arXiv:2602.10413v1 [math.FA] 11 Feb 2026

序列类与算子理想中的几何可空间性

NACIB G. ALBUQUERQUE†、JAMILSON R. CAMPOS 和 LUIZ FELIPE P. SOUSA

Abstract. 本文研究序列空间与算子理想框架下关于可直线化性和可空间化性的进阶概念。我们提出了 *Standard Se-quence Classes* 的概念，以构建一个统一多种经典序列空间并保留其基本性质的框架。利用这一框架，我们建立了关于（拟）巴拿赫序列空间并集补集的一般（α， c）-可空间化结果。这些结果通过探讨几何要求更高的情形（其中 $\alpha > 1$），并涵盖非局部凸（拟）巴拿赫框架，拓展了现有文献。此外，我们为取值于标准序列空间的一般算子理想之差的逐点 c-可空间化给出了判据。我们的结果在向量值序列领域重获并改进了若干已知结论。

1. Introduction and Background

所谓的可直线化性由 Aron、Gurariy 和 Seoane-Sep´ulveda 在开创性著作中提出 [7], ，指的是在乍看之下似乎缺乏任何线性特征的集合中寻找线性结构。更准确地说，给定一个基数 μ 和一个线性空间 V，若子集 $A \subset V$被称为 μ-可直线化的，如果 $A \cup \{0\}$ 包含一个 μ维的线性子空间，且该子空间属于 V。当 V是拓扑向量空间且该子空间为闭的时， A 称为 μ-可空间化的。自其形式化以来，可直线化性理论沿多个方向得到了广泛发展。若要深入研究，我们推荐 [9, 10, 26]以及著作 [6]。

在本文中，我们重点关注序列空间和算子理想。随着理论的发展，人们引入了更精细的可直线化性概念。其中包括逐点可直线化性，由 [32], 提出；以及 (α， β)-可直线化性，这是一种带有几何意味的概念，由 [25]提出。给定基数 $\alpha \leq \beta$ 和一个（拓扑）向量空间 V，若子集 $A \subset V$满足以下条件，则称其为：

- (α， β)-可直线化（可空间化），如果它是 α-可直线化的，并且对于每个 α维子空间 $U_\alpha \subset A \cup \{0\}$，都存在一个 β维（闭的）子空间 U_β，使得 $U_\alpha \subset U_\beta \subset A \cup \{0\}$ （见 [25,定义 1.1]）。

- 逐点 α-可直线化（可空间化），如果对于每个 $x \in A$，都存在一个 α维（闭的）子空间 W_x，满足 $x \in W_x \subset A \cup \{0\}$ （见 [32, 定义 2.1]）。

关于序列空间中可直线化性与可空间化性的丰富文献，已在该理论的经典框架内解决了许多问题（见 [5, 8, 14, 15, 17] 和 [31]）。尽管如此，仍有若干问题悬而未决。在 [32], ，Pellegrino 和 Raposo 得出了关于集合逐点 c-可空间化性的结果，这些集合推广了巴拿赫与拟巴拿赫序列空间并集的补集。由于逐点 c-可空间化性蕴含(1， c)-可空间化性，因此自然会产生一个问题：(α， c)-可空间化性对于 $\alpha > 1$的表现如何。最近，Ara´ujo 等人 [5] 给出了巴拿赫空间并集补集具有(α， c)-可空间化性的一般判据。将这些判据应用于序列空间时，可以部分回答上述问题。

本工作的主要目标之一，是针对与所研究对象性质相似的一般集合，在（α， β）框架下确立关于几何可空间性概念的结果

2020 *Mathematics Subject Classification.* 47L20, 46B45, 15A03, 46B87.

Key words and phrases. 序列空间、算子理想、可直线化性、可空间化性。

†通讯作者。电子邮箱：ngalbuquerque@mat.ufpb.br。

在 [32]中。这项工作为具有挑战性的情形提供了解答，其中 $\alpha > 1$ 并且至关重要的是，探讨了拟巴拿赫空间的情形；一般性判据并未涵盖这一情形，这些判据是在 [5]中确立的。为此，我们引入标准序列类的概念，其灵感源自 [1]中的序列空间概念，以及 Botelho 和 Campos 在 [11]中构建的序列类抽象框架。关于序列类领域近期进展及应用的全面综述，请参阅 [13, 18, 20]及其中的参考文献。

标准序列类为具有自然且良好性质的序列类提供了容身之所，相关性质将在后文详述。作为我们一项主要结果（定理 3.2 及推论5.1）的一个示例性推论，考虑一个巴拿赫空间 E，以及取值于 E 的拟巴拿赫标准序列类 X 和 Y_λ $(\lambda \in \Lambda)$。若集合

$$X(E) \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda(E)$$

非空，则它是 $(\alpha, \mathfrak{c})$-可空间化的，当且仅当 $\alpha < \aleph_0$。

在算子理想的研究背景下，多项工作推动了对各类算子的可直线化性与可空间化性的研究。该领域的一项开创性成果出自 Kitson 和 Timoney [28], ，他们给出了巴拿赫空间上某些算子理想之差的可空间化性结果；然而，这些结果未涉及非局部凸情形。关于算子类之差的可空间化性结果，亦可参见 [2, 4,16, 24]和 [34]。在 [27]Hern´andez 等人研究了一般差集$\mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_2$的可空间化性，其中 $\mathcal{I}_i$ $(i = 1,2)$ 表示满足特定性质的巴拿赫空间上的巴拿赫算子理想。近期， [1]在取值于标准序列空间的多线性算子框架下，针对有界、多重以及绝对可和类等特定算子类，建立了逐点 $\mathfrak{c}$-可空间化性方面的结果。

受这些背景的启发，本文确立的另一项主要结果（定理4.4）探讨了取值于标准序列类的广义（拟）巴拿赫算子理想之差。该结果改进并推广了前述若干已有结论。作为一项具体应用，我们证明了 α的逐点可空间化性：

$$\mathcal{I}(E;\mathcal{S}) \setminus \Pi_{p,q}(E;\mathcal{S}),$$

其中 $\mathcal{I}$ 是一个（拟）巴拿赫算子理想， $\mathcal{S}$ 是一个标准序列空间， Π 表示（绝对）求和算子类，而 p， q 满足温和条件。

本文结构安排如下。第2 节介绍标准序列类的概念，给出主要例子和基本性质，并定义后续各节将要研究的集合。第3 节证明关于推广序列空间并集补集的集合的主要（α， β）-可空间化性结果。第4 节致力于研究取值于标准序列空间的算子理想的一般差异背景下的逐点可线性化性。最后，第5 节汇集前几节所确立的主要结果的若干应用。

1.1. 记号与术语。 对于定义在 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$上的巴拿赫空间 E 和 F， E^* 表示 E的拓扑对偶，B_E表示 E的闭单位球，而 $\mathcal{L}(E; F)$表示从 E 到 F 的有界线性算子所构成的巴拿赫空间，其范数为通常的算子范数。符号$E \overset{C}{\hookrightarrow} F$表示 E 是 F的线性子空间，且 $\|\cdot\|_F \le C\|\cdot\|_E$ 定义在 E 上。若$E = F$ 与 $E \overset{1}{=} F$等距，则记作 $E \overset{1}{=} F$。

最终为零序列与有界 E值序列的空间分别记作 $c_{00}(E)$与$\ell_\infty(E)$。对于 $j \in \mathbb{N}$ 与 $x \in E$，我们用$x \cdot e_j$ 表示序列$(0, \dots, 0, x, 0, 0, \dots)$，其中 x 置于第 j个坐标。符号$(x_j)_{j=1}^n$（其中 $x_1, \dots, x_n \in E$）表示序列$(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in E^{\mathbb{N}}$。若 $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$ 为一个序列，除用标准记号x_j 表示 x的第 j个坐标外，在需要更精确时我们将写作 $x(j)$。我们还将用记号 $x|_{\mathbb{N}'}$ 表示子序列$(x_j)_{j\in\mathbb{N}'}$，其中 $\mathbb{N}'$ 是

$\mathbb{N}$的一个无限子集。当我们提及划分 $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$时，是指 $\mathbb{N}_1$ 与 $\mathbb{N}_2$为 $\mathbb{N}$的无限且互不相交的子集。符号 $\aleph_0$ 与 $\mathfrak{c}$ 分别表示 $\mathbb{N}$与$\mathbb{R}$的基数。我们将在连续统假设下工作，即假定不存在严格介于 $\aleph_0$ 与 $\mathfrak{c}$之间的基数。

2. Standard sequence classes

在本节中，我们介绍核心研究对象及其性质。该定义所依据的灵感与 [1] 和 [11], 中所开展的研究密切相关，其中定义了标准序列空间与序列类的概念，以及在 [31]和 [32], 中定义了强不变序列空间的概念。

定义 2.1. 一个标准序列类 X 是一条规则，它为每个巴拿赫空间 E 指定一个由 E值序列构成的（拟）巴拿赫空间 $X(E)$（赋予通常的按坐标代数运算），并满足：

(i) 存在常数 $C > 0$，使得 $c_{00}(E) \subseteq X(E) \overset{C}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$。(ii)（子序列稳定性）若 $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in X(E)$，且$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 是 x的一个子序列，则$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \in X(E)$，并且

$$\|(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\|_{X(E)} \le \|x\|_{X(E)}.$$

(iii)（零项扩展稳定性）若 $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in X(E)$，且 $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$是 $\mathbb{N}$ 的一个无限子集，则由下式定义的 E 值序列 y

$$y = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \cdot e_{n_i}$$

属于 $X(E)$，并满足 $\|y\|_{X(E)} \le \|x\|_{X(E)}$。

条件 i) 确保 $X(E)$ 中的收敛意味着逐坐标收敛，或者等价地说，对所有 $m \in \mathbb{N}$，由 $\pi_m(x) = x_m$ 定义的投影 $\pi_m : X(E) \to E$ 都是连续的。条件 (ii) 和 (iii) 表明，$X(E)$ 对取子序列封闭，并且在其序列中添加零项后仍保持稳定（扩散零性质）。此外，由条件 ii) 和 iii)，由于 x 是 y 的一个子序列，因此有 $\|y\|_{X(E)} = \|x\|_{X(E)}$。任何形如 $X(E)$ 的空间，其中 E 是一个巴拿赫空间，且 X 是一个标准序列类，都称为标准序列空间。

例 2.2. 接下来，我们列出若干经典序列空间，对于这些空间，对应关系$E \mapsto X(E)$定义（或不定义）一个标准序列类。

a) 对于 $p \in (0, \infty)$，经典序列空间 $\ell_p(E)$、$\ell_p^u(E)$ 和 $\ell_p^w(E)$（见 [22, 第 8] 节）。

b) 零收敛序列空间 $c_0(E)$。

c) 对于 $0 < p, q < \infty$，洛伦兹空间 $\ell_{p,q}(E)$（见 [30]），由下式给出

$$\ell_{p,q}(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in c_0(E) : \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{p,q} = \left(\sum_{n=1}^\infty \left(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x_{\Phi(n)}\| \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

其中 $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一个单射映射，使得 $\|x_{\Phi(1)}\| \ge \|x_{\Phi(2)}\| \ge \cdots \ge 0$，并且当 $x_n \neq 0$ 时有 $\Phi^{-1}(n) \neq \emptyset$。

d) *Orlicz* 函数是一个凸且单调不减的函数 $M : [0, \infty) \to [0, \infty)$，满足$M(0) = 0$且 $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$。此外，若存在 $t \neq 0$使得 $M(t) = 0$，则称 M 为退化*Orlicz*函数。对于非退化Orlicz函数 M，且 $M(1) = 1$，我们可以考虑Orlicz序列空间 $\ell_M(E)$（见 [19] 和 [29, 第 4 节. a]）以及 $\ell_M^w(E)$（见 [19, 第 2] 节），定义如下：

$$\ell_M(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^\infty M\left(\frac{\|x_j\|}{\eta} \right) < \infty \text{ for some } \eta > 0 \right\}.$$

and

$$\ell_M^w(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_M \text{ for all } \varphi \in E'\right\}.$$

e) 对于 $1 \le p < \infty$，空间 $\ell_p\langle E\rangle$ 的 Cohen 强 p可求和序列（见 [21]），以及空间 $\ell_p^{\text{mid}}(E)$中的 mid p可求和序列（见 [12]），定义如下：

$$\ell_p\langle E\rangle := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p\langle E\rangle} = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \|(\varphi_j(x_j))_{j=1}^\infty\|_1 < \infty\right\},$$

and

$$\ell_p^{\text{mid}}(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}} = \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p\right)^{1/p} < \infty\right\}.$$

f) 空间 $c(E)$（见 [23, 第 33] 页）和

$$G(E) = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty(E) : x_{2n-1} = x_{2n}\}$$

是一些不满足定义 2.1 中所有条件的序列空间。事实上，对于任意 $x \in E \setminus \{0\}$ 和 $\mathbb{N}' = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$，我们有 $(x, x, \dots) \in c(E)$，但 $(x, 0, x, 0, \dots) \notin c(E)$。反过来，虽然 $(x, 0, 0, \dots) \in c_{00}(E)$，但此序列不属于 $G(E)$，因此$c_{00}(E) \not\subset G(E)$。

为避免歧义，我们有时会用 $X(\cdot)$表示一个标准序列类。例如，我们直接写 ℓ_p^w，而不写 $\ell_p^w(\cdot)$。不过，在指称序列类$\ell_p(\cdot)$时，我们保留其参数，以便将其与标量序列空间 ℓ_p区分开来。

我们首先证明一个关于“嵌套”标准序列类的简单结果，其思路改编自 [32, 引理 3。2]设 E 是一个巴拿赫空间，且 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是标准序列类的一个族。若对每个 E-嵌套，都有 $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$，且以下条件之一成立：$X_{\lambda_1}(E) \subseteq X_{\lambda_2}(E)$ 或$X_{\lambda_2}(E) \subseteq X_{\lambda_1}(E)$，则称族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为嵌套的，如果它对每个巴拿赫空间都 E-嵌套E。

P命题 2.3。设 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个 E-嵌套的标准序列类族。
i) 给定一个划分 $\mathbb{N} = \mathbb{N}' \cup \mathbb{N}''$ 和 $y \in E^{\mathbb{N}}$，使得 $y \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E)$，则

$$y|_{\mathbb{N}'} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E) \quad or \quad y|_{\mathbb{N}''} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E),$$

ii) 设 $x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in E^{\mathbb{N}}$，使得 $x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E)$。则

$$x^{(k)}|_{\mathbb{N}'} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E), \quad for\ all\ k = 1, \dots, n,$$

对于某个划分 $\mathbb{N} = \mathbb{N}' \cup \mathbb{N}''$。

证明。第 i) 项在 [32, 引理 3.2] 中得到了证明。简而言之，论证如下：若 $y|_{\mathbb{N}'}$和 $y|_{\mathbb{N}''}$ 均属于 $\cup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E)$，则由标准序列类的性质可得序列$y_1$，$y_2 \in \cup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E)$，使得 $y = y_1 + y_2$。这意味着 $y \in \cup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E)$，矛盾。

现在证明 ii)：从 $x^{(1)} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E)$ 出发，应用第一项，我们可以考虑一个划分 $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \widetilde{\mathbb{N}}_1$，使得 $x^{(1)}|_{\mathbb{N}_1} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E)$。再次应用 i)，得到

$$x^{(2)}|_{\mathbb{N}_1} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E) \text{ or } x^{(2)}|_{\widetilde{\mathbb{N}}_1} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E)$$

若 $x^{(2)}|_{\mathbb{N}_1} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E)$，则无需进行任何操作。假设 $x^{(2)}|_{\widetilde{\mathbb{N}}_1} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E)$，我们按照上述相同的方法，考虑一个划分 $\widetilde{\mathbb{N}}_1 = \mathbb{N}_2 \cup \widetilde{\mathbb{N}}_2$，使得 $x^{(2)}|_{\mathbb{N}_2} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E)$。由此可得

$$x^{(1)}|_{\mathbb{N}_1\cup\mathbb{N}_2}, x^{(2)}|_{\mathbb{N}_1\cup\mathbb{N}_2} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E).$$

我们可以继续这一过程，得到 $\mathbb{N}' = \bigcup_{i=1}^{k} \mathbb{N}_i$ $(k \le n)$ 和一个划分 $\mathbb{N} = \mathbb{N}' \cup \mathbb{N}''$，使得 $x^{(1)}|_{\mathbb{N}'}$，……，$x^{(n)}|_{\mathbb{N}'} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda(E)$。□

本节中，映射的相容性这一恰当概念将会派上用场。设 E 和 F 是巴拿赫空间，$f\colon E \to F$ 是一个映射。记由此诱导的映射 $\widehat{f}\colon E^{\mathbb{N}} \to F^{\mathbb{N}}$ 为 $\widehat{f}$，定义为

$$\widehat{f}\big((x_j)_{j=1}^{\infty}\big) := (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \quad \text{for each } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}.$$

将 [31, 定义 2。3] 推广到标准序列类 X，映射 $f\colon E \to F$ 满足 $f(0) = 0$称为与 X 相容，若对每个 $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$ 以及所有 $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$，

$$(f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin X(F) \Rightarrow (f(\alpha x_j))_{j=1}^{\infty} \notin X(F).$$

我们引入一个更强的概念：映射 $f\colon E \to F$ with $f(0) = 0$ 称为线性相容X，如果它是相容的（与 X），并且满足以下附加性质：对任意 $(x_j)_{j=1}^{\infty}$，$(y_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$，

$$(f(x_j))_{j=1}^{\infty}, (f(y_j))_{j=1}^{\infty} \in X(F) \Rightarrow (f(x_j + y_j))_{j=1}^{\infty} \in X(F).$$

接下来列出一些显然的推论：如果 f 与 X相容，那么对所有 $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$和 $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$，

i) $(f(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(F) \Rightarrow (f(\alpha x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(F)$;
ii) $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \widehat{f}^{-1}(X(F)) \Rightarrow \alpha(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \widehat{f}^{-1}(X(F))$;

并且，如果 f 与 X 线性相容，则可得

iii) $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \widehat{f}^{-1}(X(F)) \Rightarrow (x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \widehat{f}^{-1}(X(F))$

对所有 $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$。换言之，ii) 和 iii) 告诉我们，当 f 与 X线性相容时，$\widehat{f}^{-1}(X(F))$ 是 $E^{\mathbb{N}}$ 的一个线性子空间。

我们回顾 [17] 和 [32]中的一种现代术语。下文中，对于作为标准序列类的 X、作为任意映射的 $E \to F$ 以及一个标准序列类族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，我们将考虑如下形式的集合

$$G(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) := \left\{ x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E) : \widehat{f}(x) = (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda(F) \right\}.$$

我们接下来的结果给出了在这类集合中实现 (α, c)-可空间化性所需的条件。为此，我们需要一个条件来刻画序列$\prec x \in G(X, f, Y)$（即 $f(x) \notin Y(F)$）的行为，使得能够抽取一个子序列，其在 f 下的像属于 $Y(F)$。我们将此性质称为可分离。正式定义及说明性示例如下。

定义 2.4. 设 X 和 Y 为标准序列类，且 $f : E \to F$ 为一个与 Y线性相容的映射。若存在一个无限子集 $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$，其补集 $\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_1$ 也为无限集，并且 $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}_1} \in Y(F)$，则称序列 $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in G(X, f, Y)$ 是可分离的。若所有 $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in G(X, f, Y)$ 都是可分离的，则称三元组 (X, f, Y) 是可分离的。若对所有 $\lambda \in \Lambda$，(X, f, Y_λ) 都是可分离的，则称三元组 $(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ 是可分离的。

注 2.5. a) 显然，只有当 $G(X,\ f,\ Y)$ 非空时，“可分离”这一概念才适用于三元组 $(X,\ f,\ Y)$。因此，本文始终默认满足这一非空条件。

b) 由命题 2.3 可立即推出，若三元组 $(X,\ f,\ Y)$ 可分离，则对所有 $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in G(X,\ f,\ Y)$，$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}_1} \in Y(F)$ 和 $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}_2} \notin Y(F)$，其中 $\mathbb{N}_2 = \mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_1$。

例 2.6。 下面给出可分离和不可分离三元组（$X,\ f,\ Y$）的示例。

a) 令 $p\in(0,\ \infty)$，并令 $Id_p\colon\ \ell_p \to \ell_p$ 为 ℓ_p 中的恒等算子。那么，$(\ell_{p^*}^w,\ Id_p,\ \ell_{p^*}(\cdot))$ 不可分离。注意，$(e_j)_{j=1}^\infty \in G(\ell_{p^*}^w,\ Id_p,\ \ell_{p^*}(\cdot)) = \ell_{p^*}^w(\ell_p)\setminus\ell_{p^*}(\ell_p)$。然而，由于 $\|e_j\|_p = 1$ 对每个 $j\in\mathbb{N}$ 都成立，因此 $(e_j)_{j=1}^\infty$ 在 $\ell_{p^*}(\ell_p)$ 中不存在子序列。

b) 令 $Y \in \{\ell_p(\cdot)\,\ell_{p,\ q}(\cdot)\ \ell_p^w\}$ 对于 $0<p,\ q<\infty$ 或者令 $Y=\ell_M(\cdot)$，其中 Orlicz 函数为 M。若 $f: E\to F$ 是一个与 Y 线性相容且在 0 处连续的映射，X 是一个标准序列类，使得 $X(E)\subseteq c_0(E)$ 且 $G(X,\ f,\ Y)\neq\emptyset$，那么 $(X,\ f,\ Y)$ 可分离。为证明这一断言，首先注意，对每个 $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$，我们都有 $(f(x_j))_{j=1}^\infty \in c_0(F)$。因此，

i) 情形 $Y=\ell_p(\cdot)$ 可依照 [25, 定理 2.2] 中证明的标量情形，以及情形 $Y=\ell_{p,q}(\cdot)$ 的思路处理。因此，两者均略去。

ii) 对于 $Y=\ell_p^w$ 且满足 $0<p<\infty$ 的情形，考虑 $(x_j)_{j=1}^\infty \in G(X,f,\ell_p^w)$。由于 $(f(x_j))_{j=1}^\infty\in c_0(F)$，存在一个划分 $\mathbb{N}=\mathbb{N}_1\cup\mathbb{N}_2$，使得

$$|\varphi(f(x_k))| \le \|\varphi\|\|f(x_k)\| < \|\varphi\|\frac{1}{2^k},\quad \forall\,\varphi\in F',\,\forall\,k\in\mathbb{N}_1.$$

因此，对所有 $\varphi\in F'$，我们有

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_1}|\varphi(f(x_k))|^p \le \|\varphi\|\sum_{k\in\mathbb{N}_1}\left(\frac{1}{2^k}\right)^p<\infty,$$

这意味着 $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}_1}\in\ell_p^w(F)$。

iii) 设 M 是一个 Orlicz 函数，并设 $(x_j)_{j=1}^\infty \in G(X,f,\ell_M(\cdot))$。由于我们有 $(f(x_j))_{j=1}^\infty \in c_0(F)\setminus\ell_M(F)$，存在一个划分 $\mathbb{N}=\mathbb{N}_1\cup\mathbb{N}_2$，使得

$$\|f(x_k)\| < \frac{1}{2^k},\ k\in\mathbb{N}_1.$$

由于 M 是凸函数，我们有

$$M(\alpha x+(1-\alpha)y)\le\alpha M(x)+(1-\alpha)M(y)$$

对所有 $x,y\in[0,\infty)$ 和 $\alpha\in[0,1]$。给定任意实数 $\eta>0$ 并取

$$\alpha=\frac{1}{2^k},\ x=\frac{1}{\eta}\text{ and }y=0,$$

我们得到

$$M\left(\frac{1}{2^k\eta}\right)\le\frac{1}{2^k}M\left(\frac{1}{\eta}\right),\ \forall k\in\mathbb{N}_1.$$

Thus

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_1}M\left(\frac{\|f(x_k)\|}{\eta}\right)\le\sum_{k\in\mathbb{N}_1}M\left(\frac{1}{2^k\eta}\right)\le\sum_{k\in\mathbb{N}_1}^{\infty}\frac{1}{2^k}M\left(\frac{1}{\eta}\right)<\infty$$

并得出 $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}_1}\in\ell_M(F)$。

命题 2.7。 设 X、Y_1 和 Y_2 是标准序列类，且设 $f\colon\ E\to F$ 是一个线性相容映射，其中 Y_1 和 Y_2。若 (X,f,Y_1) 可分离，且 $Y_1(E)\subseteq Y_2(E)$，则 (X,f,Y_2) 可分离。

例如，由于对于所有巴拿赫空间 E 及所有 $p\le q\in(0,\infty]$，都有 $\ell_p(E)\subseteq\ell_p^u(E)$ 和 $\ell_p(E)\subseteq\ell_q(E)$，因此，只要 $(X,f,\ell_p(\cdot))$ 可分离，对于每个标准序列类 X，三元组 (X,f,ℓ_p^u) 和 $(X,f,\ell_q(\cdot))$ 都是可分离的。

如下命题所示，可分离这一概念适用于有限个序列。

命题 2.8. 设 X 是一个标准序列类，$\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个由标准序列类组成的 F-嵌套族，$f: E \to F$ 是一个与每个 Y_λ、$\lambda \in \Lambda$ 以及 $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)} \in G(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ 线性相容的映射。假设对于某个 $\sim\lambda \in \Lambda$，三元组 $(X, f, Y_{\widetilde{\lambda}})$ 是可分离的。那么存在一个划分 $\mathbb{N} = \mathbb{N}' \cup \mathbb{N}''$，使得

$$\widehat{f}(x^{(k)})|_{\mathbb{N}'} \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda(F) \quad and \quad \widehat{f}(x^{(k)})|_{\mathbb{N}''} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda(F), \quad for\ all\ k = 1, \ldots, n.$$

~ ~证明。首先应用命题 2.3 得到一个划分 $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup (\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1)$，其满足

$$\widehat{f}(x^{(1)})|_{\mathbb{N}\setminus\widetilde{\mathbb{N}}_1}, \ldots, \widehat{f}(x^{(n)})|_{\mathbb{N}\setminus\widetilde{\mathbb{N}}_1} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda(F).$$

~由（X，f，$Y_{\widetilde{\lambda}}$）的可分离性，存在一个划分 $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_1'$ 使得

$$\widehat{f}(x^{(1)})|_{\mathbb{N}_1} \in Y_{\widetilde{\lambda}}(F).$$

事实上，若 $\widehat{f}\,(x^{(1)})\,|_{\widetilde{\mathbb{N}}_1} \notin Y_{\widetilde{\lambda}}\,(F)$，则应用（$X$，$f$，$Y_{\widetilde{\lambda}}$）的可分离性质；否则，只需取 $\widetilde{\mathbb{N}}_1 = \mathbb{N}_1$。对 $\widehat{f}\,(x^{(2)})$ 使用相同的论证，存在一个划分$\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}_2 \cup \mathbb{N}_2'$ 使得

$$\widehat{f}(x^{(1)})|_{\mathbb{N}_2}, \widehat{f}(x^{(2)})|_{\mathbb{N}_2} \in Y_{\widetilde{\lambda}}(F).$$

以此方式继续，我们可以取 $\mathbb{N}' := \mathbb{N}_n$（如有必要），使其满足

$$\widehat{f}(x^{(k)})|_{\mathbb{N}'} \in Y_{\widetilde{\lambda}}(F) \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda(F) \quad \text{for all } k = 1, \ldots, n.$$

~并且，令 $\mathbb{N}'' := \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}' = (\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}_i')$，其中 $k \le n$，我们有

$$\widehat{f}(x^{(k)})|_{\mathbb{N}''} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda(F) \quad \text{for all } k = 1, \ldots, n.$$

□

3. Geometric spaceability in standard sequence spaces

我们首先回顾本节所需的可直线化性的基本概念。更多细节请参见开创性著作 [6, 7, 26], 以及文献 [25, 32]中引入的几何概念。令 μ 为一个基数，V 为一个线性空间。若子集 $A \subset V$ 包含 V 的一个 μ维线性子空间，则称其为 μ-可直线化的。若 V是一个拓扑向量空间，且 $A \cup \{0\}$包含一个闭的 μ维子空间，则称 A 为 μ-可空间化的。当 $\dim(V) = \mu$时，我们分别称 A 为 μ-极大可直线化的，或称 μ为 μ-极大可空间化的。

给定基数 $\alpha \le \beta$，集合 A 是 (α, β)-可直线化的（可空间化的），如果它是 α-可直线化的，并且对于每个α维子空间 $U_\alpha \subset A \cup \{0\}$，都存在 V的一个 β维（闭）子空间 U_β，使得 $U_\alpha \subset U_\beta \subset A \cup \{0\}$.此外，若对于每个 $x \in A$，都存在一个满足 $x \in W_x \subset A \cup \{0\}$.的 α维（闭）子空间 W_x，则称 A是逐点 α-可直线化的（可空间化的）。

下一个引理推广了先前针对标准序列类情形所证明的结果（见 [25,引理 2.1]）。

引理 3.1. 若 X 是一个标准序列类，且 $\{x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\}$ 是 $X(E)$中的线性无关集，则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得集合 $\{(x_1^{(k)}, \ldots, x_{n_0}^{(k)}) : k = 1, \ldots, n\}$ 在 E^{n_0}中线性无关。

证明。反设，与我们的断言相反，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，都存在 $a_j^{(1)}, \ldots, a_j^{(n)} \in \mathbb{K} \setminus$，使得 $\{0\}$

$$a_j^{(1)} x^{(1)} + \cdots + a_j^{(n)} x^{(n)} = (0, \ldots, 0, z_{j+1}, z_{j+2}, \ldots). \tag{1}$$

不失一般性，可令对所有 $j \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n$， $|a_j^{(k)}| = 1$，并定义 $a_j := (a_j^{(1)}, \ldots, a_j^{(n)}) \in \mathbb{K}^n$。由于 $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ 有界，存在 $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ 的一个子序列 $(a_{j_k})_{k=1}^{\infty}$，使得

$$(a_{j_k}^{(1)}, \ldots, a_{j_k}^{(n)}) = a_{j_k} \xrightarrow{k} a = (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)})$$

并且，由于 $\|a\|_\infty = \|a_{j_k}\|_\infty = 1$，我们有 $a \neq 0$。此外，可得

$$a_{j_k}^{(1)} x^{(1)} + \cdots + a_{j_k}^{(n)} x^{(n)} \xrightarrow{k} a^{(1)} x^{(1)} + \cdots + a^{(n)} x^{(n)}. \tag{2}$$

另一方面，由于 (1)，我们有

$$\pi_m(a_{j_k}^{(1)} x^{(1)} + \cdots + a_{j_k}^{(n)} x^{(n)}) = a_{j_k}^{(1)} x_m^{(1)} + \cdots + a_{j_k}^{(n)} x_m^{(n)} = 0 \tag{3}$$

对所有 $m \leq j_k$ 且当 k足够大时。由于投影 π_m 是连续的，由 (2) 和 (3)，我们得到

$$\begin{aligned} \pi_m(a^{(1)} x^{(1)} + \cdots + a^{(n)} x^{(n)}) &= \pi_m(\lim_k a_{j_k}^{(1)} x^{(1)} + \cdots + a_{j_k}^{(n)} x^{(n)}) \\ &= \lim_k \pi_m(a_{j_k}^{(1)} x^{(1)} + \cdots + a_{j_k}^{(n)} x^{(n)}) = 0 \end{aligned}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$。由此可得 $a^{(1)} x^{(1)} + \cdots + a^{(n)} x^{(n)} = 0$，并且由于 $\{x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\}$ 线性无关，我们有 $a = 0$，矛盾。□

接下来，我们陈述关于集合 $G(X、\ f、\ \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ 的几何可直线化性方法的主要结果，该结果强化了 [32] 中的定理 3.3 和 3.5。

定理 3.2。设 X 是一个标准序列类，$\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个由标准序列类构成的 F-嵌套族，并设 $f: E \to F$ 是一个映射，对所有 $\lambda \in \Lambda$，它都与 Y_λ 线性相容。若三元组 $(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ 可分离，则

$$G(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) \text{ is } (\alpha, \mathfrak{c})\text{-spaceable if and only if } \alpha < \aleph_0.$$

证明。我们首先证明 $\alpha = \aleph_0$ 的情形不可能。设 $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$ 是一个划分，并固定 $x \in E$。对每个 $k \in \mathbb{N}$，定义一个序列 $x^{(k)} := \left(x, x_j^{(k)}, x_{j+1}^{(k)}, \ldots\right)_{j\geq 2}$，使得

$$x_j^{(k)} = 0 \text{ if } j \notin \mathbb{N}_k \text{ and } (x_j^{(k)})_{j\in\mathbb{N}_k(j\geq 2)} \in G(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}).$$

我们可以假设

$$\|(x_j^{(k)})_{j\in\mathbb{N}_k(j\geq 2)}\|_{X(E)} = 2^{-k} \text{ for all } k \in \mathbb{N}$$

并定义

$$\Omega := \operatorname{span}\{x^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}.$$

现在证明 $\Omega \setminus \{0\} \subset G(X,\ f,\ \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$。设 $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} b_i x^{(k_i)} \in \Omega \setminus \{0\}$，对所有 $b_i \neq 0$ 均成立。反设对于某个 $\lambda' \in \Lambda$，有 $(f(\bar{x}_j))_{j\in\mathbb{N}} \in Y_{\lambda'}(F)$。那么，将指标限制在 $\mathbb{N}_{k_1} \setminus \{1\}$ 中，我们有

$$(f(b_1 x_j^{(k_1)}))_{j\in\mathbb{N}_{k_1}, j\geq 2} = (f(\bar{x}_j))_{j\in\mathbb{N}_{k_1}, j\geq 2} \in Y_{\lambda'}(F).$$

由于 f与 $Y_{\lambda'}$相容，因此 $(f(x^{(k_1)}{}_j))_{j\in\mathbb{N}_{k_1},\ j\geq 2} \in Y_{\lambda'}(F) \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda(F)$。这与 $(x^{(k_1)}{}_j)_{j\in\mathbb{N}_{k_1},\ j\geq 2} \in G(X,\ f,\ \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ 这一事实矛盾。因此，$\Omega\setminus\{0\} \subset G(X,\ f,\ \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$。

接下来，我们证明不存在包含 Ω 的 $X(E)$ 的闭子空间 Θ 满足 $\Theta \setminus \{0\} \subset G(X,\ f,\ \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$。反设存在这样的 Θ。那么，

$$\lim_k \|x^{(k)} - x \cdot e_1\|_{X(E)} = \lim_k \left\|(0, x_j^{(k)}, x_{j+1}^{(k)}, \ldots)\right\|_{X(E)} = \lim_k 2^{-k} = 0.$$

因此，$x \cdot e_1 \in \Omega \subset \overline{\Theta} = \Theta \subset G(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) \cup \{0\}$。然而，这意味着对所有 $\lambda \in \Lambda$ 都有 $f(x) \cdot e_1 \notin Y_\lambda(F)$，这是不可能的，因为对每个 λ 都有 $c_{00}(F) \subset Y_\lambda(F)$。至此完成对 $\alpha = \aleph_0$ 的证明。

我们现在证明关于 $\alpha = 3$ 的结果。该论证经明显修改后，适用于任意有限的 $\alpha = n \in \mathbb{N}$。设 $\{x, y, z\}$ 为 $X(E)$ 的一个线性无关子集，使得

$$W := \operatorname{span}\{x, y, z\} \subset G(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) \cup \{0\}. \tag{4}$$

根据命题 2.3，存在一个无限集 $\mathbb{N}_1 := \{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$，其补集也是无限集，使得

$$x|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_1},\ y|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_1},\ z|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_1} \in G(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}). \tag{5}$$

重写这些限制条件可得：

$$\begin{aligned}
\left(\textstyle\sum_{j\notin\mathbb{N}_1} x_j \cdot e_j\right)|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_1} = x|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_1} \in G(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}),\\
\left(\textstyle\sum_{j\notin\mathbb{N}_1} y_j \cdot e_j\right)|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_1} = y|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_1} \in G(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}),\ \text{and}\\
\left(\textstyle\sum_{j\notin\mathbb{N}_1} z_j \cdot e_j\right)|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_1} = z|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_1} \in G(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}).
\end{aligned}$$

由于集合 $G(X,\ f,\ \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ 具有 零扩散 性质（定义 2.1-(iii)），因此

$$\sum_{j\notin\mathbb{N}_1} x_j \cdot e_j,\ \sum_{j\notin\mathbb{N}_1} y_j \cdot e_j,\ \sum_{j\notin\mathbb{N}_1} z_j \cdot e_j \in G(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}).$$

对于所有 $\lambda \in \Lambda$，每个（$X,\ f,\ Y_\lambda$）都是可分离的。由命题 2.8 可知，不失一般性地，我们可以假设

$$(f(x_j))_{j\in\mathbb{N}_1},\ (f(y_j))_{j\in\mathbb{N}_1},\ (f(z_j))_{j\in\mathbb{N}_1} \in Y_{\lambda'}(F)$$

对于某个 $\lambda' \in \Lambda$。由引理 3.1，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得由 x的前 n_0个坐标构成的向量 $x,\ y$和 z在 E^{n_0}中线性无关。令 $\mathbb{O} := \mathbb{N}_1 \setminus \{1, \ldots, n_0\}$，于是，$\mathbb{N} \setminus \mathbb{O} = (\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1) \cup \{1, \ldots, n_0\}$。那么

$$\sum_{j\notin\mathbb{O}} x_j \cdot e_j,\ \sum_{j\notin\mathbb{O}} y_j \cdot e_j,\ \sum_{j\notin\mathbb{O}} z_j \cdot e_j \in G(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) \tag{6}$$

and

$$(f(x_j))_{j\in\mathbb{O}},\ (f(y_j))_{j\in\mathbb{O}},\ (f(z_j))_{j\in\mathbb{O}} \in Y_{\lambda'}(F) \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda(F). \tag{7}$$

取一个无限划分

$$\mathbb{O} := \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{O}_i, \qquad \mathbb{O}_i := \{n_1^{(i)} < n_2^{(i)} < \cdots\}.$$

由于 $\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}$是无限集，取一个单射映射 $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，满足 $\mathbb{N}\setminus\mathbb{O} = h(\mathbb{N})$。由于 x属于 $X(E)$，对每个 $i \in \mathbb{N}$定义

$$\varepsilon^{(i)} := \sum_{j=1}^{\infty} x_{h(j)} \cdot e_{n_j^{(i)}} \in X(E).$$

此外

$$\|\varepsilon^{(i)}\|_{X(E)} = \|(x_{h(j)})_{j\in\mathbb{N}}\|_{X(E)} \le \|x\|_{X(E)}.$$

由于 $X(E)$ 是拟巴拿赫空间，因此它是某个 $p \in (0, 1]$ 的 p-巴拿赫空间。对于任意序列 $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p$，

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\varepsilon^{(i)}\|_{X(E)}^p = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \|\varepsilon^{(i)}\|_{X(E)}^p \le \|x\|_{X(E)}^p \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty,$$

因此级数 $\sum_{i=3}^{\infty} a_i\varepsilon^{(i)}$ 在 $X(E)$中收敛。定义 $T\colon\ \ell_p \to X(E)$为

$$T((a_i)_{i=0}^{\infty}) := a_0x + a_1y + a_2z + \sum_{i=3}^{\infty} a_i\varepsilon^{(i)}.$$

算子 T 是有界且单射的。我们证明单射性：设 $a=(a_i)_{i=0}^{\infty}\in\ell_p$满足

$$a_0x+a_1y+a_2z+\sum_{i=3}^{\infty}a_i\varepsilon^{(i)}=T(a)=0.$$

当 $A:=\{1,\dots,n_0\}\subset\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}$ 时，每个 $\varepsilon^{(i)}$ 的前 n_0 个坐标均为零，因此

$$T(a)|_A=a_0(x_j)_{j=1}^{n_0}+a_1(y_j)_{j=1}^{n_0}+a_2(z_j)_{j=1}^{n_0}=0.$$

由这些向量的线性无关性可得 $a_0=a_1=a_2=0$，因此 $\sum_{i=3}^{\infty}a_i\varepsilon^{(i)}=0$。由于 $\varepsilon^{(i)}$ 的支集两两不相交，可知对每个 $i\geq 3$ 都有 $a_i=0$。因此，T 是单射。

断言 1. $T(\ell_p)\setminus\{0\}\subseteq G(X,\ f,\ \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$。

固定 $a=(a_i)_{i=0}^{\infty}\in\ell_p$。证明分两种情况讨论。首先，假设 $a_0=a_1=a_2=0.$。由于 $\varepsilon^{(i)}$ 的支集两两不相交，因此有

$$\widehat{f}(T(a))=\sum_{i=3}^{\infty}\widehat{f}(a_i\varepsilon^{(i)}).$$

另一方面，由于 $\varepsilon^{(i)}|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}_i}=0$，我们有

$$\widehat{f}(T(a))|_{\mathbb{O}_k}=\sum_{i=3}^{\infty}\widehat{f}(a_i\varepsilon^{(i)})|_{\mathbb{O}_k}=\widehat{f}(a_k\varepsilon^{(k)})|_{\mathbb{O}_k}=\widehat{f}(a_k\varepsilon^{(k)}|_{\mathbb{O}_k})=(f(a_kx_{h(j)}))_{j\in\mathbb{N}},\ k\in\mathbb{N}.$$

假设对某个 $\lambda\in\Lambda$，有 $f(T(a))\in Y_{\tilde{\lambda}}(F)$。那么

$$(f(a_kx_{h(j)}))_{j\in\mathbb{N}}\in Y_{\tilde{\lambda}}(F)$$

并且，由于 f 与 $Y_{\tilde{\lambda}}$ 线性相容，我们有 $(f(x_{h(j)}))_{j\in\mathbb{N}}\in Y_{\tilde{\lambda}}(F)$，从而得到

$$\sum_{j\notin\mathbb{O}}f(x_j)\cdot e_j\in Y_{\tilde{\lambda}}(F)\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda(F)$$

这与（6）矛盾。因此 $T(a)\in G(X,f,\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$。

现在我们讨论这样的情形：对某个 $i\in\{0,1,2\}$，有 $a_i\neq 0$。由于对所有 $i\in\mathbb{N}$，都有 $\varepsilon^{(i)}|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}=0$，因此

$$T(a)|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}=\left(a_0x+a_1y+a_2z+\sum_{i=3}^{\infty}a_i\varepsilon^{(i)}\right)\Bigg|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}=(a_0x+a_1y+a_2z)|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}.$$

因此

$$\widehat{f}(T(a)|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}})=(f(a_0x_j+a_1y_j+a_2z_j))_{j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}.$$

由（4）和命题2.3-(i)，我们得到

$$(f(a_0x_j+a_1y_j+a_2z_j))_{j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}\notin\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda(F)\ \text{or}\ (f(a_0x_j+a_1y_j+a_2z_j))_{j\in\mathbb{O}}\notin\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda(F).\tag{8}$$

然而，由（7）以及 f 与 Y_λ的线性相容性可知，$(f(a_0x_j))_{j\in\mathbb{O}}$，$(f(a_1y_j))_{j\in\mathbb{O}}$，$(f(a_2z_j))_{j\in\mathbb{O}}\in Y_{\lambda'}(F)$，由此可得

$$(f(a_0x_j+a_1y_j+a_2z_j))_{j\in\mathbb{O}}\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda(F).$$

因此，（8）的第一种情况成立，从而得到 $f(T(a))\notin\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda(F)$。这就确立了该断言。

第一个断言确立了 $G(X, f, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ 的 $(3, \mathfrak{c})$-可直线化性。现在我们证明可空间化性断言。

断言 2. $T\ \overline{(\ell_p)}\setminus\{0\}\subseteq G\ (X,\ f,\ \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$。

设 $w=(w_j)_{j=1}^{\infty}\in\overline{T(\ell_p)}\setminus\{0\}$，且有序列 $b^{(k)}=(b_i^{(k)})_{i=0}^{\infty}\in\ell_p,\ k\in\mathbb{N}$，使得$w=\lim_k T(b^{(k)})$ 属于 $X(E)$。由于

$$T(b^{(k)})|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}=(b_0^{(k)}x_j+b_1^{(k)}y_j+b_2^{(k)}z_j)_{j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}},$$

极限

$$\lim_k(b_0^{(k)}x_j+b_1^{(k)}y_j+b_2^{(k)}z_j)_{j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}$$

在 $X(E)$ 中存在。与前面一样，由于 $\{1,\dots,n_0\}\subset\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}$，集合

$$\{\widetilde{x}=(x_j)_{j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}},\widetilde{y}=(y_j)_{j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}},\widetilde{z}=(z_j)_{j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}\}$$

$\widetilde{\ }$是 $X(E)$ 中的线性无关集。由于 $W:=$ 张成空间$\{\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}\}$ 是闭的，存在$b_0,\ b_1,\ b_2\in\mathbb{K}$，使得

$$\begin{aligned}\lim_k(b_0^{(k)}x_j+b_1^{(k)}y_j+b_2^{(k)}z_j)_{j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}&=(b_0x_j+b_1y_j+b_2z_j)_{j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}\\&=b_0\widetilde{x}+b_1\widetilde{y}+b_2\widetilde{z}.\end{aligned}$$

考虑 $\widetilde{\ }$连续线性泛函 $\varphi_{\widetilde{x}}:\ W\to\mathbb{K}$ 由 $\varphi_{\widetilde{x}}(\alpha\widetilde{x}+\beta\widetilde{y}+\gamma\widetilde{z})=\alpha$定义。该 n

$$\begin{aligned}b_0&=\varphi_{\widetilde{x}}(b_0\widetilde{x}+b_1\widetilde{y}+b_2\widetilde{z})\\&=\varphi_{\widetilde{x}}\left[\lim_k(b_0^{(k)}\widetilde{x}+b_1^{(k)}\widetilde{y}+b_2^{(k)}\widetilde{z})\right]\\&=\lim_k\varphi_{\widetilde{x}}(b_0^{(k)}\widetilde{x}+b_1^{(k)}\widetilde{y}+b_2^{(k)}\widetilde{z})=\lim_k b_0^{(k)}\end{aligned}$$

类似地，$\lim_k b_1^{(k)}=b_1$ 和 $\lim_k b_2^{(k)}=b_2$。因此，我们可以写成

$$w_j=b_0x_j+b_1y_j+b_2z_j,\quad j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}.$$

首先，假设对于所有 $i\in\{0,1,2\},\ b_i=\lim_k b_i^{(k)}=0$。那么对于所有 $j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O},\ w_j=0$。由于$w\neq0$，存在 $r\in\mathbb{O}$ 使得 $w_r\neq0$。因为 $\mathbb{O}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathbb{O}_i$，存在 $m,\ t\in\mathbb{N}$ 使得 $e_r=e_{n_t^{(m)}}$。注意

$$T(a^{(k)})=b_0^{(k)}x+b_1^{(k)}y+b_2^{(k)}z+\sum_{i=3}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_i^{(k)}x_{h(j)}\cdot e_{n_j^{(i)}},\ k\in\mathbb{N},$$

并且 $T(a^{(k)})$ 的 r 阶坐标为

$$b_0^{(k)}x_r+b_1^{(k)}y_r+b_2^{(k)}z_r+b_m^{(k)}x_{h(t)}.$$

由于 $X(E)\overset{C}{\hookrightarrow}\ell_\infty(E)$，我们有

$$0\neq w_r=\lim_k\left(b_0^{(k)}x_r+b_1^{(k)}y_r+b_2^{(k)}z_r+b_m^{(k)}x_{h(t)}\right)=\left(\lim_k b_m^{(k)}\right)x_{h(t)}$$

and

$$\begin{aligned}w|_{\mathbb{O}_m}&=\left[\lim_k\left(b_0^{(k)}x+b_1^{(k)}y+b_2^{(k)}z+\sum_{i=3}^{\infty}b_i^{(k)}\varepsilon^{(i)}\right)\right]\Bigg|_{\mathbb{O}_m}=\left[\lim_k\left(\sum_{i=3}^{\infty}b_i^{(k)}\varepsilon^{(i)}\right)\right]\Bigg|_{\mathbb{O}_m}\\&=\lim_k\left(\sum_{i=3}^{\infty}b_i^{(k)}\varepsilon^{(i)}\right)\Bigg|_{\mathbb{O}_m}=\lim_k\left(\sum_{i=3}^{\infty}b_i^{(k)}\varepsilon^{(i)}|_{\mathbb{O}_m}\right)=\lim_k\left(b_m^{(k)}\varepsilon^{(m)}|_{\mathbb{O}_m}\right)\\&=\left(\lim_k b_m^{(k)}\right)\cdot(x_j)_{j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}.\end{aligned}$$

^ ^如果对于某个 $\lambda\in\Lambda$，有 $f(w)\in Y_{\widehat{\lambda}}(E)$，根据标准序列类的定义，

$$\begin{aligned}\left(f\left(\left(\lim_k b_m^{(k)}\right)\cdot x_j\right)\right)_{j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}} &= \widehat{f}\left(\left(\lim_k b_m^{(k)}\right)\cdot (x_j)_{j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}\right)\\ &= \widehat{f}(w|_{\mathbb{O}_m})\\ &= \widehat{f}(w)|_{\mathbb{O}_m}\in Y_{\widehat{\lambda}}(F).\end{aligned}$$

由于 f 是线性相容的，因此

$$(f(x_j))_{j\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}\in Y_{\widehat{\lambda}}(F)\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda(F),$$

与（5）矛盾。

现在假设对于某个 $i\in\{0,1,2\}$，$b_i=\lim_k b_i^{(k)}\neq 0$。若对于某个 $\widehat{\lambda}\in\Lambda$，$\widehat{f}(w)\in Y_{\widehat{\lambda}}(F)$，则

$$\widehat{f}\left((b_0x+b_1y+b_2z)|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}\right)=\widehat{f}(w|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}})=\widehat{f}(w)|_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{O}}\in Y_{\widehat{\lambda}}(F)\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda(F)$$

这与断言 1 中的论证矛盾（见（8））。

在这两种情况下，$f(w)\notin\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda(F)$，因此 $T(\ell_p)\setminus\{0\}\subseteq G(X,\ f,\ \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$。这就证明了该断言，并完成了证明。□

4. Pointwise spaceability in operator ideals

本节将在算子理想的背景下建立逐点可空间化性结果。我们首先回顾拟巴拿赫算子理想的概念。算子理想 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{L}$的一个子类；$\mathcal{L}$是巴拿赫空间之间所有连续线性算子构成的类，并且对任意巴拿赫空间 E和 F，其分量 $\mathcal{I}(E,F):=\mathcal{L}(E,F)\cap\mathcal{I}$满足：(i) $\mathcal{I}(E,F)$ 是 $\mathcal{L}(E,F)$的向量子空间，并包含所有有限秩算子 $\mathcal{F}(E,F)$；(ii)（理想性质）若 $v\in\mathcal{L}(F_0,F)$、$T\in\mathcal{I}(E_0,F_0)$ 且 $u\in\mathcal{L}(E,E_0)$，则 $v\circ T\circ u\in\mathcal{I}(E,F)$。若存在映射 $\alpha:\mathcal{I}\to[0,\infty)$，且对任意巴拿赫空间 E和 F，其在每个分量 $\mathcal{I}(E,F)$ 上的限制都是拟范数；满足 $\alpha(\mathrm{id}_{\mathbb{K}})=1$；并且对所有 $T_1\in\mathcal{L}(F_0,F)$、$T_2\in\mathcal{I}(E_0,F_0)$ 和 $T_3\in\mathcal{L}(E,E_0)$，有 $\alpha(T_1\circ T_2\circ T_3)\leq\|T_1\|\cdot\alpha(T_2)\cdot\|T_3\|$，则称 $\mathcal{I}$为拟范数算子理想。设 $(\mathcal{I},\alpha)$ 是拟范数算子理想。若 $\mathcal{I}$ 关于 α完备，则称其为拟巴拿赫算子理想。

设 $\mathcal{S}$ 是一个标准序列空间。下一个结果是关于算子理想的 [1, 命题 2。2] 为简化记号，给定映射 $T:W\to Z$，我们用 Tw 表示 T 在 w 处的取值；对于序列 $x\in E^{\mathbb{N}}$，记 $x(j)\in E$ 为其第 j 个坐标。

命题 4.1。设 $\mathcal{I}$ 是一个（拟）巴拿赫算子理想。给定 $\mathbb{N}$的一个划分 $(\mathbb{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 以及一个非零算子 $T\in\mathcal{I}(E;\mathcal{S})$，有如下结论。

(i) 对每个自然数 $k\geq 1$，映射 $T_k:E\to\mathcal{S}$ 定义如下：

$$T_kx=\sum_{i\in\mathbb{N}}Tx(i)\cdot e_{n_i^{(k)}}.$$

属于 $\mathcal{I}(E;\mathcal{S})$，且对所有 $x\in E$均有 $\|T_kx\|_{\mathcal{S}}=\|Tx\|_{\mathcal{S}}$。此外，$\{T_k:k\geq 2\}\cup\{T\}$ 线性无关。

(ii) 对某个 $0<p\leq 1$，映射 $\Psi:\ell_p\to\mathcal{I}(E;\mathcal{S})$ 定义如下：

$$\Psi_a:=\Psi a=a_1T+\sum_{j=2}^{\infty}a_jT_j,\quad a=(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\in\ell_p,$$

是良定义的、线性的、有界的且为单射。

近期，Botelho 和 Campos 通过对向量值序列类进行变换，给出了求和算子的刻画（见 [11]）。我们在标准序列类的框架下重新表述这一概念：给定标准序列类 X 和 Y，若线性算子 $u \in \mathcal{L}(E; F)$ 满足 *(X;Y)*-求和 当且仅当 $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$ 对任意 $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ 均成立。在这种情况下，我们记作 $u \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$。

$(X; Y)$-求和算子的例子包括绝对 (p, q)-求和算子（$0 < q \leq p < \infty$）的理想 $\Pi_{p,q}(E; F)$（参见 [23, 第 10 章]），以及 Cohen 强 (p, q)-求和算子（$1 < q \leq p < \infty$）的理想 $\mathcal{D}_{p,q}(E; F)$（参见 [3, 第 3 节]）。在这些情况下，我们有

$$\Pi_{p,q}(E; F) = \mathcal{L}_{\ell_q^w;\ell_p(\cdot)}(E; F) = \mathcal{L}_{\ell_q^u;\ell_p(\cdot)}(E; F) \quad \text{and} \quad \mathcal{D}_{p,q}(E; F) = \mathcal{L}_{\ell_q(\cdot);\ell_p\langle\cdot\rangle}(E; F). \tag{9}$$

沿着同一思路，我们采用 Botelho 和 Campos 引入的序列类线性稳定性概念（参见 [11, 定义 3。2]），该概念是在标准序列类的背景下提出的。若标准序列类 X 满足线性稳定，则称其为 $\mathcal{L}_{X;X} = \mathcal{L}$，这意味着对于任意巴拿赫空间 E 和 F 以及任意算子 $T \in \mathcal{L}(E; F)$，只要 $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(F)$，就有 $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$。例 2.2 中给出的所有类都是线性稳定的。以下这些在此背景下理应成立的性质将在后文发挥作用。

命题 4.2。 设 $\mathcal{S}$ 是一个标准 *Banach* 序列空间。若 X 是一个线性稳定的标准序列类，则以下条件成立：

(i) 若 $(x^{(i)})_{i=1}^{\infty} \in X(\mathcal{S})$ 且 $(x_{n_k}^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ 对每个 i 都是 $x^{(i)}$ 的子序列，则 $((x_{n_k}^{(i)})_{k\in\mathbb{N}})_{i\in\mathbb{N}} \in X(\mathcal{S})$ 并且

$$\left\|((x_{n_k}^{(i)})_{k\in\mathbb{N}})_{i\in\mathbb{N}}\right\|_{X(\mathcal{S})} \leq \|(x^{(i)})_{i=1}^{\infty}\|_{X(\mathcal{S})}.$$

(ii) 若 $(x^{(i)})_{i=1}^{\infty} \in X(\mathcal{S})$ 且 $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个无限子集，则对于所有 $i \in \mathbb{N}$，由下式定义的 $\mathcal{S}$-值序列 $(y^{(i)})_{i=1}^{\infty}$

$$y^{(i)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k^{(i)} \cdot e_{n_k}$$

属于 $X(\mathcal{S})$，并满足 $\|(y^{(i)})_{i=1}^{\infty}\|_{X(\mathcal{S})} \leq \|(x^{(i)})_{i=1}^{\infty}\|_{X(\mathcal{S})}$。

证明。 由于 $\mathcal{S}$ 是一个标准序列空间，定义2.1 的第 (ii) 和 (iii) 项保证，对于任意无限子集 $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$，我们可以考虑由下式定义的线性连续算子 $\mathrm{R}_{\mathbb{N}'}$、$\mathrm{SP}_{\mathbb{N}'} \in \mathcal{L}(\mathcal{S};\ \mathcal{S})$：

$$\mathrm{R}_{\mathbb{N}'}((x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = (x_j)_{j\in\mathbb{N}'} \quad \text{and} \quad \mathrm{SP}_{\mathbb{N}'}((x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \cdot e_{n_i},$$

对所有 $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$均成立。因此，该结论由 X的线性稳定性推出。 □

若 X 是线性稳定类，则通过类似的论证，我们可得到一个类似于命题2.3的结果。证明遵循相同的推理过程，故略去。

命题 4.3。 设 X 是线性稳定的标准序列类，且 $\mathcal{S}$ 是标准序列空间。设$(x^{(i)})_{i=1}^{\infty}$ 属于 $\mathcal{S}^{\mathbb{N}}$，其中每个 $x^{(i)} =(x_j^{(i)})_{j=1}^{\infty}$ 都属于 $\mathcal{S}$，并假设$(x^{(i)})_{i=1}^{\infty} \notin X(\mathcal{S})$。那么，对于任意划分 $\mathbb{N} = \mathbb{N}' \cup \mathbb{N}''$，

$$(x^{(i)}|_{\mathbb{N}'})_{i\in\mathbb{N}} \notin X(\mathcal{S}) \quad or \quad (x^{(i)}|_{\mathbb{N}''})_{i\in\mathbb{N}} \notin X(\mathcal{S}).$$

定理 4.4。 设 $\mathcal{S}$ 是巴拿赫标准序列空间，且 X 和 Y 是标准序列类，其中 Y 线性稳定。给定巴拿赫空间 E 和（拟）巴拿赫算子理想 $\mathcal{I}(E;\ \mathcal{S})$，集合 $\mathcal{I}(E;\ \mathcal{S}) \setminus \mathcal{L}_{X;Y}(E;\ \mathcal{S})$ 要么为空，要么是逐点 $\mathfrak{c}$-可空间化的。

证明。假设存在一个非平凡算子 $T \in \mathcal{I}(E;\mathcal{S}) \setminus \mathcal{L}_{X;Y}(E;\mathcal{S})$。固定 $x_0 \in E$和 $j_0 \in \mathbb{N}$，使得 $Tx_0(j_0) \neq 0$。选取 $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in X(E)$，使得 $(Tz_n)_{n=1}^{\infty} \notin Y(\mathcal{S})$。根据命题 4.3，存在一个无限子集 $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$，其补集为无限集，并且满足$j_0 \in \mathbb{N}_1$

$$\left(Tz_n|_{\mathbb{N}_1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \notin Y(\mathcal{S}). \tag{10}$$

令 $\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_1=\bigcup_{k\geq 2}\mathbb{N}_k$ 为一个由无限子集构成的划分。根据命题 4.1，我们得到一个算子线性无关序列 $(T_k)_{k\geq 2}\subset\mathcal{I}(E;\ \mathcal{S})$。我们断言 $T_k\notin\mathcal{L}_{X;Y}(E;\ \mathcal{S})$ $k\geq 2$。事实上，将 T_kz_n 限制在 $\mathbb{N}_k$ 的坐标上可得

$$(Tz_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(T_kz_n|_{\mathbb{N}_k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

它不能属于 $Y(\mathcal{S})$。此外，命题4.1 给出，对某个 $0<p\leq 1$，存在一个定义良好、有界、线性、单射映射 $\Psi:\ \ell_p\to\mathcal{I}(E;\mathcal{S})$。因此 $\Psi(\ell_p)$ 是 $\mathfrak{c}$维子空间，它是 $\mathcal{I}(E;\mathcal{S})$ 的子空间，且包含 T。

断言 1。 $\Psi(\ell_p)\setminus\{0\}\subset\mathcal{I}(E;\ \mathcal{S})\setminus\mathcal{L}_{X;Y}(E;\mathcal{S})$.

设 $a=(a_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_p\setminus\{0\}$。对于所有 $n\in\mathbb{N}$,

$$\Psi_a(z_n)=a_1Tz_n+\sum_{j=2}^{\infty}a_jT_jz_n.$$

首先，假设 $a_1\neq 0$。由于每个 T_jz_n 在 $\mathbb{N}_j$ 之外的坐标均为零（对 $j\geq 2$），我们有 $\Psi_az_n|_{\mathbb{N}_1}=a_1\,Tz_n|_{\mathbb{N}_1}$. 因此

$$\left(\Psi_az_n|_{\mathbb{N}_1}\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(a_1Tz_n|_{\mathbb{N}_1}\right)_{n\in\mathbb{N}}\notin Y(\mathcal{S}),$$

这意味着 Ψa 不属于 $\mathcal{L}_{X;Y}(E;\mathcal{S})$。

现在假设 $a_1=0$，并选择 i 使得 $a_i\neq 0$。由于 T_iz_n 在 $\mathbb{N}_i$ 之外为零，

$$(a_iTz_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(a_iT_iz_n|_{\mathbb{N}_i}\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\Psi_az_n|_{\mathbb{N}_i}\right)_{n\in\mathbb{N}}\notin Y(\mathcal{S}),$$

这也推出 $\Psi a\notin\mathcal{L}_{X;Y}(E;\mathcal{S})$。由此断言得证，并建立了逐点的 $\mathfrak{c}$-可直线化性。现在我们证明主要结果中的可空间化性结论。

断言 2。 $\overline{\Psi(\ell_p)}\setminus\{0\}\subset\mathcal{I}(E;\ \mathcal{S})\setminus\mathcal{L}_{X;Y}(E;\mathcal{S})$。

固定一个非零算子 $S=\lim_k\Psi_{a^{(k)}}\in\Psi(\ell_p)$，其中每个 $a^{(k)}=(a_j^{(k)})_{j\in\mathbb{N}}\in\ell_p$。对于每个 $b=(b_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_p$, $x\in E$ 和 $j\in\mathbb{N}_1$，我们有 $\Psi_bx(j)=b_1Tx(j)$。选择 $x_0\in E$ 和 $j_0\in\mathbb{N}_1$ 使得 $Tx_0(j_0)\neq 0$。于是

$$Sx_0(j_0)=\lim_k\Psi_{a^{(k)}}x_0(j_0)=\left(\lim_k a_1^{(k)}\right)Tx_0(j_0)$$

因此极限 $\lim_k a_1^{(k)}$ 存在。首先，假设 $\lim_k a_1^{(k)}\neq 0$。由于

$$Sz_n=\lim_k\left[a_1^{(k)}\,Tz_n+\sum_{j=2}^{\infty}a_j^{(k)}\,T_jz_n\right]\qquad\forall\,n\in\mathbb{N},$$

如果 $(Sz_n)_{n\in\mathbb{N}}\in Y(\mathcal{S})$，那么

$$\left(\left(\lim_k a_1^{(k)}\right)Tz_n|_{\mathbb{N}_1}\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(Sz_n|_{\mathbb{N}_1}\right)_{n\in\mathbb{N}}\in Y(\mathcal{S}),$$

这与（10）相矛盾。

现在考虑 $\lim_k a_1^{(k)}=0$ 的情形。由于 $S\neq 0$，存在 $x\in E$ 和 $i_0\in\mathbb{N}$，使得$Sx(i_0)\neq 0$。选取 $r,\ t\in\mathbb{N}$，使得 $i_0=n_t^{(r)}$。于是

$$Sx(i_0)=\lim_k\left[\sum_{j=1}^{\infty}a_j^{(k)}T_jx(i_0)\right]=\left(\lim_k a_r^{(k)}\right)T_rx(n_t^{(r)})=\left(\lim_k a_r^{(k)}\right)Tx(t)$$

因此 $\lim_k a_r^{(k)} \neq 0$。若 $(Sz_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y(\mathcal{S})$，则

$$\left(\lim_k a_r^{(k)} T z_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\lim_k \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(k)} T_j z_n|_{\mathbb{N}_r}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (Sz_n|_{\mathbb{N}_r})_{n\in\mathbb{N}} \in Y(\mathcal{S})$$

因此 $(Tz_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y(\mathcal{S})$，这是不可能发生的。由此可证该断言，进而得到逐点 $\mathfrak{c}$可空间化性。□

5. 应用

我们展示主要结果的若干应用。首先，讨论标准序列类的几何可空间性（定理 3.2），该结果在第3节中引入。其次，讨论算子理想中的逐点可空间化性（定理 4.4），该结果在第 4节中确立。这些应用不仅推广了文献中的已有结果，也推动了该领域的若干新进展。

5.1. **标准序列空间中的应用**。

接下来，我们给出定理 3.2 的直接应用，并采用第 3节中确立的记号。我们回顾恒等式

$$X(E) \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda(E) = G(X, Id_E, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}).$$

此外，在第二个推论中，我们利用了例2.6 b) 中确立的性质。

推论 5.1. 设 X 是一个标准序列类，$\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是标准序列类的一个 E-嵌套族，且$(X, Id_E, \{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ 是可分离的。若 $X(E)\setminus\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda(E)$ 是非空集，则当且仅当 $\alpha < \aleph_0$ 时，它是$(\alpha, \mathfrak{c})$-可空间化的。

推论 5.2. 设 M 是一个 *Orlicz* 函数，X 是一个标准序列类，使得$X(E) \subseteq c_0(E)$。若 $X(E) \setminus \ell_M(E)$ 是非空集，则当且仅当$\alpha < \aleph_0$时，它是$(\alpha, \mathfrak{c})$-可空间化的。

让我们来看上述推论得出的一些具体情形。这些结果推广（并恢复）了 [5, 8] 和 [14]中的结果。下文例 a) 至 d) 中差集非空的结论见 [14]，其中证明了这些集合的极大可空间性。

例 5.3。对于此处给出的所有集合以及所有巴拿赫空间 E，当且仅当 $\alpha < \aleph_0$ 时，均具有 $(\alpha, \mathfrak{c})$-可空间化性。

a) 集合

$$c_0(E) \setminus \bigcup_{0<p<\infty} \ell_p^w(E) \quad \text{and} \quad c_0(E) \setminus \bigcup_{0<p<\infty} \ell_p(E).$$

b) 对于 $0 < p < \infty$，集合

$$\ell_p(E) \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q^w(E) \quad \text{and} \quad \ell_p(E) \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q(E).$$

c) 对于 $0 < p_1 < p_2 < \infty$ 和 $0 < q_1, q_2 < \infty$，集合 $\ell_{p_2,q_2}(E) \setminus \ell_{p_1,q_1}(E)$。

d) 对于 $1 \leq p < \infty$，集合

$$\ell_p\langle E\rangle \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q^w(E)。$$

e) 对于 $1 < p < \infty$ 和 $X(\cdot) = \ell_p(\cdot)$ 或 $\ell_p\langle\cdot\rangle$，集合

$$X(E) \setminus \bigcup_{1\leq q<p} \ell_q^{\mathrm{mid}}(E).$$

事实上，由 b) 和 d) 可知，对每个$q \in [1,p)$，我们有 $X(E) \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q^w(E) \neq \emptyset$ 和 $\ell_q^{\mathrm{mid}}(E) \subseteq \ell_q^w(E)$，由此得到 $X(E) \setminus \bigcup_{1\leq q<p} \ell_q^{\mathrm{mid}}(E) \neq \emptyset$。

若 u 是非 $(X;Y)$-求和算子，则集合 $G(X,u,Y)$ 非空。因此，我们得到以下推论。

推论 5.4。设 $u \in \mathcal{L}(E;F)$、X 和 Y 为标准序列类，且 $X(E) \subset c_0(E)$，并且 (X,u,Y) 可分离。若 $u \notin \mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$，则集合

$$\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E) : (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin Y(F)\}$$

是 $(\alpha, \mathfrak{c})$-可空间化的，当且仅当 $\alpha < \aleph_0$。

例 5.5。利用（9）中的刻画，若 $u \notin \mathcal{L}_{\ell_q^w;\ell_p(\cdot)}(E;F)$ $(0<q\leq p<\infty)$，且若$v \notin \mathcal{L}_{\ell_q(\cdot);\ell_p\langle\cdot\rangle}(E;F)$ $(1<q\leq p<\infty)$，则集合

$$\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E) : (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p(F)\}$$

and

$$\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(E) : (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p\langle F\rangle\}$$

是 $(\alpha, \mathfrak{c})$-可空间化的，当且仅当 $\alpha < \aleph_0$。

5.2. **算子理想中的应用**。我们探讨定理 4.4关于算子理想子集的代数结构与拓扑结构的直接推论。我们首先考察求和算子类之间的差的逐点可空间化性，然后将这些结果推广到更一般的算子理想。我们给出涉及有界算子（或完全连续算子）的具体例子，这些算子不能成为 $(X;Y)$-求和到某些序列类的算子。

推论 5.6. 设 p_1、q_1、p_2、$q_2 \in (0,\infty)$ 满足 $p_1 \leq p_2$ 与 $q_1 \leq q_2$，并设 $\mathcal{S}$ 为巴拿赫标准序列空间。对每个巴拿赫空间 E，集合

$$\Pi_{p_2,q_2}(E;\mathcal{S}) \setminus \Pi_{p_1,q_1}(E;\mathcal{S})$$

要么为空，要么是逐点 $\mathfrak{c}$-可空间化的。

推论 5.7. 设 $\mathcal{S}$ 为巴拿赫标准序列空间，并设 X 与 Y 为标准序列类，且 Y 线性稳定。给定巴拿赫空间 E，集合

$$\mathcal{L}(E;\mathcal{S}) \setminus \mathcal{L}_{X;Y}(E;\mathcal{S})$$

要么为空，要么是逐点 $\mathfrak{c}$-可空间化的。

例5.8. (a) 集合

$$\mathcal{L}(E;\mathcal{S}) \setminus \mathcal{L}_{\ell_p^w;\ell_p^{\mathrm{mid}}}(E;\mathcal{S})$$

是逐点 $\mathfrak{c}$-可空间化，当且仅当 $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E) \neq \ell_p^w(E)$（参见 [12, 定理 2。6]）。

(b) 集合

$$\mathcal{L}(E;\mathcal{S}) \setminus \mathcal{L}_{\ell_p^{\mathrm{mid}};\ell_p(\cdot)}(E;\mathcal{S})$$

是逐点 $\mathfrak{c}$-可空间化，当且仅当对于任意 Borel测度 μ， $\mathcal{S}$ 不是 $L_p(\mu)$ 的子空间（参见[12,定理 2.7]）。

(c) 对于 $0<q_1,\ q_2,\ r<\infty$，集合

$$\mathcal{L}(E;\mathcal{S}) \setminus \mathcal{L}_{\ell_r^w;\ell_{p_1,q_1}(\cdot)}(E;\mathcal{S})$$

要么为空，要么是逐点 $\mathfrak{c}$可空间化的。

(d) For $1 \leq p < \infty$, the set

$$\mathcal{L}(E;\mathcal{S}) \setminus \mathcal{L}_{\ell_p(\cdot);\ell_p\langle\cdot\rangle}(E;\mathcal{S})$$

要么为空，要么是逐点 $\mathfrak{c}$-可空间化的。

与算子理想的经典理论一样，我们将 $\mathcal{CC}$ 视为完全连续算子组成的理想（见 [33, 第 1 节6]）。更准确地说，完全连续算子将弱收敛序列映射为范数收敛序列。

推论 5.9. 设 $\mathcal{S}$ 是巴拿赫标准序列空间， X 和 Y 是标准序列类，且 Y 线性稳定。给定巴拿赫空间 E，集合

$$\mathcal{CC}(E;\mathcal{S}) \setminus \mathcal{L}_{X;Y}(E;\mathcal{S})$$

要么为空，要么是逐点 $\mathfrak{c}$-可空间化的。

例 5.10. 对于任意 $0 < p < \infty$，集合 $\mathcal{CC}(\ell_1;\ell_1) \setminus \Pi_p(\ell_1;\ell_1)$ 都是逐点 $\mathfrak{c}$-可空间化的。事实上，由于 ℓ_1 具有舒尔性质，恒等算子 $\mathrm{Id}_{\ell_1} : \ell_1 \to \ell_1$ 是完全连续的。另一方面，根据德沃雷茨基–罗杰斯定理（见 [23,定理 2.18]），Id_{ℓ_1} 绝不是绝对 p-可和的。

Acknowledgments and Funding

Nacib Gurgel Albuquerque 获得了 CNPq 项目资助，项目编号为 406457/2023-9 和 403964/2024-5。Luiz Felipe de Pinho Sousa 获得了 CAPES 奖学金以及 CNPq 项目资助，项目编号为 406457/2023-9。

References

[1] N. Albuquerque 和 L. Coleta，可和算子类中的大型结构，《数学分析与应用杂志》，526（2023）第2期，127262。[2] T. R. Alves 和 P. Turco， p-紧映射集合的可空间化性，《数学分析与应用杂志》，514（2022）第1期，126265。[3] H. Apiola， p-可和序列空间与（p,q）-求和算子之间的对偶性，以及核性的刻画，《数学年刊》，219（1976）第1期，53–64。[4] G. Ara´ujo 和 D. Pellegrino，可和多重线性算子的最优估计，《线性与多重线性代数》，65（2017）第5期，930–942。[5] G. Ara´ujo、A. Barbosa、A. Baganha Raposo Jr. 和 G. Ribeiro，并集的补集：对可空间化性及其应用的洞见，《Mathematika》，71（2025）第1期，e70006。[6] R. M. Aron、V. I. Gurariy 和 J. B. Seoane-Sep´ulveda，《可线性化性：在数学中探寻线性》，CRC出版社，2015。[7] R. M. Aron、V. I. Gurariy 和 J. B. Seoane-Sep´ulveda，关于 $\mathbb{R}$上函数集合的可线性化性与可空间化性，《美国数学会会刊》，133（2005）第3期，795–803。[8] C. Barroso、G. Botelho、V. F´avaro 和 D. Pellegrino，皮亚诺定理的弱形式与向量值序列空间的可线性化性和可空间化性，《美国数学会会刊》，141（2013）第6期，1913–1923。[9] L. Bernal-Gonz´alez 和 M. O. Cabrera，可线性化性判据及其应用，《功能分析杂志》，266（2014）第6期，3997–4025。[10] L. Bernal-Gonz´alez、D. Pellegrino 和 J. B. Seoane-Sep´ulveda，拓扑向量空间中非线性集合的线性子集，《美国数学会通报》，51（2014）第1期，71–130。[11] G. Botelho 和 J. R. Campos，线性与多重线性算子对向量值序列的变换，《数学月刊》，183（2017）第3期，415–435。[12] G. Botelho、J. R. Campos 和 J. S. Santos，与绝对求和算子和科恩强可和算子相关的算子理想，《太平洋数学杂志》，287（2017）第1期，1–17。[13] G. Botelho、J. R. Campos 和 L. Nascimento，广义求和线性算子的极大理想，《地中海数学杂志》，21（2024）第2期。[14] G. Botelho、D. Cariello、V. F´avaro 和 D. Pellegrino，序列空间中的极大可空间性，《线性代数及其应用》，437（2012）第12期，2978–2985。[15] G. Botelho、D. Diniz、V. F´avaro 和 D. Pellegrino，巴拿赫与拟巴拿赫序列空间中的可空间化性，《线性代数及其应用》，434（2011），1255–1260。[16] G. Botelho、D. Diniz 和 D. Pellegrino，有界线性非绝对求和算子集合的可线性化性，《数学分析与应用杂志》，357（2009）第1期，171–175。[17] G. Botelho 和 V. F´avaro，构造具有特殊性质的向量值序列的巴拿赫空间，《密歇根数学杂志》，64（2015）第3期，539–554。

[18] G. Botelho 和 A. Santiago，序列类的算子理想表示，《数学分析与应用杂志》，542(1)（2025年），128755。[19] J. R. Campos 和 L. F. P. Sousa，Orlicz序列与受限集，《当代数学》，（2025年）。[20] J. R. Campos、L. Nascimento 和 L. F. P. Sousa，由序列类定义的内射型范数与积分型双线性形式，《巴西数学会通报》（新系列），56(2)（2025年），1–21。[21]J. S. Cohen，绝对 p-求和算子、 p-核算子及其共轭算子，《数学年刊》，201（1973），177–200。[22] A. Defant 和 K. Floret，《张量范数与算子理想》，北荷兰数学研究丛书，第176卷，1993。[23] J. Diestel、H Jarchow 和 A. Tonge，《绝对求和算子》，剑桥大学出版社，1995。[24] V. F´avaro、D. Pellegrino 和 P. Rueda，巴拿赫空间之间无界多重线性算子集合的大小，《线性代数及其应用》，606（2020），144–158。[25] V. F´avaro、D. Pellegrino 和 D. Tom´az，可线性化性与可空间化性：一种新方法，《巴西数学会通报》（新系列），51（2020）第1期，27–46。[26] V. I. Gurariy 和 L. Quarta，关于连续函数集合的可线性化性，《数学分析与应用杂志》，294（2004），62–72。[27] F. Hern´andez、C. Ruiz 和 V. S´anchez，可空间化性与算子理想，《数学分析与应用杂志》，431（2015）第2期，1035–1044。[28] D. Kitson 和 R. M. Timoney，算子值域与可空间化性，《数学分析与应用杂志》，378（2011）第2期，680–686。[29] J. Lindenstrauss 和 L. Tzafriri，《古典巴拿赫空间 I 和 II》，施普林格，伦敦，1996。[30]M. C. Matos 和 D. Pellegrino，Lorentz 求和映射，《数学通讯》，283（2010）第10期，1409–1427。[31] T. Nogueira 和 D. Pellegrino，关于不变巴拿赫序列空间中某些子集的大小，《线性代数及其应用》，487（2015），172–183。[32] D. Pellegrino 和 A. Raposo Jr.，序列空间中的逐点可线性化性，《数学探索》（新系列），32（2021）第2期，536–546。[33] A. Pietsch，《算子理想》，北荷兰出版公司，1980。[34] D. Puglisi 和 J. B. Seoane-Sep´ulveda，有界线性非绝对求和算子，《数学分析与应用杂志》，338（2008）第1期，292–298。

(N.G.Albuquerque) Departamento de Matemática
Universidade Federal da Paraíba
João Pessoa - PB58.051-900 (Brazil)*Email address*:
ngalbuquerque@mat.ufpb.br

(J.R. Campos) Departamento de Matemática
Universidade Federal da ParaíbaJoão Pessoa - PB
58.051-900 (Brazil)*Email address*: jrc@academico.ufpb.br,
jamilsonrc@gmail.com

(L.F.P. Sousa) Departamento de Matemática
Universidade Federal da Paraíba
João Pessoa - PB
58.051-900 (Brazil)
Email address: lfpinhosousa@gmail.com