 $|\Im(z)| = b|\Im(w)|$，由此即得该结论。□

4.6. **步骤 3.**

命题 4.7. 设 μ 与 ν 为有限支撑概率测度。

考虑函数

$$w_{\mu,\nu}(t_\mu, t_\nu) = \int_0^1 \int_0^1 \min\left(\frac{1}{(1-b_\mu)(1-b_\nu)}, \frac{1}{b_\mu b_\nu}\right) \omega_\mu(t_\mu, b_\mu)\omega_\nu(t_\nu, b_\nu)\,\mathrm{d}b_\mu\,\mathrm{d}b_\nu. \tag{44}$$

于是 $w_{\mu,\ \nu}$是非负的、连续的，并且支撑于 凸包(支撑(μ)) $\times$ 凸包(支撑(ν))，且对任意 n_ν、$n_\mu \in \mathbb{N}$，我们有

$$\widetilde{m}_{\mu,\nu}((t_\mu,t_\nu) \mapsto t_\mu^{n_\mu} t_\nu^{n_\nu}) = \int\int t_\mu^{n_\mu} t_\nu^{n_\nu} w_{\mu,\nu}(t_\mu,t_\nu)\,\mathrm{d}t_\mu\,\mathrm{d}t_\nu. \tag{45}$$

证明。设

$$g(b_\mu, b_\nu) = \min\left(\frac{1}{(1-b_\mu)(1-b_\nu)}, \frac{1}{b_\mu b_\nu}\right).$$

该陈述中除最后一个性质外，$w_{\mu,\ \nu}$ 的其他性质均可由ω_μ 和ω_ν的类似性质，以及以下观察得出：

$$\int_0^1 \int_0^1 g(b_\mu, b_\nu)\,\mathrm{d}b_\mu\,\mathrm{d}b_\nu \leq \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{b(1-b)}}\,\mathrm{d}b\right)^2 < \infty. \tag{46}$$

我们的思路是在适当的 L_2空间中证明,

$$g(b_\mu, b_\nu) = \sum_{k_\mu, k_\nu} c_{k_\mu,k_\nu} C_{k_\mu}^{3/2}(2b_\mu - 1) C_{k_\nu}^{3/2}(2b_\nu - 1), \tag{47}$$

然后计算系数 c_{k_μ,k_ν}。

我们考虑希尔伯特空间 $L_2([0,1]^2, h)$，其中 $h(b_\mu, b_\nu) := b_\mu(1-b_\mu)b_\nu(1-b_\nu)$。方程 (26) 表明，Gegenbauer 多项式 $C_{k_\mu}^{3/2}(2b_\mu-1)C_{k_\nu}^{3/2}(2b_\nu-1)$ 的乘积构成 $L_2(h)$ 的正交基。剩下要验证 $g \in L_2(h)$；这可由与 (46) 的逐点比较得出。

我们可以计算 (45) 的右端,

$$\begin{aligned} &\int\int t_\mu^{n_\mu} t_\nu^{n_\nu} w_{\mu,\nu}(t_\mu, t_\nu)\,\mathrm{d}t_\mu\,\mathrm{d}t_\nu \\ &\qquad = \int_0^1 \int_0^1 g(b_\mu, b_\nu) \left(\int t_\mu^{n_\mu} \omega_\mu(t_\mu, b_\mu)\,\mathrm{d}t_\mu\right)\left(\int t_\nu^{n_\nu} \omega_\nu(t_\nu, b_\nu)\,\mathrm{d}t_\nu\right)\mathrm{d}b_\mu\,\mathrm{d}b_\nu. \end{aligned} \tag{48}$$

Gegenbauer 多项式的正交性和命题 4.4 因而表明，(48) 等于有限和

$$\begin{aligned} &\sum_{k_\mu,k_\nu} c_{k_\mu,k_\nu} \left(\int_0^1 \int t_\mu^{n_\mu} C_{k_\mu}^{3/2}(2b_\mu - 1)\omega_\mu(t_\mu, b_\mu)\,\mathrm{d}t_\mu\,\mathrm{d}b_\mu\right)\left(\int_0^1 \int t_\nu^{n_\nu} C_{k_\nu}^{3/2}(2b_\nu - 1)\omega_\nu(t_\nu, b_\nu)\,\mathrm{d}t_\nu\,\mathrm{d}b_\nu\right) \\ &\qquad = \sum_{k_\mu,k_\nu} c_{k_\mu,k_\nu} I_{k_\mu}^{\mu}(t_\mu \mapsto t_\mu^{n_\mu}) I_{k_\nu}^{\nu}(t_\nu \mapsto t_\nu^{n_\nu}). \end{aligned}$$

根据 $\widetilde{m}_{\mu,\nu}$ (37) 的定义，剩下要验证

$$c_{k_\mu,k_\nu} = \delta_{k_\mu,k_\nu}(2k_\mu + 3)(-1)^{k_\mu}. \tag{49}$$

对于任意 $|t_\mu| < 1$，利用 Gegenbauer 多项式的生成函数 (25) 和正交性 (26)，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{k_\mu,k_\nu} c_{k_\mu,k_\nu} \frac{4t_\nu^{k_\nu}}{2k_\nu + 3} C_{k_\mu}^{3/2}(x_\mu) &= \int_{-1}^1 \sum_{k_\mu,k_\nu} c_{k_\mu,k_\nu} C_{k_\mu}^{3/2}(x_\mu) C_{k_\nu}^{3/2}(x_\nu)(1 - 2x_\mu t_\mu + t_\mu^2)^{-3/2}(1 - x_\nu^2)\,\mathrm{d}x_\nu \\ &= \int_{-1}^1 4\min\left(\frac{1}{(1+x_\mu)(1+x_\nu)}, \frac{1}{(1-x_\mu)(1-x_\nu)}\right)(1 - 2x_\mu t_\mu + t_\mu^2)^{-3/2}(1 - x_\nu^2)\,\mathrm{d}x_\nu. \end{aligned}$$

最后一个积分可利用原函数求得

$$\int \frac{a + bx}{(1 - \alpha x)^{3/2}} = \frac{2(b + a\alpha + b(1 - \alpha x))}{\alpha^2(1 - \alpha x)^{1/2}}.$$

由此，我们得到

$$\sum_{k_\mu,k_\nu} c_{k_\mu,k_\nu} \frac{4t_\nu^{k_\nu}}{(2k_\nu + 3)} C_{k_\mu}^{3/2}(x_\mu) = \frac{8((1 + 2t_\nu x_\mu + t_\nu^2)^{1/2} - (1 + 2t_\nu x_\mu))}{t_\nu^2(1 - x_\mu^2)}.$$

两边乘以 t_ν^2，并对 t_ν 求两次导数，得到

$$\begin{aligned} \sum_{k_\mu,k_\nu} c_{k_\mu,k_\nu} \frac{4t_\nu^{k_\nu}(k_\nu + 1)(k_\nu + 2)}{(2k_\nu + 3)} C_{k_\mu}^{3/2}(x_\mu) &= \frac{8}{(1 + 2t_\nu x_\mu + t_\nu^2)^{3/2}} \\ &= 4\sum_{k_\mu=0}^{\infty} (k_\mu + 1)(k_\mu + 2) C_{k_\mu}^{3/2}(x_\mu)(-1)^{k_\mu} t_\nu^{k_\mu}. \end{aligned}$$

还需要比较 $C_{k_\mu}^{3/2}(x_\mu)t_\nu^{k_\nu}$ 的系数。 □

4.8. **步骤 4**。

定理 *1.4* 的证明。 命题 4.2 和 4.7 一起证明，$\widetilde{m}_{\mu,\nu}$ 是有限支撑的 μ 和 ν上的一个正测度。我们将一般的 μ 和 ν 在分布意义下用有限支撑测度逼近，从而得到一个概率测度序列 $\widetilde{m}_{\mu_n,\nu_n}$，其总测度和支撑集一致有界，且支撑集包含于 Conv(supp(μ))×Conv(supp(ν))。该界确实为 $1/12$ Var(μ) Var(ν)。测度的弱-$*$ 紧性意味着存在一个极限测度 $\widetilde{m}_{\mu,\nu}$，它至少对多项式 f具有所需性质。再次进行逼近即可处理一般的 $f \in C^4(\mathbb{R})$。□

5. Comments and conjectures

5.1. **有限自由卷积与 c-卷积**。 作者最初的动机是理解不等式 (3) 的一个变体，该变体比较自由卷积与多项式的有限自由卷积 。Marcus、Spielman 和 Srivastava 的研究推动了有限自由卷积的发展 [MSS22]。两个具有实根的 d 次多项式的有限自由加法卷积 $p \boxplus_d q$，也是一个具有实根的 d 次多项式。如果 μ_p 和 μ_q 是概率测度，分别在 p 和 q 的根处具有相同的点质量，那么当 d 很大时，分布 $\mu_{p\boxplus_d q}$在适当意义下接近 $\mu_p \boxplus \mu_q$ [AP18，推论 5.3]。根据 Marcus、Spielman 和 Srivastava 的研究 [Sri24，定理 4.2]，有限自由卷积与自由卷积的支撑集实际上可以进行比较,

$$\mathrm{Conv}\{x \mid (p \boxplus_d q)(x) = 0\} \subset \mathrm{Conv}(\mathrm{supp}(\mu_p \boxplus \mu_q)).$$

据说，Spielman 曾询问这个界能否推广到所有偶数阶矩；也就是说，对于 $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{d} \sum_{x:(p\boxplus_d q)(x)=0} x^{2k} \leq m_{2k}(\mu_p \boxplus \mu_q). \tag{50}$$

虽然我们未能回答这个问题，但它促成了定理 1.3 和 1.4。定理 1.3（以及定理 1.4）或许在有限自由框架下也有相应的变体。

猜想 5.2。 设 p 和 q 为实根多项式，且 $f \in C^4(\mathbb{R})$ 满足 $f^{(4)} \geq 0$。那么，

$$\frac{1}{d} \sum_{x:(p\boxplus_d q)(x)=0} f(x) \leq \int f(t)\,\mathrm{d}(\mu_p \boxplus \mu_q)(t).$$

可以对第 3 节中的论证进行修改，从而证明猜想 5.2 在主导阶上成立，并且条件 $f^{(4)} \geq 0$ 是必要的。

我们结果的另一种推广方向，是研究 Mergny 和 Potters 提出的所谓 c-卷积 [MP22], $\mu \oplus_c \nu$。该卷积将两个紧支撑概率测度 μ 和ν进行卷积，并由 $c \in [0,\infty]$参数化。 μ 和 ν 的经典卷积与自由卷积分别可作为 $\mu \oplus_0 \nu$和 $\mu \oplus_\infty \nu$得到。尽管可以通过解析方法或借助适当的累积量形式化定义 c- 卷积，但目前尚不清楚 $\mu \oplus_c \nu$ 是否总是一个概率测度。我们仍可提出以下猜想。

猜想5.3. 设 μ 与 ν 为紧支撑概率测度，且 $f \in C^4(\mathbb{R})$ 满足$f^{(4)} \geq 0$。则，

$$c \mapsto \int f(t)\,\mathrm{d}(\mu \oplus_c \nu)(t)$$

关于 c递减。

同样，可以证明该猜想在主导阶上成立，且条件 $f^{(4)} \geq 0$是必要的。

事实上， c-卷积与有限自由卷积密切相关，形式上 $\mu_{p\boxplus_d q} = \mu_p \oplus_{-d} \mu_q$[MP22]。

5.4. **概率测度的 4-序**。定理 1.3 给出了概率测度上的以下序关系。

定义5.5。 设 μ 和 ν 为概率测度，满足

$$\int |t|^3 \,\mathrm{d}\mu(t) < \infty, \int |t|^3 \,\mathrm{d}\nu(t) < \infty. \tag{51}$$

若对于任意 $f \in C^4(\mathbb{R})$（其中 $f^{(4)} \geq 0$ 和 $f_{(4)}$ 紧支撑），则记作 $\mu \prec_4 \nu$

$$\int f(t) \,\mathrm{d}\mu(t) \leq \int f(t) \,\mathrm{d}\nu(t). \tag{52}$$

条件（51）确保（52）的两边均可积。

定理 1.3 等价于以下断言：对于紧支撑的 μ 和 ν，有 $\mu \boxplus \nu \prec_4 \mu * \nu$。4-序还满足以下性质。

命题5.6。 设 μ_1、μ_2 和 ν 为紧支撑概率测度，且 $\mu_1 \prec_4 \mu_2$，则

$$\mu_1 * \nu \prec_4 \mu_2 * \nu.$$

证明。

$$\int f(t) \,\mathrm{d}(\mu_2 * \nu)(t) - \int f(t) \,\mathrm{d}(\mu_1 * \nu)(t) = \int \left(\int f(t-s) \,\mathrm{d}\mu_2(s) - \int f(t-s) \,\mathrm{d}\mu_1(s) \right) \mathrm{d}\nu(t).$$

□

命题 5.7。 设 μ_1、μ_2、.....、μ_n 为紧支撑概率测度。该 n,

$$\mu_1 \boxplus \mu_2 \boxplus \cdots \boxplus \mu_n \prec_4 \mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_n.$$

证明。 利用定理 1.3 和归纳法,

$$(\mu_1 \boxplus \mu_2 \boxplus \cdots \boxplus \mu_{n-1}) \boxplus \mu_n \prec_4 (\mu_1 \boxplus \mu_2 \boxplus \cdots \boxplus \mu_{n-1}) * \mu_n \prec_4 (\mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_{n-1}) * \mu_n.$$

□

若将命题 5.7 应用于 $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = \mu$ （针对紧支撑概率测度 μ），并考虑其大n渐近行为，则中心极限定理与自由中心极限定理 [MS17, 2.1]表明，在极限下,

$$\mu_{sc} \prec_4 \gamma,$$

其中 μ_{sc} 是标准半圆测度， γ 是标准高斯分布。

问题 5.8。 如果 μ_1， μ_2 和 ν 是紧支撑概率测度，且 $\mu_1 \prec_4 \mu_2$，那么 $\mu_1 \boxplus \nu \prec_4 \mu_2 \boxplus \nu$ 是否成立?

$\prec_4$ 还具有什么其他性质?

5.9. **杂项**。

- 对于无界的 μ和 ν，定理 1.3 和 1.4 会有什么结果? 如果 μ和 ν 没有任何有限阶矩呢?
- 定理 1.3 是否有自由乘法卷积的变体? 自由乘法卷积是 Voiculescu [Voi87] 引入的概念。更一般地说，推论 1.5 是否有适用于其他非对称混合矩的变体?
- 能否在有限迹冯·诺伊曼代数中解释引理 2.5 的密度 $\omega_{A,B}$？ 也就是说，是否存在一个正测度，其矩由式 (15) 给出?
- 命题 4.5 能否改进? 当 B 不一定是秩一时，能否得到 $\omega_{A,B}$ 的逐点界?

6. Acknowledgements

感谢 Roland Speicher、Nikhil Srivastava、Joel Tropp 和 Jorge Garza-Vargas 提供有益的讨论和意见，尤其感谢 Jorge Garza-Vargas 让我接触到猜想不等式 (50)。另外感谢 shikhin 进行编辑。

References

[AJ23] Octavio Arizmendi 和 Samuel GG Johnston。通过熵最优传输研究自由概率。 *arXiv preprint arXiv:2309.12196* 2023

, . [AP18] Octavio Arizmendi 和 Daniel Perales。有限自由卷积的累积量。 *J. Combin. Theory Ser. A*, 155 244 266, 2018 : – . [Bha97] Rajendra Bhatia。 *Matrix analysis*, 第 169 卷，收录于 *Graduate Texts in Mathematics*。施普林格出版社，纽约，1997。[BV98] Hari Bercovici 和 Dan Voiculescu。自由卷积的正则性问题。载于 *Nonselfadjoint operator algebras operator theory and related topics* 104 *Oper. Theory Adv. Appl.* 37 47 ¨ , , , 卷，收录于 , 页 – 。Birkhauser，巴塞尔，1998。[dB05] Carl de Boor。差商。 *Surv. Approx. Theory*, 1:46–69, 2005。[Dur19] Rick Durrett。 *Probability—theory and examples* 49 *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics* 2019 , 卷，收录于 。剑桥大学出版社，剑桥，第五版，。[Duv24] Daniel Duverney。 *An introduction to hypergeometric functions*。Birkh¨auser/施普林格，沙姆，法文版，[2024] ©2024。[Hei24] Otte Hein¨avaara。Schatten-3 空间中的平面。 *J. Funct. Anal.*, 287(2):论文编号 110469，19 页，2024。[Hei25] Otte Hein¨avaara。迹联合谱测度。 *Invent. Math.*, 239(2):505–526, 2025。[HJ13] Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson。 *Matrix analysis*。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2013。[LGR96] J. L. Lavoie、F. Grondin 和 A. K. Rathie。Whipple 定理关于 ${}_3F_2$ *J.* 之和的推广。 , *Comput. Appl. Math.* 72 2 293 300, 1996 ( ): – 。[LR05] Peter Lancaster 和 Leiba Rodman。厄米矩阵对在严格等价和合同下的标准形。 *SIAM Rev.*, 47(3):407–443, 2005。[Mot12] Isak Wulff Mottelson。非交换概率导论。https://web.math.ku.dk/~musat/ Free%20probability%20project_final.pdf, 2012。[MP22] Pierre Mergny 和 Marc Potters。高温下的秩一 HCIZ：在经典卷积与自由卷积之间插值。 *SciPost Phys.*, 12(1):论文编号 022，37 页，2022。[MS17] James A. Mingo 和 Roland Speicher。 *Free probability and random matrices* 35 *Fields Institute Monographs* , 卷，收录于 。施普林格，纽约；菲尔兹数学科学研究所，多伦多，安大略省，2017。[MSS18] Adam W. Marcus、Daniel A. Spielman 和 Nikhil Srivastava。交错族 IV：任意规模的二部拉马努金图。 *SIAM J. Comput.*, 47(6):2488–2509, 2018。[MSS22] Ada m W. Marcus、Daniel A. Spielman 和 Nikhil Srivastava。多项式的有限自由卷积。*Probab. Theory Related Fields*, 182(3-4):807–848, 2022。[Spe94] Roland Speicher。非交叉划分格上的乘法函数与自由卷积。*Math. Ann.*, 298(4):611–628, 1994。[Sri24] Nikhil Srivastava。拉马努金图与交错族。 *Proc. ICBS*, 2024。[Sta24] Richard P. Stanley。 *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, 第 208 *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 卷，收录于 。剑桥大学出版社，剑桥，第二版， 2024 [2024] © 。附有 Sergey Fomin 撰写的附录。[Voi85] Dan Voiculescu。某些约化自由积 C^* 代数的对称性。 *Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory (Buşteni, 1983)* 1132 *Lecture Notes in Math.* 载于 , 卷，收录于 ，页 556–588。施普林格，柏林，1985。[Voi86] Dan Voiculescu。某些非交换随机变量的加法。 *J. Funct. Anal.*, 66(3):323–346, 1986。[Voi87] Dan Voiculescu。某些非交换随机变量的乘法。 *J. Operator Theory*, 18(2):223– 235, 1987。

The Division of Physics, Mathematics and Astronomy,
California Institute of Technology,Pasadena, CA 91125*Email address*: oeh@caltech.edu