arXiv:2602.10393v1 [math.DG] 11 Feb 2026

非负里奇曲率流形上的积分与刚性

ZIXUAN CHEN、GUOYI XU、SHUAI ZHANG

摘要。我们证明了非负上调和函数的一般尖锐平均值不等式及其相应的刚性，从而消除了 Schoen-Yau 关于该不等式的经典结果中的半径限制。我们还在具有非负里奇曲率和最大体积增长的三维完备黎曼流形上，得到了加权标量曲率的渐近尺度不变积分的显式公式。作为应用，我们利用该公式给出了 Hamilton 的夹逼猜想在此情形下的另一种证明。

数学主题分类：35K15，53C20。

目录

1. 引言.1 第一部分。调和函数的积分.6 2. 平均值公式.6 3. 测地球的散度定理.9 4. 尖锐平均值不等式.13 第二部分。曲率积分.17 5. 加权体积及其渐近行为.20 6. 标量曲率积分公式.26 参考文献.31

1. 引言

黎曼流形上的曲率、拓扑与分析之间的相互作用，是几何分析的核心主题。一个尤为丰富的研究方向探讨非负里奇曲率如何支配椭圆型和抛物型偏微分方程解的行为；反过来，这些解的性质又如何揭示底层空间深刻的几何与拓扑信息。

这一相互作用中的两种基本工具是调和函数的平均值公式和次调和函数的平均值不等式，

日期：2026年2月12日。徐刚部分受到 NSFC12141103 资助。

它们通过平均值提供逐点控制，并且与底层几何密切相关。

经典平均值公式刻画了欧氏空间上的调和函数。我们不能期望平均值公式对黎曼流形上的一般调和函数成立。相反，引入适当的权函数 $b(x) = G(q,x)^{1/(2-n)}$（其中 $G(q,x)$ 是最小正格林函数），将其作为距离函数的“解析”替代物后，我们可以证明类似的加权平均值公式成立。

在一般黎曼流形上，次调和函数通常满足平均值不等式，但最优常数以及等号成立时的几何含义仍是微妙的问题。舍恩-丘的一项经典结果（[SY10，命题 2.1，第 1] 章）为非负里奇曲率流形上的非负上调和函数建立了尖锐平均值不等式。然而，他们的结果要求测地球的半径小于其中心处的单射半径。

本论文的一个结果是如下不带半径限制的尖锐平均值不等式。

定理 1.1（尖锐平均值不等式与刚性）。设 (M^n,g) 为具有 $\mathrm{Ric} \geq 0$ 的完备黎曼流形。假设 $f \in C^\infty(M^n)-\{0\}$ 满足 $f \geq 0$ 且 $\Delta \leq 0$。则

$$f(x) \geq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_x(r)} f \, d\sigma, \qquad \forall x \in M^n, r > 0.$$

此外，若对某个 x 与 $r > 0$ 等式成立，则测地球 $B_x(r)$ 与欧氏球 $B^n(r) \subseteq \mathbb{R}^n$ 等距。

注记 1.2. 该结果通过去掉单射半径约束，推广了经典的舍恩-丘不等式。我们的方法考虑上调和函数经由指数映射的拉回，并为测地球建立广义散度定理（引理 *3.4*）。该引理处理切空间上的拉回函数，具有独立意义，并可能在今后的研究中有其他应用。

另一个新工具是引理 *4.2* 中引入的量 $F(t)$，当半径小于单射半径时，它与舍恩-丘研究的量一致。关键观察是，对于所有 $t > 0$，$F(t)$ 都是非递增的。我们不去证明 F 的上导数非正，而是直接估计差值 $F(t) - F(t - s)$。该论证运用嵌套区间论证和广义散度定理，导出矛盾，从而说明 F 不可能递增。相应的刚性定理断言，平均值不等式取等意味着测地球是欧几里得的；这一几何结论凸显了常数的锐性。

与上述单调性论证相类似，几何分析中的另一个主题是运用单调性来理解具有非负里奇曲率的完备非紧流形的渐近结构。Colding [Col12] 和 Colding-Minicozzi [CMI14, CM97] 为调和函数发展了强有力的单调性公式

这些公式对于分析格林函数和渐近体积比 V_M至关重要。这些工具将 V_M 这类粗几何不变量与标量曲率积分联系起来。

曲率积分的研究始于著名的高斯-博内定理：对于任意紧致二维黎曼流形（M^2, g），

$$\int_{M^2} K d\mu = 2\pi\chi(M^2),$$

其中，K 是M的高斯曲率，^{2}, $d\mu$ 是M的面积元，^{2}, $\chi(M^2)$ 是M的欧拉示性数。科恩-福森 [CV35] 研究了完备二维黎曼流形上的曲率积分，并得到了所谓的科恩-福森不等式：若（M^2,g）是有限连通、完备且定向的黎曼流形，并假设 $\int_{M^2} K d\mu$ 存在且为扩展实数，则$\int_{M^2} K d\mu \leq 2\pi\chi(M^2)$。关于二维黎曼流形的相关研究，另见 [Hub57] 和 [Har64] 。

为得到科恩-福森不等式的一个推广，丘成桐 [Yau92，问题 9]提出了如下问题：

问题 1.3 （丘成桐）。 对任意满足 $Rc \geq 0$ 的完备黎曼流形(M^n,g)，以及任意 $p \in M^n$，是否成立$\lim_{r\to\infty} r^{2-n} \int_{B_r(p)} R < \infty$？

关于这一问题已有若干进展，参见 [Xu20a], [Zhu22b], [Zhu22a],[Xu24] 和 [MW25]。我们给出如下例子，用以说明整个黎曼流形的完备性对丘成桐猜想至关重要。

例 1.4. 我们考虑二维黎曼流形的序列(M^2,g_i) 及点 p_i，使得测地球 $B_{p_i}(1)$ 具有截面曲率 $K \geq 0$，并且

$$\lim_{i\to\infty} \int_{B_{p_i}(1)} R dV = \infty,$$

其中 $R = 2K$ 为标量曲率。

以 p_i 为中心使用测地极坐标，度量可写为：

$$ds^2 = dr^2 + f_i(r)^2 d\theta^2, \qquad f_i(r) = r - \int_0^r \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2 + 1/i^2}} \mathrm{d}t.$$

其中 $f_i(0) = 0$，$f_i'(0) = 1$，且所有偶数阶导数在 $r = 0$ 处均为零，以确保光滑性。

直接计算可得：

$$\int_{B_{p_i}(1)} R dV = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 K f_i(r) dr d\theta = 4\pi \int_0^1 (-f_i''(r)) dr = 4\pi(1 - f_i'(1)) \to \infty.$$

我们的第二组结果涉及具有非负里奇曲率和最大体积增长（$\mathrm{V}_M > 0$）的三维流形的渐近积分几何。通过分析函数 $b(x)$ 及其等值集的渐近性质，我们在定理 1.5 中建立了一个关于加权标量曲率的显式尺度不变积分公式。

定理 1.5. 对于具有 $Rc \geq 0$ 且具有最大体积增长的完备非紧黎曼流形 M^3，存在

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\int_{b\leq r} R\cdot|\nabla b|}{r} = 8\pi[1-\mathrm{V}_M],, \tag{1.1}$$

其中 R 为标量曲率。

注 1.6。在 [Xu20a], 中证明了：对于一个满足 $Rc \geq 0$的非抛物型完备非紧黎曼流形 M^3,，我们有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b\leq r} R\cdot|\nabla b|}{r} \leq 8\pi[1-\mathrm{V}_M]. \tag{1.2}$$

在最大体积增长情形下，定理 *1.5* 可视为对 *(1.2)* 的精化。

恒等式 *(1.1)* 精确地定量刻画了几何偏离欧几里得标准的程度，并将渐近标量曲率分布直接与渐近体积比联系起来。

从直观角度解释 (1.1) 为何成立是很有启发性的。考虑一个具有 Ric ≥ 0 且体积增长达到最大的完备非紧三维流形（M^3,g）（$\mathrm{V}_M > 0$）。根据 Cheeger–Colding 理论 [CC96],，将度量按 r^{-2}缩放后，带基点序列 (M,r^{-2} g,q) 在带基点的 Gromov–Hausdorff 意义下收敛到一个度量锥$C(X)$，其中 X 是一个紧致度量空间（可能带有奇点）。

若收敛在顶点之外是光滑的，则X 是一个截面曲率为$K_X \geq 1$ 的光滑曲面，且锥度量满足

$$g_{C(X)} = dr^2 + r^2 g_X, \quad R_{C(X)} = \frac{2(K_X-1)}{r^2}, \qquad r>0.$$

注意，我们有

$$\mathrm{V}_M = \mathrm{V}_{C(X)} = \lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Vol}(B(t))}{\omega_3 t^3} = \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t dr\int_X r^2}{\omega_3 t^3} = \frac{\mathrm{Vol}(X)}{4\pi}, \tag{1.3}$$

其中$B(t)$是$C(X)$中的球

利用 Gauss–Bonnet 定理和（1.3），我们得到

$$\begin{aligned}\int_{B(1)} R\,dV &= \int_0^1 dr\int_X \frac{2(K_X-1)}{r^2}\,r^2 = 2\left([\int_X K_X] - \mathrm{Vol}(X)\right)\\ &= 8\pi\,(1-\mathrm{V}_M).\end{aligned} \tag{1.4}$$

由 [CC96], 对于具有$Rc \geq 0$ 和最大体积增长的$B_q(r) \subseteq (M^3,g)$，我们知道（$B_q(1)$, r^{-2} g）在 Gromov-Hausdorff 意义下收敛到（$B(1)$,$g_{C(X)}$）（尽管X 可能不唯一，但$V_{C(X)} = V_{M^3}$）。

注意到

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int_{B_q(r)} R(g)dg}{r} = \lim_{r\to\infty}\int_{(B_q(1),r^{-2}g)} R(r^{-2}g)d(r^{-2}g).$$

尽管这并不严谨，但从（$B_q(1), r^{-2}g$）到（$B(1), g^{C(X)}$）的 Gromov-Hausdorff 收敛出发，合理地预期下述结论成立：

$$\lim_{r\to\infty}\int_{(B_q(1),r^{-2}g)} R(r^{-2}g)d(r^{-2}g) = \int_{(B(1),g_{C(X)})} R(C(X))d(g_{C(X)}). \tag{1.5}$$

若（1.5）成立，则由（1.4）可得

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int_{B_q(r)} R(g)dg}{r} = 8\pi(1-\mathrm{V}_{M^3}).$$

基于以上讨论，我们提出如下猜想。

猜想 1.7. 对于一个完备非紧黎曼流形 M^3，其 $Rc \geq 0$ 且具有最大体积增长，有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int_{B_q(r)} R}{r} = 8\pi[1-\mathrm{V}_M]. \tag{1.6}$$

注 1.8。 猜想 *1.7* 已由 [Xu24]对带极点流形证明。此外，定理 *1.5* 可视为猜想 *1.7* 的一个姊妹版本

Hamilton 提出了以下猜想:

猜想 1.9。 若(M^3, g) 是一个完备、非紧的黎曼流形，且 *Ricci* 曲率受夹，则(M^3, g) 是平坦的。

在附加假设下，该猜想已由 [CZ00] 和[Lot24]证实。关于猜想 1.9 的最新进展，参见 [DSS25]和 [LT25]，其中给出了使用 Ricci 流的证明（另见 [HK24]，其中采用了逆平均曲率流的方法）。

作为定理 1.5 的一个应用，我们在三维情形下，为 Hamilton 的夹逼猜想的一个特殊情形给出另一种证明。

推论 1.10。 设(M^3, g) 是一个完备黎曼流形，满足$\mathrm{Ric} \geq \epsilon \cdot R \cdot g \geq 0$，其中 $\epsilon > 0$ 为某个固定值，并且具有最大体积增长。则 M^3 与 $\mathbb{R}^3$等距。

注 1.11。 *Bonnet-Myers* 定理是通过沿测地线段积分曲率来证明的。类似地，*Hamilton* 的夹逼猜想可以看作一种尺度不变的类比；推论 *1.10* 的证明将这一思想推广为在 M^3 的一个区域上对曲率进行积分。

现在我们说明定理 1.5 证明中的一些创新之处。要推导出 (1.1) 中的精确极限，需要了解b的等值集的拓扑类型，因为这样我们才能应用 Gauss–Bonnet 定理。在本文中，我们研究参数$t \in \mathbb{R}$ 中满足$b^{-1}(t)$的等值集的亏格至少为一的集合（记为 $\mathcal{T} \cup \mathcal{B}$）。首先，在非抛物假设下，我们证明

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int_{[\mathcal{T}\cup\mathcal{B}]\cap(0,r)} dt\int_{b^{-1}(t)} R(b^{-1}(t))}{r} = 0.$$

此外，在最大体积增长假设下，我们证明该集合的渐近密度趋于零：也就是说

$$\frac{L^1([\mathcal{T} \cup \mathcal{B}] \cap (0,t))}{t}, \tag{1.7}$$

当 $t \to \infty$ 时趋于 0，尽管 $L^1([\mathcal{T} \cup \mathcal{B}] \cap (0,t))$ 本身可能增长（例如像 $\sqrt{t}$）。换言之，在极大体积增长的条件下，我们证明：在上述意义下，渐近地几乎每一个等值集在拓扑上都是球面。这是一个具有独立意义的结果。

对这类等值集的平均曲率积分进行细致的渐近分析，对于建立上述渐近结果至关重要。出于技术原因，我们因此从等值集的加权体积入手，并建立证明中所需的精确渐近结果。尽管这些渐近结果的部分内容最初由 Colding–Minicozzi（[CMI14]）及作者之一（[Xu20a]）得到，但此处给出的论证是自包含的，并强调加权体积的二阶导数。这一关注点不仅以统一的方式完成了推导，而且本身也具有独立意义，与极小曲面和调和映射的单调性公式中所用的类似技巧相平行。

我们预期，实际上，式 (1.1) 在更广泛的非抛物型 情形下也应成立，尽管对于不具有最大体积增长的非抛物流形，这一问题仍未解决。注意，存在不具有最大体积增长的非抛物流形实例。

在极点假设下，一位作者（[Xu24]）证明了将尖锐积分曲率公式应用于 Hamilton 猜想的结果。这种方法也与 Huisken 和 Koeber 使用逆平均曲率流的方法相关。

本文结构如下。第 2 节利用格林函数建立基础的平均值公式。第 3 节证明测地球的广义散度定理。第 4 节致力于证明尖锐平均值不等式及其刚性。第 5 节和第 6 节对函数b 及其等值集进行渐近分析，并最终在第 6 节证明定理 1.5。

在本文余下部分，除非另有说明，我们总是假设 (M^n,g) 是一个非抛物流形，且$n \geq 3$ 和$Rc \geq 0$。

第一部分：调和函数的积分

2. 平均值公式

在非抛物型流形M^n 上，维数为$n \geq 3$时，存在唯一的最小正 Green 函数，记作$G(q,x)$，其中q 是流形上的一个固定点。为强调基点，我们采用如下记法：

$$b_q(x) = G(q,x)^{\frac{1}{2-n}}.$$

由 $\Delta(b_q^{2-n}) = 0$，可得

$$\Delta b_q = (n-1)\frac{|\nabla b_q|^2}{b_q}. \tag{2.1}$$

由格林函数$G(q,x)$在奇异点q附近的行为，我们得到

$$\lim_{r\to 0}\Big\{ \sup_{x\in B_q(r)}\left|\frac{b_q}{\rho}(x)-1\right| + \sup_{x\in B_q(r)}\big||\nabla b_q(x)|-1\big| = 0\Big\}, \tag{2.2}$$

其中 $\rho(x) = d(x,q)$。

下述结果计算了奇点附近尺度不变加权体积的值。

引理 2.1。设 ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积，则有

$$\lim_{r\to 0} r^{-n}\int_{b_q\le r}|\nabla b_q|^2 = \omega_n.$$

证明：由 (2.2) 式，对于任意 $\epsilon\in(0,1)$，存在 $\delta>0$，使得

$$\big||\nabla b_q(x)|-1\big| < \epsilon, \quad |b_q-\rho|(x) < \epsilon\rho(x), \quad \forall x\in B_q(\delta). \tag{2.3}$$

对于 $\delta>0$，我们断言存在 $r_0,$，使得当 $b_q(x) \le r_0$，时，$\rho(x) \le \delta$。否则，存在序列 $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ 位于 M 上，使得

$$\lim_{i\to\infty} b_q(q_i) = 0, \qquad \rho(q_i) > \delta.$$

这意味着 $\lim_{i\to\infty} G(q,q_i) \to \infty$；另一方面，$q_i \notin B_q(\delta)$；这与 Green 函数 $G(q,\cdot)$ 在 $M^n - B_q(\delta)$ 上的有界性相矛盾。

对于任意$r < r_0,$，由 (2.3) 式可得

$$\{x:\rho(x)\le\frac{r}{1+\epsilon}\}\subseteq\{x:b_q(x)\le r\}\subseteq\{x:\rho(x)\le\frac{r}{1-\epsilon}\}.$$

因此我们有

$$r^{-n}\int_{\rho\le\frac{r}{1+\epsilon}}(1-\epsilon)^2 \le r^{-n}\int_{b_q\le r}|\nabla b_q|^2 \le r^{-n}\int_{\rho\le\frac{r}{1-\epsilon}}(1+\epsilon)^2.$$

因此令$r \to 0$,

$$\frac{\omega_n(1-\epsilon)^2}{(1+\epsilon)^n} \le \lim_{r\to 0} r^{-n}\int_{b_q\le r}|\nabla b_q|^2 \le \frac{\omega_n}{(1-\epsilon)^n}(1+\epsilon)^2.$$

在上式中令 $\epsilon\to 0$，结论即得。 □

在 [Xu20b 的引理 5.1], 中，建立了一个关于调和函数的平均值公式。以下引理推广了这一结果，通过平均值性质刻画调和函数和次调和函数。

引理 2.2. 设 $u\in C^{\infty}(M^n)$。对于任意 $q\in M^n$ 和 $r>0$，令

$$I(u,q,r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{b_q=r} u|\nabla b_q|.$$

则有以下结论：

(i) $\Delta u = 0$ *if and only if* $u(q) = I(u,q,r)$ *for all* q, r.

（ii） $\Delta u \geq 0$ 当且仅当 u（q） $\leq I$（u，q，r）对所有 q，r 均成立。

证明： **步骤（1）**。首先，我们注意到$\frac{\partial}{\partial r} = \nabla b_q \nabla \frac{q}{|\nabla b_q|^2} b$，假设$b_q^{-1}(r)$的体积元为 $J(b_q^{-1}(r))$。然后，如引理5.2中的论证所示，我们可以得到r 上的$I(u, q,r)$可微，并且

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\Big(r^{1-n}\int_{b_q=r} u|\nabla b_q|\Big) &= (1-n)r^{-n}\int_{b_q=r} u|\nabla b_q| + r^{1-n}\int_{b_q=r}\langle\nabla u, \frac{\nabla b_q}{|\nabla b_q|}\rangle \\ &+ r^{1-n}\int_{b_q=r} u\Big(\frac{\nabla_{\nabla b_q}|\nabla b_q|}{|\nabla b_q|^2} + \frac{\nabla_{\nabla b_q} J(b_q^{-1}(r))}{|\nabla b_q| J(b_q^{-1}(r))}\Big)dx \\ &= r^{1-n}\int_{b_q\leq r}\Delta u + (1-n)r^{-n}\int_{b_q=r} u|\nabla b_q| + r^{1-n}\int_{b_q=r}\frac{u}{|\nabla b_q|}\Delta b_q, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中我们使用散度定理以及以下事实 $\Big(\frac{\nabla_{\nabla b_q}|\nabla b_q|}{|\nabla b_q|^2} + \frac{\nabla_{\nabla b_q} J(b_q^{-1}(r))}{J(b_q^{-1}(r))}\Big) = \Delta_{b_q}$。

由（2.1）和（2.4），我们得到

$$\frac{d}{dr}\Big(r^{1-n}\int_{b_q=r} u|\nabla b_q|\Big) = r^{1-n}\int_{b_q\leq r}\Delta u. \tag{2.5}$$

在（2.5）中选取 $u = 1$，由引理 2.1 可得

$$r^{1-n}\int_{b_q=r}|\nabla b_q| = n\omega_n. \tag{2.6}$$

由余面积公式和（2.6），我们有

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} r^{1-n}\int_{b_q=r}|\nabla b_q| &= \lim_{r\to 0} nr^{-n}\int_0^r\Big(\int_{b_q=r}|\nabla b_q|\Big)dt = \lim_{r\to 0} nr^{-n}\int_{b_q\leq r}|\nabla b_q|^2 \\ &= n\omega_n. \end{aligned} \tag{2.7}$$

步骤（2）。由 (2.7)，对任意 u，有

$$\lim_{r\to 0} r^{1-n}\int_{b_q=r} u|\nabla b_q| = u(q)\lim_{r\to 0} r^{1-n}\int_{b_q=r}|\nabla b_q| = u(q)n\omega_n. \tag{2.8}$$

现在，如果 $\Delta u = 0$，由 (2.5) 和 (2.8) 可得

$$r^{1-n}\int_{b_q=r} u|\nabla b_q| = \lim_{r\to 0} r^{1-n}\int_{b_q=r} u|\nabla b_q| = u(q)n\omega_n.$$

如果 $\Delta u \geq 0$，由 (2.5) 和 (2.8) 可得

$$r^{1-n}\int_{b_q=r} u|\nabla b_q| \geq \lim_{r\to 0} r^{1-n}\int_{b_q=r} u|\nabla b_q| = u(q)n\omega_n.$$

步骤（3）。如果对所有 q、r，$u(q) = I(u, q, r)$，则可证明 u 是调和的。

记$A(q,r) = \{x \in M : b_q(x) < r\}$。由（2.2），我们可以取$r_0$ 充分小，使得对任意$x \in A(q,r_0)$，都有 $|\nabla b_q|(x) \neq 0$，且$A(q,r_0)$包含在M的某个局部坐标卡中。

根据标准的椭圆理论，存在一个调和函数$v \in C^\infty(A(q,r_0))$，使得$v = u$在$\partial A(q,r_0)$上成立。然后根据步骤（2），v满足平均值性质

$$v(q) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{b_q=r} v|\nabla b_q|, \qquad \forall A(q,r) \subset A(q,r_0).$$

现在我们断言$v = u$。令$h = v - u$，则h也满足平均值性质

$$h(q) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{b_q=r} h|\nabla b_q|, \qquad \forall A(q,r) \subset A(q,r_0).$$

如果h不恒等于0，那么h在$A(q,r_0)$中有一个非零最大值或最小值。不妨设$h(z) =$最大值$_{A(q,r_0)} h > 0$。那么对于足够小的$r > 0$，使得$A(z,r) \subset A(q,r_0)$，且$|\nabla b_z| \neq 0$在$A(z,r)$上，我们有

$$0 = h(z) - \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{b_z=r} h|\nabla b_z| = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{b_z=r} (h(z)-h)|\nabla b_z| \geq 0.$$

因此，在$\partial A(z,r)$上，$h \equiv h(z)$。于是，对于所有足够小的$r_1 > 0$，在$A(z,r_1)$上有$h \equiv h(z)$。

由此，根据$A(q,r_0)$的连通性，h在整个$A(q,r_0)$上为常数。

该常数为0，因为$h = 0$在$\partial A(q,r_0)$上，这与我们的假设相矛盾：$h(z) > 0$。

因此h恒等于零，且$u \equiv v$。于是u在q附近是调和的。结论随即成立。

步骤（4）。现在，若对所有q、r，都有$u(q) \leq I(u,q,r)$，我们将证明$\Delta u \geq 0$。

反设$\Delta u(q_0) < 0$在某点$q_0 \in M$处成立。那么，由连续性可知，存在一个足够小的$\epsilon > 0$和一个测地球$B_\delta(q_0)$，使得$\Delta u < -\epsilon < 0$在$B_\delta(q_0)$上成立。

取足够小的$r_0 \in (0,\delta)$，使得$A(q_0,r_0) \subset B_\delta(q_0)$，且$b_{q_0}| \neq 0$在$A(q_0,r_0)$上。根据步骤（1），对所有$r \in (0,r_0)$，恒等式成立：

$$\frac{d}{dr} I(u,q_0,r) = r^{1-n} \int_{b_{q_0} \leq r} \Delta u < 0. \tag{2.9}$$

我们必定有

$$I(u,q_0,r) < \lim_{r\to 0^+} I(u,q_0,r) = n\omega_n u(q_0) \quad \text{for all } r \in (0,r_0).$$

但这与假设矛盾：对于所有的$r > 0$，$u(q_0) \leq I(u,q_0,r)$。

因此，我们关于$\Delta u(q_0) < 0$的假设必定是错误的，并且$\Delta u \geq 0$在M^n上的每一点都成立。

□

3. 测地球的散度定理

对于指数映射$\exp_q : T_qM^n \to M^n$，我们定义$\mathcal{R}$：$\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$如下：

$$\mathcal{R}(\theta) := \sup\{r > 0 : \ d_g(q, \exp_q((r+\epsilon)\theta)) = r + \epsilon \text{ for some } \epsilon > 0\}.$$

定义

$$A = \{t \cdot \theta : \theta \in \mathbb{S}^{n-1}, 0 \leq t < \mathcal{R}(\theta)\},$$

$$\Sigma(t) = \{\theta \in \mathbb{S}^{n-1} : \mathcal{R}(\theta) > t\}, \qquad \tilde{\Sigma}(t) = \{\theta \in \mathbb{S}^{n-1} : \mathcal{R}(\theta) \geq t\}.$$

对于固定的$q \in M$，我们定义测地球$B_q(t) = \{x \in M^n : d_g(q,x) < t\}$。我们有

$$\exp_q(t \cdot \Sigma(t)) \subset \exp_q(t \cdot \tilde{\Sigma}(t)) = \partial B_q(t).$$

定义

$$Z = \{t > 0 : \mathcal{H}^{n-1}(\tilde{\Sigma}(t) \backslash \Sigma(t)) > 0\}.$$

设 $\partial_* B_q(t)$ 为如下定义的测度论边界

$$\partial_* B_q(t) = \left\{ y \in M : \ \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\mathcal{H}^n(B_y(r) \cap B_q(t))}{r^n} > 0 \text{ and } \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\mathcal{H}^n(B_y(r) \backslash B_q(t))}{r^n} > 0 \right\}. \tag{3.1}$$

引理 3.1. 对 $t \in \mathbb{R}^+ \backslash Z$，测地球 $B_q(t)$ 具有局部有限周长，并且

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_q(t) \backslash \exp_q(t \cdot \Sigma(t))) = 0. \tag{3.2}$$

证明：首先，在余下的论证中固定 $t \in \mathbb{R}^+ \backslash Z$ 。注意映射 $F(v) = \exp_q(t \cdot v) : \mathbb{S}^{n-1} \to (M^n, g)$ 是利普希茨常数为 $C > 0$ 的利普希茨映射。现在由面积公式，对 $t \notin Z$，我们得到

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_q(t) \backslash \exp_q(t \cdot \Sigma(t))) = \mathcal{H}^{n-1}\Big(\exp_q(t \cdot \tilde{\Sigma}(t)) \backslash \exp_q(t \cdot \Sigma(t)) \Big) \\ &\leq C \cdot \mathcal{H}^{n-1}(\tilde{\Sigma}(t) \backslash \Sigma(t)) = 0. \end{aligned}$$

现在我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(\partial_* B_q(t)) &\leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_q(t)) \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_q(t) \backslash \exp_q(t \cdot \Sigma(t))) + \mathcal{H}^{n-1}(\exp_q(t \cdot \Sigma(t))) \\ &\leq C \cdot \mathcal{H}^{n-1}(\Sigma(t)) \leq C \cdot \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) < \infty. \end{aligned} \tag{3.3}$$

结论由 (3.3) 和 [EG92 定理 5.23] 得出。 □

令 $\{\theta, v2, \cdots, v_n\}$ 为切空间 $T_qM^n \simeq \mathbb{R}^n$的一组标准正交基。这里， $\theta, v_i \in \mathbb{S}^{n-1}$，因为点 $q \in M^n$ 处的单位切球面与 $\mathbb{S}^{n-1}$微分同胚。并且我们将 $T_{t\theta}(T_qM^n) \simeq T_qM^n \simeq \mathbb{R}^n$ 视为，记作

$$\begin{aligned} &W_i(t,\theta) = d\exp_q(t\theta)(tv_i), \qquad \forall 2 \leq i \leq n, t > 0, \\ &J(t,\theta) = \sqrt{\det\Big(\big\langle W_i(t,\theta), W_j(t,\theta)\big\rangle_{i,j=2}^n\Big)}, \qquad \forall t > 0, \theta \in \mathbb{S}^{n-1}. \end{aligned}$$

由高斯引理，我们有

$$\langle d\exp_p(t\theta)(\theta), d\exp_p(t\theta)(\theta)\rangle = 1, \tag{3.4}$$

$$\langle d\exp_p(t\theta)(\theta), d\exp_p(t\theta)(v_i)\rangle = 0, \quad i = 2, \cdots n. \tag{3.5}$$

考虑映射 $\exp_q : \mathbb{R}^n \to M^n$，则

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}(\exp_q)(t \cdot \theta) &= \sqrt{\det[(D\exp_q) \cdot (D\exp_q)^*]} \\ &= \sqrt{\det\Big(\big\{\langle d\exp_q(t\theta)(v_i), d\exp_q(t\theta)(v_j)\rangle\big\}_{i,j=2}^n\Big)} \\ &= \frac{J(t,\theta)}{t^{n-1}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

假设 $z = (z1, \cdots, z_n) = t \cdot \theta \in \mathbb{R}^n$，我们知道 $dz_1 \cdots dz_n = t^{n-1} dt d\theta$。根据面积公式（见 [EG92，定理 3.9]），对于任意 L^n-可测函数 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，我们得到

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} h(t\cdot\theta) J(t,\theta) dt d\theta = \int_{\mathbb{R}^n} h(t\cdot\theta) \mathrm{Jac}(\exp_q) t^{n-1} dt d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(z) \mathrm{Jac}(\exp_q) dz_1 \cdots dz_n = \int_{M^n} \Big[\sum_{t\cdot\theta \in \exp_q^{-1}(x)} h(t\cdot\theta) \Big] d\mu(x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

同样，对于固定的 $t > 0$，考虑映射 $\tilde{F}(\theta) = \exp_q(t \cdot \theta) : \mathbb{S}^{n-1} \to M^n$，由 (3.6) 得

$$\mathrm{Jac}(\tilde{F}) = \mathrm{Jac}(\exp_q) \cdot t^{n-1} = J(t, \theta).$$

对于任意 $\mathcal{H}^{n-1}$-可测函数 $h : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(\theta) J(t,\theta) d\theta = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(\theta) \mathrm{Jac}(\tilde{F}) d\theta \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}(t)} h(\frac{y}{t}) \mathrm{Jac}(\exp_q) dy = \int_{M^n} \Big[\sum_{t\cdot\theta \in \exp_q^{-1}(x)} h(\theta) \Big] d\mu(x). \end{aligned} \tag{3.8}$$

引理 3.2. 有 $\mathcal{H}^1(Z) = 0$ 且

$$\int_{B_q(t)} \Delta f = \int_{\exp_q(t\cdot\Sigma(t))} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}\mu_{\partial B_q(t)}, \qquad t \in (0,\infty)\backslash Z. \tag{3.9}$$

证明：**步骤（1）**。注意

$$\partial A = \{\mathcal{R}(\theta)\theta : \theta \in \mathbb{S}^{n-1}\},$$

然后根据 [Cha06，命题 III.3.1],我们有

$$\mathcal{H}^n(\partial A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\partial A} dx = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\theta \int_0^\infty \chi_{\partial A}(t\theta) t^{n-1} dt = 0.$$

由余面积公式，我们有

$$0 = \mathcal{H}^n(\partial A) = \int_0^\infty \int_{\{\mathcal{R}(\theta)=t\}} t^{n-1} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_{\tilde{\Sigma}(t)\backslash\Sigma(t)} t^{n-1} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\tilde{\Sigma}(t)\backslash\Sigma(t)) t^{n-1} \mathrm{d}t.$$

因此必有 $\mathcal{H}^1(Z) = 0$。

步骤（2）。根据 [EG92，定理 5.16]和引理 3.1，可对 $B_q(t)$ 应用散度定理，得到

$$\int_{B_q(t)} \Delta f = \int_{\partial_* B_q(t)} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}\mu_{\partial B_q(t)} \quad \forall t \in (0,\infty)\backslash Z. \tag{3.10}$$

由于根据 [Cha06, 定理 III.2.2], , $\exp_q$ 在A 上是一个微分同胚，因此我们有 $\exp_q(t\cdot\Sigma(t)) \subset \partial_* B_q(t)$。结合 (3.2)，我们有 $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* B_q(t) \backslash \exp_q(t\cdot\Sigma(t))) = 0$。因此我们得到

$$\int_{\partial_* B_q(t)} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}\mu_{\partial B_q(t)} = \int_{\exp_q(t\cdot\Sigma(t))} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}\mu_{\partial B_q(t)}, \quad \forall t \in (0,\infty)\backslash Z. \tag{3.11}$$

结论由 (3.10) 和 (3.11) 得出。 □

定义 3.3. 对于任意 $f \in C^\infty(M^n)$，定义

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1} \to M^n,$$

~ ~by $\tilde{f}(t,\theta) = f(\exp_q(t\theta))$。注意，$f$ 是光滑函数。

引理 3.4 （测地球的广义散度定理）。 假设 $f \in C^\infty(M^n)$，则

$$\int_{\tilde{\Sigma}(t)} \frac{\partial \tilde{f}(t,\theta)}{\partial t} J(t,\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{B_q(t)} \Delta f, \qquad \forall t > 0. \tag{3.12}$$

证明： **步骤（1）**。由高斯引理可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(t,\theta) = \nabla f \cdot \frac{\partial}{\partial t}\exp_q(t\theta) = \nabla f \cdot \vec{n} = \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(x), \qquad \forall t\cdot\theta \in A, x = \exp_q(t\cdot\theta), \tag{3.13}$$

其中 $\vec{n}$ 是 $\partial B_q(t)$ 的向外单位法向量。

根据Z的定义，我们有

$$\int_{\tilde{\Sigma}(t)} \frac{\partial \tilde{f}(t,\theta)}{\partial t} J(t,\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{\Sigma(t)} \frac{\partial \tilde{f}(t,\theta)}{\partial t} J(t,\theta)\mathrm{d}\theta \qquad \forall t \in (0,\infty)\backslash Z. \tag{3.14}$$

现在由 (3.8) 和 (3.13)，我们有

$$\int_{\Sigma(t)} \frac{\partial \tilde{f}(t,\theta)}{\partial t} J(t,\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{\exp_q(t\cdot\Sigma(t))} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}\mu_{\partial B_q(t)}. \tag{3.15}$$

由 (3.14)、(3.15) 和引理 3.2，可得

$$\int_{\tilde{\Sigma}(t)} \frac{\partial \tilde{f}(t,\theta)}{\partial t} J(t,\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{B_q(t)} \Delta f, \quad \forall t \in (0,\infty)\backslash Z. \tag{3.16}$$

根据 [Cha06, 定理 III.2.1], ，我们知道 $\mathcal{R}$ 是连续的。然后利用 $\mathcal{R}$ 的定义及其连续性，可得

$$\lim_{s\to t-} \chi_{\tilde{\Sigma}(s)}(x) = \chi_{\tilde{\Sigma}(t)}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{3.17}$$

~还要注意，f 是光滑函数，J 是有界可测函数。由勒贝格控制收敛定理和 (3.17)，可得

$$\lim_{s\to t-} \int_{\tilde{\Sigma}(s)} \frac{\partial \tilde{f}(s,\theta)}{\partial s} J(s,\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{\tilde{\Sigma}(t)} \frac{\partial \tilde{f}(t,\theta)}{\partial t} J(t,\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{3.18}$$

类似地，我们也有

$$\lim_{s\to t-} \int_{B_q(s)} \Delta f = \int_{B_q(t)} \Delta f, \tag{3.19}$$

其中我们使用定义 $B_q(t) = \{x : d(q,x) < t\}$，得到 $\lim_{s\to t-} \chi_{B_q}(s)(x) = \chi_{B_q}(t)(x)$。

因此，由 (3.16)、(3.18)、(3.19) 和 $\mathcal{H}^1(Z) = 0$ (根据引理 3.2)，可得 (3.12)。 □

4. 尖锐平均值不等式

下面给出 Bishop–Gromov 体积比较定理的一个版本，我们将在后续论证中使用。

引理 4.1. 对于(M^n,g) 且 $Rc \geq 0$，我们有

$$t_1^{1-n}J(t_1,\theta) \geq t_2^{1-n}J(t_2,\theta), \qquad \forall 0 < t_1 \leq t_2 \leq \mathcal{R}(\theta).$$

证明：根据 [Li12，推论 2.2],，我们有

$$\frac{\partial(t^{1-n}J(t,\theta))}{\partial t} \leq 0, \qquad \forall 0 < t < \mathcal{R}(\theta),\ \theta \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

于是得到

$$t_1^{1-n}J(t_1,\theta) \geq t_2^{1-n}J(t_2,\theta), \qquad \forall 0 < t_1 \leq t_2 < \mathcal{R}(\theta). \tag{4.1}$$

注意，$J(t,\theta)$ 定义良好且连续（当 $t > 0$ 时）。由 (4.1) 可得

$$t_1^{1-n}J(t_1,\theta) \geq \lim_{t_2 \to \mathcal{R}(\theta)^-} t_2^{1-n}J(t_2,\theta) = \mathcal{R}(\theta)^{1-n}J(\mathcal{R}(\theta),\theta), \qquad \forall 0 < t_1 < \mathcal{R}(\theta). \tag{4.2}$$

由 (4.1) 和 (4.2)，可得

$$t_1^{1-n}J(t_1,\theta) \geq t_2^{1-n}J(t_2,\theta), \qquad \forall 0 < t_1 \leq t_2 \leq \mathcal{R}(\theta). \tag{4.3}$$

结论随即得出。□

我们不考察 $t^{1-n}\int_{\partial B_q(t)} f(x)d\mu(x)$，而研究在 (4.4) 中定义的一般项 $F(t)$，并证明它单调不增。注意，当 $t < \mathrm{inj}(q)$ 时，$F(t)$ 恰好等于$t^{1-n}\int_{\partial B_q(t)} f(x)d\mu(x)$，这正是 Schoen-Yau 原始论证证明中所用的表达式。

引理 4.2. 设 $f \in C^\infty(M^n)$ 满足 $\Delta f \leq 0$ 且 $f \geq 0$，定义

$$F(t) = t^{1-n}\int_{\tilde{\Sigma}(t)} \tilde{f}(t,\theta)J(t,\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{4.4}$$

则 F 是非增的。

证明：**步骤（1）**。对于 $t > s > 0$，由于 $\Sigma(t) \subset \Sigma(t-s)$ 对 $s > 0$，注意到$f \geq 0$ 以及引理 4.1，我们有

$$\begin{aligned}
&F(t) - F(t-s)\\
&= \int_{\tilde{\Sigma}(t)} \tilde{f}(t,\theta)t^{1-n}J(t,\theta)\mathrm{d}\theta - \int_{\tilde{\Sigma}(t-s)} \tilde{f}(t-s,\theta)(t-s)^{1-n}J(t-s,\theta)\mathrm{d}\theta\\
&= \int_{\tilde{\Sigma}(t)} \Big(\tilde{f}(t,\theta)t^{1-n}J(t,\theta) - \tilde{f}(t-s,\theta)(t-s)^{1-n}J(t-s,\theta)\Big)\mathrm{d}\theta\\
&\quad + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \tilde{f}(t-s,\theta)(t-s)^{1-n}J(t-s,\theta)(\chi_{\tilde{\Sigma}(t)} - \chi_{\tilde{\Sigma}(t-s)})\mathrm{d}\theta\\
&\leq \int_{\tilde{\Sigma}(t)} \Big(\tilde{f}(t,\theta)t^{1-n}J(t,\theta) - \tilde{f}(t-s,\theta)(t-s)^{1-n}J(t-s,\theta)\Big)\mathrm{d}\theta\\
&\leq \int_{\tilde{\Sigma}(t)} [\tilde{f}(t,\theta) - \tilde{f}(t-s,\theta)]\frac{J(t,\theta)}{t^{n-1}}d\theta + \int_{\tilde{\Sigma}(t)} \tilde{f}(t-s,\theta)\cdot\left(\frac{J(t,\theta)}{t^{n-1}} - \frac{J(t-s,\theta)}{(t-s)^{n-1}}\right)d\theta
\end{aligned}$$

(4.5)
$$\leq \int_{\tilde{\Sigma}(t)} [\tilde{f}(t,\theta) - \tilde{f}(t-s,\theta)] \frac{J(t,\theta)}{t^{n-1}} d\theta.$$

并且我们还有

$$F(t+s) - F(t) \leq \int_{\tilde{\Sigma}(t)} \left(\tilde{f}(t+s,\theta)(t+s)^{1-n} J(t+s,\theta) - \tilde{f}(t,\theta) t^{1-n} J(t,\theta) \right) \mathrm{d}\theta$$

(4.6)
$$\leq \int_{\tilde{\Sigma}(t)} [\tilde{f}(t+s,\theta) - \tilde{f}(t,\theta)] \frac{J(t,\theta)}{t^{n-1}} d\theta.$$

步骤（2）。假设 $0 < a_0 < b_0$, 我们只需证明$F(b_0) - F(a_0) \leq 0$。用反证法，假设存在 $\epsilon > 0$ 使得

(4.7)
$$F(b_0) - F(a_0) > \epsilon \cdot [b_0 - a_0].$$

由（4.7），对任意$i \in \mathbb{Z}^+$，存在 $[a_i,\ b_i] \subseteq [a_{i-1},\ b_{i-1}]$ 使得

(4.8)
$$F(b_i) - F(a_i) \geq \epsilon \cdot [b_i - a_i],$$
$$b_i - a_i = \frac{b_{i-1} - a_{i-1}}{2}, \quad \text{and} \quad (a_i - a_{i-1}) \cdot (b_i - b_{i-1}) = 0,$$

$[$
∞由 $[a_0, b_0]$, 的紧性以及$\lim_{i\to\infty} |b_i - a_i| = 0$，存在$a_\infty \in \bigcap_{i=1}$ $a_i,\ b_i]$ 使得

that

(4.9)
$$\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} b_i = a_\infty.$$

由（4.8）和（4.9），我们得到存在 $\{b_i\}$ 或 $\{a_i\}$ 的一个子序列（为简单起见，仍记为 $\{b_i\}$或 $\{a_i\}$）使得

(4.10)
$$F(b_i) - F(a_\infty) \geq \epsilon \cdot [b_i - a_\infty],$$

(4.11)
$$F(a_\infty) - F(a_i) \geq \epsilon \cdot [a_\infty - a_i].$$

不失一般性，我们可以假设（4.10）在余下的论证中成立（若（4.11）成立，则类似论证适用，我们改用（4.5））。

然后由 (4.10) 和 (4.6)，我们得到

(4.12)
$$\frac{1}{[b_i - a_\infty]} \int_{\tilde{\Sigma}(a_\infty)} [\tilde{f}(b_i,\theta) - \tilde{f}(a_\infty,\theta)] \frac{J(a_\infty,\theta)}{a_\infty^{n-1}} d\theta \geq \epsilon.$$

对i取极限，并在 (4.12) 中使用 (4.9) 和勒贝格控制收敛定理，我们得到

(4.13)
$$\int_{\tilde{\Sigma}(a_\infty)} \frac{J(a_\infty,\theta)}{a_\infty^{n-1}} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(a_\infty,\theta) d\theta \geq \epsilon > 0.$$

然而，由引理 3.4 和 $\Delta f \leq 0$，我们有

(4.14)
$$\int_{\tilde{\Sigma}(a_\infty)} \frac{J(a_\infty,\theta)}{a_\infty^{n-1}} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(a_\infty,\theta) d\theta = a_\infty^{1-n} \int_{B_q(a_\infty)} \Delta f \leq 0,$$

这与 (4.13) 矛盾。 □

下面的结果是 [SY10 第 1] 章命题 2.1 的推广。

定理 4.3 (尖锐平均值不等式)**.** 假设 $f \in C^\infty(M^n)$ 满足 $\Delta f \le 0$ 且 $f \ge 0$，则

$$f(q) \ge \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_q(r)} f, \qquad \forall q \in (M^n, g), r > 0. \tag{4.15}$$

注 4.4. 在 [SY10], 中，上述结果对任意 $r < \mathrm{inj}(q)$ 均成立，其中 $\mathrm{inj}(q)$ 是 $q \in (M^n, g)$ 的单射半径。我们的结果取消了对 r 的这一限制；此外，定理 *4.5* 给出了方程成立时相应的刚性结果。

证明。 按照引理 4.2 定义 F，由引理 4.2 可得

$$F(t) \le \lim_{r\to 0^+} F(r) = n\omega_n f(q), \qquad \forall t > 0. \tag{4.16}$$

~对于任意 $t > 0$, 注意到 $\partial B_q(t) = \exp_q(t \cdot \Sigma(t))$。由 $f \ge 0$、(3.8) 和 (4.16)，我们有

$$t^{1-n} \int_{\partial B_q(t)} f \mathrm{d}\mu_{\partial B_q(t)} \le F(t) \le n\omega_n f(q).$$

□

定理 4.5 （平均值不等式的刚性）。 设 $f \in C^\infty(M^n) - \{0\}$，其中 $f \ge 0$ 且 $\Delta f \le 0$。若存在 $q \in (M^n, g)$ 和 $r > 0$,

$$f(q) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_q(r)} f,$$

则 $B_q(r)$ 与 $B^n(r) \subseteq \mathbb{R}^n$ 等距。

证明： **步骤（1）**。假设存在 $f(x_0) = 0$，其中某个 $x_0 \in B_q(r)$，由 $\Delta f \le 0$、$f \ge 0$ 以及强极大值原理可得 $f \equiv 0$, 这与假设矛盾。

因此我们有

$$f(x) > 0, \qquad \forall x \in B_q(r). \tag{4.17}$$

Then

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = n\omega_n f(x) = r^{1-n} \int_{\partial B_x(r)} f \le F(r) \le \lim_{t\to 0^+} F(t)$$

因此 $F(t) \equiv n\omega_n f(x)$, $\forall\ 0 < t \le r$。在以下论证中，假设 $r > t > s > 0$，因为

$$\begin{aligned}
0 &= \limsup_{s\to 0} \frac{F(t) - F(t-s)}{s} \\
&\le \limsup_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_{\tilde\Sigma(t)} \left(f(\exp_x(t\theta))\, t^{1-n} J(t,\theta) - f(\exp_x((t-s)\theta))\, t^{1-n} J(t,\theta) \right) d\theta \\
&\quad + \limsup_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_{\tilde\Sigma(t)} \left(f(\exp_x((t-s)\theta))\, t^{1-n} J(t,\theta) - f(\exp_x((t-s)\theta))(t-s)^{1-n} J(t-s,\theta) \right) d\theta \\
&\quad + \limsup_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_{S^{n-1}} (t-s)^{1-n} f(\exp_x((t-s)\theta)) J(t-s,\theta)(1_{\tilde\Sigma(t)} - 1_{\tilde\Sigma(t-s)}) d\theta
\end{aligned}$$

$:= (I) + (II) + (III).$

注意到极限（I）存在，且（II）和（III）均非正，因此（I）≥ 0。由于（3.12）

$$0 \geq \int_{\tilde{\Sigma}(t)} t^{1-n} J(t,\theta) \frac{\partial f(\exp_x(t\theta))}{\partial t} d\theta = (I) \geq 0.$$

于是我们得到（I）$= 0$，因此（II）$=$（III）$= 0$。由于$f > 0$，存在$C_1 > 0$使得$0 < C_1 < f$在紧集B_x（r）上一致成立，我们得到

$$\begin{aligned}
0 &= \limsup_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_{\tilde{\Sigma}(t)} \left(f(\exp_x((t-s)\theta))\, t^{1-n} J(t,\theta) - f(\exp_x((t-s)\theta))(t-s)^{1-n} J(t-s,\theta) \right) d\theta \\
&\leq \limsup_{s\to 0} C_1 \int_{\tilde{\Sigma}(t)} \frac{1}{s} (t^{1-n} J(t,\theta) - (t-s)^{1-n} J(t-s,\theta)) d\theta \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

于是存在子序列$s_i \to 0$使得

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{s_i} (t^{1-n} J(t,\theta) - (t-s_i)^{1-n} J(t-s_i,\theta)) = 0, \quad \mathcal{H}^{n-1} - a.e. \text{ in } \tilde{\Sigma}(t).$$

这意味着

$$\frac{\partial (t^{1-n} J(t,\theta))}{\partial t} = 0, \quad \forall (t,\theta) \in A$$

由连续性可知。因此J（t，θ）$= t^{n-1}$，由$\lim_{t\to 0} t^{1-n} J$（t，θ）$= 1$在A上再次由连续性可知。

步骤（2）。那么极限

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_{\tilde{\Sigma}(t)} \left(f(\exp_x((t-s)\theta))\, t^{1-n} J(t,\theta) - f(\exp_x((t-s)\theta))(t-s)^{1-n} J(t-s,\theta) \right) d\theta = 0,$$

由于 $0 = \lim_{s\to 0} \frac{F(t) - F(t-s)}{s}$，我们得到以下极限的存在性，

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_{S^{n-1}} (t-s)^{1-n} f(\exp_x((t-s)\theta)) J(t-s,\theta)(1_{\tilde{\Sigma}(t)} - 1_{\tilde{\Sigma}(t-s)}) d\theta \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_{S^{n-1}} f(\exp_x((t-s)\theta))(1_{\tilde{\Sigma}(t)} - 1_{\tilde{\Sigma}(t-s)}) d\theta \\
&\leq \lim_{s\to 0} \frac{C_1}{s} \int_{S^{n-1}} (1_{\tilde{\Sigma}(t)} - 1_{\tilde{\Sigma}(t-s)}) d\theta \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

这意味着对于任意 $t \in (0,r)$，任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta_t > 0$，使得对于任意$s \in (t - \delta_t, t)$，有

$$\text{Area}(\tilde{\Sigma}(t-s)) \geq \text{Area}(\tilde{\Sigma}(t)) - \epsilon s.$$

同样，对于任意 $s \in (t, t + \delta_t)$，存在

$$\text{Area}(\tilde{\Sigma}(t+s)) \geq \text{Area}(\tilde{\Sigma}(t)) - \epsilon s.$$

接着，设 $\tilde{r} \in (0,r)$，对于任意 $\epsilon > 0$，由 $[0,\tilde{r}]$, 的紧性，我们可以选取 $\delta > 0$ 以及一个划分 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_N = \tilde{r}$，使得 $r_{i+1} - r_i = \delta$，$\Sigma(r_1) = S^{n-1}$，于是

$$\mathrm{Area}(\tilde{\Sigma}(r_i + s)) \geq \mathrm{Area}(\tilde{\Sigma}(r_i)) - \epsilon\delta, \quad \forall s \in [r_i, r_{i+1}], 1 \leq i \leq N-1.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(B_x(\tilde{r})) &= \int_0^{\tilde{r}} \int_{\tilde{\Sigma}(t)} J(t,\theta) d\theta dt = \int_0^{\tilde{r}} \int_{\tilde{\Sigma}(t)} t^{n-1} d\theta dt \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{\tilde{\Sigma}(t)} t^{n-1} d\theta dt + \int_0^{r_1} \int_{S^{n-1}} t^{n-1} d\theta dt \\
&\geq \sum_{i=1}^{N-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} t^{n-1}(n\omega_n - \delta\epsilon i) dt + \int_0^{r_1} \int_{S^{n-1}} t^{n-1} d\theta dt \\
&\geq \omega_n \tilde{r}^n - C(n,r)\epsilon\delta^2 \frac{(N-1)N}{2} \\
&= \omega_n \tilde{r}^n - C(n,r)\epsilon \left(\frac{\tilde{r}}{N}\right)^2 \frac{(N-1)N}{2} \\
&\geq \omega_n \tilde{r}^n - C(n,r)\epsilon.
\end{aligned}$$

设 $\epsilon \to 0$，我们得到 $\mathrm{Vol}(B_x(\tilde{r})) \geq \omega_n \tilde{r}^n$。由格罗莫夫–毕晓普体积比较定理，$\mathrm{Vol}(B_x(\tilde{r})) = \omega_n \tilde{r}^n$。于是令 $\tilde{r} \to r$，我们得到

$$\mathrm{Vol}(B_x(r)) = \omega_n r^n,$$

由格罗莫夫–毕晓普体积比较定理的刚性部分，我们得到 $B_x(r)$ 与 $B^n(r)$ 等距。□

第二部分：曲率积分

在本文余下部分，为简便起见，在上下文明确时，我们用 b 代替 b_q。

以下引理最初由 [CM97] 基本证明，其证明使用了 Gromov-Hausdorff 收敛。我们的陈述可由 [LTW97] 中的内在论证推出。

引理 4.6。若 M^n 具有 $Rc \geq 0$，其中 $n \geq 3$且具有最大体积增长，则对任意$\delta \in (0, \frac{1}{2}]$，，有

$$(\mathrm{V}_M)^{\frac{1}{n-2}}\left(1+\tau\right)^{\frac{1}{2-n}}\rho(x) \leq b(x) \leq (\mathrm{V}_M)^{\frac{1}{n-2}}\left(1-\tau\right)^{\frac{1}{2-n}}\rho(x)$$

其中 $\rho(x) = d(q,x)$，并且

$$\theta_q(r) = \frac{\mathrm{Vol}(\partial B_r(q))}{r^{n-1}}, \qquad \theta_\infty = \lim_{r\to\infty} \theta_q(r),$$

$$\tau = C(n)[\delta + (\theta_q(\delta\rho(x)) - \theta_\infty)^{\frac{1}{n-1}}].$$

尤其是，极限$\rho(x)\to\infty$ $\frac{b(x)}{\rho(x)} = (\mathrm{V}_M)^{\frac{1}{n-2}}$。

□

引理 4.7。 如果 M^n 具有满足 $n \geq 3$的 $Rc \geq 0$，且它是非抛物型的，那么 $|\nabla b| \leq 1$。

证明： 结论由 [Xu20a, 引理 2.2]和 [Col12, 定理 3.1]推出。 □

以下引理隐含于 [CC96], 中的论证，并在 [CM97], [Col12] 和 [CMI14] 中反复使用。为方便读者，我们在此给出该结果的直接证明。

推论 4.8. 对于具有最大体积增长的完备非紧黎曼流形 M^n，若 $Rc \geq 0$，$n \geq 3$，则有 $\lim_{r\to\infty} \frac{\int_{b\leq r}|\nabla b|^3}{r^n} = (\mathrm{V}_M)^{\frac{1}{n-2}}\omega_n$。

证明：**步骤（1）**。令 $\tilde{r} = (\mathrm{V}_M)^{\frac{1}{2-n}} r$, $\hat{b} = (\mathrm{V}_M)^{\frac{1}{2-n}} b$。

首先，由余面积公式和 (2.6)，我们回忆起 $\int_{b\leq r}|\nabla b|^2 = \omega_n r^n$，这意味着

$$\int_{\hat{b}\leq r} |\nabla \hat{b}|^2 = \mathrm{V}_M \omega_n r^n$$

由格林公式和 $\Delta b = (n-1)\frac{|\nabla b|^2}{b}$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\hat{b}\leq r} \nabla\hat{b}\cdot\nabla\rho &= -\int_{\hat{b}\leq r}\Delta\hat{b}\cdot\rho + \int_{\hat{b}=r}|\nabla\hat{b}|\cdot\rho \\ &= -(n-1)\int_{\hat{b}\leq r}\rho\frac{|\nabla\hat{b}|^2}{\hat{b}} + \int_{\hat{b}=r}|\nabla\hat{b}|r + \int_{\hat{b}=r}|\nabla\hat{b}|\cdot(\rho - r).\end{aligned}$$

利用 $\int_{b=r}|\nabla b| = n\omega_n r^{n-1}$，我们有

$$\int_{\hat{b}=r}|\nabla\hat{b}|r = \mathrm{V}_M n\omega_n r^n.$$

注意，由引理 4.6 和引理 4.7，可得

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int_{\hat{b}\leq r}\rho\frac{|\nabla\hat{b}|^2}{\hat{b}} - |\nabla\hat{b}|^2}{V(\hat{b}\leq r)} = 0 \qquad \text{and} \qquad \lim_{r\to\infty}\frac{\int_{\hat{b}=r}|\nabla\hat{b}|\cdot(\rho-r)}{V(\hat{b}\leq r)} = 0.$$

由上文，再次利用引理 4.6,

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\frac{\int_{\hat{b}\leq r}\nabla\hat{b}\cdot\nabla\rho}{V(\hat{b}\leq r)} &= -(n-1)\lim_{r\to\infty}\frac{\int_{\hat{b}\leq r}|\nabla\hat{b}|^2}{V(\hat{b}\leq r)} + \lim_{r\to\infty}\frac{\mathrm{V}_M n\omega_n r^n}{V(\hat{b}\leq r)} \\ &= \lim_{r\to\infty}\frac{\mathrm{V}_M\omega_n r^n}{V(\hat{b}\leq r)} = 1.\end{aligned}$$

最后，

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\frac{\int_{\hat{b}\leq r}|\nabla\hat{b}-\nabla\rho|^2}{V(\hat{b}\leq r)} &= \lim_{r\to\infty}\frac{\int_{\hat{b}\leq r}|\nabla\hat{b}|^2}{V(\hat{b}\leq r)} + \lim_{r\to\infty}\frac{\int_{\hat{b}\leq r}|\nabla\rho|^2}{V(\hat{b}\leq r)} - 2\lim_{r\to\infty}\frac{\int_{\hat{b}\leq r}\nabla\hat{b}\cdot\nabla\rho}{V(\hat{b}\leq r)} \\ &= \lim_{r\to\infty}\frac{\mathrm{V}_M\omega_n r^n}{V(\hat{b}\leq r)} + 1 - 2 = 0.\end{aligned} \tag{4.18}$$

步骤（2）。注意，我们有

$$\frac{\int_{b\le r}\left||\nabla b|^3-(\mathrm{V}_M)^{\frac{3}{n-2}}\right|}{r^n}=(\mathrm{V}_M)^{\frac{3-n}{n-2}}\frac{\int_{\hat{b}\le\tilde{r}}\left||\nabla\hat{b}|^3-1\right|}{\tilde{r}^n}.$$

由 (4.18)、引理 4.7 和引理 4.6，并利用 Bishop-Gromov 体积比较定理，我们得到

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\int_{\hat{b}\le r}\left||\nabla\hat{b}|^3-1\right|}{r^n}&\le C(\mathrm{V}_M)\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\int_{\hat{b}\le r}\left||\nabla\hat{b}|-1\right|}{r^n}\le C\cdot\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\int_{\hat{b}\le r}\left|\nabla\hat{b}-\nabla\rho\right|}{r^n}\\&\le C\cdot\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\left(\int_{\hat{b}\le r}\left|\nabla\hat{b}-\nabla\rho\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{r^n}\cdot V(\hat{b}\le r)^{\frac{1}{2}}\\&\le C\cdot\Big(\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\int_{\hat{b}\le r}\left|\nabla\hat{b}-\nabla\rho\right|^2}{V(\hat{b}\le r)}\Big)^{\frac{1}{2}}=0,\end{aligned}$$

这意味着 $\lim_{r\to\infty}\frac{\int_{b\le r}\left||\nabla\hat{b}|^3-1\right|}{r_n}=0$。

因此，由上述结果和引理 4.6，我们有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int_{b\le r}|\nabla b|^3}{r^n}=(\mathrm{V}_M)^{\frac{3}{n-2}}\lim_{r\to\infty}\frac{V(b\le r)}{r^n}=(\mathrm{V}_M)^{\frac{3-n}{n-2}}\lim_{r\to\infty}\frac{V(\rho\le r)}{r^n}=(\mathrm{V}_M)^{\frac{1}{n-2}}\omega_n.$$

□

我们将反复使用以下 Bochner 公式的变体，为方便起见，将其表述为一个引理。

引理 4.9. 对于任意光滑函数 v，我们有

$$\Delta|\nabla v|=\frac{|\nabla^2 v|^2-|\nabla^2 v(\frac{\nabla v}{|\nabla v|})|^2}{|\nabla v|}+\langle\frac{\nabla v}{|\nabla v|},\nabla(\Delta v)\rangle+\mathrm{Ric}(\frac{\nabla v}{|\nabla v|},\frac{\nabla v}{|\nabla v|})\cdot|\nabla v|,\tag{4.19}$$

证明： 由 $|\nabla v|$ 的标准 Bochner 公式，

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla v|^2)=|\nabla^2 v|^2+\langle\nabla v,\nabla(\Delta v)\rangle+\mathrm{Ric}(\nabla v,\nabla v).$$

注意，我们有

$$\Delta|\nabla v|=\frac{1}{2|\nabla v|}\Delta(|\nabla v|^2)-\frac{|\nabla|\nabla v||^2}{|\nabla v|}.$$

并且由

$$\nabla|\nabla v|^2=2\langle\nabla\nabla v,\nabla v\rangle=2\nabla^2 v(\nabla v),$$

我们得到 $\nabla|\nabla v|=\nabla^2 v(\frac{\nabla v}{|\nabla v|})$。

Thus

$$\begin{aligned}\Delta|\nabla v|&=\frac{1}{|\nabla v|}\Big[|\nabla^2 v|^2+\langle\nabla v,\nabla(\Delta v)\rangle+\mathrm{Ric}(\nabla v,\nabla v)\Big]-\frac{|\nabla^2 v(\frac{\nabla v}{|\nabla v|})|^2}{|\nabla v|}\\&=\frac{|\nabla^2 v|^2-|\nabla^2 v(\frac{\nabla v}{|\nabla v|})|^2}{|\nabla v|}+\frac{\langle\nabla v,\nabla(\Delta v)\rangle}{|\nabla v|}+\frac{\mathrm{Ric}(\nabla v,\nabla v)}{|\nabla v|}.\end{aligned}$$

□

5. 加权体积及其渐近行为

定义

$$\mathcal{S} := \{t \in \mathbb{R}^+ : |\nabla b(x)| = 0 \text{ for some } x \in b^{-1}(t)\},$$

由萨德定理可知 $\mathcal{L}^1(\mathcal{S}) = 0$。

我们定义$x \in M^n$ 的加权体积：$b(x) = t\}$ 如下：

$$\mathcal{A}(t) := t^{1-n} \int_{b=t} |\nabla b|^2, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

本节中我们始终假设 $\vec{n} = \frac{\nabla b}{|\nabla b|}$。

定义 5.1. 设 $E \subset M$，且 $\nu(x)$ 是 T_xM 中的单位向量。定义 $H_r^+(x) = \{w \in T_xM : |w| < r, \nu(x) \cdot w \geq 0\}$，如果

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^n(E \cap \exp_x(H_r^+(x)))}{r^n} = 0,$$

则称 $\nu(x)$ 为 E 在 x 处的测度论意义下的单位外法向量。

引理5.2. 我们有 $\mathcal{A}' \in C(\mathbb{R}^+)$ 以及

$$\mathcal{A}'(r) = r^{1-n} \int_{b=r} \langle \nabla |\nabla b|, \vec{n} \rangle, \quad \forall r > 0,$$

$$\frac{\mathcal{A}'(t)}{t^{n-3}} - \frac{\mathcal{A}'(s)}{s^{n-3}} \geq \int_{s<b<t} \left\{ \frac{\mathrm{Ric}(\vec{n},\vec{n}) + |\Pi_0|^2 + \frac{|\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})|^2}{(n-1)|\nabla b|^2}}{b^{2n-4}} \right\} |\nabla b| \geq 0, \quad 0 < s < t < \infty.$$

注5.3. 通过考察基本单调量的导数来导出几何信息的策略，在几何分析中有着深厚的根源。

经典例子包括极小曲面的单调性公式，其中面积比的导数控制第二基本形式，以及调和函数的 *Almgren* 频率函数，其导数度量了对齐次性的偏离。

本着同样的精神，对量 $\frac{\mathcal{A}'(t)}{t^{n-3}}$ 及其单调性的~~分~~析，可作为探究 b 的等值集几何的高阶探针。

其非减性质直接由条件 $\mathrm{Ric} \geq 0$ 推出，并将里奇曲率、无迹第二基本形式以及 b 的海森矩阵的综合效应整合为一个强有力的微分不等式。这一形式体系正是最终驱动标量曲率渐近积分估计的引擎。

证明。**步骤（1）**。对于任意$r > 0$，我们定义

$$Z(r) := \{x \in M^n : b(x) = r, |\nabla b|(x) = 0\}.$$

根据 [Che76，定理 2.2], 我们知道

$$\mathcal{H}^{n-1}(b^{-1}(r)) < \infty, \qquad \mathcal{H}^{n-1}(Z(r)) = 0, \qquad \forall r > 0. \tag{5.1}$$

对于$t > s \geq 0$，定义$D = \{x \in M : s < b(x) < t\}$。令 $\partial_* D$ 按 (3.1) 定义，

因此我们得到

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* D) \le \mathcal{H}^{n-1}(b^{-1}(s) \cup b^{-1}(t)) < \infty,$$

这意味着，根据 [EG92，定理 5.23]，D 是一个有限周长集。

设 $\vec{n} = \frac{\nabla b}{|\nabla b|}$ 当 $\nabla b \neq 0$ 且 $\vec{n} = 0$ 若 $\nabla b = 0$。令 $\vec{v}$ 为 $\partial_* D$ 的测度论意义下的单位外法向量。注意，由于光滑性，在 $b^{-1}(t)\backslash Z(t)$ 上，$\vec{v} = \vec{n}$；在 $b^{-1}(s)\backslash Z(s)$ 上，$\vec{v} = -\vec{n}$。现在根据 [EG92，定理 5.16]，我们得到

$$\int_{\partial_* D} \langle b^{1-n}|\nabla b|\nabla b, \vec{v}\rangle = \int_D \operatorname{div}(b^{1-n}|\nabla b|\nabla b). \tag{5.2}$$

根据 $\partial_* D$ 的定义以及隐函数定理，我们有

$$(b^{-1}(s)\backslash Z(s)) \cup (b^{-1}(t)\backslash Z(t)) \subset \partial_* D \subset \partial D = b^{-1}(s) \cup b^{-1}(t),$$

这意味着

$$\mathcal{H}^{n-1}(b^{-1}(s) \cup b^{-1}(t)\backslash \partial_* D) = 0. \tag{5.3}$$

对于$t > s \ge 0$，由（5.3）和（5.2），可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(s) &= \int_{b^{-1}(t)\backslash Z(t)} \langle b^{1-n}|\nabla b|\nabla b, \vec{n}\rangle - \int_{b^{-1}(s)\backslash Z(s)} \langle b^{1-n}|\nabla b|\nabla b, \vec{n}\rangle \\
&= \int_{\partial_* D} \langle b^{1-n}|\nabla b|\nabla b, \vec{v}\rangle = \int_D \operatorname{div}(b^{1-n}|\nabla b|\nabla b) \\
&= \int_D (1-n) b^{-n}|\nabla b|^3 + b^{1-n}\langle \nabla|\nabla b|, \nabla b\rangle + b^{1-n}|\nabla b|\Delta b
\end{aligned}$$

利用 $\Delta b = (n-1)\frac{|\nabla b|^2}{b}$ 和余面积公式，可得

$$\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(s) = \int_{s<b<t} b^{1-n}\langle \nabla|\nabla b|, \nabla b\rangle = \int_s^t \mathrm{d}r \int_{b=r} b^{1-n}\langle \nabla|\nabla b|, \vec{n}\rangle. \tag{5.4}$$

步骤（2）。现在我们计算$\operatorname{div}(\frac{\nabla|\nabla b|}{b_{2n-4}})$如下：

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla|\nabla b|}{b^{2n-4}}\right) = \frac{\Delta|\nabla b|}{b^{2n-4}} - (2n-4)\frac{\nabla b \cdot \nabla|\nabla b|}{b^{2n-3}}.$$

利用引理 4.9 和 (2.1)，我们得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\frac{\nabla|\nabla b|}{b^{2n-4}}\right) &= \frac{1}{b^{2n-4}} \cdot \left\{ \frac{|\nabla^2 b|^2 - |\nabla^2 b(\vec{n})|^2}{|\nabla b|} + \langle \vec{n}, \nabla(\Delta b)\rangle + \mathrm{Ric}(\vec{n}, \vec{n}) \cdot |\nabla b| \right\} \\
&\quad + (4-2n)\frac{|\nabla b|}{b^{2n-3}} \cdot \nabla^2 b(\vec{n}, \vec{n}) \\
&= \frac{1}{b^{2n-4}} \cdot \left\{ \frac{|\nabla^2 b|^2 - |\nabla^2 b(\vec{n})|^2}{|\nabla b|} + \mathrm{Ric}(\vec{n}, \vec{n}) \cdot |\nabla b| \right. \\
&\quad \left. + \langle \vec{n}, \nabla\left[(n-1)\frac{|\nabla b|^2}{b}\right]\rangle \right\} + (4-2n)\frac{|\nabla b|}{b^{2n-3}} \cdot \nabla^2 b(\vec{n}, \vec{n}) \\
&= \frac{\mathrm{Ric}(\vec{n}, \vec{n}) \cdot |\nabla b|}{b^{2n-4}} + 2\frac{|\nabla b| \cdot \nabla^2 b(\vec{n}, \vec{n})}{b^{2n-3}} + \frac{|\nabla^2 b|^2 - |\nabla^2 b(\vec{n})|^2}{b^{2n-4}|\nabla b|} - \frac{n-1}{b^{2n-2}}|\nabla b|^3.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

由 $\frac{\nabla|\nabla b|^2}{2}b = \frac{1}{n-1}\Delta b$ 以及 (5.5)，可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\frac{\nabla|\nabla b|}{b^{2n-4}}\right) &= \frac{\mathrm{Ric}(\vec{n},\vec{n})\cdot|\nabla b|^2 + |\nabla^2 b|^2 - |\nabla^2 b(\vec{n})|^2 + 2\frac{\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})}{b}|\nabla b|^2 - \frac{n-1}{b^2}|\nabla b|^4}{b^{2n-4}|\nabla b|} \\
&= \frac{\mathrm{Ric}(\vec{n},\vec{n})\cdot|\nabla b|^2 + |\nabla^2 b|^2 - |\nabla^2 b(\vec{n})|^2 + 2\frac{\Delta b}{n-1}\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n}) - \frac{(\Delta b)^2}{n-1}}{b^{2n-4}|\nabla b|}. \\
&\geq \frac{\mathrm{Ric}(\vec{n},\vec{n})\cdot|\nabla b|^2 + \sum_{i=1}^{n-1}|\nabla^2 b(i,i)|^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\nabla^2 b(i,i)\right)^2}{n-1} + \frac{|\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})|^2}{n-1}}{b^{2n-4}|\nabla b|} \\
&= \frac{\mathrm{Ric}(\vec{n},\vec{n})\cdot|\nabla b|^2 + \sum_{i=1}^{n-1}[\nabla^2 b(i,i) - \frac{\sum_{j=1}^{n-1}\nabla^2 b(j,j)}{n-1}]^2 + \frac{|\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})|^2}{n-1}}{b^{2n-4}|\nabla b|} \\
&= \frac{\mathrm{Ric}(\vec{n},\vec{n})\cdot|\nabla b|^2 + |\prod_0|^2\cdot|\nabla b|^2 + \frac{|\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})|^2}{n-1}}{b^{2n-4}|\nabla b|} \geq 0,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

其中，$|\Pi_0|$ 是$b^{-1}(t)$的无迹第二基本形式。

定义 $\hat{A}(r) = \int_{b=r} b^{4-2n}\langle\nabla|\nabla b|, \vec{n}\rangle$，然后类似于步骤（1），并应用散度定理（我们采用与 [AFM20 中引理 3.7]类似的近似，使得可以应用散度定理），得到

$$\hat{A}(t) - \hat{A}(s) = \int_{s<b<t}\operatorname{div}\left(\frac{\nabla|\nabla b|}{b^{2n-4}}\right). \tag{5.7}$$

步骤（3）。注意

$$|\hat{A}(r)| \leq \int_{b=r} b^{4-2n}|\nabla^2 b| < \infty, \qquad \forall r > 0. \tag{5.8}$$

因此，由（5.7）、（5.6）和（5.8），可得

$$\int_{s<b<t}\left|\operatorname{div}\left(\frac{\nabla|\nabla b|}{b^{2n-4}}\right)\right| = \int_{s<b<t}\operatorname{div}\left(\frac{\nabla|\nabla b|}{b^{2n-4}}\right) = \hat{A}(t) - \hat{A}(s) < \infty, \qquad \forall 0 < s \leq t < \infty. \tag{5.9}$$

由余面积公式和 Fubini 定理，可得

$$\hat{A}(t) - \hat{A}(s) = \int_{s<r<t} dr \int_{b=r}\frac{1}{|\nabla b|}\cdot\operatorname{div}\left(\frac{\nabla|\nabla b|}{b^{2n-4}}\right), \tag{5.10}$$

现在，由于积分关于变量s、t的连续性，利用（5.10）可得$\hat{A}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$是连续的。

现在由（5.4）可得

$$\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(s) = \int_s^t r^{n-3}\hat{A}(r)dr, \tag{5.11}$$

由$\hat{A}$的连续性和（5.11），我们得到

$$\mathcal{A}'(r) = \hat{A}(r) = \int_{b=r} b^{1-n}\langle\nabla|\nabla b|, \vec{n}\rangle, \qquad \forall r > 0.$$

□

引理 5.4. 设 H 是等值集 $\{x \in M^n : b(x) = t\} \subseteq M^n$ 的平均曲率，则

$$H = \frac{(n-1)|\nabla b|}{b} - \frac{\nabla^2 b(\vec{n}, \vec{n})}{|\nabla b|}.$$

证明： 根据平均曲率的定义，对于任意光滑函数v，我们有

$$H = \frac{\Delta v}{|\nabla v|} - \frac{\nabla^2 v(\vec{n}, \vec{n})}{|\nabla v|}, \tag{5.12}$$

其中，H 是等值集 $\{x : v(x) = t\}$ 的平均曲率。

结论由 (5.12) 和 (2.1) 得出。 □

推论 5.5。对于 $0 < t_1 \le t_2$,我们有

$$\mathcal{A}'(t_1) \le \mathcal{A}'(t_2) \le 0,$$
$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in\mathbb{R}^+}} \mathcal{A}'(t) = 0.$$

证明： **步骤（1）**。我们假设 $c_1 := \varliminf_{t\to\infty} \mathcal{A}'(t)$，注意到 $c_1 \in [-\infty, \infty]$。我们将证明$c_1 \le 0$。

反证，若 $c_1 > 0$，则存在 $\epsilon > 0$ 且 $t_0 > 0$，使得

$$\inf_{t\ge t_0} \mathcal{A}'(t) \ge \epsilon.$$

现在，对于任意$t_1 > t_0$,，我们有

$$\mathcal{A}(t_1) = \mathcal{A}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{A}'(t)dt \ge \mathcal{A}(t_0) + \epsilon \cdot [t_1 - t_0].$$

因此由引理 4.7 和 (2.6),

$$\mathcal{A}(t_1) \le t_1^{1-n} \int_{b=t_1} |\nabla b| = \lim_{r\to 0} r^{1-n} \int_{b=r} |\nabla b| = n\omega_n.$$

因此我们得到

$$n\omega_n \ge \mathcal{A}(t_0) + \epsilon \cdot [t_1 - t_0].$$

因此我们有 $n\omega_n - \mathcal{A}(t_0)\ t_1 - t_0 \ge \epsilon$。令 $t_1 \to \infty$，我们得到

$$0 \ge \epsilon,$$

这是一个矛盾。因此我们得到$c_1 \le 0$。

步骤（2）。由 $\varliminf_{t\to\infty} \mathcal{A}'(t) = c_1 \le 0$，我们得到

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{\mathcal{A}'(t)}{t^{n-3}} \le 0. \tag{5.13}$$

由引理5.2可知，$\mathcal{A}'(t)\ t^{n-3}$ 是关于t的非减函数，因此极限 $\lim_{t\to\infty} \mathcal{A}'(t)\ t^{n-3}$ 存在。 ——

现在由（5.13），我们得到

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathcal{A}'(t)}{t^{n-3}} = \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\mathcal{A}'(t)}{t^{n-3}} \le 0.$$

再次由引理5.2，我们得到

$$\frac{\mathcal{A}'(s)}{s^{n-3}} \le \lim_{t\to\infty} \frac{\mathcal{A}'(t)}{t^{n-3}} \le 0, \qquad \forall s \in \mathbb{R}^+.$$

由引理5.2可知，$\mathcal{A}'(t)\ t^{n-3}$ 是关于t的非减函数，并且

$$\mathcal{A}'(t_1) \le \frac{t_1^{n-3}}{t_2^{n-3}} \mathcal{A}'(t_2) \le \mathcal{A}'(t_2), \qquad \forall 0 < t_1 \le t_2 < \infty. \tag{5.14}$$

因此，极限$c_2 := \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}'(t) \in [-\infty, 0]$ 存在。

步骤（3）。若$c_2 < 0$，则由（5.14）可知

$$\mathcal{A}'(t) \le c_2 < 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

因此对任意 $t > 1$，我们有

$$0 \le \mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(1) + \int_1^t \mathcal{A}'(s)ds \le \mathcal{A}(1) + c_2 \cdot (t-1).$$

在上式中令 $t \to \infty$，注意到 $c_2 < 0$，我们得到

$$0 \le -\infty,$$

这是一个矛盾。因此我们有 $\lim_{t\to\infty} \mathcal{A}'(t) = 0$。 □

下面的引理是 [Col12]中定理2.12的类似结果。

引理 5.6. 对于完备的非紧黎曼流形 M^n，它是非抛物的且 $Rc \ge 0$，我们有

$$\lim_{r\to\infty} \mathcal{A}(r) = n\omega_n (\mathrm{V}_M)^{\frac{1}{n-2}}$$

证明：由推论 5.5，我们知道 $\lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(t)$ 存在。

另一方面，由洛必达法则，

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\int_{b\le r} |\nabla b|^3}{r^n} = \lim_{r\to\infty} \frac{\int_{b=r} |\nabla b|^2}{nr^{n-1}} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{n} \mathcal{A}(r). \tag{5.15}$$

结论由推论 4.8 和 (5.15) 得出。 □

命题 5.7. 对于满足 $Rc \ge 0$ 且为非抛物型的完备非紧黎曼流形 M^n，我们有

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\int_{b\le r} |\nabla b|[|\Pi_0|^2 + Rc(\vec{n})] + \frac{|\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})|^2}{(n-1)|\nabla b|}}{r^{n-2}} = 0.$$

证明： 对 (5.6) 关于t 从 0 到r积分，利用推论 5.5，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\int_{b\le r}\left\{\mathrm{Ric}(\vec{n},\vec{n})|\nabla b|+|\Pi_0|^2\cdot|\nabla b|+\frac{|\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})|^2}{(n-1)|\nabla b|}\right\}}{r^{n-2}}\le\frac{\int_{b\le r}\mathrm{div}(\frac{\nabla|\nabla b|}{b^{2n-4}})\cdot b^{2n-4}}{r^{n-2}}\\
&=\frac{\int_{b\le r}\Delta|\nabla b|-(2n-4)\frac{\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})}{b}\cdot|\nabla b|}{r^{n-2}}\\
&=r^{2-n}\int_{b=r}\nabla_{\vec{n}}|\nabla b|-(2n-4)\frac{\int_0^r dt\int_{b=t}\frac{\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})}{b}}{r^{n-2}}\\
&=r\mathcal{A}'(r)-(2n-4)\frac{\int_0^r\mathcal{A}'(t)t^{n-2}dt}{r^{n-2}}\\
&\le-(2n-4)\frac{\int_0^r\mathcal{A}'(t)t^{n-2}dt}{r^{n-2}}.
\end{aligned}$$

利用分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\int_{b\le r}\left\{\mathrm{Ric}(\vec{n},\vec{n})|\nabla b|+|\Pi_0|^2\cdot|\nabla b|+\frac{|\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})|^2}{(n-1)|\nabla b|}\right\}}{r^{n-2}}\le-(2n-4)\frac{\int_0^r\mathcal{A}'(t)t^{n-2}dt}{r^{n-2}}\\
&=-(2n-4)\frac{r^{n-2}\mathcal{A}(r)-(n-2)\int_0^r\mathcal{A}(t)t^{n-3}dt}{r^{n-2}}\\
&=(2n-4)\left[-\mathcal{A}(r)+(n-2)\frac{\int_0^r\mathcal{A}(t)t^{n-3}dt}{r^{n-2}}\right].
\end{aligned}\tag{5.16}$$

对（5.16）取上极限，利用洛必达法则和引理 5.6，我们得到

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\int_{b\le r}|\nabla b|[|\Pi_0|^2+Rc(\vec{n})]+\frac{|\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})|^2}{(n-1)|\nabla b|}}{r^{n-2}}\le(2n-4)\Big\{-\lim_{r\to\infty}\mathcal{A}(r)+\lim_{r\to\infty}\mathcal{A}(r)\Big\}=0.$$

□

命题 5.8. 对于一个完备非紧黎曼流形 M^n，若其为非抛物型且 $Rc\ge 0$，则有

$$\lim_{r\to\infty}r^{2-n}\int_{b\le r}|\nabla b|\cdot H^2=\frac{(n-1)^2n}{n-2}\omega_n(\mathrm{V}_M)^{\frac{1}{n-2}},$$

其中，H 是 b 的等值集相对于法向量$\nabla b/|\nabla b|$的平均曲率。

证明： 利用 $\Delta b=(n-1)\frac{|\nabla b|^2}{b}$，由 (5.12)、命题 5.7 和洛必达法则可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to\infty}r^{2-n}\int_{b\le r}|\nabla b|\cdot H^2\\
&=\lim_{r\to\infty}r^{2-n}\int_{b\le r}|\nabla b|\cdot\Big(\frac{\Delta b}{|\nabla b|}-\frac{\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})}{|\nabla b|}\Big)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{r\to\infty} \frac{\int_{b\le r} |\nabla b| \cdot \left(\frac{\Delta b}{|\nabla b|}\right)^2}{r^{n-2}} + \frac{\int_{b\le r} |\nabla b| \cdot \left(\frac{\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})}{|\nabla b|}\right)^2}{r^{n-2}} - 2\frac{\int_{b\le r} \Delta b \frac{\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})}{|\nabla b|}}{r^{n-2}} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{(n-1)^2 \int_{b\le r} \frac{|\nabla b|^3}{b^2}}{r^{n-2}} + \frac{\int_{b\le r} \frac{|\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})|^2}{|\nabla b|}}{r^{n-2}} - 2(n-1)\frac{\int_{b\le r} |\nabla b| \frac{\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})}{b}}{r^{n-2}} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{(n-1)^2 \int_{b=r} \frac{|\nabla b|^2}{b^2}}{(n-2)r^{n-3}} - 2(n-1)\frac{\int_{b\le r} |\nabla b| \frac{\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})}{b}}{r^{n-2}} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{(n-1)^2}{1} \mathcal{A}(r) - 2(n-1)\frac{\int_{b\le r} |\nabla b| \frac{\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})}{b}}{r^{n-2}}. \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

注意 $\mathcal{A}'(t) = t^{1-n}\int_{b=t} \nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})$，分部积分可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} \frac{\int_{b\le r} |\nabla b| \frac{\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})}{b}}{r^{n-2}} &= \lim_{r\to\infty} \frac{\int_0^r dt \int_{b=t} \frac{\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})}{b}}{r^{n-2}} = \lim_{r\to\infty} \frac{\int_0^r t^{n-2}\mathcal{A}'(t)dt}{r^{n-2}} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{\mathcal{A}(r)r^{n-2} - (n-2)\int_0^r t^{n-3}\mathcal{A}(t)dt}{r^{n-2}} \\
&= \lim_{r\to\infty} \mathcal{A}(r) - (n-2)\frac{\int_0^r t^{n-3}\mathcal{A}(t)dt}{r^{n-2}}. \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

由引理 5.6 和 (5.18)，利用洛必达法则，可得

$$
\lim_{r\to\infty} \frac{\int_{b\le r} |\nabla b| \frac{\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})}{b}}{r^{n-2}} = \lim_{r\to\infty} \mathcal{A}(r) - \lim_{r\to\infty} \mathcal{A}(r) = 0. \qquad (5.19)
$$

现在由引理 5.6、(5.17) 和 (5.19)，可得

$$
\lim_{r\to\infty} r^{2-n} \int_{b\le r} |\nabla b| \cdot H^2 = \frac{(n-1)^2 n}{n-2} \omega_n (\mathrm{V}_M)^{\frac{1}{n-2}}.
$$

□

6. 标量曲率积分公式

引理 6.1。对于具有 $Rc \ge 0$ 的完备非紧致非抛物黎曼流形 M^n，对任意 $A \subseteq \mathbb{R}^+ - \mathcal{S}$，有

$$
(\mathrm{V}_M)^{\frac{1}{n-2}} \cdot \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{A_r} t^{n-3} dt}{r^{n-2}} \le \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} R(b^{-1}(t)) \cdot |\nabla b|}{(n-2)(n-1)n\omega_n r^{n-2}}, \qquad (6.1)
$$

$$
(\mathrm{V}_M)^{\frac{1}{n-2}} \cdot \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{A_r} t^{n-3} dt}{r^{n-2}} \le \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} R(b^{-1}(t)) \cdot |\nabla b|}{(n-2)(n-1)n\omega_n r^{n-2}}, \qquad (6.2)
$$

其中 $A_r := A \cap (0, r]$ 对任意 $r > 0$。

证明：**步骤（1）**。由高斯方程可得

$$
\begin{aligned}
R(M^n) &= R(b^{-1}(t)) + 2Rc(\vec{n}) - 2\sum_{i\ne j} \lambda_i \lambda_j \\
&= R(b^{-1}(t)) + 2Rc(\vec{n}) - \left(\frac{n-2}{n-1} H^2 - |\Pi_0|^2\right)
\end{aligned}
$$

$$= R(b^{-1}(t)) + 2Rc(\vec{n}) + |\Pi_0|^2 - \frac{n-2}{n-1}H^2. \tag{6.3}$$

由（6.3）和 $R(M^n) \geq 0$，我们得到

$$\frac{\int_{b^{-1}(A_r)} R(b^{-1}(t)) \cdot |\nabla b|}{r^{n-2}} \geq \frac{n-2}{n-1}\frac{\int_{b^{-1}(A_r)} H^2 \cdot |\nabla b|}{r^{n-2}} - \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} [2Rc(\vec{n}) + |\Pi_0|^2] \cdot |\nabla b|}{r^{n-2}}. \tag{6.4}$$

对式（6.4）取极限，由命题 5.7 可得

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} R(b^{-1}(t)) \cdot |\nabla b|}{r^{n-2}} \geq \frac{n-2}{n-1} \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} H^2 \cdot |\nabla b|}{r^{n-2}} \tag{6.5}$$

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} R(b^{-1}(t)) \cdot |\nabla b|}{r^{n-2}} \geq \frac{n-2}{n-1} \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} H^2 \cdot |\nabla b|}{r^{n-2}}. \tag{6.6}$$

步骤（2）。由引理 5.4，我们知道

$$H = \frac{(n-1)|\nabla b|}{b} - \frac{\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})}{|\nabla b|}. \tag{6.7}$$

由式（6.7）和命题 5.7，可得

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} |\nabla b| \cdot H^2}{r^{n-2}} \\
&= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} \left\{(n-1)^2 \frac{|\nabla b|^3}{b^2} - 2(n-1)\frac{|\nabla b|\cdot\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})}{b} + \frac{|\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})|^2}{|\nabla b|}\right\}}{r^{n-2}} \\
&\geq ((n-1)^2 - \epsilon) \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} \frac{|\nabla b|^3}{b^2}}{r^{n-2}} + (1 - \frac{(n-1)^2}{\epsilon}) \lim_{r\to\infty} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} \frac{|\nabla^2 b(\vec{n},\vec{n})|^2}{|\nabla b|}}{r^{n-2}} \\
&\geq ((n-1)^2 - \epsilon) \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} \frac{|\nabla b|^3}{b^2}}{r^{n-2}}.
\end{aligned}$$

令上文中的 $\epsilon \to 0$，可得

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} |\nabla b| \cdot H^2}{r^{n-2}} \geq (n-1)^2 \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} \frac{|\nabla b|^3}{b^2}}{r^{n-2}}.$$

由引理 5.6 及上文，可得

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} |\nabla b| \cdot H^2}{r^{n-2}} \geq (n-1)^2 \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{A_r} dt \int_{b^{-1}(t)} \frac{|\nabla b|^2}{b^2}}{r^{n-2}} \\
&\geq (n-1)^2 \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{A_r} t^{n-3} dt}{r^{n-2}} \cdot \lim_{r\to\infty} \mathcal{A}(r) \qquad (6.8) \\
&= (n-1)^2 n\omega_n (\mathrm{V}_M)^{\frac{1}{n-2}} \cdot \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{A_r} t^{n-3} dt}{r^{n-2}}. \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

同理，我们可以得到

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{b^{-1}(A_r)} |\nabla b| \cdot H^2}{r^{n-2}} \geq (n-1)^2 n\omega_n (\mathrm{V}_M)^{\frac{1}{n-2}} \cdot \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\int_{A_r} t^{n-3} dt}{r^{n-2}}. \tag{6.10}$$

由 (6.5) 和 (6.9)，我们得到 (6.1)。
同样，由 (6.6) 和 (6.10) 可得 (6.2)。 □

定理 6.2. 对于具有 $Rc \geq 0$ 的完备非紧3维黎曼流形(M^3,g)，以下情况之一成立：

(a). M^3 与 $\mathbb{R}^3$ 微分同胚；(b). M^3 的万有覆盖与 $N^2\times\mathbb{R}$ 等距，其中 N^2 是一个截面曲率 $K \geq 0$ 的完备黎曼流形。

证明： 参见 [Liu13，定理 2]（另一种证明亦见 [CMS]）。 □

命题 6.3. 对于具有 $Rc \geq 0$ 的完备非紧黎曼流形(M^3,g)，若(M^3,g) 是非抛物型，则 M^3 与 $\mathbb{R}^3$ 微分同胚。

证明： **步骤（1）**。反设 M^3 不同胚于 $\mathbb{R}^3$。

于是我们考虑M^3的万有覆盖 $\tilde{M}$。由定理 6.2 可得，$\tilde{M}$与$N^2\times\mathbb{R}$等距。

由于M^3 是非抛物型的，$\tilde{M} = N^2\times\mathbb{R}$ 也非抛物型。由 $\pi_1(\tilde{M}) = 0$，我们知道N^2 是一个完备的非紧曲面，其截面曲率$K(N^2) \geq 0$且 $\pi_1(N^2) = 0$。

由 Cheeger-Gromoll 灵魂定理和 $\pi_1(N^2) = 0$，我们知道N^2 与 $\mathbb{R}^2$微分同胚。因此，$\tilde{M}$ 与 $\mathbb{R}^3$微分同胚。

步骤（2）。设 $\Gamma = \pi_1(M)$为覆盖变换群，它在 $\tilde{M} = N^2\times\mathbb{R}$上自由且等距地作用。由于$M$ 不同胚于 $\mathbb{R}^3$，Γ 非平凡。

每个 $\gamma\in\Gamma$ 可分解为 $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2)$，其中 $\gamma_1\in \mathrm{Isom}(N^2)$，且 $\gamma_2\in\mathrm{Isom}(\mathbb{R})$。定义

$$p:\Gamma\to\mathrm{Isom}(\mathbb{R}),\qquad p(\gamma_1,\gamma_2)=\gamma_2,\qquad \forall(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma.$$

若 $p(\Gamma)$ 是平凡的，则 Γ 仅作用于 N^2。因此 $M = (N^2/\Gamma)\times\mathbb{R}$。由 M 是非抛物型的，可得 $S = N^2/\Gamma$ 是一张具有 $K \geq 0$ 且基本群非零的非紧曲面。

由 Cheeger-Gromoll 灵魂定理可知，S与 $S^1\times\mathbb{R}$ 微分同胚。这意味着 S 有两个端。根据 Cheeger-Gromoll 分裂定理，S 与平坦圆柱 $S^1\times\mathbb{R}$ 等距。因此，我们有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{V(B_p(r))}{r^2}<\infty.$$

这与 M^3 是非抛物型的矛盾。

步骤（3）。在下文中，我们假设 $p(\Gamma)$ 是由 $\mathbb{R}$ 上的一个平移生成的无限循环群。

于是我们得到 M 与 $F\times S^1$ 等距（在 $F\times\mathbb{R}$ 上取在 $\mathbb{Z}$ 作用下不变的标准乘积度量，其中 $F = N/\Gamma_0$，对某个 Γ_0）。

因此，M 与$F\times S^1$ 等距，且带有乘积度量，其中F 是一个满足$K \geq 0$的完备曲面。于是我们得到$V(B_p(r)) \leq Cr^2$。

因此，$\overline{\lim_{r\to\infty}} V(B_p(r))\, r^2 < \infty$，这再次导出矛盾。 □

现在我们可以如下去掉 [Xu20a, 引理 3.4] 中的拓扑限制。

引理6.4. 对于一个完备的非抛物型黎曼流形 M^3，若 $Rc \geq 0$，且存在某个 $t > 0$ 使得 $b^{-1}(t)$ 是光滑曲面，那么 $b^{-1}(t)$ 是连通的。

证明：由引理 4.6 可知，$b^{-1}(t)$有界。

若 Ω_1,Ω_2 是$b^{-1}(t)$的两个连通分支，则b的基点（记作q）被唯一的曲面 Ω_i 包围（否则，在由 Ω_1 和 Ω_2 围成的区域上$G \equiv t^{-1}$；由极大值原理和调和函数的唯一延拓可得矛盾）。

注意，M^3 与 $\mathbb{R}^3$微分同胚，因此另一个 Ω_j 围成一个区域 $\Omega \subset M^3$, 和$q \notin \Omega$。再次由极大值原理，Ω 上$G \equiv t^{-1}$，再由调和函数的唯一延拓可得矛盾。□

对于任意$r > 0$，定义

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T} := \{t \in \mathbb{R}^+ - \mathcal{S} : b^{-1}(t) \text{ is diffeomorphic to } \mathbb{T}^2\},\\
&\mathcal{B} := \{t \in \mathbb{R}^+ - \mathcal{S} : \text{the genus of } b^{-1}(t) \text{ is greater than 1}\},\\
&\mathcal{G} := \{t \in \mathbb{R}^+ - \mathcal{S} : b^{-1}(t) \text{ is diffeomorphic to } \mathbb{S}^2\},\\
&\mathcal{T}_r = \mathcal{T} \cap (0, r], \qquad \mathcal{B}_r = \mathcal{B} \cap (0, r], \qquad \mathcal{G}_r = \mathcal{G} \cap (0, r].
\end{aligned}$$

引理 6.5. 对于一个完备的非抛物型黎曼流形 M^3，若 $Rc \geq 0$，则有

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}^1(\mathcal{B}_r)}{r} = 0. \tag{6.11}$$

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\int_{\mathcal{B}_r \cup \mathcal{T}_r} dt \int_{b^{-1}(t)} R(b^{-1}(t))}{r} = 0. \tag{6.12}$$

并且，如果 M^3 具有最大体积增长，那么

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}^1(\mathcal{T}_r \cup \mathcal{B}_r)}{r} = 0. \tag{6.13}$$

证明：**步骤（1）**。由引理 6.1 和高斯-博内定理可得

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathrm{V}_M \cdot \varliminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}^1(\mathcal{B}_r)}{r} &\leq \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\int_{b^{-1}(\mathcal{B}_r)} R(b^{-1}(t)) \cdot |\nabla b|}{8\pi r},\\
= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\int_{\mathcal{B}_r} dt \int_{b^{-1}(t)} R(b^{-1}(t))}{8\pi r} &\leq - \varliminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}^1(\mathcal{B}_r)}{r} \leq 0.
\end{aligned}$$

于是得到 (6.11)。

由高斯-博内定理可知，对于任意$t \in \mathcal{T}_r \cup \mathcal{B}_r$，$\int_{b^{-1}(t)} R(b^{-1}(t)) \leq 0$，因此

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\int_{\mathcal{T}_r \cup \mathcal{B}_r} dt \int_{b^{-1}(t)} R(b^{-1}(t))}{8\pi r} \leq 0. \tag{6.14}$$

另一方面，由引理 6.1 可得

$$0 \leq \mathrm{V}_M \cdot \varliminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}^1(\mathcal{T}_r \cup \mathcal{B}_r)}{r} \leq \varliminf_{r\to\infty} \frac{\int_{b^{-1}(\mathcal{T}_r \cup \mathcal{B}_r)} R(b^{-1}(t)) \cdot |\nabla b|}{8\pi r},$$

$$= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\int_{\mathcal{T}_r\cup\mathcal{B}_r} dt \int_{b^{-1}(t)} R(b^{-1}(t))}{8\pi r}. \tag{6.15}$$

结合 (6.15) 和 (6.14)，可得 (6.12)。

步骤（2）。由引理 6.1 和（6.14），可得

$$\begin{aligned} 0 \le \mathrm{V}_M \cdot \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}^1(\mathcal{T}_r \cup \mathcal{B}_r)}{r} &\le \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\int_{b^{-1}(\mathcal{T}_r\cup\mathcal{B}_r)} R(b^{-1}(t)) \cdot |\nabla b|}{8\pi r}, \\ = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\int_{\mathcal{T}_r\cup\mathcal{B}_r} dt \int_{b^{-1}(t)} R(b^{-1}(t))}{8\pi r} &\le 0. \end{aligned}$$

这意味着 $\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}^1(\mathcal{T}_r \cup \mathcal{B}_r)}{r} = 0$ by $\mathrm{V}_M > 0$，因此（6.13）得证。 □

本节的主要结果如下。

定理 6.6。对于一个完备、非抛物型黎曼流形 M^3，其 $Rc \ge 0$ 且具有最大体积增长，有

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\int_{b\le r} R \cdot |\nabla b|}{r} = 8\pi[1 - \mathrm{V}_M].$$

证明：由命题 6.3 可知，M^3 与 $\mathbb{R}^3$微分同胚。现在利用引理 6.4，可知每个光滑曲面$b^{-1}(t)$都是连通的。

根据 $\mathcal{G}_r$ 的定义和高斯-博内定理，我们得到

$$\int_{b^{-1}(t)} R(b^{-1}(t)) = 8\pi, \qquad \forall t \in \mathcal{G}_r. \tag{6.16}$$

现在，由引理 6.5 和 (6.16)，我们有

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to\infty} \frac{\int_{(0,r]-\mathcal{S}} dt \int_{b^{-1}(t)} R(b^{-1}(t))}{r} \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{\int_{\mathcal{G}_r} dt \int_{b^{-1}(t)} R(b^{-1}(t))}{r} + \lim_{r\to\infty} \frac{\int_{\mathcal{B}_r\cup\mathcal{T}_r} dt \int_{b^{-1}(t)} R(b^{-1}(t))}{r} \\ &= 8\pi \cdot \lim_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}^1(\mathcal{G}_r)}{r} + 0 = 8\pi. \end{aligned} \tag{6.17}$$

根据高斯方程，我们有

$$R(M^n) = R(b^{-1}(t)) + 2Rc(\vec{n}) + |\Pi_0|^2 - \frac{1}{2}H^2. \tag{6.18}$$

根据命题 5.7 和命题 5.8，利用 (6.18) 和 (6.17)，我们得到

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\int_{b\le r} R \cdot |\nabla b|}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\int_0^r dt \int_{b^{-1}(t)} R(b^{-1}(t))}{r} - 8\pi\mathrm{V}_M = 8\pi[1 - \mathrm{V}_M].$$

□

推论 6.7. 假设(M^3, g) 是一个完备黎曼流形，且 $Rc \ge \epsilon \cdot R \cdot g \ge 0$，其中 $\epsilon > 0$ 是一个固定常数。此外，假设(M^3, g) 具有最大体积增长，则 M^3 与 $\mathbb{R}^3$等距。

证明： 由命题 5.7 和定理 6.6，可得

$$0 = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_{b\le r} Rc(\vec{n}) \cdot |\nabla b| \ge \epsilon \cdot \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_{b\le r} R \cdot |\nabla b| = \epsilon \cdot 8\pi(1 - \mathrm{V}_{M^3}).$$

因此我们得到 $\mathrm{V}_{M^3} = 1$，这意味着M^3 与 $\mathbb{R}^3$ 等距，这是由 Bishop–Gromov 体积比较定理的刚性部分得出的。

□

参考文献

[AFM20] Virginia Agostiniani、Mattia Fogagnolo 和 Lorenzo Mazzieri，非负里奇曲率流形中闭超曲面的尖锐几何不等式，《数学发明》222（2020），第3期，1033–1101，DOI 10.1007/s00222-020-00985-4。MR4169055[Cha06] Isaac Chavel，黎曼几何，第二版，《高等数学研究丛书：剑桥研究》，第98卷，剑桥大学出版社，剑桥，2006年。现代导论。[CC96] Jeff Cheeger 和 Tobias H. Colding，里奇曲率下界与扭曲积的几乎刚性，《数学年刊》（第2辑）144（1996），第1期，189–237，DOI 10.2307/2118589。MR1405949[CZ00] 陈秉隆 和 朱熹平，具有逐点夹逼曲率的完备黎曼流形，《数学发明》140（2000），第2期，423–452，DOI 10.1007/s002220000061。MR1757002[Che76] S. Y. Cheng，特征函数与节点集，《瑞士数学评论》51 1，43 1976 55，10 1007 02568142（ ），第–期，DOI . /BF 。[CY75] S. Y. Cheng 和 S. T. Yau，黎曼流形上的微分方程及其几何应用，《纯粹与应用数学通讯》28（1975），第3期，333–354，DOI 10.1002/cpa.3160280303。[CV35] Stefan Cohn-Vossen，曲面上的最短路径与总曲率，《组合数学》2（1935），69–133。[Col12] Tobias H. Colding，里奇曲率的新单调性公式及其应用；I，《数学学报》209（2012），第2期，229–263。[CMI14] Tobias Holck Colding 和 William P. Minicozzi II，里奇曲率与调和函数的单调性，《变分法与偏微分方程》49（2014），第3–4期，1045–1059，DOI 10.1007/s00526-013-0610-z。[CM97] Tobias H. Colding 和 William P. Minicozzi II，薛定谔算子核的大尺度行为，《美国数学杂志》119（1997），第6期，1355–1398。[CMS] Alessandro Cucinotta、Mattia Magnabosco 和 Daniele Semola，非负里奇曲率空间的新拓扑限制，arXiv：

2601 14231 1 。v

[ ]

math.DG 。[DSS25] Alix Deruelle、Felix Schulze 和 Miles Simon，Ricci 流与三维里奇曲率夹逼流形的初始稳定性估计，《杜克数学杂志》174（2025），第15期，3317–3376，DOI 10.1215/00127094-2025-0018。MR4982517[EG92] Lawrence C. Evans 和 Ronald F. Gariepy，函数的测度论与精细性质，《高等数学研究丛书》，CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，1992年。[Har64] Philip Hartman，大范围内的测地平行坐标，《美国数学杂志》86（1964），705–727，DOI 10.2307/2373154。MR0173222[Hub57] Alfred Huber，关于次调和函数与大范围微分几何，《瑞士数学评论》32（1957），13–72，DOI 10.1007/BF02564570。MR0094452[HK24] Gerhard Huisken 和 Thomas Koerber，逆平均曲率流与里奇曲率夹逼三维流形，《纯粹与应用数学杂志》814（2024），1–8，DOI 10.1515/crelle-2024-0040。MR4793336

[LTW25] Mao-Chun Lee 和 Peter M. Topping，具有非负针状里奇曲率的三维流形，《微分几何杂志》131（2025），第3期，633–651，DOI 10.4310/1760725985.4975490。/jdg/。MR Li Peter Li，《几何分析》，《剑桥高等数学研究丛书》第134卷，剑桥大学出版社，剑桥，2012。[LTW97] Peter Li、Luen-Fai Tam 和 Jiaping Wang，格林函数与热核的精确界，《数学研究快报》4（1997），第4期，589–602，DOI 10.4310/MRL.1997.v4.n4.a13。[Liu13] Gang Liu，具有非负里奇曲率的三维流形，《数学发明》193（2013），第3期，367–375，DOI 10.1007/s00222-012-0428-x。[Lot24] John Lott，关于点态针状非负里奇曲率的三维流形，《数学年刊》388（2024），第3期，2787–2806，DOI 10.1007/s00208-023-02596-9。MR4705753[MW25] Ovidiu Munteanu 和 Jiaping Wang，三维流形上标量曲率的精确积分界，arXiv:2505.10520v1 [math.DG（2025）。[SY10] Richard Schoen 和丘成桐，《微分几何讲义》，国际出版社，马萨诸塞州剑桥，432页，2010。[Xu20a] Guoyi Xu，非抛物流形上的标量曲率积分，《几何分析杂志》30（2020, 1, 901–909, 10.1007/s12220-019-00174-7.4058542），第—期，DOI 。/s - - - 。MR Xu b 调和函数的增长率，《伦敦数学学会杂志》（）101（2020），第3期，1298–1319，DOI 10.1112/jlms.12306。MR[Xu 带极点流形上的标量曲率积分，《美国数学会会刊》152（2024），第11期，4865–4872，DOI 10.1090/proc/16584。MR4802637[Yau92] 丘成桐，《几何学中的公开问题》，《陈省身——二十世纪伟大的几何学家》，国际出版社，香港（1992），275–319。[Zhu22a] Bo Zhu，三维流形上的比较定理与标量曲率积分，《几何分析杂志》32（2022），第7期，论文编号197，共19页，DOI 10.1007/s12220-022-00934-y。[Zhu22b] , 完备流形上的正标量曲率几何，《纯粹与应用数学杂志》791（2022），225–246，DOI 10.1515/crelle-2022-0049。

ZIXUAN CHEN，数学科学系，清华大学，北京，中华人民共和国电子邮箱：chenzixu25@mails.tsinghua.edu.cn

GUOYI XU，数学科学系，清华大学，北京，中华人民共和国电子邮箱：guoyixu@tsinghua.edu.cn

SHUAI ZHANG，数学科学系，清华大学，北京，中华人民共和国 . R. 中华人民共和国电子邮箱：zhangshu22@mails.tsinghua.edu.cn