arXiv:2602.10376v1 [math.AC] 10 Feb 2026

通过独立多项式刻画覆盖理想可实现的 (reg,deg h) 数对

JENNIFER BIERMANN、TRUNG CHAU、SELVI KARA、AUGUSTINEO'KEEFE、JOSEPH SKELTON、GABRIEL SOSA CASTILLO 和 DALENA VIEN

Abstract. 设 G 是一个顶点集为 n 的有限简单图，并令 $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$，其边理想为 $I(G)$，覆盖理想为 $J(G)$。我们给出 $R/J(G)$ 的 h-多项式的显式描述，该描述可推广至任意平方自由单项式理想的亚历山大对偶。随后，我们通过不变量 $M(G)$，即 $P_G(x)$ 的根 $x = -1$ 的重数，利用独立多项式 $P_G(x) = \sum_{i\geq 0} g_i x^i$ 来表示 $\deg h_{R/I(G)}(t)$ 和 $\deg h_{R/J(G)}(t)$。特别地，我们证明

$$\deg h_{R/I(G)}(t) = \alpha(G) - M(G) \qquad \text{and} \qquad \deg h_{R/J(G)}(t) = n - 2 - M(G),$$

其中 $\alpha(G)$ 是 G 的独立数。因此，$M(G)$ 是 $R/I(G)$ 和 $R/J(G)$ 的 $\mathfrak{a}$-不变量的加法逆元。我们针对广泛的图族，推导出 $M(G)$ 的递归关系和闭式公式，并利用这些结果分析弦图类中覆盖理想对应的 (reg, deg h) 数对，包括构造出实现极端行为的具体实例。最后，我们为连通图给出一个关于 $|\mathrm{reg}(R/J(G)) - \deg h_{R/J(G)}(t)|$ 的猜想界。

1. 引言

设 G 是一个具有 n 个顶点的有限简单图，并令 $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$。与 G 相关联的是边理想 $I(G)$ 和覆盖理想 $J(G)$。本文研究 $R/J(G)$ 的两个不变量之间的相互作用。这两个不变量各自都在组合交换代数中发挥着核心作用：Castelnuovo–Mumford 正则性 $\mathrm{reg}(R/J(G))$，以及 h-多项式的次数 $\deg h_{R/J(G)}(t)$。本文始终着重于理解 $\deg h_{R/J(G)}(t)$，以及它如何约束正则性（又如何受正则性约束）。

正则性衡量最小自由分解的复杂度，而 h-多项式则控制希尔伯特级数，并编码希尔伯特函数增长与渐近行为的细微信息。尽管这些不变量共同源自 $R/J(G$ 的分次结构，但人们往往从不同角度研究它们，对它们在固定数量 n 下的联合行为仍缺乏系统认识。关于边理想，这种联合行为已在 [2 中得到研究；12； 15],中则将研究推广至单项式理想；二项式边理想见 [13], ，图的环面理想见 [14], 。相比之下，覆盖理想的相应情况似乎尚未得到充分探索。受大量计算结果启发，我们提出以下问题：

> 对于具有固定数量顶点的连通图，哪些数对
>
> $$\big(\mathrm{reg}(R/J(G)), \deg h_{R/J(G)}(t)\big)$$
>
> 可能出现？ G 的哪些结构特征会使该数对落在对角线及其相邻线之上（或偏离这些线）？

引入一个纯组合对象后，这个问题便更容易处理：独立多项式

$$P_G(x) = \sum_{i\geq 0} g_i x^i,$$

其中， g_i 统计 G中大小为 i 的独立集。

独立多项式在图论和统计物理领域有着悠久的研究历史，其根也从多个角度得到了研究（[1； 3； 4； 5； 6； 20]）。本文聚焦于一个特定的

指定根 $x=-1$，并引入不变量

$$M(G) := \text{ the multiplicity of } x=-1 \text{ as a root of } P_G(x).$$

据我们所知，这个不变量此前尚未被作为独立的不变量加以研究，在现有的图论或交换代数文献中也没有明确出现。我们的结果表明， $M(G)$ 是一种极为有效的“桥梁”不变量：它将 $P_G(x)$ 在 -1 处微妙的抵消现象归纳为一个整数，该整数能够直接控制 h-多项式的次数，适用于 $R/I(G)$ 和 $R/J(G)$。特别是， $M(G)$ 对那些以可控方式保持独立集组合结构的图操作（例如加悬挂边）十分敏感，并且在正则性已得到充分理解的图族（例如弦图）中满足简洁的递归关系。因此， $M(G)$ 自然成为一种新工具，可用于在图的枚举数据与边理想和覆盖理想的同调不变量之间建立联系。

我们的出发点是对覆盖理想的 h-多项式作出明确描述（定理 3.5），该结果在第 3 节中给出。这个结果类似于 [2, 定理 3。2]，，后者讨论边理想。此外，边理想和覆盖理想的这两个表达式都可以推广到任意平方自由单项式理想及其亚历山大对偶。最后，本节还将边理想与覆盖理想的h-多项式的次数联系起来，因为它们的 a-不变量相同（定理3.8）。

独立多项式与不变量 $M(G)$ 之间的关键联系将在第 4 节中建立。我们将在该节证明，$\deg h$ 由不变量 $M(G)$ 确定（定理 4.4），从而得到如下形式的公式：

$$\deg h_{R/I(G)}(t) = \alpha(G) - M(G) \qquad \text{and} \qquad \deg h_{R/J(G)}(t) = n-2-M(G).$$

因此，计算 $\deg h$ 的问题归结为理解 $M(G)$。

本文余下部分将探讨计算 $M(G)$ 的方法，并将其应用于一些族，以填充（或阻碍）覆盖理想的 $(\operatorname{reg}, \deg h)$ 图中的区域。第 5 节针对半径至多为二的树，给出 $\operatorname{reg}(R/J(G))$ 和 $\deg h_{R/J(G)}(t)$ 的显式公式（定理 5.9）。为更一般地处理森林，第 6 节建立了 $M(G)$ 的递推关系（定理 6.6），从而可有效地将问题化归为诱导子森林；这与 Jacques 和 Katzman 关于 [16] 投射维数的研究相类似。第 7 节研究加悬挂边运算，并推导出统一加悬挂边的闭式公式（定理 7.1 ），以及一个用 G 和 $G\setminus v$ 表示的顶点加耳操作公式（推论 7.3 ）。

接下来，我们转向行为格外刚性的结构化弦图类。第 8 节聚焦于分裂图。利用分裂分解 $V(G) = C \sqcup I$，其中 C 是一个团， I 是一个独立集，我们得到了 $P_G(x)$ 的显式公式，并推导出 $\alpha(G)$ 和 $M(G)$ 的闭式公式。此外，我们证明，对于连通分裂图，数对$(\operatorname{reg}(R/J(G)), \deg h_{R/J(G)}(t))$ 位于对角线上（推论 8.9），并精确描述了固定 n 时哪些对角线取值会出现（定理 8.10）。第 9 节构造了满足 $\operatorname{reg}(R/J(G)) = n-2$、而 $\deg h_{R/J(G)}(t)$ 可变的弦图族，从而在 $(\operatorname{reg}, \deg h)$ 图中形成竖直线串。第 10 节给出了另一个位于直线 $\deg h = \operatorname{reg} -1$ 上的弦图构造。相比之下，第 11 节证明了块图的一项限制：连通块图位于直线 $\deg h = \operatorname{reg} -1$ 上或其上方，因此这一类不可能严格位于对角线下方（定理 11.5）。

最后，在第12节中，我们整理了固定范围内、具有 n 个顶点的连通图的计算数据，讨论了（reg, $\deg h$）数对的可行区域，并提出了界

$$\left|\operatorname{reg}(R/J(G)) - \deg h_{R/J(G)}(t)\right| \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2$$

如猜想12.4。

2. Preliminaries

全文中，设 G 是顶点集为 $[n] = \{1, \ldots, n\}$ 的有限简单图，并且我们在标准分次多项式环 $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ 中进行讨论。

定义 2.1. G 的独立复形记为 $\Delta(G)$，是$[n]$ 上的单纯复形，其面为 G 的独立集。

对于 $[n]$上的单纯复形 Δ，令 I_Δ 表示其斯坦利–赖斯纳理想。 Δ的亚历山大对偶为

$$\Delta^\vee := \{[n] \setminus F : F \notin \Delta\}.$$

平方自由单项式理想 I 的亚历山大对偶记为 $I^\vee$。

定义 2.2. G 的边理想为

$$I(G) := \big(x_i x_j : \{i, j\} \in E(G)\big) \subseteq R.$$

G 的覆盖理想为

$$J(G) := \left(\prod_{i \in \mathcal{C}} x_i : \mathcal{C} \text{ a minimal vertex cover of } G\right) \subseteq R.$$

注 2.3. G 的边理想与覆盖理想通过 Alexander 对偶性相关：

$$J(G) = I(G)^\vee.$$

等价地， $J(G) = I_{\Delta(G)^\vee}$ 且

$$J(G) = \bigcap_{\{i,j\} \in E(G)} (x_i, x_j).$$

注意，若 G 至少有一条边，则 $\operatorname{height}(J(G)) = 2$，因此

$$\dim(R/J(G)) = n - 2.$$

定义 2.4. $R/J(G)$的分次最小自由分解是如下形式的正合列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{p,j}} \longrightarrow \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{p-1,j}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{0,j}} \longrightarrow R/J(G) \longrightarrow 0.$$

指数 $\beta_{i,j} = \beta_{i,j}(R/J(G))$ 是 $R/J(G)$ 的不变量，称为$R/J(G)$的分次贝蒂数。卡斯特尔诺沃–芒福德正则度记为 $\operatorname{reg}(R/J(G))$，定义为 $R/J(G)$ 的非零分次贝蒂数：

$$\operatorname{reg}(R/J(G)) = \max\{j - i : \beta_{i,j}(R/J(G)) \neq 0\}.$$

可以通过以下著名的 Terai 结果，借助 R/J（G）的投射维数来研究 R/I（G）的正则性，该结果发表于[21]。本文将反复使用这一结果。

备注 2.5。正则性与投射维数互为对偶。

$$\operatorname{reg}(R/J(G)) = \operatorname{pdim} I(G) = \operatorname{pdim}(R/I(G)) - 1.$$

Dao 和 Schweig 在 [7] 中研究了边理想的投射维数。本文常常关注弦图，而 [7, 推论 5.6] 中的以下结果对我们的正则性计算很有用。

定理 2.6. 设 G 是一个弦图。那么

$$\operatorname{pdim}(R/I(G)) - 1 = n - i(G)$$

其中， $i(G)$ 是 G 的独立支配数。

独立支配数 $i(G)$ 是独立支配集的最小大小。它也等于 G 的所有极大独立集中最小的基数。

定义 2.7. 设 $A = \bigoplus_{d\geq 0} A_d$ 是一个标准分次 k-代数。其希尔伯特级数为

$$H_A(t) := \sum_{d\geq 0} HF_A(d)t^d,$$

其中， $HF_A(d) = \dim_k A_d$ 是 A 在次数 d 处的希尔伯特函数。众所周知,

$$H_A(t) = \frac{h_A(t)}{(1-t)^{\dim A}}$$

对于唯一的多项式 $h_A(t) \in \mathbb{Z}[t]$, 称为 A 的 h-多项式。 A 的 $\mathfrak{a}$-不变量为

$$\mathfrak{a}(A) := \deg h_A(t) - \dim A.$$

接下来，我们通过生成函数对独立集进行编码。令 $\alpha = \alpha(G)$ 表示 G 的独立数，并且对每个 $i \geq 0$, 令 g_i 表示 G 中大小为 i 的独立集的数量（因此，对于 $i > \alpha$，有 $g_0 = 1$、 $g_1 = n$ 和 $g_i = 0$ ）。

定义 2.8。 G的独立多项式为

$$P_G(x) = \sum_{i=0}^{\alpha} g_i x^i.$$

定义 2.9。 按照 [2],定义

$$g(G) := \sum_{i=1}^{\alpha} (-1)^{i-1} g_i.$$

注 2.10。设 $\Delta(G)$为 G的独立复形。大小为 i的独立集对应于 $\Delta(G)$中维数为 $i-1$的面，因此 $f_{i-1} = g_i$。所以， $\Delta(G)$的（未约化）欧拉示性数为

$$\chi(\Delta(G)) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k f_k = \sum_{i=1}^{\alpha} (-1)^{i-1} g_i.$$

特别地， $g(G) = \chi(\Delta(G))$，且约化欧拉示性数为 $\widetilde{\chi}(\Delta(G)) = g(G) - 1$。此外,

$$P_G(-1) = \sum_{i=0}^{\alpha} g_i(-1)^i = 1 - \sum_{i=1}^{\alpha} g_i(-1)^{i-1} = 1 - g(G).$$

因此 $g(G) = 1 \iff \widetilde{\chi}(\Delta(G)) = 0 \iff P_G(-1) = 0$。

注 2.11。由于 $R/I(G)$是 $\Delta(G)$的斯坦利–赖斯纳环，且 $\dim \Delta(G) = \alpha - 1$， f-向量与 h-向量之间的关系给出

$$h_{R/I(G)}(t) = \sum_{i=0}^{\alpha} g_i t^i (1-t)^{\alpha - i}.$$

等价地，用独立多项式表示,

$$h_{R/I(G)}(t) = (1-t)^{\alpha} P_G\left(\frac{t}{1-t}\right). \tag{1}$$

边理想的 h-多项式的次数已在 [2]中得到研究。特别地， [2] 给出了 $\deg h_{R/I(G)}(t)$ 的显式公式，并刻画了该次数何时达到其可能的最大值。更广泛地说，关于平方自由单项式理想的 h-多项式的次数何时最大，文献中已有充分研究；例如，参见[11]。下面我们回顾 [2] 中的相关结果。

定理 2.12（[2,定理 3.2 和推论 3.4]）。设 G 为一个有限简单图。 n

$$h_{R/I(G)}(t) = \Big(1 - \sum_{s=0}^{\alpha-1} D_s\Big)(1-t)^{\alpha} + \sum_{s=0}^{\alpha-1} D_s (1-t)^{\alpha-s-1} \tag{2}$$

其中

$$D_s = \sum_{j=s+1}^{\alpha} (-1)^{j-1-s} \binom{j}{s+1} g_j.$$

此外，

- $\deg h_{R/I(G)}(t) = \alpha(G)$ 当且仅当 $g(G) \neq 1$;
- 若 $g(G) = 1$，则 $\deg h_{R/I(G)}(t) = \alpha - d - 1$，其中

$$d = \min\{s : D_s \neq 0\}.$$

注 2.13. 将平方自由单项式理想视为超图的边理想后， [2, 定理 3.2] 的证明可逐字推广到任意平方自由单项式理想。在此情形下，相关的图不变量由相应的超图类比取代，我们将在下述记号中记录这些类比。

记号 2.14. 设 $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$ 是一个具有 n 个顶点且至少有一条边的超图。对每个 $i \in [n]$，令

$$g_i := \big|\{W \subseteq V(\mathcal{H}) : |W| = i \text{ and } W \text{ contains no edge of } \mathcal{H}\}\big|,$$

并定义

$$\alpha := \max\{i \in [n] : g_i \neq 0\}, \qquad \delta := \min\{|E| : E \in E(\mathcal{H})\}.$$

设 $I(\mathcal{H})$ 表示超图的边理想 $\mathcal{H}$ ，满足

$$I(\mathcal{H}) := \Big(\prod_{x \in E} x : E \in E(\mathcal{H})\Big).$$

将 $I(G)$ 替换为 $I(\mathcal{H})$ 于方程式 (2) 中，并使用记号 2.14，即可得到任意平方自由单项式理想的 h-多项式的表达式。

3. Degrees of h-polynomials for cover ideals

本节给出覆盖理想的 h-多项式的显式公式。仿照注 2.13，我们接着将这些公式推广到任意平方自由单项式理想的亚历山大对偶。最后，利用平方自由单项式理想的亚历山大对偶性保持 a-不变量这一性质，我们建立边理想与覆盖理想的 h-多项式次数之间的联系。

我们首先回顾斯坦利–赖斯纳环的标准单项式描述（见 [10,命题 1.5.1]）。

命题 3.1. 满足以下条件的单项式集合 $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$

$$\operatorname{supp}(a) := \{i : a_i \neq 0\} \in \Delta(G)^{\vee}$$

构成 $R/I_{\Delta(G)^{\vee}} = R/J(G)$ 的一个 k-基。

观察 3.2. 设 $F \subseteq [n]$。那么 $F \in \Delta(G)^\vee$ 当且仅当 $[n] \setminus F \notin \Delta(G)$。等价地，$F \in \Delta(G)^\vee$ 当且仅当 $[n] \setminus F$ 不是 G 的独立集。

引理 3.3. 设 G 是一个有 n 个顶点的有限简单图。对所有 $d \geq 1$,

$$HF_{R/J(G)}(d) = \binom{n+d-1}{n-1} - n\binom{d-1}{n-2} - \binom{d-1}{n-1} - \sum_{j=2}^{n-1} g_j \binom{d-1}{n-j-1}.$$

证明。 由命题 3.1，次数为 d 的标准单项式由其支撑 $F \in \Delta(G)^\vee$ 以及赋予由 F索引的变量的正指数的选择共同确定。若 $|F| = i$，则恰好以 F 为支撑、次数为 d 的单项式数量为 $\binom{d-1}{i-1}$ (将 d 拆分为 i 个正整数的拆分数)。因此，

$$HF_{R/J(G)}(d) = \sum_{F \in \Delta(G)^\vee} \binom{d-1}{|F|-1} = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(\Delta(G)^\vee)\binom{d-1}{i-1}, \tag{3}$$

其中，$f_{i-1}(\Delta(G)^\vee)$表示 $\Delta(G)^\vee$ 中基数为 i的面的数量。

为了计算 $f_{i-1}(\Delta(G)^\vee)$，使用观察 3.2：子集 $F \subseteq [n]$ 满足 $|F| = i$ 当且仅当其补集 $\Delta(G)^\vee$属于 $[n] \setminus F$(大小为 $n-i$) 不是独立集。因此

$$f_{i-1}(\Delta(G)^\vee) = \binom{n}{i} - g_{n-i},$$

且（3）变为

$$HF_{R/J(G)}(d) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\binom{d-1}{i-1} - \sum_{i=1}^{n} g_{n-i}\binom{d-1}{i-1}. \tag{4}$$

现在使用二项式恒等式

$$\binom{n+d-1}{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\binom{d-1}{i-1}, \tag{5}$$

该恒等式通过按非零部分的数量分组，计算将 d 拆分为 n 部分的弱拆分数。

最后，注意到 $g_{n-i} = 0$ 除非 $n - i \leq \alpha$，并且（ $i = 0$ 或$i = n$ 在式（4）中对应的项分别贡献 $g_n\binom{d-1}{-1} = 0$ 和 $g_0\binom{d-1}{n-1} = \binom{d-1}{n-1}$。此外，项 $i = n-1$贡献 $g_1\binom{d-1}{n-2} = n\binom{d-1}{n-2}$。通过 $j = n - i$ 对剩余的和重新编号，得到

$$\sum_{i=1}^{n} g_{n-i}\binom{d-1}{i-1} = n\binom{d-1}{n-2} + \binom{d-1}{n-1} + \sum_{j=2}^{n-1} g_j \binom{d-1}{n-j-1}.$$

将此式和（5）代入（4），即可得到所述公式。 □

注 3.4. 为后续使用，记 $HF_{R/J(G)}(d) = A_d - B_d$ 表示 $d \geq 1$，其中

$$A_d := \binom{n+d-1}{n-1} - n\binom{d-1}{n-2} - \binom{d-1}{n-1}, \qquad B_d := \sum_{j=2}^{n-1} g_j \binom{d-1}{n-j-1}.$$

那么，希尔伯特级数可以写作

$$H_{R/J(G)}(t) = 1 + \sum_{d \geq 1} HF_{R/J(G)}(d)t^d = \left(1 + \sum_{d \geq 1} A_d t^d\right) - \sum_{d \geq 1} B_d t^d.$$

现在我们给出覆盖理想的 h-多项式的一个表达式。

定理 3.5. 设 G 为一个有 n 个顶点且满足 $\alpha = \alpha(G)$ 的有限简单图。那么 $R/J(G)$ 的 h-多项式为

$$h_{R/J(G)}(t) = \sum_{k=0}^{n-\alpha-1} (k+1)t^k + \sum_{s=-1}^{\alpha-3} E_{s+3}t^{n-s-3},$$

其中，对于 $-1 \le s \le \alpha - 3$,

$$E_{s+3} = (n-s-2) - \sum_{j=s+3}^{\alpha} \binom{j-2}{s+1}(-1)^{j-s-1}g_j.$$

证明。 我们化简备注 3.4 中出现的两个部分。

利用标准生成函数

$$\sum_{d\ge 0}\binom{n+d-1}{n-1}t^d = \frac{1}{(1-t)^n}, \qquad \sum_{d\ge 0}\binom{d}{r}t^d = \frac{t^r}{(1-t)^{r+1}},$$

可得

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{d\ge 1} A_d t^d &= \sum_{d\ge 0}\binom{n+d-1}{n-1}t^d - n\sum_{d\ge 1}\binom{d-1}{n-2}t^d - \sum_{d\ge 1}\binom{d-1}{n-1}t^d \\
&= \frac{1}{(1-t)^n} - n\cdot\frac{t^{n-1}}{(1-t)^{n-1}} - \frac{t^n}{(1-t)^n} \\
&= \frac{1-t^n}{(1-t)^n} - \frac{nt^{n-1}}{(1-t)^{n-1}} \\
&= \frac{1+t+\cdots+t^{n-1}-nt^{n-1}}{(1-t)^{n-1}} \\
&= \frac{1}{(1-t)^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1}(t^i - t^{n-1}) \\
&= \frac{1+2t+3t^2+\cdots+(n-1)t^{n-2}}{(1-t)^{n-2}}.
\end{aligned}$$

由于 $g_j = 0$ 对于 $j > \alpha$，我们只需求和至 α:

$$\begin{aligned}
\sum_{d\ge 1} B_d t^d &= \sum_{d\ge 1}\left(\sum_{j=2}^{\alpha} g_j\binom{d-1}{n-j-1}\right)t^d = \sum_{j=2}^{\alpha} g_j \sum_{d\ge 1}\binom{d-1}{n-j-1}t^d \\
&= \sum_{j=2}^{\alpha} g_j \cdot \frac{t^{n-j}}{(1-t)^{n-j}}.
\end{aligned}$$

因式分解 展开 $(1-t)^{-(n-2)}$、展开 $(1-t)^{j-2}$，并交换求和次序，得到 s

$$\begin{aligned}
\sum_{d\ge 1} B_d t^d &= \frac{1}{(1-t)^{n-2}}\sum_{j=2}^{\alpha} g_j t^{n-j}(1-t)^{j-2} \\
&= \frac{1}{(1-t)^{n-2}}\sum_{j=2}^{\alpha} g_j t^{n-j}\sum_{m=0}^{j-2}\binom{j-2}{m}(-1)^m t^m \\
&= \frac{1}{(1-t)^{n-2}}\sum_{k=n-\alpha}^{n-2}\left(\sum_{j=n-k}^{\alpha}\binom{j-2}{k-n+j}(-1)^{k-n+j}g_j\right)t^k.
\end{aligned}$$

合并来自 A_d 和 B_d 在备注3.4 中的贡献，可得

$$H_{R/J(G)}(t) = \frac{1}{(1-t)^{n-2}}\left(\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)t^k - \sum_{k=n-\alpha}^{n-2}\left(\sum_{j=n-k}^{\alpha}\binom{j-2}{k-n+j}(-1)^{k-n+j}g_j\right)t^k\right)$$
$$= \frac{1}{(1-t)^{n-2}}\left(\sum_{k=0}^{n-\alpha-1}(k+1)t^k + \sum_{k=n-\alpha}^{n-2}\left((k+1) - \sum_{j=n-k}^{\alpha}\binom{j-2}{k-n+j}(-1)^{k-n+j}g_j\right)t^k\right).$$

现在设 $k = n-s-3$。于是， k 恰好在 $n-\alpha$ 到 $n-2$ 之间变化，当且仅当 s 从 $\alpha-3$递减至 -1，而 t^{n-s-3} 的系数变为

$$(n-s-2) - \sum_{j=s+3}^{\alpha}\binom{j-2}{s+1}(-1)^{j-s-1}g_j =: E_{s+3}.$$

这就得到

$$H_{R/J(G)}(t) = \frac{1}{(1-t)^{n-2}}\left(\sum_{k=0}^{n-\alpha-1}(k+1)t^k + \sum_{s=-1}^{\alpha-3}E_{s+3}t^{n-s-3}\right).$$

最后，第一个和的次数至多为 $n-\alpha-1$，而第二个和中的所有项次数至少为 $n-\alpha$，因此分子中不会发生抵消。因此，所显示的分子是 $R/J(G)$ 的 h-多项式。□

注记 3.6。 与注记 2.13中一样，可以将定理 h 中覆盖理想的多项式表达式 3.5 推广到任意平方自由单项式理想的亚历山大对偶（使用记号 2.14），如下所示:

$$h_{R/I(\mathcal{H})^\vee}(t) = \sum_{k=0}^{n-\alpha-1}\binom{k+\delta-1}{\delta-1}t^k + \sum_{k=n-\alpha}^{n-\delta}\left(\binom{k+\delta-1}{\delta-1} - \sum_{j=n-k}^{\alpha}\binom{j-\delta}{k-n+j}(-1)^{k-n+j}g_j\right)t^k$$

其中 $\dim R/I(\mathcal{H})^\vee = n-\delta$。

与边理想的情形一样，不变量 $g(G)$ 决定了 $\deg h_{R/J(G)}(t)$ 何时达到其可能的最大值 $n-2$。

推论 3.7. 设 G 是一个具有 n 个顶点、独立数为 α的有限简单图。

(a) $n-\alpha-1 \le \deg h_{R/J(G)}(t) \le n-2$。(b) $\deg h_{R/J(G)}(t) = n-2$ 当且仅当 $g(G) \ne 1$。(c) 若 $g(G) = 1$，则 $E_2 = 0$ 且：(i) 若 $E_3 = \cdots = E_\alpha = 0$，则 $\deg h_{R/J(G)}(t) = n-\alpha-1$；(ii) 否则，$\deg h_{R/J(G)}(t) = n-d-3$，$d = \min\{s : E_{s+3} \ne 0\}$，其中 $0 \le s \le \alpha-3$。

证明。 (a) 这由定理3.5直接可得。

(b) 根据定理 3.5，我们有 $\deg h_{R/J(G)}(t) = n-2$ 当且仅当 t^{n-2} 的系数非零，即 $E_2 \ne 0$。将 $s = -1$ 代入 E_{s+3} 的公式可得

$$E_2 = n-1-\sum_{j=2}^{\alpha}(-1)^j g_j.$$

由于 $g_1 = n$，这可以改写为

$$E_2 = -1 + \sum_{j=1}^{\alpha} (-1)^{j-1} g_j = -1 + g(G).$$

因此，当且仅当 $E_2 \neq 0$ $g(G) \neq 1$。

(c) 若 $g(G) = 1$，则根据 (b)，$E_2 = 0$ 因此 $\deg h_{R/J(G)}(t) < n-2$。其余结论可通过考察定理 $h_{R/J(G)}(t)$ 中的显式形式 3.5 得出。□

部分 (c)(ii) 类似于 [2, 推论 3.4] 中关于边理想的相应结论。

我们通过联系边理想和覆盖理想的 h-多项式的次数来结束本节。

定理 3.8。设 G 是一个有限简单图。则存在一个整数 d，满足 $0 \leq d \leq \alpha - 1$，使得

$$\deg h_{R/J(G)}(t) = n - 2 - d \quad \Longleftrightarrow \quad \deg h_{R/I(G)}(t) = \alpha - d.$$

证明。由 [18, 定理 4.36] 可知

$$\mathfrak{a}(R/I(G)) = \mathfrak{a}(R/J(G)).$$

由于 $\dim(R/I(G)) = \alpha$ 且 $\dim(R/J(G)) = n-2$，我们有

$$\deg h_{R/I(G)}(t) - \alpha = \deg h_{R/J(G)}(t) - (n-2).$$

因此，该结论成立。□

4. Degree of the h-polynomial via the independence polynomial and $M(G)$

本节及下一节的一个指导思想是，可以通过独立多项式 $P_G(x)$ 来研究 $R/I(G)$ 和 $R/J(G)$ 的 h-多项式的次数。我们首先用 $P_G(x)$ 表示 $R/I(G)$ 的 h-多项式，然后根据不变量 $M(G)$ 推导边理想和覆盖理想的次数公式；该不变量是 $P_G(x)$ 的根 $x = -1$ 的重数。

我们还阐明了当前方法与 [2] 之间的关系。在 [2]，中，次数 $\deg h_{R/I(G)}(t)$ 由不变量 $g(G)$ 及一组交错和 D_s 决定（见定理 2.12）。我们证明，这些量同样受 $P_G(x)$ 在 $x = -1$ 处的行为所控制：不变量 $g(G)$ 可判断 $x = -1$ 是否为 $P_G(x)$ 的根，而第一个非零的 D_s 则确定该根的重数。此外，我们将每个 D_s 解释为 $P_G(x)$ 在 $x = -1$ 处某个适当导数的值。

为明确这一点，我们采用以下记号表示根的重数。

记号 4.1. 对于多项式 $f(x)$ 和标量 a，我们用 $\operatorname{ord}_{x=a} f(x)$ 表示 $x = a$ 作为 $f(x)$ 的根的重数。

采用这一记号后，我们将指定根 $x = -1$ 的重数记为一个图不变量。

定义 4.2. 设 G 为一个图，其独立多项式为 $P_G(x)$。定义

$$M(G) := \operatorname{ord}_{x=-1} P_G(x),$$

-1 作为 $P_G(x)$ 的根的重数。

由于 $M(G)$ 是 $P_G(x)$ 的根的重数，因此我们有 $M(G) \leq \deg P_G(x) = \alpha$。如果 G 至少有一条边，则可以改进此上界。

引理 4.3. 如果 G 至少有一条边，则

$$M(G) \leq \alpha - 1.$$

证明。假设 G 至少有一条边。如果 $M(G) \geq \alpha$，那么 $(1+x)^\alpha$ 整除 $P_G(x)$。由于 $\deg P_G(x) = \alpha$，我们得到 $P_G(x) = c(1+x)^\alpha$，其中 $c \in \Bbbk$ 为某个常数。因为 $P_G(0) = 1$，所以必有 $c = 1$，从而 $P_G(x) = (1+x)^\alpha$。比较 x 的系数得到 $n = \alpha$，这迫使 G没有边，矛盾。□

现在陈述本节的主要结果，它将 $M(G)$ 与 $R/I(G)$ 和 $R/J(G)$ 的 h-多项式的次数联系起来。

定理 4.4。我们有

$$\begin{aligned} \deg h_{R/I(G)}(t) &= \alpha - M(G), \\ \deg h_{R/J(G)}(t) &= n - 2 - M(G). \end{aligned}$$

特别地，$\deg h_{R/I(G)}(t) = \alpha$ 当且仅当 $P_G(-1) \neq 0$。

证明。 令 $u = \frac{1}{1-t}$ 代入（1）得到

$$h_{R/I(G)}(t) = (1-t)^\alpha P_G(u-1) = u^{-\alpha} P_G(u-1).$$

设 $M = M(G)$。因此我们可以写成

$$P_G(x) = (x+1)^M Q(x)$$

其中 $Q(-1) \neq 0$。代入 $x = u - 1$ 可得

$$h_{R/I(G)}(t) = u^{M-\alpha} Q(u-1).$$

注意， $Q(u-1)$ 是关于 u 的多项式，次数为 $\deg Q = \alpha - M$，其常数项 $Q(-1)$ 非零。此外，项 $Q(-1)u^{M-\alpha} = Q(-1)(1-t)^{\alpha-M}$ 是 $h_{R/I(G)}(t)$ 作为关于 $(1-t)$ 的多项式时的最高次数项，因此也是作为关于 t 的多项式时的最高次数项。因此 $\deg h_{R/I(G)}(t) = \alpha - M$。

最后， h-多项式的次数表达式 $R/J(G)$ 可由定理 3.8 得出。□

利用定理 4.4，我们可以将 h-多项式的次数公式转化为 $M(G)$ 与 $\mathfrak{a}$-不变量之间的关系，其中不变量属于 $R/I(G)$ 和 $R/J(G)$。

注记 4.5。 由于 $\mathfrak{a}$-不变量 $R/I(G)$ 与 $R/J(G)$ 相同，因此由定理 4.4可得

$$\mathfrak{a}(R/J(G)) = \mathfrak{a}(R/I(G)) = -M(G).$$

回顾定理 2.12 可知，$\deg h_{R/I(G)}(t)$ 可由第一个非零 D_s读出，对于$s \geq 0$，其中

$$D_s = \sum_{j=s+1}^{\alpha} (-1)^{j-1-s} \binom{j}{s+1} g_j. \tag{6}$$

另一方面，定理 4.4 表明，同一次数由不变量$M(G)$ 决定。下面的引理通过将每个 D_s 表示为在 $x = -1$处取值的独立多项式的导数，从而明确了这两种描述之间的联系，并将 $M(G)$ 方法直接与 [2]联系起来。

引理 4.6。对于 $s \geq 0$，我们有

$$D_s = \frac{1}{(s+1)!} P_G^{(s+1)}(-1).$$

证明。对独立多项式 $(s+1)$ 求导：

$$P_G^{(s+1)}(x) = \sum_{j=s+1}^{\alpha} g_j j(j-1)\cdots(j-s)x^{j-(s+1)} = (s+1)! \sum_{j=s+1}^{\alpha} g_j \binom{j}{s+1} x^{j-(s+1)}.$$

代入 $x = -1$，得到

$$\frac{1}{(s+1)!} P_G^{(s+1)}(-1) = \sum_{j=s+1}^{\alpha} (-1)^{j-1-s} \binom{j}{s+1} g_j = D_s.$$

□

因此，序列 $\{D_s\}_{s\geq 0}$ 编码了 $P_G(x)$ 在 $x = -1$ 处的消失阶数，从而也编码了不变量 $M(G)$。

推论 4.7。设 $M = M(G)$。则

$$P_G(-1) = P_G'(-1) = \cdots = P_G^{(M-1)}(-1) = 0, \quad P_G^{(M)}(-1) \neq 0,$$

等价地，

$$D_0 = D_1 = \cdots = D_{M-2} = 0, \quad D_{M-1} \neq 0.$$

特别地，第一个非零的 D_s 记录了 P_G 在 -1 处的消失阶数。

以下结果通过独立性多项式恢复了边理想的 h-多项式表达式，该表达式来自 [2]。

命题 4.8。我们有

$$h_{R/I(G)}(t) = P_G(-1)(1-t)^{\alpha} + \sum_{s=0}^{\alpha-1} D_s (1-t)^{\alpha-s-1}.$$

证明。 如定理 4.4 的证明，令 $u = \frac{1}{1-t}$，使得 $h_{R/I(G)}(t) = u^{-\alpha} P_G(u-1)$。将$P_G$ 在 -1处展开：

$$P_G(u-1) = \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{P_G^{(k)}(-1)}{k!} u^k.$$

因此

$$h_{R/I(G)}(t) = \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{P_G^{(k)}(-1)}{k!} u^{k-\alpha} = \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{P_G^{(k)}(-1)}{k!} (1-t)^{\alpha-k}.$$

所述公式由引理 4.6 （其中 $k = s+1$）得到。 □

注 4.9。 定理 4.4 也可直接由命题 4.8 得出：在 -1 处的第一个非零导数出现在 $M(G)$ 阶。因此，t 的最高次幂来自项 $(1-t)^{\alpha-M(G)}$。

由于 $M(G)$ 由定理4.4控制 $\deg h_{R/I(G)}(t)$，因此了解 $M(G)$ 在基本图操作下如何变化很有用。

问题 1. 在哪些图操作下，重数 $M(G)$ 的变化具有可预测性?

首先，我们考察诱导子图；下一个例子表明， $M(G)$ 不一定单调变化。

例 4.10。设 P_n 表示由 n 个顶点构成的路径。对于 $n = 2$、3、4、5，独立多项式为

$$\begin{aligned} P_{P_2}(x) &= 1 + 2x, \\ P_{P_3}(x) &= 1 + 3x + x^2, \\ P_{P_4}(x) &= 1 + 4x + 3x^2, \\ P_{P_5}(x) &= 1 + 5x + 6x^2 + x^3. \end{aligned}$$

在 $x = -1$ 处求值得到

$$P_{P_2}(-1) = -1, \qquad P_{P_3}(-1) = -1, \qquad P_{P_4}(-1) = 0, \qquad P_{P_5}(-1) = 1.$$

因此 $M(P_4) = 1$，而 $M(P_2) = M(P_3) = M(P_5) = 0$。特别地，尽管 P_4是 P_5的诱导子图，我们有 $M(P_4) > M(P_5)$；并且尽管 P_3是P_4的诱导子图，我们有 $M(P_3) < M(P_4)$。

因此，在过渡到诱导子图时， $M(G)$ 可能增大、减小或保持不变。这促使我们寻找使 $M(G)$ 表现得更为系统的图操作，我们也希望这能推动对 $M(G)$ 本身的进一步研究。

5. 通过独立多项式得到覆盖理想的（正则度，次数 h）对的可实现性

在本节中，我们研究半径至多为 2 的树。始终设 T 为一棵半径至多为 2 的树，且 $R_T = \Bbbk[x_v : v \in V(T)]$。我们首先计算 $\operatorname{pdim}(R_T/I(T))$，并由此得到 $\operatorname{reg}(R_T/J(T))$（借助 Alexander 对偶性）。然后，我们确定 h-多项式之于 $R_T/J(T)$ 的次数，借助重数 $M(T)$（见第 4 节）。

我们先介绍所用的记号。

记号 5.1. 设 T 是半径至多为 2 的树。换言之，存在一个顶点 c，使得对所有 $v \in V(T)$，$\operatorname{dist}_T(c, v) \le 2$。固定这样一个顶点 c，并令 $B = \deg_T(c)$。将 c 的邻集写成不交并

$$N_T(c) = \{\ell_1, \dots, \ell_{L_1}\} \sqcup \{v_1, \dots, v_m\},$$

其中 $\ell_1, \dots, \ell_{L_1}$ 是与 c相邻的叶子，而每个 v_i 都至少有一个不与 c 相邻的叶子（等价地，$\deg_T(v_i) \ge 2$）。因此 $m = B - L_1$。对每个 i，令

$$t_i = \big|N_T(v_i) \setminus \{c\}\big| \ge 1, \qquad \text{and} \qquad L_2 = \sum_{i=1}^{m} t_i.$$

那么 L_2 是与 c 距离为 2 的顶点数（这些顶点全都是叶子）。注意， T的半径为 2 当且仅当 $L_2 > 0$ （等价地， $m > 0$）；半径为 1 当且仅当 $L_2 = 0$ （所以$T \cong K_{1,\ B}$）。

使用这一记号，我们有 $|V(T)| = n = 1 + B + L_2$。令 $p(T) := \operatorname{pdim}(R_T/I(T))$。

5.1. 投射维数与正则性。以下 Jacques 和 Katzman 的递归结果是我们的主要工具。

定理 5.2. *[16, 定理 4.8]* 设 F 是一个含有次数至少为二的顶点的森林。那么存在一个顶点 v，其邻点

$$N_F(v) = \{v_1, \dots, v_n\}, \qquad n \ge 2,$$

使得 $v_1, \dots, v_{n-1}$ 是叶子。定义

$$F' = F \setminus \{v_1\}, \qquad F'' = F \setminus \{v, v_1, \dots, v_n\}.$$

Then

$$\operatorname{pdim}(R_F/I(F)) = \max\big\{\operatorname{pdim}(R_{F'}/I(F')),\ \operatorname{pdim}(R_{F''}/I(F'')) + n\big\},$$

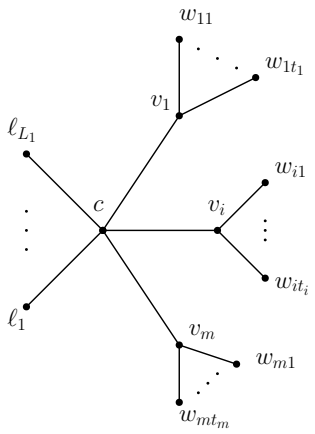

FIGURE 1. 半径至多为 2 且参数如记号 5.1 的树。

其中，对于任意森林 H， $R_H = \mathbb{k}[x_u : u \in V(H)]$ 。

注 5.3。 定理 F'' 5.2 中的森林 可以包含孤立顶点。它们不会影响投射维数；它们会增加变量，但不会为边理想贡献生成元。

定理 5.4。 设 T 如记号 *5.1*所述。那么

$$p(T) = \max\{B,\ L_2 + 1\}.$$

特别地， $\mathrm{reg}(R_T/J(T)) = \max\{B-1,\ L_2\}$。

证明。我们对 $L_2 \geq 0$ 进行归纳。

If $L_2 = 0$，那么 $T \cong K_{1,\ B}$ （一个星图），且 $p(T) = B$。因此，该公式对基本情形成立 e.

假设 $L_2 \geq 1$ ，且该公式对所有半径至多为 2、距离为 2 的叶子严格更少的树成立。选取一个指标 i。则 v_i 有邻点

$$N_T(v_i) = \{c, w_{i1}, \ldots, w_{it_i}\},$$

其中 $w_{i1}, \ldots, w_{it_i}$ 是叶子且 $\deg_T(v_i) = t_i + 1$。应用定理 5.2 取 $v = v_i$, $v_1 = w_{i1}$，以及其余邻点 $v_2, \ldots, v_n$ 取为 $w_{i2}, \ldots, w_{it_i}, c$ （从而 $n = t_i + 1$）。则

$$T' = T \setminus \{w_{i1}\}, \qquad T'' = T \setminus \{v_i, c, w_{i1}, \ldots, w_{it_i}\}.$$

In T'，顶点 c 仍是次数为 B 的中心，且 L_2 减少 1。因此，由归纳法，

$$p(T') = \max\{B, (L_2 - 1) + 1\} = \max\{B, L_2\}.$$

在 T''中，去掉 c 使每个 ℓ_j 成为孤立顶点，且对每个 $j \neq i$ 顶点 v_j 成为星图的中心 K_{1,t_j}。因此 T''是若干星图与孤立顶点的不交并，且由投射维数在不交并下的可加性（以及注 5.3），

$$p(T'') = \sum_{j \neq i} p(K_{1,t_j}) = \sum_{j \neq i} t_j = L_2 - t_i.$$

因此，定理5.2 得出

$$\begin{aligned} p(T) &= \max\{p(T'),\ p(T'') + \deg_T(v_i)\} \\ &= \max\big\{\max\{B, L_2\},\ (L_2 - t_i) + (t_i + 1)\big\} \\ &= \max\{B, L_2 + 1\}, \end{aligned}$$

如所述。

正则性结论由定理 5.4 得出。 □

5.2. 的次数 h-多项式。 接下来我们计算 $P_T(x)$ 和 $M(T)$，然后应用定理 4.4 来求得次数。

命题 5.5. 设 T 如记号 5.1中所述。假设 $L_2 > 0$。则

$$P_T(x) = (1+x)^{L_1} \prod_{i=1}^{m} \Big(x + (1+x)^{t_i} \Big) + x(1+x)^{L_2}.$$

证明。我们将独立集分为两种互不相交的情形计数。

假设不选取 c。我们可以任意选取 L_1 个叶子 $\ell_1, \ldots, \ell_{L_1}$的子集，贡献为$(1+x)^{L_1}$。对于每个分支 v_i，我们可以独立地选择 v_i（贡献为 x），或者不选 v_i，再从其 t_i 个叶子中任意选取一个子集（贡献为$(1+x)^{t_i}$）。因此，分支 i贡献为 $x + (1+x)^{t_i}$。相乘得

$$(1+x)^{L_1} \prod_{i=1}^{m} \big(x + (1+x)^{t_i} \big).$$

假设选取 c。这贡献为 x，使得 c 的所有邻点都不能选取，并允许从 L_2 个距离为 2 的叶子中任意选取一个子集，贡献为$(1+x)^{L_2}$。因此，这种情形贡献为 $x(1+x)^{L_2}$。

将这两种情形相加，即得所述公式。 □

注 5.6. 设 T 如记号 5.1中所述。则

$$\alpha(T) = \begin{cases} B, & \text{if } L_2 = 0, \\ L_2 + 1, & \text{if } L_2 > 0 \text{ and } L_1 = 0, \\ L_1 + L_2, & \text{if } L_2 > 0 \text{ and } L_1 > 0. \end{cases}$$

可以使用 T 的参数表示 $M(T)$。

引理 5.7。 设 T如记号 5.1中所述。则重数 $M(T)$ 为

$$M(T) = \begin{cases} 0, & \textit{if } L_2 = 0, \\ 0, & \textit{if } L_2 > 0 \textit{ and } L_1 = 0, \\ \min\{L_1, L_2\}, & \textit{if } L_1 > 0 \textit{ and } L_1 \neq L_2, \\ L_1, & \textit{if } L_1 = L_2 \textit{ and } m \textit{ is odd}, \\ L_1 + 1, & \textit{if } L_1 = L_2 \textit{ and } m \textit{ is even}. \end{cases}$$

证明。如果 $L_2 = 0$，则 $T \cong K_{1,\,B}$ 且 $P_T(x) = (1+x)^B + x$。因此，$P_T(-1) = -1 \neq 0$ 且 $M(T) = 0$。

假设 $L_2 > 0$。如果 $L_1 = 0$，则命题 5.5 给出

$$P_T(-1) = \prod_{i=1}^{m} \big(-1 + (1-1)^{t_i} \big) = (-1)^m \neq 0,$$

因此再次有 $M(T) = 0$。

现在假设 $L_1 > 0$，并设 $L = \min\{L_1, L_2\}$。根据命题 5.5，

$$P_T(x) = (1+x)^L Q(x),$$

其中

$$Q(x) = (1+x)^{L_1 - L} \prod_{i=1}^{m} \big(x + (1+x)^{t_i} \big) + x(1+x)^{L_2 - L}.$$

如果 $L_1 \neq L_2$，那么 $Q(-1) \neq 0$:

- If $L_1 < L_2$, then $Q(-1) = \prod_{i=1}^{m}(-1) + (-1)\cdot 0 = (-1)^m \neq 0$.
- If $L_2 < L_1$, then $Q(-1) = 0 \cdot \prod_{i=1}^{m}(-1) + (-1) = -1 \neq 0$.

因此 $M(T) = L = \min\{L_1, L_2\}$。

最后，假设 $L_1 = L_2 = U$。则

$$P_T(x) = (1+x)^U Q(x) \qquad \text{with} \qquad Q(x) = \Big(\prod_{i=1}^{m} f_i(x)\Big) + x, \quad f_i(x) = x + (1+x)^{t_i}.$$

由于对于所有 i, $f_i(-1) = -1$，我们有

$$Q(-1) = (-1)^m - 1 = \begin{cases} -2, & \text{if } m \text{ odd}, \\ 0, & \text{if } m \text{ even}. \end{cases}$$

如果 m 为奇数，则 $Q(-1) \neq 0$，且 $M(T) = U$。

如果 m 为偶数，则 $Q(-1) = 0$。求导得，

$$Q'(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i'(x) \prod_{j\neq i} f_j(x) + 1,$$

因此利用 $f_j(-1) = -1$ 可得

$$Q'(-1) = (-1)^{m-1} \sum_{i=1}^{m} f_i'(-1) + 1.$$

此外，$f_i'(x) = 1 + t_i(1+x)^{t_i - 1}$。因此，$f_i'(-1) \in \{1, 2\}$，特别地，$\sum_i f_i'(-1) \geq m$。由于 m 为偶数，$(-1)^{m-1} = -1$，因此

$$Q'(-1) = 1 - \sum_{i=1}^{m} f_i'(-1) \leq 1 - m \neq 0.$$

因此，-1 是 Q的单根。所以 $M(T) = U + 1 = L_1 + 1$。 □

现在，我们可以给出覆盖理想的 h-多项式的次数。

推论 5.8. 设 T 如记号 5.1中所述。那么

$$\deg h_{R_T/J(T)}(t) = \begin{cases} B - 1, & \text{if } L_2 = 0, \\ B + L_2 - 1, & \text{if } L_1 = 0, \\ m + \max\{L_1, L_2\} - 1, & \text{if } L_1 > 0 \text{ and } L_1 \neq L_2, \\ B - 1, & \text{if } L_1 = L_2 \text{ and } m \text{ is odd}, \\ B - 2, & \text{if } L_1 = L_2 \text{ and } m \text{ is even}. \end{cases}$$

证明。 由定理3.8 和定理 4.4，我们有

$$\deg h_{R_T/J(T)}(t) = (B + L_2 - 1) - M(T). \tag{7}$$

将引理 $B = L_1 + m$ 以及相应的 $M(T)$ 中的值代入方程（5.7）即可得到所示的分段表达式（7）。 □

5.3.（reg, deg h）可实现数对。设 $(r,d) = (\mathrm{reg}(R_T/J(T)), \deg h_{R_T/J(T)}(t))$。现在我们描述可实现数对的集合

$$\mathcal{T}_n = \Big\{(r,d) \ : \ T \text{ is a tree of radius at most 2 on } n \text{ vertices}\Big\}.$$

定理 5.9。固定 $n \geq 4$ 并定义

$$\mathcal{A}_n = \Big\{(r,d) \in \mathbb{Z}^2 : \ \Big\lceil \frac{n-2}{2} \Big\rceil \leq r \leq n-2, \ r \leq d \leq \min\{n-2, \ 2r-1\}\Big\}.$$

若 n 为奇数，还设

$$\mathcal{B}_n = \Big\{(r, r-1) : \ \Big\lceil \frac{n-2}{2} \Big\rceil \leq r \leq \Big\lfloor \frac{2n-5}{3} \Big\rfloor\Big\}.$$

则：

(i) 若 n 为偶数，则 $\mathcal{T}_n = \mathcal{A}_n$。

(ii) 若 n 为奇数，则 $\mathcal{T}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n$。

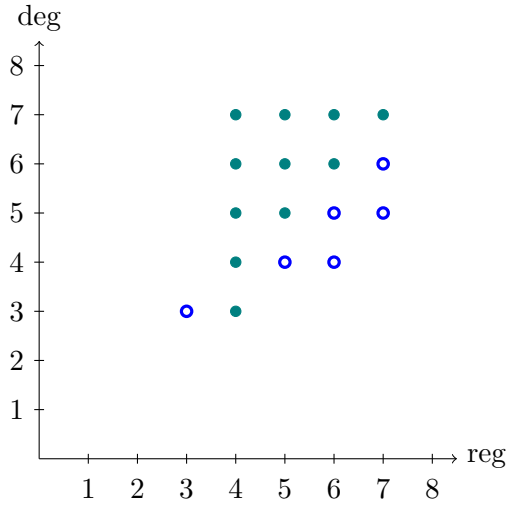

FIGURE 2. 连通图在 $n = 9$ 个顶点上的所有可能的 (reg, deg h) 取值。实心点由半径为 ≤ 2 的树实现；空心点则无法实现。

证明。设 T 是一个 n 个顶点、半径至多为 2 的树，并采用记号 5.1。若 $L_2 = 0$，则 $T \cong K_{1,\ n-1}$ 且 $(r, \ d) = (n-2, \ n-2) \in \mathcal{A}_n$。假设 $L_2 > 0$。由定理 5.4 可得$r =$ 最大值$\{B-1, L_2\}$。此外，回忆一下 $n-2 = (B-1) + L_2$。因此

$$\Big\lceil \frac{n-2}{2} \Big\rceil = \Big\lceil \frac{(B-1)+L_2}{2} \Big\rceil \leq \max\{B-1, L_2\} = r \leq n-3.$$

此外，$d \leq n-2$ 根据推论 5.8中的显式公式总是成立。接下来我们证明 $d \leq 2r-1$。由于 $L_2 = \sum_{i=1}^{m} t_i$ 对每个 $t_i \geq 1$，都有 $m \leq L_2$。

若 $r = L_2$，则根据不同情形，推论 5.8 给出 $d \in \{n-2, \ m+L_2-1, \ r\}$。在每种情况下，$d \leq m + L_2 - 1 \leq 2L_2 - 1 = 2r-1$。

若 $r = B-1$，则推论 5.8 给出 $d \in \{r, \ r-1, \ m+L_2-1\}$ 和 $m + L_2 - 1 \leq 2r-1$，因为 $m \leq L_2 \leq r$。

因此 $(r,d) \in \mathcal{A}_n$，除非可能出现 $d = r-1$。由推论 5.8，不等式 $d < r$ 恰好出现在 $L_1 = L_2$ 且 m为偶数的情形。在该情形下，由于 $n = 1+m+2L_1$，n为奇数。此外，$L_2 \geq m$ 给出附加约束 $r \leq \lfloor (2n-5)/3 \rfloor$（等价地，$(r, r-1) \in \mathcal{B}_n$）。因此，当 n 为偶数时$\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{A}_n$，当 n 为奇数时 $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n$。

实现 $\mathcal{A}_n$。设 $(r,d)\in\mathcal{A}_n$。若 $r=n-2$，则 $d=n-2$ 且 $K_{1,n-1}$ 实现 $(n-2,n-2)$。假设 $r\le n-3$ 并定义

$$L_2:=r,\qquad L_1:=n-2-d,\qquad B:=n-1-r,\qquad m:=B-L_1=d-r+1.$$

那么 $B\ge 2$ 和 $m\ge 1$，因为 $d\ge r$。此外，$d\le 2r-1$ 意味着 $t_1:=2r-d\ge 1$。令

$$t_1:=2r-d,\qquad t_2=\cdots=t_m:=1,$$

因此 $\sum_{i=1}^{m}t_i=r=L_2$。构造一棵半径为 2 的树，其中心为 c，与 L_1 个叶子和 m个顶点 $v_1,\dots,v_m$ 相邻，其中 v_i 恰有 t_i 个叶邻居。于是 $n=1+B+L_2$ 成立，而推论 5.8 给出

$$\operatorname{reg}(R_T/J(T))=\max\{B-1,L_2\}=\max\{n-r-2,r\}=r,$$

因为 $r\ge\lceil(n-2)/2\rceil$ 意味着 $n-r-2\le r$。最后，根据推论 5.8，同一棵树满足 $\deg h_{R_T/J(T)}(t)=d$(在由 L_1和 L_2确定的相关子情形中)。因此 $\mathcal{A}_n\subseteq\mathcal{T}_n$。

实现 $\mathcal{B}_n$。令 $(r,r-1)\in\mathcal{B}_n$，并假设 n 为奇数。定义

$$L_2:=n-2-r,\qquad L_1:=L_2,\qquad B:=r+1,\qquad m:=B-L_1=2r-n+3.$$

于是 $m\ge 1$ 并且，由于 $r\le\lfloor(2n-5)/3\rfloor$，我们有 $L_2\ge m$。取

$$t_1:=L_2-m+1\ge 1,\qquad t_2=\cdots=t_m:=1,$$

因此 $\sum_i t_i=L_2$。构造相应的半径为 2 的树。由于 $n=1+m+2L_1$ 是奇数，整数 m 是偶数，因此推论 5.8 给出

$$\deg h_{R_T/J(T)}(t)=B-2=r-1,\qquad \operatorname{reg}(R_T/J(T))=\max\{B-1,L_2\}=r.$$

因此 $\mathcal{B}_n\subseteq\mathcal{T}_n$，证明完毕。 □

6. A Jacques–Katzman type recursion for $M(G)$ on forests

本节中，我们将 Jacques–Katzman 的递推 [16, 定理 4。8] 推广，以计算与森林的边理想（及覆盖理想）相关联的 h-多项式。由定理4.4 可知

$$\deg h_{R_F/I(F)}(t)=\alpha(F)-M(F).$$

因此，只需递归地计算 $\alpha(F)$ 和 $M(F)$。

记号 6.1. 设 G 是一个有限简单图，其独立多项式为 $P_G(x)$。令$u=x+1$，并考虑 $P_G(u-1)\in\Bbbk[u]$。则 $M(G)=\operatorname{ord}_{u=0}P_G(u-1)$。

我们还将 $u=0$ 处首个非零泰勒系数记为

$$c(G):=[u^{M(G)}]P_G(u-1)\in\Bbbk^{\times},$$

从而

$$P_G(u-1)=c(G)u^{M(G)}+(\text{terms of degree}>M(G)).$$

引理 6.2. 设 $A(u)$ $B(u)\in\Bbbk[u]$ 非零，并令 $\nu(A)=\operatorname{ord}_{u=0}A(u)$。则

$$\nu(A+B)\ge\min\{\nu(A),\nu(B)\},$$

等号成立，除非 $\nu(A)=\nu(B)$ 且首项系数相消。更确切地说，若 $\nu(A)=a$且 $\nu(B)=b$，则:

(i) 若 $a<b$，则 $\nu(A+B)=a$ 且 $[u^a](A+B)=[u^a]A$;
(ii) 若 $b<a$，则 $\nu(A+B)=b$ 且 $[u^b](A+B)=[u^b]B$; (iii) 若 $a=b$，则 $\nu(A+B)\ge a$ 且 $[u^a](A+B)=[u^a]A+[u^a]B$。

证明。设 $A(u) = a_0u^a +$（次数为 $> a$ 的项），且 $B(u) = b_0u^b +$（次数为 $> b$ 的项），其中 $a_0, b_0 \neq 0$。若 $a < b$（分别地，$b < a$），则项 a_0u^a（分别地，b_0u^b）无法被另一个多项式中的任何项抵消，因此 $\nu(A + B) = \min\{a, b\}$，且首项系数继承自阶数较小的加项。若 $a = b$，则 u^a 在 $A + B$ 中的系数为 $a_0 + b_0$，当且仅当没有发生抵消时该系数非零。□

注记 6.3. 若 $H = G \sqcup K_1$ 是通过添加一个孤立顶点从 G 得到的，则 $P_H(x) = (1 + x)P_G(x)$。因此 $M(H) = M(G) + 1$ 且 $\alpha(H) = \alpha(G) + 1$，所以

$$\alpha(H) - M(H) = \alpha(G) - M(G),$$

因此 $\deg^{h_{S_H/I(H)}}(t) = \deg^{h_{S_G/I(G)}}(t)$。特别地，在计算森林的 $\deg h$ 时可以忽略孤立顶点。

我们遵循 Jacques 和 Katzman 的一般设定[16]，，并稍作调整以适应我们的目的。

Not论 6.4. 设 F 是一片森林，包含一个次数为 $n \geq 2$、邻点为 s 的顶点 v et

$$N_F(v) = \{v_1, \ldots, v_n\},$$

其中 $v_1, \ldots, v_{n-1}$ 是叶子。令 $F \setminus U$ 表示由 $V(F) \setminus U$ 诱导的子图，并定义诱导子森林

$$F' := F \setminus \{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}, \qquad F'' := F \setminus \{v, v_1, \ldots, v_n\}.$$

命题 6.5. 设 F 如记号 *6.4*所述。则

$$P_F(x) = (1 + x)^{n-1}P_{F'}(x) + xP_{F''}(x). \tag{8}$$

等价地，代入 $x = u - 1$ 后，可得

$$P_F(u - 1) = u^{n-1}P_{F'}(u - 1) + (u - 1)P_{F''}(u - 1). \tag{9}$$

证明。将 F 的独立集划分为两个互不相交的情形。

若不选取 v，则每个叶子 $v_1, \ldots, v_{n-1}$ 都可以独立地选择或不选择，因此贡献因子 $(1 + x)^{n-1}$。其余选择构成诱导子森林 F' 中的一个独立集，贡献 $P_{F'}(x)$。因此，该情形的贡献为 $(1 + x)^{n-1}P_{F'}(x)$。

若选取 v，则贡献因子 x，并且迫使 $v_1, \ldots, v_n$ 均不被选取。其余选择构成 F'' 中的一个独立集，贡献 $P_{F''}(x)$。因此，该情形的贡献为$xP_{F''}(x)$。

将两种情形相加，得到（8）。代入 $x = u - 1$ 可得（9）。 □

接下来，我们将从命题 6.5 的局部分解中，提取 M（F）的递归公式（以及相应的首项系数 c（F））。

定理 6.6。 设 F 如记号 *6.4*中所述。令

$$r_1 := (n - 1) + M(F'), \qquad and \qquad r_2 := M(F'').$$

那么：

(a) 若 $r_1 < r_2$，则 $M(F) = r_1$ 且 $c(F) = c(F')$。
(b) 若 $r_2 < r_1$，则 $M(F) = r_2$ 且 $c(F) = -c(F'')$。

(c) 若 $r_1 = r_2 = r$，则 $M(F) \geq r$ 且

$$[u^r]P_F(u-1) = c(F') - c(F'').$$

特别地，$M(F) = r$ 当且仅当 $c(F') \neq c(F'')$，而 $M(F) \geq r+1$ 当且仅当 $c(F') = c(F'')$。

证明。由等式 (9)，

$$P_F(u-1) = u^{n-1}P_{F'}(u-1) + (u-1)P_{F''}(u-1).$$

由记号 6.1可知，在 $u = 0$ 处的泰勒展开为

$$P_{F'}(u-1) = c(F')u^{M(F')} + (\text{terms of degree} > M(F')),$$
$$P_{F''}(u-1) = c(F'')u^{M(F'')} + (\text{terms of degree} > M(F'')),$$

其中 $c(F')\ c(F'') \neq 0$。

将第一个展开式乘以 u^{n-1} 会使次数增加 $n-1$，因此

$$u^{n-1}P_{F'}(u-1) = c(F')u^{(n-1)+M(F')} + \cdots,$$

so

$$\operatorname{ord}_{u=0}\big(u^{n-1}P_{F'}(u-1)\big) = r_1 \quad \text{and} \quad [u^{r_1}]\big(u^{n-1}P_{F'}(u-1)\big) = c(F').$$

对于第二个加数，写作 $(u-1) = -1+u$。由于 $M(F'') \geq 0$，我们有

$$(u-1)P_{F''}(u-1) = -c(F'')u^{M(F'')} + \cdots,$$

so

$$\operatorname{ord}_{u=0}\big((u-1)P_{F''}(u-1)\big) = r_2 \quad \text{and} \quad [u^{r_2}]\big((u-1)P_{F''}(u-1)\big) = -c(F'').$$

比较和式中 u 的最低非零次幂

$$P_F(u-1) = \big(u^{n-1}P_{F'}(u-1)\big) + \big((u-1)P_{F''}(u-1)\big)$$

并结合引理6.2 可得(a)–(c)。 □

注释 6.7. 除可能发生相消的同阶情形外，定理6.6给出

$$M(F) = \min\{(n-1) + M(F'),\ M(F'')\}.$$

推论 6.8. 设 F 如记号*6.4*中所述。则

$$\alpha(F) = \max\{(n-1) + \alpha(F'),\ 1 + \alpha(F'')\}.$$

证明。若未选取 v，则可选取全部 $n-1$ 个叶邻居 $v_1,\ldots,v_{n-1}$，并用 F'的一个最大独立集加以扩充，从而得到大小为$(n-1) + \alpha(F')$的独立集。

若选取了 v，则 $v_1,\ldots,v_n$ 均不可选取，其余选择在 F''中构成一个独立集。再用 F'' 中的一个最大独立集加以扩充，便得到大小为 $1 + \alpha(F'')$的独立集。

取这两个量中的最大值即可得到该公式。 □

推论 6.9。设 F 是记号 *6.4*中的一棵森林。则

$$\deg h_{R_F/I(F)}(t) = \alpha(F) - M(F),$$

其中 $\alpha(F)$ 与 $M(F)$ 可由推论 *6.8*与定理 *6.6*递归计算得到。

7. Whiskering and degree formulas

本节我们记录边理想与覆盖理想的 h-多项式在晶须化运算下的次数公式。我们讨论两种情形：一致 q-加悬挂边，即在 G 的每个顶点上附加 q 个悬挂顶点，以及在单个顶点上加悬挂边。一致构造给出用 $\alpha(G)$ 表示的闭式表达式，而单顶点情形则用 G 与 $G-v$ 的相应不变量来描述。

定理 7.1. 设 G 是一个有 n 个顶点的图，并固定一个整数 $q \geq 1$。令 G_q 为从 G 得到的图：在 G 的每个顶点上附加 q 个晶须，并且 $R_q = \mathbb{k}[v : v \in G_q]$。那么

$$\deg h_{R_q/I(G_q)}(t) = q\alpha(G) \qquad \textit{and} \qquad \deg h_{R_q/J(G_q)}(t) = n - 2 + q\alpha(G).$$

证明。回顾定理 3.8 和定理 4.4 可知，对于任意图 H，有

$$\deg h_{R/I(H)}(t) = \alpha(H) - M(H) \qquad \text{and} \qquad \deg h_{R/J(H)}(t) = |V(H)| - 2 - M(H).$$

因此，只需找出 $M(G_q)$。为此，我们关注 G_q的独立多项式。

注意到 G_q 是 G 与 qK_1的冠积，即 $G_q = G \circ qK_1$。设 $H = qK_1$，那么$P_H(x) = (1+x)^q$。由以下来自 [17, 定理 1.2]的冠恒等式可得

$$P_{G\circ H}(x) = \big(P_H(x)\big)^n P_G\left(\frac{x}{P_H(x)}\right),$$

我们有

$$P_{G_q}(x) = (1+x)^{qn} P_G\left(\frac{x}{(1+x)^q}\right) = \sum_{k=0}^{\alpha(G)} g_k x^k (1+x)^{q(n-k)}.$$

令 $\alpha = \alpha(G)$，并将独立多项式分解如下：

$$P_{G_q}(x) = (1+x)^{q(n-\alpha)} \left(\sum_{k=0}^{\alpha} g_k x^k (1+x)^{q(\alpha-k)} \right).$$

将剩余因子代入 $x = -1$，注意到所有含有 $k < \alpha$ 的项都消失，只留下 $g_\alpha(-1)^\alpha \neq 0$。因此 $M(G_q) = q(n - \alpha(G))$。

由于 $\alpha(G_q) = qn$，我们有

$$\begin{aligned} \deg h_{R_q/I(G_q)}(t) &= qn - q(n - \alpha(G)) = q\alpha(G), \\ \deg h_{R_q/J(G_q)}(t) &= (q+1)n - 2 - q(n - \alpha(G)) = n - 2 + q\alpha(G), \end{aligned}$$

如所声称。 □

对一个顶点加悬挂边仍可得到关于 $\deg h$ 的有用表达式，但它取决于 G 和 $G \setminus v$，以及 v 与加悬挂边的顶点之间的关系。

引理 7.2. 设 G 是一个有 n 个顶点的图，并固定一个顶点 $v \in V(G)$。令 G^v 为由 G 对 v 加悬挂边得到的图。设 $a = M(G)$ 且 $b = M(G-v)$。则

$$M(G^v) = \min\{a, b\} \quad \textit{if } a \neq b,$$

并且，如果 $a = b$ 那么 $M(G^v) \geq a$，除非发生抵消，否则等号成立。

此外，$\alpha(G^v) = \max\{\alpha(G),\ 1 + \alpha(G-v)\}$。

证明。令 v' 为满足 $\{v, v'\} \in E(G^v)$ 的新顶点。

若考虑图 G^v 的最大独立集，我们可以取 v'，再加上图 $G-v$ 的任意独立集，从而得到最大大小为 $1 + \alpha(G-v)$。若不包含 v'，则可以取图 G 的最大独立集，得到大小为 $\alpha(G)$。因此，我们有 $\alpha(G^v) = \max\{\alpha(G),\ 1 + \alpha(G-v)\}$。

图 G^v 中的任意独立集要么不包含新叶子 v'（贡献 $P_G(x)$），要么包含 v'，此时其余顶点构成图 $G-v$ 中的一个独立集，贡献 $xP_{G-v}(x)$。将这两种结果相加可得

$$P_{G^v}(x) = P_G(x) + xP_{G-v}(x).$$

由于 $a = M(G)$ 和 $b = M(G-v)$，因此有

$$P_G(x) = (1+x)^a A(x), \qquad P_{G-v}(x) = (1+x)^b B(x),$$

其中 $A(-1) \neq 0$ 和 $B(-1) \neq 0$。于是

$$P_{G^v}(x) = (1+x)^a A(x) + x(1+x)^b B(x).$$

若 $a < b$，提出公因子 $(1+x)^a$：

$$P_{G^v}(x) = (1+x)^a \big(A(x) + x(1+x)^{b-a} B(x)\big),$$

在 $x = -1$ 处取第二个因子的值，会使第二项消失，留下 $A(-1) \neq 0$。因此$M(G^v) = a$。情形 $b < a$是对称的，可得 $M(G^v) = b$。所以，若 $a \neq b$，则 $M(G^v) = \min\{a, b\}$。

若 $a = b$，则

$$P_{G^v}(x) = (1+x)^a \big(A(x) + xB(x)\big).$$

因此，我们有 $M(G^v) \geq a$。注意，除非 $A(-1) = B(-1)$，否则 $M(G^v) = a$；在这种情况下，重数更大。□

推论 7.3. 设 G 是一个有 n 个顶点的图，并固定一个顶点 $v \in V(G)$。令 G^v 为由 G 通过对 v 加悬挂边得到的图。那么，$\deg h_{R^v/I(G^v)}(t)$ 和 $\deg h_{R^v/J(G^v)}(t)$ 可用 G 和 $G \setminus v$ 表示。

证明。 将引理 $\alpha(G^v) |V(G^v)| = n+1$ 和 $M(G^v)$ 中的表达式代入 7.2 中的 $\deg h_{R/I(G^v)}(t) = \alpha(G^v) - M(G^v)$ 和 $\deg h_{R/J(G^v)}(t) = |V(G^v)| - 2 - M(G^v)$，即可得到次数公式。□

8. Split graphs and diagonal $(\operatorname{reg}, \deg h)$ behavior

分裂图构成一个性质良好的弦图类，其独立多项式有显式描述。本节利用分裂图的一种划分来计算 $P_G(x)$。因此，我们得到不变量 $\alpha(G)$ 和 $M(G)$ 的闭式公式，它们控制了 $R/I(G)$ 和 $R/J(G)$ 的 h-多项式的次数。因此，在这一图类中，覆盖理想呈现出特别刚性的行为：对于连通分裂图，$\big(\operatorname{reg}(R/J(G))$、$\deg h_{R/J(G)}(t)\big)$ 始终位于对角线上；并且对于固定的 $n = |V(G)|$，我们精确确定了哪些对角线上的取值会出现。

定义 8.1. 若图 G的顶点集可以划分为

$$V(G) = C \sqcup I$$

使得 C 诱导出一个团，而 I 诱导出一个独立集，则称其为分裂图。以下陈述均固定采用这样的划分。全文假设 G是连通的，且至少有一条边。

注记 8.2. 文献 [9] 证明，分裂图恰好是（$2K_2$，C_4，C_5）-自由图。注意，$2K_2$-自由等价于无间隙。

本节中我们始终采用如下记号。

记号 8.3. 设 G 为一个分裂图。固定一个分裂划分 $V(G) = C \sqcup I$，并令 $m := |I|$。对每个 $c \in C$，定义

$$a(c) := \big|I \setminus N_G(c)\big|,$$
$$\deg_I(c) := \big|N_G(c) \cap I\big|.$$

因此，对每个 $c \in C$，$m = a(c) + \deg_I(c)$。另设

$$\Delta_I := \max\{\deg_I(c) : c \in C\},$$
$$\delta_I := \min\{\deg_I(c) : c \in C\},$$
$$a_{\min} := \min\{a(c) : c \in C\},$$
$$a_{\max} := \max\{a(c) : c \in C\}.$$

注意，$a_{\min} = m - \Delta_I$ 和 $a_{\max} = m - \delta_I$。

命题 8.4. 设 G是记号 8.3中的分裂图。则其独立多项式为

$$P_G(x) = (1+x)^m + x\sum_{c\in C}(1+x)^{a(c)}.$$

证明。每个独立集恰好属于以下类型之一：

- 是 I的一个子集，对应贡献 $(1+x)^m$；或者
- 包含一个顶点 $c \in C$。由于 C 是一个团，它恰好包含 C中的一个顶点。此外，它可以包含 $I \setminus N_G(c)$的任意子集。这对每个$c \in C$贡献 $x(1+x)^{a(c)}$。

Summing这些不相交的贡献，便得到独立多项式的公式 al. □

推论 8.5。采用如上记号，

$$\alpha(G) = \max\Big(m,\ 1 + a_{\max}\Big) = \max\Big(m,\ 1 + m - \delta_I\Big).$$

证明。一个独立集要么位于 I 中（从而大小至多为 m），要么包含一个顶点 $c \in C$；在后一情形下，它恰好包含 C 的一个顶点，然后至多可以纳入 $I \setminus N_G$的全部（c），从而大小至多为 $1 + a$（c）。对 $c \in C$ 取最大值即得所需公式。□

如下文所见，不变量 $M(G)$对分裂图有一个很好的描述。

命题 8.6。 设 G 是一个分裂图，如记号 8.3。则

$$M(G) = m - \Delta_I.$$

证明。若 $m = 0$，则 G 是 C 上的完全图，且 $P_G(x) = 1 + |C|x$。这意味着$P_G(-1)$ $= 1 - |C| \neq 0$且 $M(G) = 0 = m - \Delta_I$。
假设 $m > 0$。根据命题 8.4，我们知道

$$P_G(x) = (1+x)^m + x\sum_{c\in C}(1+x)^{a(c)}.$$

回想一下，$a_{\min} = m - \Delta_I$。由于 G 是连通的，C 中的某个顶点与 I中的一个顶点相邻。因此，$\Delta_I \geq 1$，这意味着 $a_{\min} < m$。接下来，我们可以从 $P_G(x)$中提出因子$(1+x)^{a_{\min}}$，如下所示：

$$P_G(x) = (1+x)^{a_{\min}}\Big((1+x)^{m-a_{\min}} + x\sum_{c\in C}(1+x)^{a(c)-a_{\min}}\Big).$$

接下来，我们计算第二个因子在 $x=-1$处的值。由于 $m-a_{\min}>0$，第一项为零。在求和中，每个满足 $a(c)>a_{\min}$ 的项都为零，而每个满足 $a(c)=a_{\min}$ 的项都贡献x。令 $r:=|\{c\in C:\ a(c)=a_{\min}\}|\geq 1$。那么，括号中的第二个因子的值为

$$(-1)\cdot r\neq 0.$$

因此它不能被 $(1+x)$ 整除。因此 $M(G)=a_{\min}=m-\Delta_I$，如所声称。 . □

推论 8.7。 设 G 为记号 *8.3* 中的分裂图。那么

$$\deg h_{R/I(G)}(t)=\begin{cases}\Delta_I+1 & : \textit{if } \delta_I=0,\\ \Delta_I & : \textit{if } \delta_I>0.\end{cases}$$

证明。 结合推论 8.5 和命题 8.6 以及恒等式 $\deg\ h_{R/I(G)}(t)=\alpha(G)-M(G)$，即可得到该结果。□

引理 8.8。 设 G 为记号 *8.3* 中的分裂图。那么

$$i(G)=m-\Delta_I+1.$$

证明。取 $c_0\in C$，使得 $\deg_I(c_0)=\Delta_I$。集合

$$D:=\{c_0\}\ \cup\ \big(I\setminus N_G(c_0)\big)$$

是独立集且具有支配性。因此 $i(G)\leq|D|=1+a(c_0)=m-\Delta_I+1$。反过来，任意独立支配集至多包含 C 中的一个顶点。如果一个独立支配集包含 $c\in C$，那么它还必须包含 $I\setminus N_G(c)$ 中的所有顶点，因此其大小至少为 $1+a(c)\geq 1+a_{\min}=m-\Delta_I+1$。□

推论 8.9。 设 G 是记号 *8.3*中的分裂图。则

$$\deg h_{R/J(G)}(t)=\operatorname{reg}(R/J(G))=\Delta_I+|C|-2.$$

注意， $\Delta_I+|C|$ 与所选的分裂划分无关，因为 $\Delta_I+|C|=n-M(G)$，由命题 8.6 和 $n=m+|C|$ 可得。

证明。 由定理 4.4 可知 $\deg\ h_{R/J(G)}(t)=m+|C|-2-M(G)$，所需表达式由命题 8.6立即得到。

对于覆盖理想的正则性，我们使用定理 2.6 和引理 8.8。因此，

$$\operatorname{reg}(R/J(G))=\operatorname{pdim}(R/I(G))-1=m+|C|-m+\Delta_I-2=\Delta_I+|C|-2.$$ □

We 现在可以讨论连通分裂图中可实现的 (正则性, $\deg\ h$) 数对。

定理 8.10。固定 $n\geq 2$ 并令

$$\mathcal{S}_n=\Big\{\big(\operatorname{reg}(R/J(G)),\ \deg h_{R/J(G)}(t)\big)\ :\ G\ \textit{is a connected split graph on } n\ \textit{vertices}\Big\}.$$

那么， $\mathcal{S}_n$ 恰由满足 $q_{\min}(n)\leq q\leq n-2$ 的对角数对 (q,q) 组成，其中

$$q_{\min}(n):=\min_{1\leq c\leq n-1}\Big(c+\Big\lceil\frac{n}{c}\Big\rceil-3\Big).$$

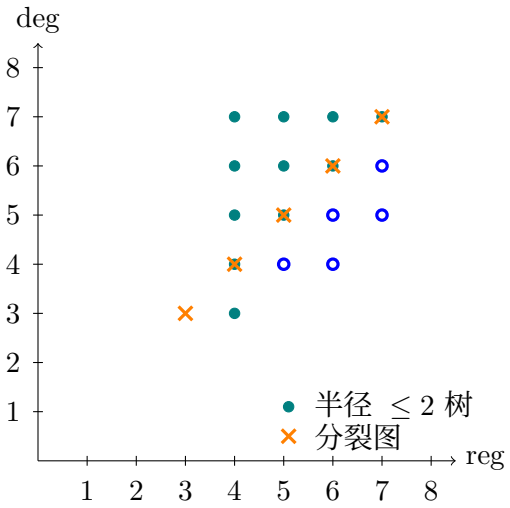

FIGURE 3. 在 $n = 9$ 个顶点的连通图中所有可能的（reg，deg h）取值。实心点由分裂图和半径为 ≤ 2 的树实现；空心点则无法实现。

证明。设 G 是一个连通分裂图，满足 $V(G) = C \sqcup I$，其中 $|C| = c$ 且 $|I| = m = n - c$，并设 $\Delta_I =$ 最大{次数$_I(x)$: $x \in C$} 如记号 8.3所示。

如果 $c = 1$，那么 G 是一个星图，其中心为 C，且 $\Delta_I = m = n - 1$。因此 $\Delta_I + c - 2 = n - 2$。所以，该情形只能实现顶部对角线上的值，我们可以假设 $c \geq 2$。

根据推论8.9,

$$\operatorname{reg}(R/J(G)) = \deg h_{R/J(G)}(t) = \Delta_I + c - 2,$$

因此，每个可实现的数对都位于对角线上。我们声称 $q_{\min}$（n） $\leq \Delta_I + c - 2 \leq n - 2$。上界显然成立，因为 $\Delta_I \leq m$ 意味着 $\Delta_I + c - 2 \leq m + c - 2 = n - 2$。

由于 G 是连通的， I 的每个顶点在 C中都有一个邻点。因此， C与 I之间边的数量记作 $e(C, I)$，满足 $e(C, I) \geq m$。另一方面， $e(C, I) = \sum_{x \in C} \deg_I(x) \leq c\Delta_I$。所以，我们有 $c\Delta_I \geq m$。因此

$$\Delta_I \geq \left\lceil \frac{m}{c} \right\rceil = \left\lceil \frac{n - c}{c} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - 1.$$

因此

$$\Delta_I + c - 2 \geq c + \left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - 3,$$

并对 $2 \leq c \leq n - 1$ 取最小值，得到 $\Delta_I + c - 2 \geq q_{\min}(n)$。

反过来，固定 $c \in \{2, \ldots, n-1\}$ 以及一个满足 $c + \lceil n/c \rceil - 3 \leq q \leq n - 2$的整数 q。令 $m = n - c$和 $\Delta_I = q - c + 2$。则 $\lceil m/c \rceil \leq \Delta_I \leq m$。取非负整数 $s_1, \ldots, s_c$，使得$\sum_{j=1}^{c} s_j = m$, $s_1 = \Delta_I$，且对所有 j都有 $s_j \leq \Delta_I$。令 $C = \{x_1, \ldots, x_c\}$ 诱导一个团，令 I为独立集，将 $I = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_c$划分为 $|I_j| = s_j$，并将x_j与 I_j的每个顶点相连。则G是一个连通分裂图，且满足$\max_{x \in C} \deg_I(x) = \Delta_I$。因此

$$\operatorname{reg}(R/J(G)) = \deg h_{R/J(G)}(t) = \Delta_I + c - 2 = q.$$

因此，所述范围内的每一个 q 都由某个分裂图观察到，从而证明了该断言。 □

9. GRAPHS WITH $\operatorname{reg}(R/J(G)) = n - 2$ AND VARYING $\deg h$

本节研究覆盖理想达到最大可能正则性的 G 顶点图 n ，

$$\operatorname{reg}(R/J(G)) = n - 2.$$

并构造一系列图，使次数 $\deg h_{R/J(G)}(t)$ 发生变化。我们的主要工具是锥操作：如果 $G = H * K_1$ 是在一个有 $n-1$ 个顶点的图 H 上取锥得到的，那么 $\operatorname{pdim}(R/I(G)) = n-1$，因此 $\operatorname{reg}(R/J(G)) = n-2$。由于次数由 $M(G)$ 决定，

$$\deg h_{R/J(G)}(t) = n - 2 - M(G),$$

要在保持 $\operatorname{reg}(R/J(G))$ 不变的同时改变 $\deg h$，只需构造具有可控 $M(G)$ 的图。我们通过为合适的弦图 H（由一个分裂图和一个星图 $K_{1,\,r}$ 构成）指定独立多项式来实现这一点，然后在 H 上取锥。

本节中我们将反复使用以下注记。

注 9.1. 设 H 是一个有 $(n-1)$ 个顶点的图，$G = H * K_1$ 是由 H 添加新顶点 u 并取锥得到的图。此外，由于锥顶点 u 与 H 的每个顶点都相邻，唯一包含 u 的独立集是 $\{u\}$。因此

$$P_G(x) = P_H(x) + x.$$

若 $H = K \sqcup L$，则 $P_H(x) = P_K(x)P_L(x)$。

最后，星图 $K_{1,\,r}$ 的独立多项式，其中 $r \geq 1$ 为

$$P_{K_{1,r}}(x) = (1+x)^r + x.$$

构造 9.2. 固定一个整数 $k \geq 1$。令

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_{k+1}\} \qquad \text{and} \qquad I = \{z_1, \ldots, z_{k-1}\},$$

其中 $I = \emptyset$ 若 $k = 1$。定义一个图 B_k，其顶点集为 $V(B_k) = C \sqcup I$，使得 at

- C 张成一个团 K_{k+1};
- I 是一个独立集;
- 对于每个 $1 \leq j \leq k-1$，z_j 的邻域为

$$N_{B_k}(z_j) = \{c_1, c_2, \ldots, c_j\}.$$

等价地，这些邻域是嵌套的

$$N(z_1) \subset N(z_2) \subset \cdots \subset N(z_{k-1}).$$

特别地，B_k 是一个分裂图（因此是弦图），且 $|V(B_k)| = 2k$。

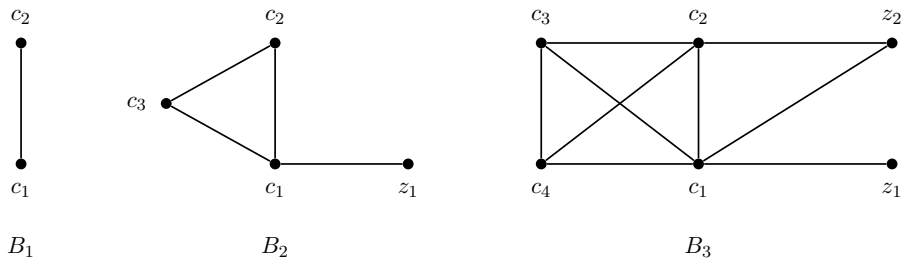

FIGURE 4. B_k 对于 $k = 1$，2、3，来自构造9.2 从左到右

引理9.3. 设 B_k 如构造*9.2*所示。那么

$$P_{B_k}(x) = 2(1+x)^k - 1.$$

证明. 图 B_k 中的独立集分为两类。

(i) 考虑不包含团 C 的独立集。由于 I 是独立的，I 的任意子集都是独立的，贡献为 $(1+x)^{k-1}$。

(ii) 考虑包含团中某个顶点的独立集。如果独立集包含 $c_i \in C$，则不能包含 C 中的任何其他顶点。它可以包含那些与 c_i 不相邻的 z_j。根据构造，z_j 与 c_i 相邻当且仅当 $i \le j$。因此，I 中允许选取的顶点为 $z_1, \dots, z_{\min(i,k-1)}$，给出 I 子集的 $(1+x)^{\min(i-1,k-1)}$ 种选择。因此，选择 c_i 的总贡献为 $x(1+x)^{\min(i-1,k-1)}$。

对 $i = 1, \dots, k+1$ 求和可得

$$P_{B_k}(x) = (1+x)^{k-1} + x\left(\sum_{j=0}^{k-2}(1+x)^j + 2(1+x)^{k-1}\right).$$

由于

$$\sum_{j=0}^{k-2}(1+x)^j = \frac{(1+x)^{k-1}-1}{(1+x)-1},$$

我们得到

$$P_{B_k}(x) = (1+x)^{k-1} + \big((1+x)^{k-1}-1\big) + 2x(1+x)^{k-1} = 2(1+x)^k - 1,$$

如所声称。 □

构造 9.4。固定整数 $k \ge 1$ 和 $r \ge k$。令 $H := B_k \sqcup K_{1,r}$ 和 $G_{k,r}$ 为 H 上的锥，即

$$G_{k,r} := H * K_1,$$

通过添加一个与 H 的每个顶点都相邻的新顶点 u 得到。于是 $G_{k,r}$ 是一个连通弦图，其 $|V(G_{k,r})| = 2k + r + 2$。

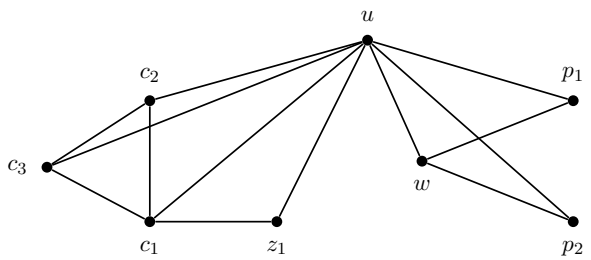

FIGURE 5. 图 $G_{2,\ 2}$ 来自构造 9.4：以 $B_2 \sqcup K_1$ 为锥,2

接下来，我们计算这一族的重数。

引理 9.5。 设 $G_{k,\ r}$ 如构造 *9.4*所示。则

$$M(G_{k,r}) = k.$$

证明。 由注 9.1 可知

$$\begin{aligned} P_{G_{k,r}}(x) &= P_{B_k}(x)P_{K_{1,r}}(x) + x \\ &= \Big(2(1+x)^k - 1\Big)\Big((1+x)^r + x\Big) + x \\ &= 2(1+x)^{k+r} + 2x(1+x)^k - (1+x)^r \\ &= (1+x)^k \underbrace{\Big(2(1+x)^r + 2x - (1+x)^{r-k}\Big)}_{Q(x)} \end{aligned}$$

因为 $r \ge k$。因此 $M(G_{k,\ r}) = k$ 因为 $Q(-1) = -2 \ne 0$。 □

我们可以给出该图类中 h-多项式次数的下界和上界。

引理 9.6。 设 n。令 $G_{k,r}$ 如构造 9.4 中所述，且 $|V(G_{k,r})| = n$。那么

$$n-3 \geq \deg h_{R/J(G_{k,r})}(t) \geq \left\lceil \frac{2(n-2)}{3} \right\rceil.$$

证明。由引理 9.5 可知 $M(G_{k,r}) = k \geq 1$。因此

$$\deg h_{R/J(G_{k,r})}(t) = n-2-M(G_{k,r}) = n-2-k \leq n-3,$$

如所求。尚需证明下界。

由于 $|V(B_k)| = 2k$ 且 $|V(K_{1,r})| = r+1$ 满足约束条件 $r \geq k$，我们有

$$n = |V(G_{k,r})| = 2k + (r+1) + 1 \geq 2k + (k+1) + 1 = 3k+2.$$

因此，

$$1 \leq k = M(G) \leq \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor.$$

Then

$$\deg h_{R/J(G_{k,r})}(t) = n-2-M(G_{k,r}) \;\geq\; n-2-\left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor = \left\lceil \frac{2(n-2)}{3} \right\rceil. \qquad \square$$

例 9.7。 设 $n = 8$。引理 9.6 证明中的界给出 $k \leq \lfloor (8-2)/3 \rfloor = 2$，且这两个值均可取到。事实上，解方程 $n = 2k + r + 2$ 可得 $r = 8-2k-2$:

$$(k,r) = (1,4) \quad \text{and} \quad (k,r) = (2,2),$$

两者均满足 $r \geq k$。因此，相应的正则性和次数值为

$$(\mathrm{reg}, \deg h) = (6,5) \;\; (\text{from } k=1) \qquad \text{and} \qquad (\mathrm{reg}, \deg h) = (6,4) \;\; (\text{from } k=2).$$

我们使用 Macaulay2 对 $n = 8$ 的所有可能的 (reg, deg h) 数对进行计算，结果表明，当 reg $= 6 = n-2$ 时，这些就是所有的 (reg, deg h) 数对（除去由星图实现的 (6, 6)）。

设 $n = 9$。有 $k \leq \lfloor (9-2)/3 \rfloor = 2$。因此，这个族的范围最低可达 (reg，次数 h) $=$ (7，5)，但无法再低。再次，我们使用 Macaulay2 对 $n = 9$的所有可能的 (reg，次数 h) 数对进行计算，结果表明，这是 reg $= 7 = n-2$ 时在 (reg，次数 h) 上能达到的最小数对（见图 3）。

10. A chordal family on the line $\deg h = \mathrm{reg} - 1$

本节中，对于固定的 n，我们构造一族连通弦图，其覆盖理想实现 (reg, deg h) 平面中对角线下方一格的那条直线，即

$$\deg h_{R/J(G)}(t) = \mathrm{reg}(R/J(G)) - 1.$$

由定理 2.6 可知，对于弦图 G，我们有

$$\mathrm{reg}(R/J(G)) = n - i(G) - 1.$$

对于任意图，我们还有以下结论

$$\deg h_{R/J(G)}(t) = n - 2 - M(G).$$

因此，条件 deg h $=$ reg -1 等价于要求 $M(G) = i(G)$。我们的构造得到一个半径为 2 的弦图 $H_{n,\,p}$ （由半径为 2 的树沿固定边粘合三角形而得），使得

$$i(H_{n,p}) = M(H_{n,p}) = p.$$

改变 p，即可在固定 n 时得到对角相邻对的完整范围

$$\big(\mathrm{reg}(R/J(H_{n,p})),\ \deg h_{R/J(H_{n,p})}(t)\big) = (r, r-1)$$

对于 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq r \leq n-3$。

构造 10.1。固定整数 $p \geq 3$ and $n \geq 2p+1$，并令 $k := n-(2p+1) \geq 0$。我们按如下方式定义一个具有 n 个顶点的连通弦图$H_{n,\ p}$。

$H_{n,\ p}$ 的顶点集为

$$V(H_{n,p}) = \{c, v_1, v_2\} \sqcup \{u_1, \ldots, u_{p-1}\} \sqcup \{y_1, \ldots, y_{p-2}\} \sqcup \{z\} \sqcup \{x_1, \ldots, x_k\}.$$

$H_{n,\ p}$ 的边为

- cv_1，cv_2,cu_j 对于每个 $1 \leq j \leq p-1$,
- $v_1 y_\ell$ 对于每个 $1 \leq \ell \leq p-2$ 和 $v_2 z$
- cx_i 和 $v_1 x_i$ 对于每个 $1 \leq i \leq k$。

等价地，$H_{n,\ p}$ 由以 c 为中心的半径为 2 的树（在 c处添加 $p-1$ 个叶子，在 v_1处添加 $p-2$ 个叶子，并在 v_2处添加一个叶子）构成，然后沿边 cv_1 粘合 k 个三角形（每个三角形的顶点为 $\{c, v_1, x_i\}$）。

注记 10.2。 对于所有 $p \geq 3$ 和 $n \geq 2p+1$，图 $H_{n,\ p}$ 由构造 10.1 可知是连通的。此外，$H_{n,\ p}$ 是弦图。

引理 10.3。令$H_{n,\ p}$ 为构造 *10.1*得到的图。那么$H_{n,\ p}$ 的独立支配数为

$$i(H_{n,p}) = p.$$

证明。设

$$D := \{c\} \cup \{y_1, \ldots, y_{p-2}\} \cup \{z\}.$$

此集合是独立集，因为每个 y_ℓ 仅与 v_1相邻， z 仅与 v_2相邻，而 c 仅与 v_1、 v_2、 u_j、 x_i相邻。它是支配集，因为 c 支配 v_1、 v_2、 u_1、……、 u_{p-1}、……、 x_k，每个 y_ℓ 支配 v_1，且 z 支配 v_2。因此 $i(H_{n,\ p}) \leq |D| = p$。

For 为证明反向不等式，任取一个独立支配集 D'。考虑两种情况 s.

情况 1：假设 $c \in D'$。那么 $v_1, v_2 \notin D'$。每个 y_ℓ都必须被支配，但 $N(y_\ell) = \{v_1\}$。因此， $y_\ell \in D'$ 对所有 ℓ都成立。同理， $N(z) = \{v_2\}$ 迫使 $z \in D'$。于是 $|D'| \geq 1 + (p-2) + 1 = p$。

情况 2：假设 $c \notin D'$。每个 u_j 都有 $N(u_j) = \{c\}$。因此，对所有 j，都有 $u_j \in D'$，从而得到 $|D'| \geq p-1$。此外，叶子 z 迫使 $z \in D'$ 或 $v_2 \in D'$。最后，由于对于任意 j，都有 $v_1 \notin N[u_j]$，顶点 $y_1, \ldots, y_{p-2}$必须通过纳入 v_1或纳入所有 y_ℓ来得到支配。在这两种子情况中，我们都要在 $p-1$ 个叶子 u_j之外至少再加入一个顶点，而且还需要z或 v_2。因此，在这种情况下， $|D'| \geq (p-1) + 2 = p+1$。

因此，每个独立支配集的大小至少为 p。所以， $i(H_{n,\ p}) = p$。 □

引理 10.4. 令$H_{n,\ p}$ 为构造 *10.1*所得的图。那么，我们有

$$M(H_{n,p}) = p.$$

证明。记为 $U = \{u_1, \ldots, u_{p-1}\}$、 $Y = \{y_1, \ldots, y_{p-2}\}$ 和 $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$。我们根据独立集与 $\{c, v_1, v_2\}$ 的交集进行计数。

(i) 包含 c 的独立集。若 $c \in S$，则 S 不能包含 v_1、 v_2、任意 u_j 或任意 x_i。此时，$Y \cup \{z\}$ 中的顶点不受限制。这对独立多项式的贡献如下：

$$x(1+x)^{|Y|}(1+x) = x(1+x)^{p-1}.$$

(ii) 包含 v_1 但不包含 c 的独立集。若 $v_1 \in S$ 和 $c \notin S$，则不允许选择 $Y \cup X$，而 U 不受限制。此外，可以选择或不选择 v_2 （它与 v_1 不相邻）。若 $v_2 \notin S$，则 z 不受限制；若 $v_2 \in S$，则不允许选择 z。因此，贡献为

$$x(1+x)^{p-1}(1+x) \;+\; x^2(1+x)^{p-1} = x(1+x)^p + x^2(1+x)^{p-1}.$$

(iii) 包含 v_2，但既不包含 c 也不包含 v_1 的独立集。若 $v_2 \in S$ 且 $c, v_1 \notin S$，则 z 不允许出现，而 U、Y 和 X 均可自由选择。因此这部分贡献为

$$x(1+x)^{|U|+|Y|+|X|} = x(1+x)^{(p-1)+(p-2)+k} = x(1+x)^{2p+k-3}.$$

(iv) 不包含任何 $\{c, v_1, v_2\}$ 的独立集。此时 U、Y、X 和 z 均可自由选择，贡献为

$$(1+x)^{|U|+|Y|+|X|+1} = (1+x)^{2p+k-2}.$$

将 (i)–(iv) 相加可得

$$P_{H_{n,p}}(x) = (1+x)^p \underbrace{\left(2x + x(1+x)^{p+k-3} + (1+x)^{p+k-2}\right)}_{Q(x)}.$$

注意，若 $p+k-3 \geq 1$ （即 $p \geq 4$ 或 $k \geq 1$），则 $Q(-1) = -2$；而在其余情形 $(p,k) = (3,0)$ 下，$Q(-1) = -3$。在所有情形下，$Q(-1) \neq 0$。因此，$M(H_{n,p}) = p$。□

注 10.5。情形 $p = 2$ 也可以用同样的构造处理，但需要 $k \geq 1$ （等价地，$n \geq 6$）。在这种情况下，同样的分类计数论证表明，$i(H_{n,\,2}) = M(H_{n,\,2}) = 2$，且 $(\mathrm{reg}, \deg h) = (n-3, n-4)$。

因此，$H_{n,\,p}$ 实现了直线 $d = r - 1$ （位于对角线下方一步）。

推论 10.6。固定一个整数 $n \geq 6$。对每个整数 $2 \leq p \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$，令 $H_{n,\,p}$ 为构造 *10.1*中的图。那么

$$\big(\mathrm{reg}(R/J(H_{n,p})),\ \deg h_{R/J(H_{n,p})}(t)\big) = \big(n-p-1,\ n-p-2\big).$$

*I*特别地，对于固定的 n，这些点位于直线 $\deg h = \mathrm{reg} - 1$ 上，并构成集合

$$\left\{(r, r-1) : \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq r \leq n-3 \right\}.$$

证明。由引理 10.3 和10.4，对于所述范围内的所有 p，有 $i(H_{n,\,p}) = M(H_{n,\,p}) = p$。对于弦图，

$$\mathrm{reg}(R/J(G)) = n - i(G) - 1 \qquad \text{and} \qquad \deg h_{R/J(G)}(t) = n - 2 - M(G).$$

代入 $i(H_{n,\,p}) = M(H_{n,\,p}) = p$，得

$$\mathrm{reg}(R/J(H_{n,p})) = n-p-1, \qquad \deg h_{R/J(H_{n,p})}(t) = n-p-2,$$

因此 $\deg h = \mathrm{reg} - 1$。

最后，令 $r := n-p-1$，当 p 遍历 $2 \leq p \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ 时，我们得到

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1 \leq r \leq n-3.$$

因此，实现的数对恰好为 $\{(r, r-1) : \lfloor n/2 \rfloor \leq r \leq n-3\}$。 □

如下文讨论/示例所示，该构造补充了上一节的内容，向填补对角线下方的所有点迈进了一步。

例10.7。 注意，对于 $n = 9$，该构造覆盖所有（r， $r-1$），其中 $4 \le r \le 6$，这对应于对角线下方这条线上迄今为止我们尚未能覆盖的所有（reg，$\deg h$）数对（见图 3）。注意，当 $r = n - 2$时，我们有一个构造来覆盖（reg，$\deg h$）数对。

11. Block graphs lie on or above the line $\deg h = \operatorname{reg} - 1$

本节将证明，对于覆盖理想，块图在（reg, deg h）平面上受到严格限制：若 G 是一个连通块图，并令

$$r := \operatorname{reg}(R/J(G)) \qquad \text{and} \qquad d := \deg h_{R/J(G)}(t),$$

则必有 $d \ge r - 1$。等价地说，块图不能在直线 $d = r - 1$ 严格下方贡献点。由于块图是弦图，因此有 $\operatorname{reg}(R/J(G)) = n - i(G) - 1$，而

$$\deg h_{R/J(G)}(t) = n - 2 - M(G).$$

因此，不等式 $d \ge r - 1$ 恰好表述了 $M(G) \le i(G)$。我们利用块图的团树结构来证明这一点：移除一个叶极大团，可得到独立多项式的递推关系；再将所得的 $x = -1$ 处阶数与独立支配数的平行递推关系进行比较，便可按极大团的数量归纳得到 $M(G) \le i(G)$。

定义11.1。若图 G 的每个双连通分量（块） G 都是一个团，则称 G 为块图。等价地， G 是弦图，且任意两个不同的极大团至多相交于一个顶点。

定义11.2. 设 G 是一个弦图。 G 的团树是一个树 T，其顶点为 G 的极大团，并且对每个顶点 $v \in V(G)$，包含 v 的极大团所构成的集合是 T的一个连通子树。

若 G 是一个连通块图，则 G 存在团树 T。此外，若两个极大团 K 和 K' 在 T中相邻，则 $K \cap K'$ 仅由一个顶点 s组成，且该顶点是 G的割点，即 $G \setminus \{s\}$ 不连通。对应于 T的叶子的极大团称为叶极大团。

记号11.3. 设 G 是一个非团的连通块图，并固定G的一棵团树。设 K 是一个叶极大团，且 K' 是它在团树中的唯一邻点。令

$$s := K \cap K', \qquad C := K \setminus \{s\}, \qquad r := |C| \ge 1,$$

并定义诱导子图

$$H := G \setminus K, \qquad L := G \setminus N_G[s].$$

以下叶团递归用于定理11.5的证明。

引理 11.4. 设 G 是一个连通块图，并采用记号 *11.3*。则

$$P_G(x) = (1 + rx)P_H(x) + xP_L(x).$$

证明。我们根据独立集与 K 的交集情况，将 G 的独立集划分为三个互不相交的类。

(1) 不包含 K 的独立集。这些恰好是诱导子图 $H = G \setminus K$ 的独立集，贡献为 $P_H(x)$。

(2) 包含 C 的独立集。由于 K 是一个团，独立集至多包含 K 中的一个顶点。因此，它至多包含一个 C，且不能包含 s。此外，由于 K 是团树中的一个叶子，每个顶点 $v \in C$ 只属于 K 这一个极大团。特别地，v 在 K 之外没有邻点。因此，选定 $v \in C$ 后，独立集的其余部分可以是 H 的任意独立集。因此，这一类的贡献为

$$\sum_{v \in C} xP_H(x) \;=\; rxP_H(x).$$

(3) 包含 s 的独立集。若一个独立集包含 s，则它不包含 $N_G[s]$，其余顶点构成 $L = G \setminus N_G[s]$ 的一个独立集。这一部分贡献为$xP_L(x)$。

将 (1)–(3) 中的贡献相加，得到

$$P_G(x) \;=\; P_H(x) \;+\; rxP_H(x) \;+\; xP_L(x) \;=\; (1+rx)P_H(x) + xP_L(x),$$

如所声称的。 □

现在我们来陈述本节的主要结果。

定理 11.5. 设 G 是一个连通块图。则

$$M(G) \;\le\; i(G).$$

因此，

$$\operatorname{reg}(R/J(G)) - \deg h_{R/J(G)}(t) = M(G) - i(G) + 1 \le 1.$$

证明。我们对 G 的极大团数量进行归纳。

若 G 是一个团，则 $P_G(x) = 1 + |V(G)|x$。因此 $M(G) = 0$，而 $i(G) = 1$。故 $M(G) \le i(G)$。

现在假设 G 不是一个团。固定团树中一个叶极大团 K，如记号11.3 所示，其中 K' 是它唯一的邻点，并且

$$s := K \cap K', \qquad C := K \setminus \{s\}, \qquad r := |C| \ge 1,$$

以及诱导子图

$$H := G \setminus K, \qquad L := G \setminus N_G[s].$$

由于 K 是一个团，任意独立支配集 D 与 K 至多相交于一个顶点。此外，D 必须支配 C 的每个顶点，而能够支配 C 的顶点只能位于 K 中。因此，D 包含以下之一：(a) 一个顶点 $v \in C$，或 (b) 割点 s。

若选取 $v \in C$，则 v 在 K 之外没有邻点。因此 $D \setminus \{v\}$ 是 H 的一个独立支配集。故 $|D| \ge 1 + i(H)$。若选取 s，则 $N_G[s]$ 中没有顶点可以属于 D，且 $D \setminus \{s\}$ 是 L 的一个独立支配集。故 $|D| \ge 1 + i(L)$。反过来，选取任意一个$v \in C$，再与 H 的一个独立支配集结合，即可得到 G 的一个独立支配集。同理，选取 s，再与 L 的一个独立支配集结合，也可得到一个。因此

$$i(G) = 1 + \min\{i(H), i(L)\}. \tag{10}$$

设 $u := x+1$ 且 $Q_F(u) := P_F(u-1)$，因此 $M(F) =$阶$_{u=0}\, Q_F(u)$。引理11.4 中的叶团递归给出

$$P_G(x) = (1+rx)P_H(x) + xP_L(x),$$

代入 $x = u - 1$ 后得到

$$Q_G(u) = \big(ru - (r-1)\big)Q_H(u) + (u-1)Q_L(u). \tag{11}$$

设 $m:=$最小值$\{M(H)\ M(L)\}$。记 $Q_H(u) = u^m h(u)$ 和 $Q_L(u) = u^m \ell(u)$，其中 h，$\ell \in \Bbbk[u]$。则 (11) 变为

$$Q_G(u) = u^m \Big(A(u) + uB(u) \Big),$$

其中 $A(u) = -(r-1)h(u) - \ell(u)$，且 $B(u) = rh(u) + \ell(u)$。因此

$$M(G) = m + \operatorname{ord}_{u=0}\big(A(u) + uB(u)\big).$$

若 $A(0) \neq 0$，则 $\operatorname{ord}_{u=0}(A+uB) = 0$，所以 $M(G) = m$。若 $A(0) = 0$，则 $\ell(0) = -(r-1)h(0)$，因此

$$B(0) = rh(0) + \ell(0) = rh(0) - (r-1)h(0) = h(0) \neq 0.$$

事实上，若 $h(0) = 0$，则 $\ell(0) = 0$ 也成立。因此，$Q_H(u) = u^m h(u)$ 和 $Q_L(u) = u^m \ell(u)$ 都能被 u^{m+1} 整除，这意味着 $M(H)\ M(L) \geq m+1$，与 $m = \min\{M(H)\ M(L)\}$ 矛盾。因此，在这种情况下，$\operatorname{ord}_{u=0}(A(u) + uB(u)) = 1$。因此，

$$M(G) \leq m+1 = 1 + \min\{M(H), M(L)\}. \tag{12}$$

根据归纳假设（若 H 或 L 不连通，则逐个分支应用），我们有$M(H) \leq i(H)$ 和 $M(L) \leq i(L)$。结合（10）和（12），

$$M(G) \leq 1 + \min\{M(H), M(L)\} \leq 1 + \min\{i(H), i(L)\} = i(G),$$

这就证明了第一个断言。

因此

$$\operatorname{reg}(R/J(G)) - \deg h_{R/J(G)}(t) = M(G) - i(G) + 1 \leq 1. \qquad \square$$

12. Possible（reg, deg h）-pairs and conjectural bounds

固定一个整数 $n \geq 2$，令 G 遍历具有 n 个顶点的连通图。本节中，我们给出 $\operatorname{reg}(R/J(G))$ 和 $\deg h_{R/J(G)}$ 的界。我们的总体目标是描述所有可能出现的数对集合

$$\Big(\operatorname{reg}(R/J(G)),\ \deg h_{R/J(G)}(t) \Big)$$

。

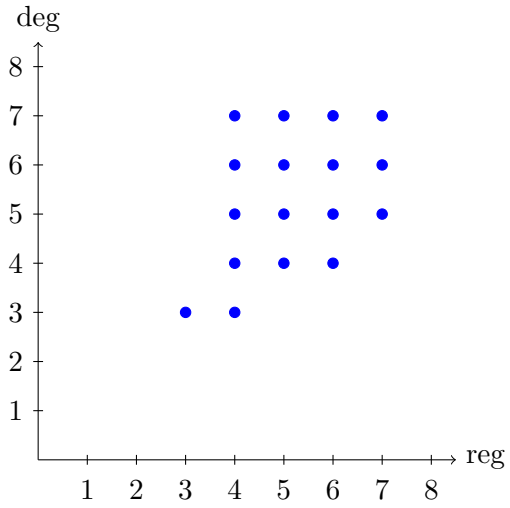

Figure 6. 具有 $n = 9$ 个顶点的连通图的所有可能 (reg, deg h) 值。

注记 12.1。设 G 是一个具有 n 个顶点的有限简单图。那么根据引理 $h_{R/J(G)}(t) \leq n-2$，有 3.5。此外，$\operatorname{reg}(R/J(G)) = \operatorname{pdim}(R/I(G)) - 1$，且 $\operatorname{pdim}(R/I(G)) \leq n-1$。因此，$\operatorname{reg}(R/J(G)) \leq n-2$。请注意，这两个界都是紧的。

为了关联 $\deg h_{R/J(G)}(t)$ 与组合数据之间的联系，回顾定理 3.8 和定理 4.4 。 t

$$M(G) = (n-2) - \deg h_{R/J(G)}(t) = \alpha(G) - \deg h_{R/I(G)}(t). \tag{13}$$

在下文中，我们记录一个方便的区域，其中 $\deg\ h_{R/J(G)}(t)$ 与 $\mathrm{reg}(R/J(G))$ 都必须相对较大。

推论 12.2. 若 $\alpha(G) \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$，则

(a) $\deg h_{R/J(G)}(t) \ \ge\ \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$,

(b) $\mathrm{reg}(R/J(G)) \ \ge\ \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$.

证明。 （a）由引理 4.3，我们有

$$M(G) \ \le\ \alpha(G) - 1 \ \le\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

利用 $M(G) = (n-2) - \deg\ h_{R/J(G)}(t)$ 由（13）可得

$$\deg h_{R/J(G)}(t) = n - 2 - M(G) \ \ge\ n - 2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2.$$

（b）关于正则性界，注意 $\mathrm{reg}(R/J(G)) = \mathrm{pdim}(R/I(G)) - 1$。标准下界（见 [19, 推论 3.33]）给出

$$\mathrm{pdim}(R/I(G)) \ \ge\ \mathrm{bight} I(G),$$

其中，$\mathrm{bight} I(G)$ 是极小顶点覆盖的最大大小。特别地，$\mathrm{bight} I(G) \ge \tau(G)$，其中 $\tau(G)$ 是顶点覆盖的最小大小。由于 $\tau(G) = n - \alpha(G)$，我们得到

$$\mathrm{pdim}(R/I(G)) \ \ge\ n - \alpha(G) \ \ge\ n - \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1,$$

因此，$\mathrm{reg}(R/J(G)) = \mathrm{pdim}(R/I(G)) - 1 \ge \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$。 □

推论 $\alpha(G) \le \lfloor n/2 \rfloor + 1$ 中的假设 12.2 不可省略：当 $\alpha(G)$ 很大时， $M(G)$ 和 $\mathrm{pdim}(R/I(G))$ 的表现都可能大不相同。下面这一族图（第 8 节中分裂图的一个特例）是方便的例子来源。

注 12.3. 固定整数 $p \ge 2$ 和 $q \ge 1$。令 $H_{p,q}$ 为由一个团 K_p 构成的图，其顶点为 $x_1,\ldots,x_p$，并在每个顶点上附加 q 个悬挂叶 x_i 得到。则 $H_{p,q}$ 是连通弦图（事实上是分裂图），有 $n = p(q+1)$ 个顶点。由命题 8.6 和推论 8.7(或者，由定理 7.1)，我们有

$$M(H_{p,q}) = (p-1)q \qquad \text{and} \qquad \deg h_{R/J(H_{p,q})}(t) = p + q - 2$$

此外，可以验证 $i(H_{p,\ q}) = 1 + (p-1)q$，因此

$$\mathrm{pdim}(R/I(H_{p,q})) = n - i(H_{p,q}) = p + q - 1.$$

因此，

$$\left(\mathrm{reg}(R/J(H_{p,q})),\ \deg h_{R/J(H_{p,q})}(t) \right) = (p+q-2,\ p+q-2).$$

特别是， $M(H_{p,\ q})$ 在 $\lfloor n/2 \rfloor$ 当 p 足够大时可以超过，说明推论 12.2 的结论确实依赖于关于 $\alpha(G)$ 的假设。

例如，取 $(p,q) = (4,4)$. 那么 $n = 20$ 且 $\alpha(H_{4,4}) = 16 > \lfloor n/2 \rfloor + 1 = 11$。这里 $\mathrm{pdim}(R/I(H_{4,4})) = p + q - 1 = 7 < \lceil n/2 \rceil - 1 = 9$，因此推论 12.2 中关于 $\mathrm{reg}(R/I(G))$ 的下界在不对 $\alpha(G)$ 作出假设时并不成立。

我们使用 Macaulay2 计算了至多 h 个顶点的连通图的所有可能的 (reg,deg $n = 12$(参见图 6 中的 $n = 9$)。这些计算表明，实现点位于对角线附近的一条带状区域内，由此引出以下猜想。

猜想12.4。设 G 是一个具有 n个顶点的连通图。则

$$\left|\operatorname{reg}(R/J(G)) - \deg h_{R/J(G)}(t)\right| \;\leq\; \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2.$$

并非每一对$(r, d) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ 都会作为

$$\big(\operatorname{reg}(R/J(G)),\ \deg h_{R/J(G)}(t)\big)$$

对于连通图 G出现。我们记录一个简单的障碍。

引理12.5。不存在连通图 G 使得

$$\big(\operatorname{reg}(R/J(G)),\ \deg h_{R/J(G)}(t)\big) = (1, d)$$

其中 $d \geq 2$。

证明。设 G 是一个具有 n 个顶点的连通图。则我们有

$$1 = \operatorname{reg}(R/J(G)) = \operatorname{pdim}(R/I(G)) - 1 \implies \operatorname{pdim}(R/I(G)) = 2.$$

利用命题 4.7] 中的以下下界 [7,

$$\operatorname{pdim}(R/I(G)) \;\geq\; n - i(G),$$

我们得到 $i(G) \geq n - 2$。

设 $\Delta(G)$ 为图 G 的最大顶点度，并取一个满足 $\deg(v) = \Delta(G)$ 的顶点 v。任何包含 v 的极大独立集至多可以包含 $N(v)$ 之外的顶点，因此其大小至多为 $n - \Delta(G)$。因此 $i(G) \leq n - \Delta(G)$，进而 $\Delta(G) \leq 2$。由于 G 连通，可知 G 是一条路径 P_n 或一个圈 C_n。

最后，由于 $i(G) \leq \alpha(G)$，公式 $\alpha(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ 和 $\alpha(P_n) = \lceil n/2 \rceil$ 在圈的情形下给出 $n \leq 4$，在路径的情形下给出 $n \leq 5$。直接检查这些可能的图可知，满足 $\operatorname{reg}(R/J(G)) = 1$ 的连通图只有 C_3、P_3 和 P_4，且在每种情形下，$\deg h_{R/J(G)}(t) = 1$。因此，没有连通图能在 $d \geq 2$ 的条件下实现 $(1, d)$。□

更广泛地说，我们的计算结果表明，不可实现对 (r, d) 受到简单线性不等式的约束。

猜想12.6. 如果 $r \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ 或 $d \geq \left\lfloor \frac{2r-1}{3} \right\rfloor$ 成立，那么不存在连通图 G 使得

$$\big(\operatorname{reg}(R/J(G)),\ \deg h_{R/J(G)}(t)\big) = (r, d).$$

13. Conclusion and Future Directions

A re本文始终致力于理解：对于固定的 n，哪些数对

$$\big(\operatorname{reg}(R/J(G)),\ \deg h_{R/J(G)}(t)\big)$$

可以由具有 n 个顶点的连通图得到，并确定哪些图族占据了可行区域的较大部分。第 5 节和 8 至11 节的结果，以及第 12 节的计算数据表明，令人惊讶的是，少数几个结构化类别就已能涵盖大多数观测到的数对。

特别是，半径至多为二的树似乎能够实现对角线 $\deg h = \operatorname{reg}$ 及其上方的大多数数对，而我们的弦图构造则提供了对角线下方的系统性数族。这引出了以下问题。

问题2。固定 n。是否存在一些显式图类（例如半径为2的图和/或弦图），使其成员能够实现每一对

$$\big(\mathrm{reg}(R/J(G)),\ \deg h_{R/J(G)}(t)\big)$$

在具有 n 个顶点的连通图中出现的情况?

我们希望，不变量 $M(G)$ 及其递归关系和在图操作下的性质，能为进一步研究这些可实现性问题提供一个有用的框架。

致谢。 作者感谢 T`ai HuyH`a 鼓励他们将覆盖理想作为对[2]的后续研究方向。S. Kara 获得了美国国家科学基金会资助项目 DMS-2418805 的支持。相关计算在科尔盖特超级计算机上完成，该计算机部分由美国国家科学基金会资助项目 OAC-2346664 提供支持。

References

[1] F. Bencs. 关于具有实根独立多项式的树. 《离散数学》, 341(12):3321–3330, 2018.[2] J. Biermann, S. Kara, A. O'Keefe, J. Skelton, and G. Sosa Castillo. 边理想的 h-多项式的次数. 《代数组合学杂志》, 62(1):论文编号 2, 26, 2025.[3] J. I. Brown, K. Dilcher, and R. J. Nowakowski. 良覆盖图的独立多项式的根. 《代数组合学杂志》, 11(3):197–210, 2000.[4] J. I. Brown, C. A. Hickman, and R. J. Nowakowski. 关于独立多项式的根的位置. 《代数组合学杂志》, 19(3):273–282, 2004.[5] M. Chudnovsky and P. Seymour. 无爪图的独立多项式的根. 《组合理论杂志B辑》, 97(3):350–357, 2007.[6] J. Cutler and N. Kahl. 关于独立多项式在 -1处取值的注记. 《离散数学》, 339(11):2723–2726, 2016.[7] H. Dao and J. Schweig. 投射维数、图支配参数与独立复形同调. 《组合理论杂志A辑》, 120(2):453–469, 2013.[8] G. Favacchio, G. Keiper, and A. Van Tuyl. 图的环面理想的正则性与 h-多项式. 《美国数学会会刊》, 148(11):4665–4677, 2020.[9] S. Foldes and P. L. Hammer. 分裂图. 载于第八届东南组合学、图论与计算会议论文集（路易斯安那州立大学，巴吞鲁日，路易斯安那州，1977），《数值大会论文集》第XIX卷，第311–315页. 《数学实用》，温尼伯，MB，1977.[10] J. Herzog and T. Hibi. 单项式理想，数学研究生教材第260卷. Springer- Verlag London, Ltd.，伦敦，2011.[11] T. Hibi. 凸多面体上的代数组合学. Carslaw Publications，格里布，1992.[12] T. Hibi, K. Kimura, K. Matsuda, and A. Van Tuyl. Cameron-Walker图的正则性与 h-多项式. 《枚举组合及其应用》, 2(3):论文编号 S2R17, 12, 2022.[13]T. Hibi and K. Matsuda. 单项式理想的正则性与 h-多项式. 《数学新闻》, 291(16):2427–2434, 2018.[14] T. Hibi and K. Matsuda. 二项式边理想的正则性与 h- 多项式 . Acta Math. Viet- nam., 47(1):369–374, 2022.[15] T. Hibi, K. Matsuda, and A. Van Tuyl. 边理想的正则性与 h-多项式. 《组合学电子杂志》, 26(1):论文编号 1.22, 11, 2019.[16] S. Jacques and M. Katzman. 森林的Betti 数. arXiv预印本 math/0501226, 2005.[17] V. E. Levit and E. Mandrescu. 关于几乎所有极良覆盖图的独立多项式的根. 《离散应用数学》, 156(4):478–491, 2008.

[18] E. N. Miller. 单项式理想的自由分解与对偶性. ProQuest LLC，安娜堡，MI，2000. 博士论文–加州大学伯克利分校.[19] S. Morey and R. H. Villarreal. 边理想：代数与组合性质. 载于交换代数进展1，第85–126页. 德古意特出版社，柏林，2012.[20] H. Peters and G. Regts. 关于独立多项式之根的Sokal猜想.《密歇根数学杂志》，68(1):33–55, 2019.[21] N. Terai. Stanley-Reisner环中的Alexander 对偶性. 载于仿射代数几何，第449–462页. 大阪大学出版社，大阪，2007. (J. Biermann)

Department of Mathematics and Computer Science Hobart and William Smith Colleges 300 Pulteney St. Geneva NY 14456 USA

,,,

Email address: biermann@hws.edu

（T. Chau） Chennai Mathematical Institute、 Siruseri、 Kelambakkam、 Tamil Nadu 603103、 India
Email address: chauchitrung1996@gmail.com

（S. Kara） Department of Mathematics、 Bryn Mawr College、 Bryn Mawr、 PA 19010
Email address: skara@brynmawr.edu

（A. O'Keefe） Department of Mathematics and Statistics、 Connecticut College、
270 Mohegan AvenuePkwy、 New London、 CT 06320、 USA
Email address: aokeefe@conncoll.edu

(J. Skelton) Department of Mathematics, William & Mary, Jones Hall, Williamsburg, VA 23185,USA

Email address: jwskelton@wm.edu

（G. Sosa Castillo） Department of Mathematics, Colgate University, Hamilton, NY, 13346, USA
Email address: gsosacastillo@colgate.edu

（D. Vien） Department of Mathematics, Bryn Mawr College, Bryn Mawr,
PA 19010*Email address*: dvien@brynmawr.edu