arXiv:2602.10433v1 [math.GR] 11 Feb 2026

自由循环群的深度

Spencer Dowdall、Yassine Guerch、Radhika Gupta、Jean Pierre Mutanguha 和 Caglar Uyanik

2026年2月12日

摘要

对于自由群自同构，我们证明其吸引层状轨道偏序集是相应映射环面的一个典范不变量。也就是说，如果一个自由循环群有两种不同的映射环面分解，那么相应的自同构具有同构的层叠轨道偏序集。此外，我们证明，层状结构深度（即该偏序集中最大链的大小）是自由循环群的一个可公度不变量。

1 引言

每个有限生成自由群 $\mathbb{F}$ 的自同构 Φ 都会导出一个映射环面扩张，由 $\mathbb{F}$ 通过 $\mathbb{Z}$定义，其表示为

$$M(\Phi) \coloneqq \mathbb{F} \rtimes_\Phi \mathbb{Z} = \langle \mathbb{F}, t \mid tgt^{-1} = \Phi(g) \text{ for all } g \in \mathbb{F} \rangle.$$

在同构意义下，这个群仅取决于单值/自同构的外自同构类 $\phi \coloneqq [\Phi] \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$，因此我们常记作 $M(\phi)$ 或 $\mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$。若群 $\mathbb{G}$ 同构于某个这样的扩张 $M(\phi)$，其中 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$ 且 $\mathbb{F}$非平凡，则称其为自由-循环的。然而，众所周知，ϕ 并不能由 $\mathbb{G}$唯一确定；事实上，可能存在无穷多个不同的外自同构 $\psi \in$外自同构群$(\mathbb{F}')$ ——甚至是秩各不相同的自由群 $\mathbb{F}'$ ——使得 $M(\phi) \cong \mathbb{G} \cong M(\psi)$。因此，原则上，$\mathbb{G}$ 会丢失关于 ϕ的信息。自然会问，外自同构 ϕ 的哪些特征实际上是相关自由循环群 $\mathbb{G} \cong M(\phi)$的群不变量，甚至是 $\mathbb{G}$的更强的不变量，例如可公度不变量或拟等距不变量。

在引言中，$\mathbb{F}$ 是一个有限生成非平凡自由群，而 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$。根据前面的评论，$\mathbb{F}$ 的秩并不是 $M(\phi)$ 的群不变量，因为可能存在某个其他的 $\psi \in$外自同构群$(\mathbb{F}')$，使得 $M(\phi) \cong M(\psi)$ 且其秩$(\mathbb{F}) \neq$等于$(\mathbb{F}')$。相比之下，利用 [MSW03、Pap07] 可以证明，ϕ 在外自同构群$(\mathbb{F})$ 中具有有限阶这一性质，是 $M(\phi)$的拟等距不变量；而其确切阶数甚至不是群不变量。另一个例子是，近期的工作[Mut24c、Mac00、GL04、Gho23、DL22] 表明，ϕ是多项式增长的（见§2.7），而且多项式增长的次数也是 $M(\phi)$的拟等距不变量。在另一极端，ϕ 是无环的（即没有非平凡元素的周期共轭类）同样是一个拟等距不变量，因为Brinkmann证明了这等价于 $M(\phi)$是Gromov双曲群 [Bri00]。最后，回顾一下，如果 ϕ不保持 $\mathbb{F}$的真自由因子系统，则称其为不可约。利用动力学方法，[DKL15] 首次证明，当 ϕ 同时不可约且无环时，$M(\phi)$的许多其他分裂也具有相同性质（例如，位于对称化BNS不变量同一分支中的那些分裂）。后来，[Mut21] 在完全一般的情形下证明，ϕ 的不可约性是 $M(\phi)$的群不变量。

在证明外自同构群的蒂茨替代定理时$(\mathbb{F})$，Bestvina–Feighn–Handel [BFH00]指出，每个外自同构 ϕ 的 $\mathbb{F}$典范定义的（可能为空的）

有限集 $\mathcal{L}^+(\phi)$ 由吸引层状结构组成，其中每个都是 $\mathbb{F}$双边界中的不变闭子集 $\partial^2\mathbb{F}$ （详见§2.8）。这些层状结构编码了关于该自同构的重要动力学信息；自二十多年前引入以来，它们已成为外自同构群理论诸多方面的基础工具(𝔽)。

人们可能会希望， $\mathcal{L}^+(\phi)$ 的基数是自由循环群$M(\phi)$的不变量。这一猜想受到两个重要特殊情形下已有结果的启发：首先，当且仅当 ϕ 是多项式增长时，集合$\mathcal{L}^+(\phi)$为空；我们已经看到，多项式增长是一个拟等距不变量。因此， $\mathcal{L}^+(\phi)$ 为空也是一个拟等距不变量。其次，当 ϕ 不可约时， $\mathcal{L}^+(\phi)$ 只由一个层状组成。由于不可约性是群不变量，对于所有满足 $M(\psi) \cong M(\phi)$的外自同构 ψ， $\mathcal{L}^+(\psi)$的基数也都是 1。然而，这并不能证明基数为 1 是一个不变量，因为还存在一些可约自同构 ϕ，使得 $|\mathcal{L}^+(\phi)| = 1$。

事实证明， $\mathcal{L}^+(\phi)$ 的基数并不是合适的量。例如，考虑由带 puncture 曲面的同胚导出的自同构，可以找到一些例子 $M(\phi) \cong M(\psi)$，其中例如 $|\mathcal{L}^+(\phi)| > |\mathcal{L}^+(\psi)| = 1$。完整的情况更加有趣，也更加复杂。

层叠集 $\mathcal{L}^+(\phi)$ 还有两种附加结构。对于第一种结构，吸引层状结构可以彼此真包含（作为 $\partial^2\mathbb{F}$的子集），从而使 $\mathcal{L}^+(\phi)$ 成为一个偏序集。我们将偏序集中的（层状）深度定义为 ϕ的最长 $\delta(\phi)$链的长度 $\mathcal{L}^+(\phi)$。本项目最初的目标是确定深度$\delta(\phi)$ 是否为 $M(\phi)$的群不变量，这一问题曾在 [Mut24c]中提出。我们的首个主要结果（定理 5.6）对此给出了肯定回答，并由此推导出一个更强的结论。

推论5.7。设 $\mathbb{F}$ 是一个有限生成非平凡自由群，且 $\phi \in$外自同构群(𝔽)。外自同构$\delta(\phi)$ 的深度 ϕ 是自由循环群$M(\phi) = \mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$的可公度不变量。也就是说，若 $\psi \in$外自同构群($\mathbb{F}'$) 是任意一个外自同构，使得 $M(\phi)$与 $M(\psi)$可公度（即存在同构的有限指数子群），那么 $\delta(\phi) = \delta(\psi)$。

由于可公度群是拟等距的，这为 [Mut24c中的猜想 55] 提供了证据：映射环面的深度是拟等距不变量。

第二种附加结构是，层叠集 $\mathcal{L}^+(\phi)$ 在 ϕ 对双边界 $\partial^2\mathbb{F}$的作用下保持不变。由于此作用保持嵌套关系，偏序可下降到商集，从而将吸引层状结构的$\mathcal{L}^+_\phi$ ϕ轨道集转化为与自同构 ϕ相关联的典范偏序集 ϕ。注意，吸引层状结构的 ϕ [BFH00，引理 3.113]轨道与$\mathcal{L}^+_\phi$ 的任意相对列车轨代表中的指数增长层一一对应。中的最长链长度 $\mathcal{L}^+(\phi)$也等于中的最长链长度，根据第一个结果，这是一个群不变量。要证明这个轨道偏序集的群不变性，我们还需要多费些功夫：

定理 6.3。设 $\mathbb{F}$ 是一个有限生成非平凡自由群，且 $\phi \in$外自同构群(𝔽)。偏序集 $\mathcal{L}^+_\phi$ 由外自同构的层叠轨道构成 ϕ是自由循环群的群不变量$M(\phi) = \mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$：对于任意外自同构 $\psi \in$外自同构群($\mathbb{F}'$)，任意同构 $M(\phi) \to M(\psi)$都会诱导一个序同构 $\mathcal{L}^+_\phi \to \mathcal{L}^+_\psi$。

我们指出，与深度 $\delta(\phi)$ 不同，与 ϕ 相关联的偏序集 $\mathcal{L}^+_\phi$ 并非自由循环群 $M(\phi)$ 的可公度不变量。事实上，对 ϕ 取幂并考虑相应的映射环面扩张即可看出这一点。

除了深度 $\delta(\phi)$ 之外，我们还定义 ϕ的*(层状)*深度谱，记作 $\delta\mathcal{S}(\phi)$，它是由 $\mathcal{L}^+(\phi)$ （等价地，$\mathcal{L}^+_\phi$ ）中极大链的长度组成的集合，其中不计重数。与深度一样，我们也得到深度谱的不变性：

推论 6.4。设 $\mathbb{F}$ 是一个有限生成非平凡自由群，且 $\phi \in$外自同构群(𝔽)。外自同构 $\delta\mathcal{S}(\phi)$ 的深度谱 ϕ 是自由循环群 $\mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$的可公度不变量。

1.1 对照三维流形情形

自由群自同构理论的很大一部分受到其与曲面同胚之间类比关系的启发，本文的结果也是如此。为了补充背景并更好地从几何角度理解层状结构偏序集，我们现在简要介绍这一理论在曲面情形下的发展脉络。

对于具有负欧拉示性数的定向紧曲面 S，Nielsen–Thurston分类指出，每个保定向同胚 $f\colon S \to S$ 都同痕于一个有限阶、可约或伪Anosov的同胚。回顾一下，可约是指该映射整体保持一个由 S中互不相交的本质简单闭曲线构成的集族，称为约化系统。另一方面，伪*Anosov* 是指存在常数$\lambda > 1$ 以及一对 $(\Lambda_\pm,\ \mu_\pm)$，它们是 S的吸引与排斥无理可测（奇异）叶状结构，使得 $f(\Lambda_\pm,\ \mu_\pm) = (\Lambda_\pm,\ \lambda^{\pm 1}\mu_\pm)$。

由该分类可知，在同痕意义下，每个同胚 f 都具有典范*Thurston* 标准形，其结构如下：存在一个典范的有限（可能为空）约化系统 $\mathcal{C}$，使得对于 $S\backslash\mathcal{C}$ 的每个分支 Σ，若其 f-轨道的大小为 $k \geqslant 1$，则限制 $f^k|\Sigma\colon\ \Sigma \to \Sigma$要么是有限阶的，要么是伪Anosov的；相应地，$\Sigma$ 称为 f 的有限阶块或伪Anosov块。由于每个伪Anosov块都带有自身的吸引可测叶状结构（对应于映射 $f^k|\Sigma$），可见每个同胚 f 都具有一个典范的有限（可能为空）的吸引可测叶状结构集 $\mathcal{L}^+(f)$：Thurston 标准形中每个伪Anosov块对应一个。它们是自由群自同构的吸引层状结构的类似物，并且实际上正是后者的动机来源。

Thurston几何化猜想（现已由佩雷尔曼证明）指出，每个紧致定向三维流形都可以典范地分解为几何块。在M 以紧纤维且负欧拉示性数为纤维、纤维化到圆周上的特殊情形下，这一分解可由Thurston双曲化定理推出，其结构如下：这样的 M可以沿一组典范的有限（可能为空）本质环面和克莱因瓶切开，使得每个补分支要么是Seifert纤维化的，并且具有有限体积的完备 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$结构；要么是无环的，并且具有有限体积的完备 $\mathbb{H}^3$结构。

虽然这一分解是流形 M的内在性质，但也可以从任意单值的动力系统中读出，具体如下：

称 M 是纤维化的，意即它同胚于由曲面同胚映射 $f\colon\ S \to S$构成的映射环面 M_f。这个曲面同胚映射具有其Thurston标准形——典范约化系统 $\mathcal{C}$，它将 f 分解为有限阶块和伪Anosov块。约化系统 $\mathcal{C}$ 中曲线的每个 f轨道都会在映射环面 M_f中产生一个本质环面或克莱因瓶。沿由此得到的环面或克莱因瓶集族 $\mathcal{T}$ 切开 M_f 后，补分支恰好对应于 $S\backslash\mathcal{C}$中分支的 f轨道。此外，$S\backslash\mathcal{C}$的有限阶块的 f轨道会产生 $M_f\backslash\mathcal{T}$的 $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$分支；根据Thurston双曲化定理，$S\backslash\mathcal{C}$ 的伪Anosov块的 f轨道会产生$\mathbb{H}^3$分支。

根据唯一性，映射环面 M_f 的这一分解必定是流形 M的几何分解，即将其分解为 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 块和 $\mathbb{H}^3$ 块。特别地，$M \cong M_f$ 的双曲分量与伪Anosov块的 f-轨道一一对应，因此也与测地叶层集合 $\mathcal{L}^+(f)$的 f-轨道一一对应；所以，尽管众所周知，M 可以作为映射环面 $M \cong M_g$ 纤维化，并对应无穷多个本质上不同的曲面同胚 $g\colon\ S' \to S'$，几何分解的唯一性表明，对于所有这类纤维化，测地叶层轨道集合都可以自然地相互对应。

1.2 核心思路概述

上述讨论证明了定理 6.3 对曲面同胚的类似结论，并解释了为什么层状结构的轨道与此相关。它还凸显了我们在自由群情形中必须克服的重要差异和挑战

。其中最主要的一点是，关于曲面同胚的结果建立在有关三维流形结构的开创性研究之上。坦率地说，自由循环群并没有几何化定理。其次，我们看到，曲面的吸引可测叶状结构彼此之间没有相互作用：它们支撑在互不相交的子曲面上，显然并不嵌套。层状结构的嵌套是自由群情形所独有的，因此尚不清楚 $\mathcal{L}^+_\phi$ 的深度或偏序集结构是否应在群的不同分裂中保持不变。

因此，我们研究定理 6.3 的方法借鉴了三维流形领域，但在具体实施上大不相同。例如，对于曲面同胚 f，测地叶层支撑在子曲面上，而这些子曲面会在映射环面中产生典范子流形 M_f。人们或许会希望，对于自由群的外自同构 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$，层状结构会由 $\mathbb{F}$ 的子群支撑，并由此导出 $M(\phi)$的典范子群。事实证明确实如此，但构造这些支撑子群要复杂得多，而证明它们会导出 $M(\phi)$ 中的典范对象也颇为迂回（见§6）。

首先，每个层流轨道 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_\phi$ 都会产生一个典范非吸引子群系统 $\mathcal{N}[\Lambda]$。利用这些系统（具体而言，对于那些不包含于 $[\Lambda]$的 $[\Lambda'] \in \mathcal{L}^+_\phi$，取其对应的系统 $\mathcal{N}[\Lambda']$），还可以构造一个支撑子群系统 $\mathcal{S}[\Lambda]$，它承载层状结构 $[\Lambda]$ （见 §3）。 $\mathcal{N}[\Lambda]$ 和 $\mathcal{S}[\Lambda]$ 又各自会产生映射环面，它们是 $\mathbb{G} = M(\phi)$ 的自由循环扩张子群系（见 §2.5）。我们着重研究来自非吸引子群系统 $\mathcal{N}[\Lambda]$的映射环面 $\mathcal{M}[\Lambda]$ ，因为它们要容易处理得多。遗憾的是，通常尚不清楚这些子群系统是否为 $\mathbb{G}$ 中的典范对象。不过，我们证明，当 $\mathbb{G}$ 没有循环分裂时，$\mathcal{L}^+_\phi$ 中极大元素 $[\Lambda]$ 所对应的子群系统 $\mathcal{M}[\Lambda]$ 是 $\mathbb{G}$ 中的典范对象。事实上，它们可通过代数方式刻画为 $\mathbb{G}$ 中包含多项式子群系统 $\mathcal{P}(\mathbb{G})$ 的极大真自正交自由循环子群系统（定义见 §5.1）。这就是下一个定理的内容，也是我们论证中的关键组成部分。

定理 5.1。设 $\mathbb{F}$ 是一个有限生成非平凡自由群，且 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$。若 $\mathbb{G} = \mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$没有循环分裂，则集合

$$\left\{\mathcal{M}[\Lambda] : [\Lambda] \ maximal \ in \ \mathcal{L}^+_\phi\right\}$$

是 $\mathbb{G}$ 中支撑 $\mathcal{P}(\mathbb{G})$ 的极大真自正交自由群扩张循环群子群系统的集合。此外，该集合与 $\mathcal{L}^+_\phi$ 中极大层流轨道的集族一一对应。

这个定理本质上是 命题 4.3的推论。该命题给出了充分条件，保证 $\mathbb{F}$ 的自正交子群系统由某个层流轨道 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_\phi$ 的非吸引子群系统$\mathcal{N}[\Lambda]$ 所支撑。为了应用 定理 5.1，自由群扩张循环群 $\mathbb{G}$ 必须没有循环分裂。虽然一般而言并非如此，但我们将在命题 5.4 中说明如何转而考虑 $\mathbb{G}$ 的一个没有循环分裂的典范子群系。

这两个关键要素构成了一个递归过程：首先，将命题 5.4 应用于$\mathcal{G}_0 = \mathbb{G}$ ，并转向一个没有循环分裂的典范自由循环子群系统 $\mathcal{G}'_0$ ，然后将定理 5.1 应用于 $\mathcal{G}'_0$ ，提取与极大层叠轨道相对应的典范子群系统。接着，取它们的交（即交集） $\mathcal{G}_1$，并从第一步开始重复，直到过程终止。这样，我们便在 $\mathbb{G}$ 中得到一个由自由循环子群系统构成的典范滤过，其长度等于 ϕ (定理 5.6) 的深度。

最后，在§6中，我们利用这一典范滤过证明，支撑子群系统 $\mathcal{S}[\Lambda]$ 的映射环面实际上在 $\mathbb{G}$ 中是典范的；此外， $\mathbb{G}$ 的子群系统典范偏序集与$\mathcal{L}^+_\phi$ (定理 6.3) 序同构。

本文中的若干结果运用了相对列车轨道映射与拓扑树的机制。为避免论证过于繁琐，我们将这些细节推迟到

附录。附录 A.1 包含命题 2.17 （深度在过渡到有限指数子群时的不变性）的证明，该证明需要吸引层状结构与相对列车轨道映射的精确定义。附录 A.2 构造一个逼近吸引层状结构的一般叶的元素（引理 2.19）。附录 B 包含与吸引层状结构集族相关联的典范拓扑树的显式构造（定理 3.1），这隐含于 [Mut24b]的结果之中。

读者指南。 需要指出的是，由于我们的论证具有递归性质，我们通常不直接研究群 $\mathbb{F}$ and $\mathbb{G}$，而是在某些子群系统中进行研究。也就是说，所有工具都是针对以下对象构建的：外自同构ϕ 在 $\mathbb{F}$ 的不变子群系 $\mathcal{A}$ 上的限制 $\phi|\mathcal{A}$；以及与之关联的映射环面 $\mathcal{G} = \mathcal{M}(\phi|\mathcal{A})$，它是 $\mathbb{G}$ 的一个自由群扩张循环群子群系。不过，为了简化定义和证明，读者通常可以假设 $\mathcal{A} = \mathbb{F}$、$\phi|\mathcal{A} = \phi$ 和 $\mathcal{G} = \mathbb{G}$。

进一步的方向

给定 $\phi \in$外自同构群$(\mathbb{F})$，本文着重研究吸引层状结构的集族 $\mathcal{L}^+(\phi)$；当且仅当 ϕ 呈多项式增长时，该集族为空。尽管如此，如 Feighn–Handel 在 [FH11] 中所述，我们可以为多项式增长的外自同构 ϕ 关联一个层状结构（不再是吸引层状结构）集族，记为 $\Omega(\phi)$。后来，Handel–Mosher [HM20] 将 $\Omega(\phi)$ 称为 ϕ 的特征射线和扭转子的弱聚点集。在同一篇论文 [中，Feighn–Handel 11], 证明 $\Omega(\phi)$ 是一个偏序集，并且 $\Omega(\phi)$ 中极大链的长度等于 ϕ 的多项式增长次数；众所周知，该次数是 $\mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$ 的拟等距不变量。令 Ω_ϕ 表示 $\Omega(\phi)$ 中 ϕ 轨道的层状结构所构成的偏序集。基于定理 6.3，我们预期以下问题的答案是肯定的。

问题 1.1. 与多项式增长自同构 ϕ 相关的层叠轨道偏序集 Ω_ϕ，是否是 $\mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$ 的群不变量？

此外，给定任意 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$，我们可以考察吸引层状结构以及特征射线和扭转子的弱聚点集的并集，它仍然是一个偏序集。我们想知道，与 ϕ 相关的这个完整层叠偏序集，或其深度，是否是 $\mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$ 的不变量。这个不变量有助于区分双曲自由循环群。

致谢

我们感谢美国数学研究所在2023年10月举办的“自由循环群的刚性性质”研讨会期间给予我们的热情接待，本研究正是在该研讨会期间启动的。我们感谢Mladen Bestvina、MartinBridson和Gilbert Levitt所给予的有益讨论。

SD 衷心感谢美国国家科学基金会项目 DMS–2005368 和 DMS–2405061 的资助。YG 感谢 LABEX MILYON (ANR-10-LABX-0070) 在其博士后任职期间提供的经费支持；本项目的部分内容正是在此期间完成的。RG 衷心感谢科学与工程研究委员会研究项目 SRG/2023/000123 的部分资助，以及其在艾萨克·牛顿研究所担任拉马努金奖学金期间获得的西蒙斯基金会资助。CU 衷心感谢美国国家科学基金会项目 DMS–2439076 的资助。

2 预备知识

2.1 子群系统

设 G 为一个群。 G 的一个子群系统是 $\mathcal{A}$ 中非平凡子群的共轭类所组成的一个（可能为空的）集合；此外，我们要求，如果 $[A]$, $[B] \in \mathcal{A}$ 是不同的共轭类，那么 A 不能是 B的子群。若一个子群系统由有限个有限生成子群的共轭类组成，则称其为有限型

。如果一个子群系统由真子群（分别为循环的子群）的共轭类组成，则称其为真（分别为循环的）。若对于任意 $h \in G\backslash A$，交集 $hAh^{-1} \cap A$ 是平凡的，则称子群 $A \leqslant G$ 是自正交的。若 $\mathcal{A}$ 是G 的一个子群系统，则当每个满足 $[A] \in \mathcal{A}$ 的 A 在 G 中都是自正交的，并且对于每个，B （其中 $[A] \neq [B]$ 在$\mathcal{A}$中），交集 $A \cap B$ 都是平凡的，我们称 $\mathcal{A}$ 为自正交的。

在自共轭子群系统的集合上有一个自然的偏序，记作 $\sqsubseteq$；若对每个 $[B] \in \mathcal{B}$，都存在 $[A] \in \mathcal{A}$ 使得 $B \leqslant A$，则$\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$ 。在这种情况下，我们称 $\mathcal{A}$支撑 $\mathcal{B}$。若 $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$，我们记作 $\mathcal{B} \sqsubsetneq \mathcal{A}$ 。注意，必须要求次正规性，才能确保此关系具有反对称性；否则可能出现这样的情况： $A' \lesssim B \lesssim A$，且 $[A] = [A'] \in \mathcal{A}$。此偏序构成一个交半格，即任意一对自共轭子群系统 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ 都有一个最大下界 $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$；具体而言，交

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \coloneqq \{[A \cap B] : [A] \in \mathcal{A}, [B] \in \mathcal{B}, \text{ and } A \cap B \text{ is not trivial}\}.$$

当 G是一个自由群时，下面的引理将偏序从自共轭子群系统推广到 G的子群系统集族 $G^{\leqslant \text{有限生成}}$，其中的元素由有限生成子群的共轭类组成。

引理 2.1。设 G 是一个自由群。集族 $G^{\leqslant \text{有限生成}}$ 上的偏序定义如下：若对每个 $[B] \in \mathcal{B}$，都存在 $[A] \in \mathcal{A}$ 使得 $B \leqslant A$，则 $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$ 。此外，限制在有限型子群系统上时，该偏序构成交半格。

这个引理（及其证明）将为 §2.4 中构造的偏序提供蓝本。

证明。令 $A \leqslant G$ 为一个有限生成子群。我们首先注意到，若 $A' \leqslant A$ 是 A的一个共轭，则 $A' = A$。令 $\iota\colon G \to G$ 为将 A 映入自身、像为 $\iota(A) = A'$的内自同构。由于自由群是子群可分的，且 A 是有限生成的，自同构 ι 必将 A 映到自身，即 $A' = A$ （见 [BFH00，引理 6.0。6]）。

这一观察表明关系 $\sqsubseteq$ 是反对称的。事实上，令 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B} \in G^{\leqslant \text{fg}}$，并假设 $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$。任取一个 $[A'] \in \mathcal{A}$。则 $A' \leqslant B$，其中某个 $[B] \in \mathcal{B}$满足此条件。类似地，$B \leqslant A$，其中某个 $[A] \in \mathcal{A}$满足此条件。由于 $\mathcal{A}$ 是一个子群系统且 $A' \leqslant A$，我们必有 $[A'] = [A]$，即 A' 与 A共轭。根据上一段，$A' = A$。因此，$A' = B = A$ 且$[A'] = [B]$。由于 $[A'] \in \mathcal{A}$ 是任意的，我们已证明 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$。同样的论证表明 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$；因此 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$。不难验证关系 $\sqsubseteq$ 是自反且传递的。

现在，设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 G 的有限型子群系统。我们先构造一个仿照自共轭子群系统之交的集族：

$$\mathcal{A} \hat{\wedge} \mathcal{B} \coloneqq \{[A \cap B] : [A] \in \mathcal{A}, [B] \in \mathcal{B}, \text{ and } A \cap B \text{ is not trivial}\}.$$

这未必是子群系统，因为在没有次正规性假设的情况下，不同的共轭类可能彼此包含。尽管如此，它是一个有限集合 [Neu90，命题 2。1]。对每个 $[A \cap B] \in \mathcal{A}\hat{\wedge}\mathcal{B}$，单元素集 $\{[A \cap B]\}$都是子群系统，并按 $\sqsubseteq$进行偏序。于是， $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ 定义为 $\mathcal{A}\hat{\wedge}\mathcal{B}$中极大类构成的子集。可以验证，$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$的交，即最大下界。 □

子群系统自然地出现在相对双曲群的背景下。例如，若 G 是双曲群，且 $\mathcal{A}$ 是 G 的有限型真子群系，那么 G相对于 $\mathcal{A}$ 双曲，当且仅当 $\mathcal{A}$是自正交的，且由拟凸子群（的共轭类）构成 [Bow12，定理 7。11] （另见 [Osi06、DGO17]）。对于相对双曲对 $(G, \mathcal{A})$，若存在 $g \in G$，使得它是 $\mathcal{A}$-外围的，则称元素 $[A] \in \mathcal{A}$ 具有$g \in A$；-外围子群也类似定义。 $\mathcal{A}$-外围子群。

设 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 是 G 的两个有限型自共轭子群系统，且满足 $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$。对于$[A] \in \mathcal{A}$， $\mathcal{B}$ 对 A 的限制为

$$\mathcal{B}|A \coloneqq \{[B]_A \colon [B] \in \mathcal{B} \text{ and } B \leqslant A\},$$

其中 $[\cdot]_A$ 表示 A的共轭类。因此，限制 $\mathcal{B}|A$ 是 A的一个子群系统 .

2.2 树与分裂

一个 G-树是配备了 G 通过等距变换实现的极小作用的单纯形度量树。如果这棵树是一个点，则称其为平凡的。 G 的一个分裂是非平凡 G-树的 G-等变等距映射类。若边稳定子平凡，则称 G 的一个分裂为自由的；若边稳定子是循环的（可能平凡），则称其为循环的。设 S 是 G的一个自由分裂。 S 的非平凡顶点稳定子的共轭类集合构成 G 的一个自正交子群系统，称为真自由因子系统。如果 G 是有限生成的，那么根据Bass–Serre理论，其真自由因子系统是有限型的。

自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 通过对作用进行前复合，自然地在右侧作用于 G 的分裂集合上。由于我们考虑的是 G-等变树的等距类，$\mathrm{Aut}(G)$ 的作用可分解为 $\mathrm{Out}(G)$的作用。注意，$\mathrm{Out}(G)$ 保持 G的自由分裂集合和循环分裂集合不变。

设 S 是一个带有 G-作用的集合，且 $\Phi \in \mathrm{Aut}(G)$。函数 $f\colon S \to S$ 称为 Φ-等变的，如果：对于每个 $s \in S$和每个 $g \in G$，都有 $f(g \cdot s) = \Phi(g) \cdot f(s)$.。此外，若 S是 G 的一个分裂，且与 $\mathbb{R}$ 不同距，并且 Φ 保持 S不变，即 $S \cdot \Phi = S$，那么存在唯一的 Φ-等变等距映射 $\iota_\Phi\colon S \to S$ （例如，参见 [Lev05, §2.1]）。

设 $\mathcal{G}$ 是 G的一个子群系统。 $\mathcal{G}$ 的一个分裂是一个集合 $\mathcal{S} = \{T_G : [G] \in \mathcal{G}\}$，其中每个$T_G$ 都是 G-等变的 G-树的等距映射类（每个共轭类 $[G]$对应一个），并且某个 T_G是 G的一个分裂，也就是说，至少有一个 T_G 是非平凡的。若 $\mathcal{G}$ 的分裂 $\mathcal{S}$ 中每个分裂都是循环的（分别为自由的），则称 $\mathcal{S}$ 是循环的（分别为自由的）。现在设 $\mathcal{G}$ 是 G的一个自共轭子群系统。 $\mathcal{G}$ 的一个真自由因子系统是 G 的子群系统，由 $\mathcal{G}$ 的一个自由分裂中非平凡顶点稳定子的共轭类组成。可以验证， $\mathcal{G}$ 的真自由因子系统是 G的自共轭子群系统。当 $\mathcal{G}$ 是有限型时，根据巴斯-塞尔理论，其真自由因子系统也都是有限型。

现在我们来描述自共轭子群系统的自由因子系统的一些性质。

引理2.2。设 $\mathcal{G}$ 是 G 的一个自共轭子群系统，且 $\mathcal{F}_1$ 是 $\mathcal{G}$的一个自由因子系统。若 $\mathcal{F}_2$ 是 $\mathcal{F}_1$的一个自由因子系统，则 $\mathcal{F}_2$ 是 $\mathcal{G}$的一个自由因子系统。

证明。 如果 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{G}$ 或 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1$，则无需证明。因此，我们可以假设这两个自由因子系统都是真子系统。设 $\mathcal{S}_1$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个自由分裂，其非平凡顶点稳定子系统为 $\mathcal{F}_1$ ；设 $\mathcal{S}_2$ 是 $\mathcal{F}_1$ 的一个自由分裂，其非平凡顶点稳定子系统为 $\mathcal{F}_2$。于是，可以通过将具有非平凡稳定子的顶点等变地替换为分裂 $\mathcal{S}_2$，对分裂 $\mathcal{S}_1$ 进行膨胀。由此得到 $\mathcal{G}$ 的一个新的自由分裂 $\mathcal{S}_1'$ ，其非平凡顶点稳定子系统为 $\mathcal{F}_2$。因此， $\mathcal{F}_2$ 是 $\mathcal{G}$的一个自由因子系统。 □

引理 2.3。 设 $\mathcal{H} \sqsubseteq \mathcal{G}$ 是 G的自共轭子群系统。如果 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{G}$的一个自由因子系统，那么 $\mathcal{H} \wedge \mathcal{F}$ 是 $\mathcal{H}$的一个自由因子系统。

证明。 我们可以假设 $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$和 $\mathcal{H} \wedge \mathcal{F} \neq \mathcal{H}$。设 $\mathcal{S}$是 $\mathcal{G}$的一个自由分裂，其非平凡顶点稳定子系统为 $\mathcal{F}$。对每个 $[H] \in \mathcal{H}$， $\mathcal{G}$ 的次正规性意味着存在唯一的$T_H \in \mathcal{S}$，其上有一个由该自由分裂诱导的 H作用。设 $T_H' \subseteq T_H$ 是 H对应的极小子树。那么， H 中 T_H' 的非平凡顶点稳定子，恰好是 H 与 $\mathcal{F}$中各类代表的非平凡交集。由于 $\mathcal{H} \wedge \mathcal{F} \neq \mathcal{H}$，集合 $\mathcal{S}' \coloneqq \{T_H' : [H] \in \mathcal{H}\}$ 是 $\mathcal{H}$的一个自由分裂，其非平凡顶点稳定子为 $\mathcal{H} \wedge \mathcal{F}$。 □

引理 2.4. 设 $\mathcal{G}$ 是 G 的有限型自正规化子群系统。若 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{G}$ 的自由因子系统序列，则序列 $(\bigwedge_{n\leqslant N} \mathcal{F}_n)_{N\in\mathbb{N}}$ 稳定。

证明。 系统 $\mathcal{A} = \{[A_1], \dots, [A_k]\}$的 $c(\mathcal{A}) = -k + \sum_{i=1}^{k} 2\,\text{秩}(A_i)$，其中秩$(A_i)$ 是 A_i的生成集的最小大小。由 Bass–Serre理论$c(\mathcal{F}) > c(\mathcal{F}')$ 可知，对于 $\mathcal{F} \supsetneq \mathcal{F}'$ 的自由因子系的任意真嵌套 $\mathcal{G}$。因此， $\mathcal{G}$ 的任意嵌套自由因子系序列都会稳定。注意，由 $(\bigwedge_{n\leqslant N} \mathcal{F}_n)_{N\in\mathbb{N}}$ 构成的 $\mathcal{G}$ 的嵌套自由因子系序列，根据引理 2.2 和 2.3可知会稳定。 □

对于序列 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中各项是有限型自正规化子群系统 $\mathcal{G}$ 的自由因子系，其交 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$记作 $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$，是 $\bigwedge_{n\leqslant N}\mathcal{F}_n$ 的自由因子系 $\mathcal{G}$，当 $N\in\mathbb{N}$ 足够大时，由引理 2.2 和 2.3给出；根据引理 2.4，其定义良好。

2.3 自由循环群与映射环面

如果一个群是由有限生成非平凡自由群关于无限循环群的群扩张，则称其为<style id='1'>自由循环群。注意，自由循环群并不是自由群。

我们固定一个自由循环群 $\mathbb{G}$，它是由有限生成非阿贝尔自由群 $\mathbb{F}$ 关于无限循环群的群扩张。由于无限循环群是自由群，该扩张分裂，因此存在自然同构 $\mathbb{G}\cong M(\Phi)$，其中 $\Phi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F})$，而 $M(\Phi)$ 是具有如下相对表示的相关<style id='7'>映射环面群：

$$M(\Phi)\coloneqq\mathbb{F}\rtimes_\Phi\mathbb{Z}=\langle\mathbb{F},t\mid tgt^{-1}=\Phi(g)\text{ for all }g\in\mathbb{F}\rangle.$$

记 $\pi\colon M(\Phi)\to\mathbb{Z}$ 为自然投影，其中 $\ker\pi=\mathbb{F}$ 且 $\pi(t)=1$。在同构意义下，映射环面只取决于外自同构 $\phi\coloneqq[\Phi]\in\mathrm{Out}(\mathbb{F})$，我们也将其记为 $M(\phi)$ 或 $\mathbb{F}\rtimes_\phi\mathbb{Z}$。在全文中，$\phi\in\mathrm{Out}(\mathbb{F})$、$\Phi\in\phi$ 和 $\mathbb{G}=M(\Phi)$。

设 S 是一个 $\mathbb{F}$-集合，即带有 $\mathbb{F}$-作用的集合，并设 $f\colon S\to S$ 是一个双射。我们为 $M(\Phi)$ 选择关系 $tgt^{-1}=\Phi(g)$，使得 f 的 Φ-等变性恰好是将 S 上的 $\mathbb{F}$-作用扩展为由 $t\cdot s=f(s)$ 给出的 $M(\Phi)$-作用所需的条件。

2.4 $\mathbb{G}$ 的自由循环扩张子群系统的偏序集

定义 2.5。 $\mathbb{G}$ 的子群系统若由自由循环扩张子群的共轭类组成，则称为**自由循环扩张的**。

以下引理将偏序扩展到 $\mathbb{G}$ 的自正交子群系统之外，推广至自由循环扩张子群系统的集族，方式与 引理 2.1 类似。

引理 2.6。 设 $\mathbb{G}\coloneqq\mathbb{F}\rtimes_\phi\mathbb{Z}$，且 $\pi\colon\mathbb{G}\to\mathbb{Z}$ 为自然投影。若 $H\leqslant\mathbb{G}$ 是自由循环扩张子群，则 $A\coloneqq H\cap\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{F}$ 中的一个 ϕ-周期有限生成子群，并且 $H=\langle A,\ xt^k\rangle$，其中某个元素 $x\in\mathbb{F}$ 和生成 $\pi(H)$ 的整数 $k\geqslant 1$ 满足上述关系；此外，H 可自然地识别为某个 $\psi\in$ 外自同构群 (A) 的 $M(\psi)$。

子群 $A\leqslant\mathbb{F}$ 是 ϕ-周期的，如果共轭类 $[\Phi^k(A)]=[A]$ 对某个整数 $k\geqslant 1$。

证明。由于 H 不是自由的，$\pi(H)\leqslant\mathbb{Z}$ 不是平凡的。设 $k\geqslant 1$为 $\pi(H)$的一个生成元。则对某个 $x\in\mathbb{F}$有 $xt^k\in H$，且 $H=\langle A,\ xt^k\rangle$，其中 $A\coloneqq H\cap\mathbb{F}$。由于 A 在 H中正规，它在 $\mathbb{G}$ 中被 xt^k的共轭所保持。换言之，$[\Phi^k(A)]=[A]$，即 A 是 ϕ-周期的。Feighn–Handel 相干性定理蕴含 A 是有限生成 [FH99]（详见 [Mut24c，引理 3.5]）。由于 $\pi(H)$是无限循环群，H自然等同于 $M(\Psi)=A\rtimes_\Psi\mathbb{Z}$，其中 $\Psi\colon A\to A$是由 xt^k作共轭的限制。元素 $x\in\mathbb{F}$ 在至多相差 $\ker(\pi|H)=A$ 中一个元素的左乘意义下是良定义的。因此，外自同构类 $[\Psi]\in$ 外自同构群(A) 是良定义的。□

引理 2.7. 设 $\mathbb{G}\coloneqq\mathbb{F}\rtimes_\phi\mathbb{Z}$ 与 $H\leqslant\mathbb{G}$ 为一个自由循环扩张子群。若子群 $H'\leqslant H$ 是 H 的共轭，则 $H'=H$。

证明。由引理 2.6，对于 ϕ-周期的有限生成子群$A\coloneqq H\cap\mathbb{F}$、某个元素 $x\in\mathbb{F}$以及生成 $\pi(H)\leqslant\mathbb{Z}$的整数 $k\geqslant 1$，我们有 $H=\langle A,\ xt^k\rangle$。由假设，对某个 $y\in\mathbb{F}$ 和 $n\in\mathbb{Z}$，有 $H'=(yt^n)H(yt^n)^{-1}\leqslant H$。于是 $(yt^n)A(yt^n)^{-1}=H'\cap\mathbb{F}\leqslant A$，因为 $\mathbb{F}$ 在 $\mathbb{G}$中正规。注意，$\mathbb{G}$中由 yt^n 给出的共轭限制为 $\mathbb{F}$ 的一个自同构，它将A 映入自身。由于 $\mathbb{F}$ 是子群可分的，且 A 是有限生成的，该自同构必须将 A 映到自身上，即 $H'\cap\mathbb{F}=(yt^n)A(yt^n)^{-1}=A$（见 [BFH00，引理 6.0.6]）。注意$\pi(H')=\pi(H)$ 在 $\mathbb{Z}$中。由于 H' 与 H 具有相同的 π-像，并且与核 $\ker\pi=\mathbb{F}$的交集相同，它们必定相等。□

正如引理 2.1的证明中那样，引理 2.7 中的性质正是我们定义如下偏序所需要的。

推论 2.8. 自由循环群 $\mathbb{G}$的自由循环子群系统的集族具有由 $\mathcal{H} \sqsubseteq \mathcal{G}$ 定义的偏序，即若对每个 $[H] \in \mathcal{H}$, 都存在 $[G] \in \mathcal{G}$ 使得 $H \leqslant G$。 □

属于 $\mathbb{G}$且具有有限型的自由循环子群系统上的偏序同样是一个交半格，其中我们像引理 2.1中那样定义交运算。首先，我们定义集族

$$\mathcal{H} \hat{\wedge} \mathcal{G} \coloneqq \big\{[H \cap G] : [H] \in \mathcal{H}, [G] \in \mathcal{G}, \text{ and } H \cap G \text{ is not trivial}\big\}.$$

该集族未必是一个子群系统，因为不同的共轭类可能相互嵌套。应用引理 2.6 （以及 [Neu90, 命题 2.1]）表明 $\mathcal{H}\hat{\wedge}\mathcal{G}$ 由循环的或自由循环扩张子群的有限多个共轭类组成。自由循环扩张共轭类（视为单元素集）由 $\sqsubseteq$赋予偏序。该交 $\mathcal{H} \wedge \mathcal{G}$ 由 $\mathcal{H}\hat{\wedge}\mathcal{G}$中的极大自由循环扩张类组成。当应用于自正规化自由循环扩张子群系时，对先前交运算的这一修改仅仅相当于忽略循环交。

2.5 关于 $\mathbb{F}$子群系统的映射环面

构造 $M(\phi) = \mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$ 的自由循环子群系统的一种自然方法，是考虑具有有限型的 $\mathbb{F}$ 的 ϕ不变自正规化子群系统 $\mathcal{A}$ 的映射环面。若对所有 $[A] \in \mathcal{A}$，子群系统 $\mathcal{A} \subset \mathbb{F}$ 均满足 $\phi[A] \coloneqq [\Phi(A)] \in \mathcal{A}$, 则称其为 ϕ不变的。因此， ϕ 会置换 $\mathcal{A}$中的共轭类。固定一个 $\langle\phi\rangle$轨道 $\langle\phi\rangle[A] \subseteq \mathcal{A}$，并令 $k \geqslant 1$ 为该轨道的大小——由于 $\mathcal{A}$ 具有有限型，该轨道是有限的。由 $\phi^k[A] = [A]$，可得某个 $x \in \mathbb{F}$使得 $\Phi^k(A) = x^{-1}Ax$ 。令 $\Phi' \in \mathsf{Aut}(\mathbb{F})$ 为由 $g \mapsto x\Phi^k(g)x^{-1}$给出的自同构，并令 $\Psi \in \mathsf{Aut}(A)$ 为 Φ' 在 A上的限制。由 $\mathcal{A}$的次正规性，元素 $x \in \mathbb{F}$ 在相差一个 A元素的左乘意义下唯一。因此，首次返回外自同构类 $\psi \coloneqq [\Psi] \in \mathsf{Out}(A)$ 是良定义的，可记为 $\phi^k|A \coloneqq \psi$。我们自然地将 $M(\psi) \coloneqq A \rtimes_\psi \mathbb{Z}$与子群 $\langle A, xt^k\rangle \leqslant M(\phi)$等同。由于 A在 $\mathbb{F}$中是自正规化的，子群 $M(\psi)$是 $M(\phi)$中 A的正规化子。注意，两个这样的子群 $M(\psi_1)$和 $M(\psi_2)$在 $M(\phi)$中共轭，当且仅当轨道 $\langle\phi\rangle[A_1]$和$\langle\phi\rangle[A_2]$ 相等。 $\mathcal{A}$ 的映射环面是以下有限集合：

$$M(\phi|\mathcal{A}) \coloneqq \Big\{[M(\phi^k|A)] \ : \ \langle\phi\rangle[A] \subseteq \mathcal{A} \text{ is a } \langle\phi\rangle\text{-orbit of size } k\Big\}.$$

定义 2.9。 沿用上述记号，定义 $\phi|\mathcal{A}$为所有 $[A] \in \mathcal{A}$上的首次返回外自同构类 $\phi^k|A$ 的集合。此外，我们称 $\phi|\mathcal{A}$ 保持一个分裂 $\mathcal{S}$ 的 $\mathcal{A}$ ，如果对于每个$[A] \in \mathcal{A}$，限制 $\phi^k|A$ 保持 $\mathcal{S}$中相应的 A-树。

当 $\mathcal{A}$ 由单个 $\langle\phi\rangle$-轨道组成时，单元素集合 $M(\phi|\mathcal{A})$ 是 $M(\phi)$的一个子群系统。下一个引理表明，$M(\phi|\mathcal{A})$始终是 $M(\phi)$的一个子群系统，并给出了 $\mathbb{F}$ 中嵌套的 ϕ-不变系统与嵌套映射环面之间的自然对应。

引理 2.10。 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{F}$ 的具有有限型的 ϕ-不变自共轭子群系统。

1. 那么 $M(\phi|\mathcal{A})$和 $M(\phi|\mathcal{B})$是 $M(\phi)$的具有有限型的子群系统；并且 *2.* 当且仅当 $M(\phi|\mathcal{A}) \sqsubseteq M(\phi|\mathcal{B})$时， $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ 。

证明。 我们首先在假设 $\langle\phi\rangle$ 传递地作用于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$的条件下证明 (2)。令 $\mathcal{A} = \langle\phi\rangle[A]$和 $\mathcal{B} = \langle\phi\rangle[B]$, 并令 $M(\phi^k|A) = \langle A, xt^k\rangle$和 $M(\phi^\ell|B) = \langle B, yt^\ell\rangle$为上文所确定的 $M(\phi) = \mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$ 的相关子群。现在，如果 $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$，即 $A \leqslant B$，那么 $x\Phi^k(B)x^{-1} \cap B$非平凡。由于 $\mathcal{B}$ 是自正交的，我们得到 $[\Phi^k(B)] = [B]$ ，且 k 是 ℓ 的倍数，即 $\mathcal{B}$ 的大小；因此， $\langle B, xt^k\rangle$ 是 $M(\phi^\ell|B)$ 的有限指数子群，而 $M(\phi^k|A) = \langle A, xt^k\rangle$是 $M(\phi^\ell|B)$的子群，即 $M(\phi|\mathcal{A}) \sqsubseteq M(\phi|\mathcal{B})$。反过来，如果 $M(\phi^k|A) \leqslant M(\phi^\ell|B)$，那么$A = M(\phi^k|A) \cap \mathbb{F}$ 是 $B = M(\phi^\ell|B) \cap \mathbb{F}$的子群。

现在我们可以证明 (1)。设 $[M(\phi^{k_1}|A_1)]$和 $[M(\phi^{k_2}|A_2)]$是$M(\phi|\mathcal{A})$中的不同元素。我们需要证明 $M(\phi^{k_1}|A_1)$不能是 $M(\phi^{k_2}|A_2)$的子群。根据$M(\phi|\mathcal{A})$的定义， $\mathcal{A}$ 中的轨道 $\langle\phi\rangle[A_1]$ 和 $\langle\phi\rangle[A_2]$ 互不相同。特别是，作为 $\mathbb{F}$的自共轭子群系统， $\langle\phi\rangle[A_1]$ 并未包含于 $\langle\phi\rangle[A_2]$ 中。由上一段可知， $M(\phi^{k_1}|A_1)$ 不是 $M(\phi^{k_2}|A_2)$的子群。同样的论证证明 $M(\phi|\mathcal{B})$是 $M(\phi)$的子群系统。

最后，我们在一般情形下证明（2）。设 $\mathcal{A}\sqsubseteq\mathcal{B}$，并令 $[M(\phi^k|A)]\in M(\phi|\mathcal{A})$。由$\phi$不变性可知，存在某个 $[B]\in\mathcal{B}$，使得 $\langle\phi\rangle[A]\sqsubseteq\langle\phi\rangle[B]$ 。不妨设 $A\leqslant B$。根据第一段， $M(\phi^k|A)\leqslant M(\phi^\ell|B)$，其中 $[M(\phi^\ell|B)]\in M(\phi|\mathcal{B})$。由于 $[M(\phi^k|A)]\in M(\phi|\mathcal{A})$是任意的，因此 $M(\phi|\mathcal{A})\sqsubseteq M(\phi|\mathcal{B})$。反过来，设 $M(\phi|\mathcal{A})\sqsubseteq M(\phi|\mathcal{B})$，并令$[A]\in\mathcal{A}$。那么存在某个 $[B]\in\mathcal{B}$，使得 $M(\phi^k|A)\leqslant M(\phi^\ell|B)$。再次根据第一段， $A\leqslant B$。因此，由于 $[A]\in\mathcal{A}$ 是任意的， $\mathcal{A}\sqsubseteq\mathcal{B}$ 。 □

存在一种类似的对应关系，用于描述映射环面的交。

引理 2.11. 若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{F}$ 的两个有限型 ϕ-不变自共轭子群系统，则 $M(\phi|(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}))=M(\phi|\mathcal{A})\wedge M(\phi|\mathcal{B})$。

证明。回忆一下， $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ 是有限型 [的自共轭子群系统（Neu90，命题 2.1]）。由交的唯一性，它也是ϕ-不变的。令 $[C]\in\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$，即对于某个 $[A]\in\mathcal{A}$ 和 $[B]\in\mathcal{B}$， $C=A\cap B$ 是非平凡的。由于 $M(\phi^k|A)$ 和 $M(\phi^\ell|B)$ 分别是 $M(\phi)$中 A 和 B 的正规化子，它们的交包含于 $M(\phi^n|C)$，即 C的正规化子。反过来，令 $M(\phi^n|C)=\langle C,$ 其中某个 $z\in\mathbb{F}$满足$zt^n\rangle$。根据 $\mathcal{A}$的自正交性和 ϕ-不变性，幂 n 是 k的倍数，而 zt^n 正规化 A，即 $M(\phi^n|C)\leqslant M(\phi^k|A)$。因此 $M(\phi^n|C)=M(\phi^k|A)\cap M(\phi^\ell|B)$，且 $[M(\phi^n|C)]$属于 $M(\phi|\mathcal{A})\hat{}\wedge\mathcal{M}(\phi|\mathcal{B})$。根据交的定义， $\{[M(\phi^n|C)]\}\sqsubseteq M(\phi|\mathcal{A})\wedge\mathcal{M}(\phi|\mathcal{B})$。由于$[C]\in\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$是任意的，我们证明了 $M(\phi|(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}))\sqsubseteq M(\phi|\mathcal{A})\wedge M(\phi|\mathcal{B})$。

反之，令 $[G]\in M(\phi|\mathcal{A})\wedge M(\phi|\mathcal{B})$。根据交的定义，循环扩张自由群子群 $G=M(\phi^k|A)\cap M(\phi^\ell|B)$ 对某个 $[A]\in\mathcal{A}$ 和 $[B]\in\mathcal{B}$ 成立。此外，对于非平凡子群 $C=A\cap B$，交集$M(\phi^k|A)\cap M(\phi^\ell|B)=\langle C,\ zt^n\rangle$。因此， $[C]\in\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ 和 $[G]=[M(\phi^n|C)]\in M(\phi|(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}))$。由于 $[G]\in M(\phi|\mathcal{A})\wedge M(\phi|\mathcal{B})$ 是任意的，本段说明了 $M(\phi|\mathcal{A})\wedge M(\phi|\mathcal{B})\subseteq M(\phi|(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}))$。特别地， $M(\phi|\mathcal{A})\wedge M(\phi|\mathcal{B})\sqsubseteq M(\phi|(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}))$。

□

一般而言，子群系统 $M(\phi|\mathcal{A})$ 在 $M(\phi)$中未必是自正交的。现在我们来刻画这种情形。沿用 [DL22], 的说法，若存在$n\geqslant 1$ 和 $w\in\mathbb{F}$ ，使得 $\mathbb{F}$-自同构 $\Psi\colon\ g\mapsto w\Phi^n(g)w^{-1}$ 同时保持两个子群，则称不同的子群 A、B 是 ϕ-孪生子群。若 ϕ-不变的自正交子群系统 $\mathcal{A}$属于 $\mathbb{F}$，且存在ϕ-孪生子群 A、B满足 $[A]$、$[B]\in\mathcal{A}$，则称 $\mathcal{A}$具有 ϕ-孪生子群。

引理 2.12. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个有限型 ϕ-不变自正交子群系统。则$M(\phi|\mathcal{A})$在 $M(\phi)$ 中自正交，当且仅当 $\mathcal{A}$没有 ϕ-孪生子群。

证明。 对于 $[A]\in\mathcal{A}$，令 $M(\phi^k|A)=\langle A,xt^k\rangle$为上述已确定的对应于 $M(\phi)=\mathbb{F}\rtimes_\phi\mathbb{Z}$的子群。根据构造，$[M(\phi^k|A)]\in M(\phi|\mathcal{A})$，且 $M(\phi|\mathcal{A})$中的所有共轭类都具有这种形式。令 $n\geqslant 1$、 $w\in\mathbb{F}$，并令 $\Psi\colon\ \mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 为由 $g\mapsto w\Phi^n(g)w^{-1}$给出的自同构。若 Ψ保持 A，则 $\langle A,wt^n\rangle\leqslant M(\phi^k|A)$（因为 A在 $\mathbb{F}$中是自正交的）。因此 $wt^n\in M(\phi^k|A)$。反过来，若 $wt^n\in M(\phi^k|A)$，则 Ψ保持 A（因为 A是 $M(\phi^k|A)$的正规子群）。

我们首先证明， $M(\phi^k|A)$在 $M(\phi)$中自正交当且仅当 $\mathcal{A}$中的轨道 $\langle\phi\rangle[A]$没有ϕ-孪元。设 $h=yt^\ell\in M(\phi)\backslash M(\phi^k|A)$ ，并令 $B\coloneqq y\Phi^\ell(A)y^{-1}\neq A$。注意 $[B]=\phi^\ell[A]$、共轭 $hM(\phi^k|A)h^{-1}=M(\phi^k|B)$，并且由于$B\neq A$以及 $\langle\phi\rangle[A]$在 $\mathbb{F}$中自正交， $M(\phi^k|A)\cap M(\phi^k|B)\cap\mathbb{F}=A\cap B$是平凡的。因此，$M(\phi^k|A)\cap M(\phi^k|B)$非平凡当且仅当它包含某个元素 wt^n ，满足 $w\in\mathbb{F}$ 与 $n\geqslant 1$；等价地， A,B 是 ϕ-孪元。

最后，假设 $\mathcal{A}$ 中没有 $\langle\phi\rangle$-轨道具有 ϕ-孪生。选取 $\mathcal{A}$ 中互异的轨道 $\langle\phi\rangle[A]$, $\langle\phi\rangle[B]$。则 $M(\phi|\mathcal{A})$ 中的共轭类 $[M(\phi^k|A)]$、 $[M(\phi^k|B)]$ 互不相同。由与上一段相同的论证，$M(\phi^k|A)\cap M(\phi^k|B)$ 非平凡当且仅当 A， B 是 ϕ-孪生。

□

事实上，所有有限型的自正规化自由循环扩张子群系都以这种方式产生：

引理 2.13. 若 $\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{G}$ 的一个具有有限型的错正规自由被循环子群系统，则 $\mathcal{G} = M(\phi|\mathcal{A})$，对 $\mathbb{F}$ 的某个具有有限型的 ϕ-不变自正规化子群系统 $\mathcal{A}$。

证明。令 $\pi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{Z}$ 为表示 $\mathbb{G} \coloneqq \mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$的自然投影。根据引理 2.6，对于每个 $[G] \in \mathcal{G}, G = \langle A, xt^k\rangle$，存在某个 $x \in \mathbb{F}$，其中 $A = G \cap \mathbb{F}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个 ϕ-周期有限生成子群，且 $k \geqslant 1$ 生成 $\pi(G)$。注意，A 在 $\mathbb{F}$中是自正交的。事实上，假设对某个 $h \in \mathbb{F}$，$hAh^{-1} \cap A$ 非平凡。那么 $hGh^{-1} \cap G$ 也非平凡。由 G 在 $\mathbb{G}$中的自正交性可知，$h \in G$ 且 $h \in \mathbb{F} \cap G = A$。令 $\kappa \geqslant 1$ 为 $[A]$ 在 $\mathbb{F}$中的 $\langle\phi\rangle$-轨道大小。我们断言 $\kappa = k$。由于 $xt^k At^{-k}x^{-1} = A$，我们有 $\phi^k[A] = [A]$，且 k 是 κ的倍数。若 $\kappa < k$，则对某个 $y \in \mathbb{F}$有 $yt^\kappa At^{-\kappa}y^{-1} = A$，并且 $yt^\kappa \notin G$（因为 κ 不生成 $\pi(G)$）；因此，$yt^\kappa Gt^{-\kappa}y^{-1} \cap G$ 非平凡，这与 G 在 $\mathbb{G}$中自正交矛盾。

定义 $\mathcal{A}$ 为与所有 $[G] \in \mathcal{G}$相对应的 $\mathbb{F}$-共轭类集族 $[A]$。考虑任意 $[A_1]$，$[A_2] \in \mathcal{A}$，其中 $A_i = G_i \cap \mathbb{F}$ 且满足 $[G_i] \in \mathcal{G}$。若 $A_1 \neq A_2$，则 $G_1 \neq G_2$。由于 $\mathcal{G}$ 是自正交的，这意味着 $A_1 \cap A_2 \leqslant G_1 \cap G_2$ 是平凡的。因此，$\mathcal{A}$ 是一个自正规化子群系统。若 $[G_1] = [G_2]$，设其为 $G_2 = (wt^m)G_1(wt^m)^{-1}$，则 $A_2 = w\Phi^m(A_1)w^{-1}$，因此 $\mathbb{F}$-共轭类 $[A_1]$，$[A_2]$ 属于同一个 ϕ-轨道。由于 $\mathcal{G}$ 是有限型的，且每个 $[A]$ 都有有限的 ϕ-轨道，子群系统 $\mathcal{A}$ 是有限型的。注意，$\mathbb{F}$-共轭类 $\phi[A_1] = [\Phi(A_1)]$ 对应于 $[G_1] = [tG_1t^{-1}] \in \mathcal{G}$，即 $\phi[A_1] \in \mathcal{A}$。因此，$\mathcal{A}$ 是 ϕ- 不变的。最后，根据上一段，$\mathcal{G} = M(\phi|\mathcal{A})$ 等于 k，即轨道 $\langle\phi\rangle[A] \subseteq \mathcal{A}$ 的大小。 □

2.6 子群系统中的自正交

当 $\mathcal{H} \sqsubseteq \mathcal{G}$ 是 $\mathbb{G}$ 的嵌套自由循环扩张子群系统时，我们通常会把 $\mathcal{H}$ 称为 $\mathcal{G}$ 的子群系统。在此语境下，我们需要以下自正交的概念：

定义 2.14。 设 $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ 是 $\mathbb{G}$ 的自由循环扩张子群系统，且满足 $\mathcal{H} \sqsubseteq \mathcal{G}$。若 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{G}$ 与 $\mathbb{G}$ 的一个错正规自由被循环子群系统的交，则称 $\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{G}$ 中是 **自正交的**。类似地，设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 $\mathbb{F}$ 的 ϕ- 不变自共轭子群系统，且为有限型，并满足 $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$。若 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathbb{F}$ 的一个 ϕ- 不变自共轭子群系统的交，且该系统为有限型并具有 ϕ-孪生，则称 $\mathcal{B}$ **具有** $\phi|\mathcal{A}$**-孪生**。

以下结果推广了 引理 2.13，即对错正规自由循环扩张子群系统的刻画：

引理 2.15。 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 的有限型 ϕ-不变自正规化子群系统。若 $\mathcal{H}$ 是 $M(\phi|\mathcal{A})$ 中有限型的错正规自由循环扩张子群系统，则存在 $\mathbb{F}$ 的有限型 ϕ-不变自正规化子群系统 $\mathcal{D} \sqsubseteq \mathcal{A}$，使得 $\mathcal{H} = M(\phi|\mathcal{D})$。

证明。我们有 $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \wedge M(\phi|\mathcal{A})$ 对于一个自正交自由被循环子群系统 $\mathcal{H}'$ 的$\mathbb{G}$ 且具有有限型。根据 引理 2.13，$\mathcal{H}' = M(\phi|\mathcal{C})$ 对于某个 ϕ-不变的自正规化子群系统 $\mathcal{C}$的 $\mathbb{F}$且具有有限型。现在，根据 引理 2.11，$M(\phi|\mathcal{C}) \wedge M(\phi|\mathcal{A}) = M(\phi|(\mathcal{C} \wedge \mathcal{A}))$。于是$\mathcal{D} \coloneqq \mathcal{C} \wedge \mathcal{A}$ 就是所需的 ϕ-不变的自正规化子群系统，其 $\mathbb{F}$ 具有有限型。 □

2.7 多项式增长

令 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$ 和 $g \in \mathbb{F}$，并固定一个 $\mathbb{F}$的基。$[g]$ 的共轭类 g 的长度 相对于该基为

$$\|[g]\| \coloneqq \min_{g' \in [g]} |g'|,$$

其中，$|g'|$ 是 g 相对于所选基的字长。

We s称 g 在 *polynomia*下的（正向）-迭代具有多项式增长，如果存在一个多项式 $P \in \mathbb{R}[X]$使得 1

$$\|\phi^n[g]\| \leqslant P(n) \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}.$$

此性质不依赖于基的选择。若每个元素在 ϕ 次迭代下都呈多项式增长，则称 ϕ 为多项式增长；否则，ϕ 为指数增长。

在 [Lev09的命题 1 中，4], Levitt 证明存在唯一的子群系统 $\mathcal{P}(\phi)$，属于 $\mathbb{F}$，其子群代表是完全由在 ϕ迭代下具有多项式增长的元素组成的极大子群；此外，$\mathcal{P}(\phi)$ 是一个 ϕ不变的、具有有限型的自正规化子群系统。注意，ϕ 是指数增长的，当且仅当子群系统 $\mathcal{P}(\phi)$是真的。定义

$$\mathcal{P}(M(\phi)) \coloneqq M(\phi|\mathcal{P}(\phi)),$$

它是映射环面群 $M(\phi) \coloneqq \mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$ 的一个自由群扩张循环群子群系。由 [Lev09命题 14] 的证明可知，$\mathcal{P}(\phi)$ 没有 ϕ-孪生元（另见下文推论 3.3），因此 $\mathcal{P}(M(\phi))$ 在 $M(\phi)$ 中是自正交的。我们将在后文 §5.1 中看到，子群系统$\mathcal{P}(M(\phi))$与表示 $M(\phi)$无关。

设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个 ϕ 不变的、具有有限型的自正规化子群系统。则当 $\mathbb{F}$ 中每个 $\mathcal{A}$-边缘元素在 ϕ 迭代下都具有多项式增长时，$\phi|\mathcal{A}$ 是多项式增长的；等价地，$\phi|\mathcal{A}$ 是多项式增长的当且仅当 $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{P}(\phi)$。定义 $\mathcal{P}(\phi|\mathcal{A}) \coloneqq \mathcal{A} \wedge \mathcal{P}(\phi)$ 与 $\mathcal{P}(M(\phi|\mathcal{A})) \coloneqq M(\phi|\mathcal{A}) \wedge \mathcal{P}(M(\phi))$。注意 $\mathcal{P}(\phi|\mathcal{A})$ 也具有有限型。

2.8 弱吸引理论与吸引层状结构

令 $\partial_\infty\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{F}$ 的格罗莫夫边界，并

$$\partial^2\mathbb{F} \coloneqq (\partial_\infty\mathbb{F} \times \partial_\infty\mathbb{F} - \Delta)/\sim$$

令 $\mathbb{F}$ 的双边界 为 $\mathbb{F}$，其中 Δ 表示对角子集，而 $\sim$ 是由翻转 $(x, y)\sim(y, x)$ 生成的等价关系。双边界 $\partial^2\mathbb{F}$ 配备商拓扑。$\mathbb{F}$ 在 $\partial_\infty\mathbb{F}$ 上的（连续）作用诱导出 $\mathbb{F}$ 在 $\partial^2\mathbb{F}$ 上的对角作用；此外，借助自然同一 $\mathbb{F} \cong \mathrm{Inn}(\mathbb{F})$，该作用可扩展为 $\mathrm{Aut}(\mathbb{F})$ 在 $\partial^2\mathbb{F}$ 上的作用。

$\mathbb{F}$ 的直线空间 是双边界关于 $\mathbb{F}$-作用的商集 $\mathfrak{B}(\mathbb{F}) \coloneqq \mathbb{F}\backslash\partial^2\mathbb{F}$。$\mathbb{F}$ 的直线 是 $\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 的一个元素。非平凡 $g \in \mathbb{F}$的共轭类 $[g]$自然确定一条（周期）直线 $[[g]] \in \mathfrak{B}(\mathbb{F})$，称为 $[g]$的轴 。$\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 上的商拓扑也称为弱拓扑，以强调它是非豪斯多夫的。$\mathbb{F}$ 的一个层状结构 是 $\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 的一个非空闭子集。注意，外自同构群$(\mathbb{F})$ 自然地通过同胚作用于直线空间 $\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 。

固定一个外自同构群 $\phi \in\mathrm{Out}(\mathbb{F})$。Bestvina–Feighn–Handel 在 ϕ [BFH00, 定义 3.1.5] 中为 ϕ 关联了一组 $\mathcal{L}^+(\phi)$ 称为吸引层状结构的闭子集 $\Lambda \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 。我们在附录 A 中给出吸引层状结构的精确定义。对于 $\Lambda \in \mathcal{L}^+(\phi)$ 和 $g \in \mathbb{F}$，如果 Λ（作为 $\mathfrak{B}(\mathbb{F})$的子集）包含在序列 $([[\phi^n(g)]])_{n\in\mathbb{N}}$（在弱拓扑下）的聚点中，我们就称 g 在（向前 ϕ迭代下）弱吸引于 Λ。集合 $\mathcal{L}^+(\phi)$ 是有限的（见 [BFH00, 引理 3.1.13] 的证明），且当且仅当 ϕ 为多项式增长时，它为空。

定义 2.16。所有 $\mathcal{L}^+(\phi)$ 的吸引层状结构集合 ϕ 按包含关系构成偏序。ϕ的（层状）深度 $\delta(\phi)$是 $\mathcal{L}^+(\phi)$中链的最大长度，而深度谱 $\delta\mathcal{S}(\phi)$ 是 $\mathcal{L}^+(\phi)$中所有极大链长度所组成的集合。

我们首先记录以下结果：将外自同构群的深度取正幂，以及限制到有限指数不变子群后，其深度保持不变。我们将证明推迟到 附录 A.1，因为这需要用到吸引层状结构的精确定义。

命题 2.17。假设 $A \leqslant \mathbb{F}$ 具有有限指数，$\Phi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ 是一个自同构，满足$\Phi(A) = A$，且 $\Psi\colon A \to A$ 是 Φ 在 A上的限制。令 $\phi \coloneqq [\Phi]$ 属于 外自同构群$(\mathbb{F})$，令 $\psi \coloneqq [\Psi]$ 属于外自同构群(A)。那么，对所有 $m \geqslant 1$，$\delta(\phi^m) = \delta(\phi) = \delta(\psi)$ 且 $\delta\mathcal{S}(\phi^m) = \delta\mathcal{S}(\phi) = \delta\mathcal{S}(\psi)$ 。

事实上，存在一个自然的保严格序满射 $\pi\colon \mathcal{L}^+(\psi) \to \mathcal{L}^+(\phi)$，并且 $\mathcal{L}^+(\phi)$ 中的链可以通过 π 提升为 $\mathcal{L}^+(\psi)$ 中长度相同的链。

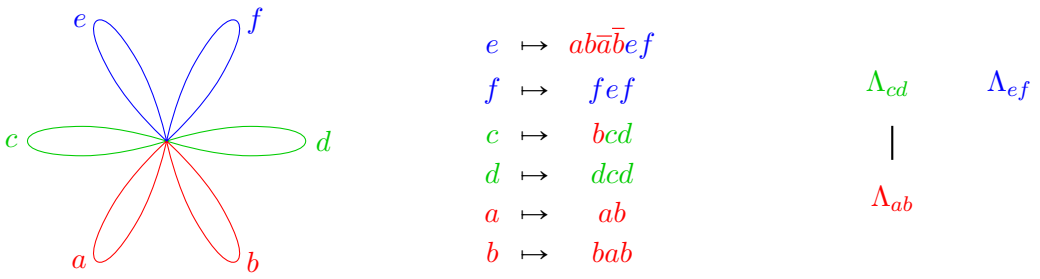

图 1：示意图：例 2.18

下一个例子描述了一个外自同构的吸引层状集偏序集。我们将以此作为贯穿全文的例子，用来说明我们的构造。

例 2.18. 考虑 $\mathbb{F} = \langle a, b, c, d, e, f\rangle$ 以及一个外自同构 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$，其代表元为

$$\Phi\colon a \mapsto ab,\ b \mapsto bab,\ c \mapsto bcd,\ d \mapsto dcd,\ e \mapsto aba^{-1}b^{-1}ef,\ f \mapsto fef.$$

参见图 1。

令层状结构 Λ_{ab} 为序列 $([[\phi^n(g)]])_{n\in\mathbb{N}}$ 关于$g = a$ （或 $g = b$）的聚点集合。类似地，定义 Λ_{cd} 和 Λ_{ef}。应用 Bestvina-Feighn-Handel 相对列车轨道理论可知 $\mathcal{L}^+(\phi) = \{\Lambda_{ab}, \Lambda_{cd}, \Lambda_{ef}\}$。注意， c （分别地， e）不会被弱吸引到 Λ_{ef} （分别地， Λ_{cd}），因为 c, d （分别地， e, f）不会映射经过 e, f （分别地， c, d）。因此，这两个层状结构不构成嵌套。当 $n \gg 1$ 足够大时，直线 $[[\phi^n(c)]]$ 包含 $[[\phi^n(b)]]$的一段长片段；因此， c 会被弱吸引到 Λ_{ab}，并且 $\Lambda_{ab} \subseteq \Lambda_{cd}$。此外， e 不会被弱吸引到 Λ_{ab} ，因为 $\Phi(aba^{-1}b^{-1}) = aba^{-1}b^{-1}$。因此， $\mathcal{L}^+(\phi)$中唯一的嵌套是 $\Lambda_{ab} \subseteq \Lambda_{cd}$，且深度为 $\delta(\phi) = 2$。最后，直线 $[[aba^{-1}b^{-1}]]$ 属于 Λ_{ef} ，因为对于 $n \gg 1$， $[[\phi^n(e)]]$都包含 $[[aba^{-1}b^{-1}]]$ 的任意长片段。■

在上 述例中，外自同构 ϕ在 $\mathcal{L}^+(\phi)$上作用平凡，但这并非总是如此。一般来说，我们将考虑层状结构的 ϕ-轨道。

偏序集 $\mathcal{L}^+(\phi)$ 具有循环群 $\langle\phi\rangle$的一个自然保序作用。我们用 $[\Lambda]$表示 $\Lambda \in \mathcal{L}^+(\phi)$ 在 $\langle\phi\rangle$下的轨道。由于每个 $\Lambda \in \mathcal{L}^+(\phi)$ 都有有限的 $\langle\phi\rangle$-轨道， $[\Lambda]$ 是 $\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 的一个闭子集，因此层状结构的 $\langle\phi\rangle$-轨道集合上存在自然的偏序。我们用 $\mathcal{L}^+_\phi$ 表示 $\langle\phi\rangle$-轨道构成的偏序集。由于 ϕ 通过序同构作用于 $\mathcal{L}^+(\phi)$ ，深度 $\delta(\phi)$ 也是$\mathcal{L}^+_\phi$ 中链的最大大小。同样，深度谱 $\delta\mathcal{S}(\phi)$由$\mathcal{L}^+_\phi$ 中所有极大链的大小组成。本文的目标是证明偏序集 $\mathcal{L}^+_\phi$ 自然是 $\mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$的一个群不变量。

A的每个有限生成子群 $\mathbb{F}$ 都有其自身的双边界 $\partial^2 A$ ，借助包含 $A \hookrightarrow \mathbb{F}$诱导的嵌入，可将其自然识别为 $\partial^2\mathbb{F}$ 的一个闭子集。若 A 也是自正交的，则 $\partial^2 A$ 在商集 $\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 中的像是一个闭子集，可识别为 A的内在线空间 $\mathfrak{B}(A)$ 。此外，假设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个有限型自共轭子群系统。那么， $\bigcup\{\partial^2 A \mid [A] \in \mathcal{A}\}$ 是 $\partial^2\mathbb{F}$ 的一个 $\mathbb{F}$-不变闭子集，其像 $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ 是 $\mathfrak{B}(\mathbb{F})$的一个闭子集，并且是集合 $\mathfrak{B}(A)$（其中 $[A] \in \mathcal{A}$）的有限不交并。注意，对于 $\mathbb{F}$ 的任意有限型自共轭子群系统 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ ， $\mathfrak{B}(\mathcal{A}_1) \cap \mathfrak{B}(\mathcal{A}_2) = \mathfrak{B}(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2)$，且若 $\mathcal{A}_1 \sqsubseteq \mathcal{A}_2$，则 $\mathfrak{B}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{A}_2)$。最后，对于 $\mathbb{F}$中给定的任意直线子集 $L \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{F})$ ，我们称 $\mathcal{A}$ 承载 L ，如果 $L \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{A})$。

现在假设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个 ϕ-不变自正规化子群系统，且为有限型。 $\phi|\mathcal{A}$的一个吸引层状结构（记作 $\Lambda \in \mathcal{L}^+(\phi|\mathcal{A})$）是 ϕ 的一个由 $\mathcal{A}$承载的吸引层状结构。因此， $\mathcal{L}^+(\phi|\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{L}^+(\phi)$的子集。与 ϕ一样，当且仅当

当且仅当 $\phi|\mathcal{A}$ 是多项式增长的。由于 $\mathcal{A}$ 是 ϕ-不变的，$\langle\phi\rangle$对 $\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 的作用将保留 $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$。特别地，对于任意 $\Lambda \in \mathcal{L}^+(\phi|\mathcal{A})$，$\langle\phi\rangle$-轨道 $[\Lambda]$ 是 $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ 的一个闭子集。令 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{L}^+_\phi$ 表示 $\langle\phi\rangle$-轨道在 $\mathcal{L}^+(\phi|\mathcal{A})$中构成的偏序子集。我们将用到下面这个广为人知的引理，其证明留待 附录 A.2。

引理 2.19。 对于 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$，某个 $\mathcal{A}$-外围元素 $g \in \mathbb{F}$ 具有如下性质：

对于任意 $[\Lambda'] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$， g 弱吸引于 $[\Lambda']$ 当且仅当 $[\Lambda'] \subseteq [\Lambda]$。

2.9 相对单端自由群的 JSJ 分解

本节沿用 [GL15，§3。3] （另见 [GL17] ，其中对群的 JSJ 分解作了一般性介绍）。为简便起见，本节的结果针对自由群 $\mathbb{F}$陈述，但所有结论均可推广到无挠相对双曲群。

设 $\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个真 malnormal 子群系统，且为有限型。回顾一下，在这种情况下，群 $\mathbb{F}$ 相对于集合 $\mathcal{N}$ 双曲。将 $\mathcal{N} = \mathcal{P} \sqcup \mathcal{H}$ 分别划分为非循环子群和循环子群的共轭类。在一般理论中，只有非循环子集 $\mathcal{P}$ （而非 $\mathcal{N}$）必然是 $\mathbb{F}$ 的子群系统。然而，在本节中，我们假设 $\mathcal{N}$ 是一个真 malnormal 子群系统。若 H 是 $\mathbb{F}$ 的子群，则称其为（相对）初等，如果它是循环的或 $\mathcal{N}$-外围的。我们用 $\mathrm{Out}(\mathbb{F}, \mathcal{N})$ 表示 $\mathrm{Out}(\mathbb{F})$ 中 $\mathcal{N}$ 的集合稳定子。

一个 $(\mathbb{F},\mathcal{N})$-树 是一个 $\mathbb{F}$-树，其中 $\mathcal{N}$中的每个共轭类都是椭圆型的；若其边稳定子是初等的，则称其为初等的。类似地， $(\mathbb{F},\mathcal{N})$ 的分裂 是由$(\mathbb{F}$ $\mathbb{F}$ 个$(\mathbb{F},\mathcal{N})$-树组成的 $\mathbb{F}$ 的分裂。若 $\mathbb{F}$ 没有相对于 $\mathcal{N}$的自由分裂，我们就称 $\mathbb{F}$ 相对于……单端 $\mathcal{N}$。在这种情况下，Guirardel–Levitt 为这对 $(\mathbb{F},\mathcal{N})$ 关联一个典范的初等 $(\mathbb{F},\mathcal{N})$-树 $T_{\mathcal{N}}$，称为（初等）*JSJ* 树。

定理 2.20 （见 [GL17，定理 9。18]）。 设 $\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个真 *malnormal* 子群系统，且为有限型；设 $\mathcal{N} = \mathcal{P} \sqcup \mathcal{H}$ 是分别由非循环子群和循环子群的共轭类构成的划分。若 $\mathbb{F}$ 相对于 $\mathcal{N}$单端，则存在一个典范的初等 $(\mathbb{F},\mathcal{N})$-树 $T_{\mathcal{N}}$，具有以下性质。

1. 任何具有初等稳定子群的顶点都与一个具有非初等稳定子群的顶点相邻。*2.* 树 $T_{\mathcal{N}}$ 在外自同构群 $\mathit{Out}(\mathbb{F},\mathcal{N})$ 的作用下保持不变。令 $\mathit{Out}^0(\mathbb{F},\mathcal{N})$ 为 $\mathit{Out}(\mathbb{F},\mathcal{N})$ 的极大有限指数子群，其作用在商图 $\mathbb{F}\backslash T_{\mathcal{N}}$ 上是平凡的。*3.* 对每个顶点 $v \in VT_{\mathcal{N}}$，以下情形恰有一种成立：*(a)* 稳定子群 $\mathit{Stab}(v)$ *of* v 是初等的；此外，它要么是循环的，要么其共轭类属于 $\mathcal{P}$。*(b)* 自然同态的像是有限的（见 *[GL15，定理 3.9]*）。*(c)* 稳定子群 $\mathit{Stab}(v)$ 可识别为一个紧曲面 Σ 的基本群。边群以及 $\mathcal{N}$ 中共轭类的代表与 $\mathit{Stab}(v)$ 的交是 Σ 的边界分支的基本群，并且自然同态的像

$$\mathrm{Out}^0(\mathbb{F},\mathcal{N}) \to \mathrm{Out}(\mathrm{Stab}(v))$$

$$\mathrm{Out}^0(\mathbb{F},\mathcal{N}) \to \mathrm{Out}(\mathrm{Stab}(v))$$

是无限的，且包含在 Σ 的映射类群中。 □

备注。 树 $T_{\mathcal{N}}$ 不一定是分裂，因为它可能是一个点。这就是我们称 $T_{\mathcal{N}}$ 为*JSJ* 树而不是*JSJ* 分解的原因。然而，即使 $T_{\mathcal{N}}$ 是一个点，定理 2.20(3) 中关于顶点稳定子的三分法也提供了有关外自同构群$(\mathbb{F}$、 $\mathcal{N})$ 的信息，这对我们的目的已经足够（例如，参见引理 4.2 以及命题 4.3的证明）。

设 $T_{\mathcal{N}}$是 ($\mathbb{F}$的 *JSJ* 树，$\mathcal{N}$) 如定理 2.20所述。顶点 $v \in VT_{\mathcal{N}}$称为：初等，若它满足条件 (3a)；刚性，若它满足条件 (3b)；最后，柔性，若它满足条件 (3c)。

我们还需要 $\mathbb{F}$ 的子群系统的 JSJ 森林。设 $\mathcal{A} = \{[A_1], \dots, [A_k]\}$ 是 $\mathbb{F}$ 的有限型自正交子群系统，且 $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{A}$。一组对 $(\mathcal{A}, \mathcal{N})$ 的分裂 $\mathcal{S} = \{T_1, \dots, T_k\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个分裂，并且其中每个 T_i 都是 $(A_i, \mathcal{N}|A_i)$-树的一个共轭类。若 $\mathcal{A}$ 相对于 $\mathcal{N}$ 单端，即不存在 $(\mathcal{A}, \mathcal{N})$ 的自由分裂。

当 $\mathcal{A}$ 相对于 $\mathcal{N}$ 单端时，存在一个由以下方式构造的、对应于 $(\mathcal{A}, \mathcal{N})$ 的典范初等森林 $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}$。取一个共轭类 $[A] \in \mathcal{A}$。如果 $[A] \in \mathcal{N}$，则将 $T^A_{\mathcal{N}}$ 定义为一个 A-树中的点。否则，由于 $\mathcal{A}$ 相对于 $\mathcal{N}$ 单端，子群 A 相对于 $\mathcal{N}|A$ 单端。令 $T^A_{\mathcal{N}}$ 为由定理 2.20 给出的对应于 $(A, \mathcal{N}|A)$ 的 JSJ 树。森林 $\mathcal{T}_{\mathcal{N}} \coloneqq \{T^A_{\mathcal{N}} \colon [A] \in \mathcal{A}\}$ 是对应于 $(\mathcal{A}, \mathcal{N})$ 的 JSJ 森林。我们继续使用刚性、柔性或初等这一三分法来对 JSJ 森林的顶点进行分类。

3 与吸引层状结构相关的子群系统

设 $\phi \in$外自同构群($\mathbb{F}$)。为了证明 ϕ 的深度是其映射环面的群不变量，我们需要将吸引层状结构所提供的动力学信息转化为代数数据。这通过非吸引子群系统来实现。我们还将引入支撑子群系，它们将用于证明偏序集 $\mathcal{L}^+_\phi$ 的群不变性。

3.1 非吸引子群系统

Handel–Mosher 证明，$\mathbb{F}$ 中所有不弱吸引于$[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_\phi$ 的元素的共轭类集合，确定了一个 ϕ不变的、有限型的真 malnormal 子群系统 $\mathcal{N}[\Lambda]$，称为非吸引子群系统 [HM20，定理 F]。他们的构造也适用于$\mathcal{L}^+_\phi$ 的子集，下面的定理给出了这些子群系统的另一种构造：

定理 3.1 (参见 [Mut24b，§3])。对于 $\phi \in$ 外自同构群($\mathbb{F}$) 和$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+_\phi$，存在一棵典范拓扑树 $T_{\mathcal{L}}$，其上有 $\mathbb{F}$ 的非嵌套连续作用，使得：

1. 该作用是极小的，且弧稳定子平凡；*2.* 对于任意表示 ϕ 的自同构 $\Phi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$，存在一个扩张的 Φ-等变同胚 $h_{\mathcal{L}}\colon T_{\mathcal{L}} \to T_{\mathcal{L}}$；*3.* 元素 $g \in \mathbb{F}$ 在 $T_{\mathcal{L}}$ 中是椭圆型，当且仅当它不会弱吸引于任何 $[\Lambda] \in \mathcal{L}$。

拓扑树可以看作是不带度量的 $\mathbb{R}$-树。拓扑树上的非嵌套作用是等距作用的对应形式；特别是，它们允许我们将 $\mathbb{F}$ 的元素分类为椭圆型/双曲型。最后，Φ-等变同胚的扩张性定义有些技术性（因为缺少度量），但我们唯一会用到的性质是：如果不动点存在，那么它是唯一的；这与扩张相似变换类似。

注。严格来说，所述定理并未出现在所引用的文献中；不过，从引文中的讨论很容易推出该定理。为完整起见，我们在附录 B中简要说明如何推导定理 3.1。

设 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+_\phi$ 和 $T_{\mathcal{L}}$ 是由 定理 3.1给出的相应拓扑树。非吸引子群系统 $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ 对于 $\mathcal{L}$ 是 $T_{\mathcal{L}}$的非平凡点稳定子的共轭类集合。对于 $\mathcal{L} = \{[\Lambda]\}$ 中的单元素集合 $\mathcal{L}^+_\phi$，我们得到 Handel–Mosher 的定义：$\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \mathcal{N}[\Lambda]$。当 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^+_\phi$时，我们得到 Levitt 的子群系统：$\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \mathcal{P}(\phi)$。非吸引子系统 对于 ϕ是集族 $\mathcal{N}(\phi) \coloneqq \left\{\mathcal{N}[\Lambda] \colon \quad [\Lambda] \in \mathcal{L}^+_\phi\right\}$。

更一般地，设 T 是一个拓扑树，其上有 $\mathbb{F}$ 的非嵌套作用，该作用是极小的，且弧稳定子平凡。那么，集合 $\mathcal{N}(T)$ 由 T 的非平凡点稳定子的共轭类组成，是 $\mathbb{F}$ 的一个自正规化子群系统。此类子群系统包括非吸引子群系统，以及 $\mathbb{F}$ 的自由因子系统。设 $\mathcal{N}(T')$ 是 $\mathbb{F}$ 的另一个此类子群系统。它们的交 $\mathcal{N}(T) \wedge \mathcal{N}(T')$ 也可描述为由 $\mathbb{F}$ 中在 T 和 T' 中均为椭圆型的极大子群的共轭类组成的子群系统。例如，若 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+_\phi$，则 $\bigwedge\{\mathcal{N}[\Lambda] : \ [\Lambda] \in \mathcal{L}\} = \mathcal{N}(\mathcal{L})$ 根据 定理 3.1(3)。

在我们的归纳论证中，我们将考察限制到不变子群系统上的非吸引子群系统。为此，令 $\mathcal{A}$ 为一个 ϕ-不变的自正规化子群系统，属于 $\mathbb{F}$ 且具有有限型。对于任意 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$，定义 $\mathcal{N}(\mathcal{L}|\mathcal{A})$ 为交 $\mathcal{A} \wedge \mathcal{N}(\mathcal{L})$。类似地，对于 $\mathcal{N}[\Lambda|\mathcal{A}] \coloneqq \mathcal{A} \wedge \mathcal{N}[\Lambda]$ 和 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$，定义 $\mathcal{N}(\phi|\mathcal{A}) \coloneqq \left\{\mathcal{N}[\Lambda|\mathcal{A}] : \ [\Lambda] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}\right\}$。根据引理 2.19，对于 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$，子群系统 $\mathcal{N}(\mathcal{L}|\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ 当且仅当 $\mathcal{L}$ 为空。

例 3.2。回顾例 2.18中的自由群 $\mathbb{F} = \langle a$的自同构：$b, \ c, \ d, \ e, \ f\rangle$

$$\Phi\colon a \mapsto ab, \ b \mapsto bab, \ c \mapsto bcd, \ d \mapsto dcd, \ e \mapsto aba^{-1}b^{-1}ef, \ f \mapsto fef.$$

以下是 ϕ 的一些非吸引子群系统：

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[\Lambda_{cd}] &= [\langle a, b, e, f\rangle] & \mathcal{N}(\{[\Lambda_{cd}], [\Lambda_{ef}]\}) &= \mathcal{N}(\Lambda_{cd}) \wedge \mathcal{N}(\Lambda_{ef}) = [\langle a, b\rangle] \\ \mathcal{N}[\Lambda_{ef}] &= [\langle a, b, c, d\rangle] & \mathcal{N}(\mathcal{L}^+_\phi) &= [\langle aba^{-1}b^{-1}\rangle] = \mathcal{P}(\phi) \\ \mathcal{N}[\Lambda_{ab}] &= [\langle aba^{-1}b^{-1}, e, f\rangle] & \mathcal{N}[\Lambda_{ab}|\mathcal{A}] &= [\langle aba^{-1}b^{-1}\rangle] \text{ if } \mathcal{A} = [\langle a, b\rangle]. \end{aligned}$$ ■

推论 3.3。 设 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$, $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个 ϕ-不变、有限型自共轭子群系统，且 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$。那么以下陈述成立：

1. $\mathcal{N}(\mathcal{L}|\mathcal{A})$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个有限型自共轭子群系统 型；
2. $\mathcal{N}(\mathcal{L}|\mathcal{A})$ 是 ϕ-不变的，且没有 $\phi|\mathcal{A}$-孪生；并且
3. $\mathcal{N}(\mathcal{L}|\mathcal{A})$ 支撑 $\mathcal{P}(\phi|\mathcal{A})$。

证明。 设 $T_\mathcal{L}$ 是与 $\mathcal{L}$ 相对应的拓扑树，该树由 定理 3.1给出。根据该定理的条件 (1)（弧稳定子群平凡）以及 Gaboriau–Levitt 指数理论 [GL95，定理 III。2]（另见 [Mut24a，定理 A。7]），$\mathcal{N}(\mathcal{L})$ 是一个有限型自共轭子群系统。由于它是两个有限型自共轭子群系统的交，$\mathcal{N}(\mathcal{L}|\mathcal{A})$ 也是一个有限型自共轭子群系统 $\mathbb{F}$ 。

选取一个自同构 $\Phi \in \phi$。根据条件（2）（$h_\mathcal{L}$ 是 Φ-等变的），$\mathcal{N}(\mathcal{L})$ 是 ϕ-不变的。对于任意的 $n \geqslant 1$ 和 $w \in \mathbb{F}$，定义 $\mathbb{F}$-自同构 Ψ：$g \mapsto w\Phi^n(g)w^{-1}$。于是，同胚 $w \cdot h^n_\mathcal{L}$：$T_\mathcal{L} \to T_\mathcal{L}$ 是 Ψ-等变的。根据条件（2）（$h_\mathcal{L}$ 是扩张的），映射 $w \cdot h^n_\mathcal{L}$ 至多有一个不动点。特别地，由于 $w \cdot h^n_\mathcal{L}$ 的 Ψ-等变性，自同构 Ψ 至多保留 $T_\mathcal{L}$ 的一个非平凡点稳定子群。因此，$\mathcal{N}(\mathcal{L})$ 没有 ϕ-孪生体。由于它是两个 ϕ-不变子群系统的交，$\mathcal{N}(\mathcal{L}|\mathcal{A})$ 是 ϕ-不变的。因此，它没有 $\phi|\mathcal{A}$-孪生体。

最后，根据条件（3），$\mathcal{N}(\mathcal{L})$ 支撑 $\mathcal{P}(\phi)$。将两个系统分别与 $\mathcal{A}$ 取交后，我们得出 $\mathcal{N}(\mathcal{L}|\mathcal{A})$ 支撑 $\mathcal{P}(\phi|\mathcal{A})$。 □

We now刻画由非吸引子群系统承载的层状结构 .

引理 3.4。对于 $[\Lambda_1], \ [\Lambda_2] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$,

$$[\Lambda_1] \nsubseteq [\Lambda_2] \ \textit{(as subsets of } \mathfrak{B}(\mathcal{A})\textit{) if and only if } \mathcal{N}[\Lambda_1|\mathcal{A}] \textit{ carries } [\Lambda_2].$$

证明。假设 $[\Lambda_1] \nsubseteq [\Lambda_2]$。令 T_1 为与定理 3.1 给出的单元素集合 $\{[\Lambda_1]\}$ 相关联的树。由引理 2.19，存在一个 $\mathcal{A}$-外围元素 $g_2 \in \mathbb{F}$，它弱吸引于 $[\Lambda_2]$，但不弱吸引于 $[\Lambda_1]$，因为 $[\Lambda_1] \nsubseteq [\Lambda_2]$。由定理 3.1(3)，$g_2$ 在 T_1 中是椭圆型的，即 $\mathcal{N}[\Lambda_1]$ 承载轴 $[[g_2]]$。由于 $\mathcal{A}$-外围元素 g_2 弱吸引于 $[\Lambda_2]$，且由于 $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$、$\mathfrak{B}(\mathcal{N}[\Lambda_1]) \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 是包含 $[[g_2]]$ 的 ϕ-不变闭子集，我们推得 $\mathcal{N}[\Lambda_1|\mathcal{A}]$ 承载 $[\Lambda_2]$。

反向结论由以下断言推出：$\mathcal{N}[\Lambda_1]$ 不承载 $[\Lambda_1]$。反设 $\mathcal{N}[\Lambda_1]$ 承载 $[\Lambda_1]$，即 $[\Lambda_1] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{N}[\Lambda_1]}$。根据引理 2.19，某个 $\mathcal{N}[\Lambda_1]$-外围元素 $g_1 \in \mathbb{F}$ 弱吸引于 $[\Lambda_1]$，这与 $\mathcal{N}[\Lambda_1]$的定义矛盾。 □

作为应用，我们得到 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{N}[\Lambda|\mathcal{A}]} = \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}} \backslash \{[\Lambda]\}$，当 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$ 是极大的时候。下一个引理是将层叠偏序集与子群系统的偏序集联系起来的关键一步。

引理 3.5. 对于 $[\Lambda_1]$，$[\Lambda_2] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$，

$$[\Lambda_1] \subseteq [\Lambda_2] \text{ if and only if } \mathcal{N}[\Lambda_1|\mathcal{A}] \sqsubseteq \mathcal{N}[\Lambda_2|\mathcal{A}].$$

等价地，集族 $\mathcal{N}(\phi|\mathcal{A})$ 与 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$ 自然地序同构。

证明。对于 $i \in \{1,2\}$，令 T_i 为定理 3.1 给出的与单元素 $\{[\Lambda_i]\}$ 相关联的树。根据定理 3.1(3)，元素 $g \in \mathbb{F}$ 在 T_i 中是双曲型，当且仅当它弱吸引于 $[\Lambda_i]$。若 $[\Lambda_1] \subseteq [\Lambda_2]$，则任何在 T_1 中为椭圆型的元素 $g \in \mathbb{F}$ 在 T_2 中也为椭圆型，或者等价地，$\mathcal{N}[\Lambda_1] \sqsubseteq \mathcal{N}[\Lambda_2]$；因此，$\mathcal{N}[\Lambda_1|\mathcal{A}] \sqsubseteq \mathcal{N}[\Lambda_2|\mathcal{A}]$。反过来，若 $[\Lambda_1] \nsubseteq [\Lambda_2]$，则根据引理 3.4，$\mathcal{N}[\Lambda_1|\mathcal{A}]$ 承载 $[\Lambda_2]$，但 $\mathcal{N}[\Lambda_2|\mathcal{A}]$ 不承载；因此，$\mathcal{N}[\Lambda_1|\mathcal{A}] \nsubseteq \mathcal{N}[\Lambda_2|\mathcal{A}]$。 □

3.2 支撑子群系统

对于 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_\phi$，$[\Lambda]$ 的支撑是子集

$$\Lambda^\downarrow \coloneqq \left\{ [\Lambda'] \in \mathcal{L}^+_\phi \,:\, [\Lambda'] \subseteq [\Lambda] \text{ as subsets of } \mathfrak{B}(\mathbb{F}) \right\},$$

并且 $[\Lambda]$ 的外部是子集 $\Lambda^\perp \coloneqq \mathcal{L}^+_\phi \backslash \Lambda^\downarrow$。由引理 3.4，可得 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{N}(\Lambda^\perp)} = \Lambda^\downarrow$。支撑子群系统 $\mathcal{S}[\Lambda]$（关于 $[\Lambda]$）是 $\mathcal{N}(\Lambda^\perp)$的所有承载 $\Lambda^\downarrow$的自由因子系的交，即 $\mathcal{N}(\Lambda^\perp)$ 的自由因子系，它由引理 2.2至2.4定义。由交的唯一性以及 ϕ对 $\Lambda^\perp$的不变性，$\mathcal{S}[\Lambda]$ 是 ϕ不变的。注意 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{S}[\Lambda]} = \Lambda^\downarrow$。

ϕ 的支撑系统是集族 $\mathcal{S}(\phi) \coloneqq \left\{ \mathcal{S}[\Lambda] : \ [\Lambda] \in \mathcal{L}^+_\phi \right\}$。

下一条引理是引理 3.5 在支撑系统上的类比。

引理 3.6. 对于 $[\Lambda_1]$，$[\Lambda_2] \in \mathcal{L}^+_\phi$，

$$[\Lambda_1] \subseteq [\Lambda_2] \text{ if and only if } \mathcal{S}[\Lambda_1] \sqsubseteq \mathcal{S}[\Lambda_2].$$

等价地，集族 $\mathcal{S}(\phi)$ 与 $\mathcal{L}^+_\phi$ 自然地序同构。

证明。假设 $[\Lambda_1] \nsubseteq [\Lambda_2]$。由于 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{S}[\Lambda_i]} = \Lambda_i^\downarrow$ 对 $i \in \{1, 2\}$，我们知道 $[\Lambda_1]$ 由 $\mathcal{S}[\Lambda_1]$承载，但不由 $\mathcal{S}[\Lambda_2]$承载。这表明 $\mathcal{S}[\Lambda_1] \nsubseteq \mathcal{S}[\Lambda_2]$。反过来，假设 $[\Lambda_1] \subseteq [\Lambda_2]$。那么$\Lambda_1^\downarrow \subseteq \Lambda_2^\downarrow$并且 $\Lambda_2^\perp \subseteq \Lambda_1^\perp$。由于 $\Lambda_2^\downarrow \subseteq \Lambda_1^\downarrow$，我们有 $\mathcal{N}(\Lambda_1^\perp) \sqsubseteq \mathcal{N}(\Lambda_2^\perp)$。由于 $\mathcal{S}[\Lambda_2]$是承载 $\Lambda_2^\downarrow \supseteq \Lambda_1^\downarrow$的 $\mathcal{N}(\Lambda_2^\perp)$的一个自由因子系，根据引理 2.3，交 $\mathcal{N}(\Lambda_1^\perp) \wedge \mathcal{S}[\Lambda_2]$是承载 $\Lambda_1^\downarrow$的$\mathcal{N}(\Lambda_1^\perp)$的一个自由因子系。由 $\mathcal{S}[\Lambda_1]$在 $\mathcal{N}(\Lambda_1^\perp)$中的极小性，

$$\mathcal{S}[\Lambda_1] \sqsubseteq \mathcal{N}(\Lambda_1^\perp) \wedge \mathcal{S}[\Lambda_2] \sqsubseteq \mathcal{S}[\Lambda_2].$$ □

我们的支撑子群系统 $\mathcal{S}[\Lambda]$ 与 Bestvina–Feighn–Handel 定义的支撑自由因子系密切相关 [BFH00，定义 3.2。3]：对于 $\Lambda \in \mathcal{L}^+(\phi)$，令 $\mathcal{F}(\Lambda)$ 为承载 Λ的 $\mathbb{F}$ 的所有自由因子系的交 $\mathbb{F}$。根据交的唯一性，$\mathcal{F}(\phi\Lambda) = \phi\mathcal{F}(\Lambda)$对于 $\Lambda \in \mathcal{L}^+(\phi)$。对于 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_\phi$，我们定义 $\mathcal{F}[\Lambda]$ 为支撑 $\{\mathcal{F}(\Lambda')$ 的 $\mathbb{F}$ 的所有自由因子系的交 $\mathbb{F}$： $\Lambda' \in [\Lambda]\}$。注意，$\mathcal{S}[\Lambda] \sqsubseteq \mathcal{F}[\Lambda]$，但一般而言它们不一定相等，以下示例将说明这一点。

例 3.7. 设 ϕ 由曲面 f 上的同胚 Σ 诱导，且该曲面带边界。假设 f的 Thurston 标准形将 Σ 切分为四个 f- 不变子曲面 Σ_0、Σ_1、Σ_2、Σ_3，如图 2 所示，其中吸引层状结构 Λ_i 支撑在 Σ_i 上，对应 $i = 1$、2、3。

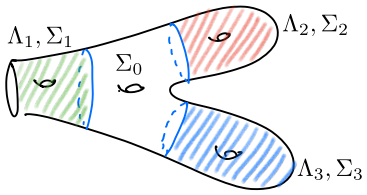

图 2：展示支撑子群系统

我们利用 $\mathcal{S}[\Lambda_1]$ 和非吸引子群系来说明支撑子群系的定义。对于 $i = 2$、3，有 $\Lambda_1^\perp = \{\Lambda_2, \Lambda_3\}$和 $\mathcal{N}[\Lambda_i] = \pi_1(\Sigma\backslash\Sigma_i)$。于是，$\mathcal{S}[\Lambda_1] = \pi_1(\Sigma_1)$是承载 Λ_1的 $\mathcal{N}[\Lambda_2] \wedge \mathcal{N}[\Lambda_3] = \pi_1(\Sigma_1 \cup \Sigma_0)$的最小自由因子系。我们看到，$\mathcal{S}[\Lambda_1] = \pi_1(\Sigma_1)$ 是 $\mathcal{F}[\Lambda_1] = \pi_1(\Sigma)$的真子群，而对于 $i = 2$、3，则有$\mathcal{S}[\Lambda_i] = \mathcal{F}[\Lambda_i] = \pi_1(\Sigma_i)$。■

Bestvina–Feighn–Handel 利用这些自由因子系统，在$\mathcal{L}^+(\phi)$ 与 $\mathcal{L}^-(\phi) \coloneqq \mathcal{L}^+(\phi^{-1})$之间建立了自然双射。后者也称为排斥性 层状结构的 ϕ偏序集。根据 [BFH00，引理 3.2。4], 对于每个 $\Lambda_+ \in \mathcal{L}^+(\phi)$，都存在唯一的 $\Lambda_- \in \mathcal{L}^-(\phi)$ 使得 $\mathcal{F}(\Lambda_+) = \mathcal{F}(\Lambda_-)$。我们称 Λ_+ 和 Λ_- 是配对的，由此定义了配对双射，它建立在 $\mathcal{L}^+(\phi)$ 与 $\mathcal{L}^-(\phi)$之间。由唯一性可知，配对双射关于 $\langle\phi\rangle$-作用是等变的，因此得到 $\mathcal{L}^+_\phi$ 与 $\mathcal{L}^-_\phi \coloneqq \mathcal{L}^+_{\phi^{-1}}$之间的诱导配对。

引理 3.8（参见 [HM20，定理 F]）。 $\mathcal{N}[\Lambda_+] = \mathcal{N}[\Lambda_-]$ 对于配对层叠轨道 $[\Lambda_\pm]$。

该引理本质上归功于 Handel–Mosher。我们给出一个证明，其中使用分裂，而不使用完全分裂相对列车轨道映射的那套机制。

我们首先定义相对增长。设 $\mathcal{A}$是 $\mathbb{F}$ 的一个有限型的 ϕ-不变自正规化子群系统，且 $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{A}$ 是一个 ϕ-不变真自由因子系统。固定 $\mathcal{A}$ 的一个自由分裂 $\mathcal{T}$，其点稳定子子群系统为 $\mathcal{F}'$。$\mathbb{F}$ 的一个 $\mathcal{A}$- 外围元素的长度 $\|[g]\|_{\mathcal{F}'}$ 是其共轭类在 $\mathcal{T}$ 中的平移长度。一个 $\mathcal{A}$- 外围元素 g在 ϕ-迭代下具有多项式增长相对于 $\mathcal{F}'$，如果序列 $(\|\phi^n[g]\|_{\mathcal{F}'})_n$ 被 n的一个多项式所界定。该性质与自由分裂 $\mathcal{T}$的选取无关，并且当 $\mathcal{F}' = \varnothing$时，我们恢复多项式增长的原始定义。限制 $\phi|\mathcal{A}$ 是多项式增长相对于 $\mathcal{F}'$，如果每个 $\mathcal{A}$-外围元素在 ϕ-迭代下相对于 $\mathcal{F}'$ 具有多项式增长。为完备起见，我们规定 $\phi|\mathcal{A}$ 是 多项式增长相对于 $\mathcal{A}$。

引理 3.8 的证明。反设 $\mathcal{N}[\Lambda_+] \neq \mathcal{N}[\Lambda_-]$。不失一般性，可假设某个 $g \in \mathbb{F}$ 在（向后 ϕ迭代下）弱吸引于 $[\Lambda_-]$，但不（在向前 ϕ迭代下）弱吸引于 $[\Lambda_+]$。那么，ϕ-不变的自共轭子群系统 $\mathcal{N}[\Lambda_+]$承载 $[[g]]$。根据 ϕ-不变性，$\mathcal{N}[\Lambda_+]$ 承载序列 $(\phi^{-k}[[g]])_{k\in\mathbb{N}}$中的每条周期线。由于该序列的聚点集包含 $[\Lambda_-]$，闭子空间 $\mathfrak{B}(\mathcal{N}[\Lambda_+]) \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{F})$包含 $[\Lambda_-]$。令 $\mathcal{F} \coloneqq \mathcal{F}[\Lambda_\pm]$ 为上文定义的 $\mathbb{F}$ 的自由因子系。那么，$\mathcal{N}[\Lambda_+|\mathcal{F}]$承载 $[\Lambda_-]$。然而，$\mathcal{N}[\Lambda_+|\mathcal{F}] = \mathcal{N}[\Lambda_-|\mathcal{F}]$。事实上，选取一个极大的 ϕ-不变真

自由因子系 $\mathcal{F}' \sqsubsetneq \mathcal{F}$。根据 [Mut24b，命题 2.2]，$\mathcal{N}[\Lambda_+|\mathcal{F}]$（分别为 $\mathcal{N}[\Lambda_-|\mathcal{F}]$）是满足以下条件的自共轭子群系统 $\mathcal{H} \sqsubseteq \mathcal{F}$ 中的唯一最大者：$\mathbb{F}$ 的 $\mathcal{H}$-周边元素相对于 $\mathcal{F}'$ 在 ϕ迭代下（分别在 ϕ^{-1}迭代下）呈多项式增长。因此$\mathcal{F}' \sqsubseteq \mathcal{N}[\Lambda_+|\mathcal{F}]$，且限制 $\phi|\mathcal{N}[\Lambda_+|\mathcal{F}]$ 相对于 $\mathcal{F}'$呈多项式增长。根据 [Mut24a，命题 3.1]，中条件（1⇔2）的等价性，限制 $\phi^{-1}|\mathcal{N}[\Lambda_+|\mathcal{F}]$ 相对于 $\mathcal{F}'$ 呈多项式增长（另见 [Mut24c，推论 2.5]）。$\mathcal{N}[\Lambda_-|\mathcal{F}]$ 的唯一性和极大性蕴含 $\mathcal{N}[\Lambda_+|\mathcal{F}] \sqsubseteq \mathcal{N}[\Lambda_-|\mathcal{F}]$。由对称性可知，二者相等，且 $\mathcal{N}[\Lambda_-]$承载 $[\Lambda_-]$，这与引理 2.19 矛盾。□

由这个引理和 引理 3.5，我们立即得到如下结论：

推论 3.9. $\mathcal{L}^+_\phi$ 与 $\mathcal{L}^-_\phi$ 之间的诱导配对是一个序同构。□

最后，我们证明配对的层叠轨道具有相同的支撑子群系统 .

推论 3.10. 配对层叠轨道 $\mathcal{S}[\Lambda_+] = \mathcal{S}[\Lambda_-]$ $[\Lambda_\pm]$的情形。

证明。由 引理 3.8 和 推论 3.9，可得 $\mathcal{N} \coloneqq \mathcal{N}(\Lambda^\perp_+) = \mathcal{N}(\Lambda^\perp_-)$。由于 $\mathcal{L}^\pm_{\phi|\mathcal{N}} = \Lambda^\downarrow_\pm$(引理 3.4)，支撑子群系统 $\mathcal{S}[\Lambda_+]$ (分别为 $\mathcal{S}[\Lambda_-]$) 是 $\mathcal{N}$ 所承载的 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{N}}$ (分别为 $\mathcal{L}^-_{\phi|\mathcal{N}}$) 的最小自由因子系统。这等价于说 $\phi|\mathcal{N}$ 相对于 $\mathcal{S}[\Lambda_+]$是多项式增长的，且 $\phi^{-1}|\mathcal{N}$ 也如前一个证明中那样；因此，$\mathcal{S}[\Lambda_+]$承载 $\mathcal{L}^-_{\phi|\mathcal{N}}$。由极小性，$\mathcal{S}[\Lambda_-] \sqsubseteq \mathcal{S}[\Lambda_+]$。类似地，$\mathcal{S}[\Lambda_+] \sqsubseteq \mathcal{S}[\Lambda_-]$。□

4 $\mathbb{F}$的不变自共轭子群系统

设 $\phi \in$ 为 $(\mathbb{F})$ 的外自同构群。本节将支撑多项式子群系统 $\mathcal{P}(\phi)$ 的 ϕ-不变真 malnormal 子群系统与 ϕ 的非吸引子群系统联系起来。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个有限型 ϕ-不变自共轭子群系统。我们先讨论 $\mathcal{A}$ 的 ϕ-不变真自由因子系统的情形。

引理 4.1. 假设 $\phi|\mathcal{A}$ 不保持 $\mathcal{A}$ 的自由分裂。若 $\mathcal{F} \sqsubsetneq \mathcal{A}$ 是一个 ϕ-不变真自由因子系统，则对于某个 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$，有 $\mathcal{F} \sqsubseteq \mathcal{N}[\Lambda|\mathcal{A}]$ 。

证明。我们可以假设 $\mathcal{F} \sqsubsetneq \mathcal{A}$ 是一个极大的 ϕ-不变真自由因子系统。等价地，对于每个 $[A] \in \mathcal{A}$，外自同构 $\phi^k|A$ 相对于 $\mathcal{F}|A$ 不可约。选取满足 $[A] \notin \mathcal{F}$ 的 $[A] \in \mathcal{A}$。令 $f\colon \Gamma \to \Gamma$ 是 $\phi^k|A$ 的一个相对列车轨道映射，其配备了一个 f- 不变子图，该子图导出 A 的真自由因子系统 $\mathcal{F}|A$ （见附录 A）。我们断言，f 的顶层分层 H_0 是一个 EG层。事实上，反设 H_0 是 NEG。将 $\Gamma_1 = \Gamma \backslash H_0$ 的每个连通分支压缩为一点，会导出一个边群平凡的 $\overline{A}$ 的 $\phi^k|A$-不变群图 $\mathbb{X}$。根据 Bass–Serre理论，$\mathbb{X}$ 被 A 的一个 $\phi^k|A$-不变自由分裂覆盖。由于 $\phi|\mathcal{A}$ 不保持 $\mathcal{A}$ 的自由分裂，矛盾。因此，H_0 是一个 EG层。

根据 [BFH00，引理 3.1。9]，某个 $\langle\phi^k|A\rangle$-轨道的吸引层状结构 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_{\phi^k|A}$ 并未被 Γ_1携带。对于 Λ，$\phi^k|A$ 的吸引层状结构也是 $\phi|\mathcal{A}$的一个吸引层状结构。我们滥用记号，也用 $\langle\phi\rangle$表示其 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$ -轨道。根据构造，没有 $\mathcal{F}$-外围共轭类 $[g]$ 弱吸引于 $[\Lambda]$，即 $\mathcal{F} \sqsubseteq \mathcal{N}[\Lambda]$；因此，$\mathcal{F} \sqsubseteq \mathcal{N}[\Lambda|\mathcal{A}]$。□

令 $\mathcal{N} \sqsubsetneq \mathcal{A}$ 为一个有限型真 malnormal 子群系统，并令 $\mathcal{N} = \mathcal{P}_\mathcal{N} \sqcup \mathcal{H}_\mathcal{N}$分别为非循环子群和循环子群的共轭类划分。注意，$\mathcal{P}_\mathcal{N}$ 仍然是一个有限型真 malnormal 子群系统，并且对于每个 $[A] \in \mathcal{A}$，群 A 相对于 $\mathcal{P}_\mathcal{N}|A$是双曲的；因此，根据定理 2.20，对于 $\mathcal{T}_\mathcal{N}$，($\mathcal{A}$的 *JSJ* 森林 $\mathcal{N}$) 存在，只要 $\mathcal{A}$相对于 $\mathcal{N}$是单端的。

引理 4.2。 设 $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{A}$ 是一个具有有限型的 ϕ-不变真 *malnormal* 子群系统，且满足 $\mathcal{P}(\phi|\mathcal{A}) \sqsubseteq \mathcal{N}$。若 $\mathcal{A}$ 相对于 $\mathcal{N}$ 单端，则 *JSJ* 森林 $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}$ 没有刚性顶点。

证明。反设存在 $[A] \in \mathcal{A}$，使得 $T^A_{\mathcal{N}}$有一个刚性顶点 v。取一个自同构 $\Psi \in \phi^k|A$。根据定理 2.20(2)，存在一个 Ψ-等变等距映射 ι，其定义在 $T^A_{\mathcal{N}}$上；此外，对于某个 $m \geqslant 1$， ι^m保留 $T^A_{\mathcal{N}}$的顶点轨道。因此，我们有一个自然同态 $\langle(\phi^k|A)^m\rangle \to \mathrm{Out}(\mathrm{Stab}(v))$，其像由定理 2.20(3b)可知是有限的。因此，对于某些 $g \in \mathbb{F}$ 和 $n \geqslant 1$， $\Psi^{mn}(\mathrm{Stab}(v)) = g^{-1}\mathrm{Stab}(v)g$ ，且 $(\iota_g \circ \Psi^{mn})|\mathrm{Stab}(v) \in \mathrm{Inn}(\mathrm{Stab}(v))$，其中 $\iota_g\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ 是由 g给出的左共轭。这表明，对于某个 $[P] \in \mathcal{P}(\phi|\mathcal{A}) \sqsubseteq \mathcal{N}$，$\mathrm{Stab}(v) \leqslant P$。因此，$\mathrm{Stab}(v)$ 是初等的。这与刚性顶点的 $\mathrm{Stab}(v)$ 是非初等的事实矛盾。 □

现在我们证明本节的主要命题。

命题 4.3。 设 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$，且 $\mathcal{A}$ 是 ϕ-不变的、具有有限型的 *malnormal* 子群系统，属于 $\mathbb{F}$。假设 $\phi|\mathcal{A}$ 不保持 $\mathcal{A}$ 的自由分裂。若 $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{A}$ 是一个具有有限型的 ϕ-不变真 *malnormal* 子群系统，且满足 $\mathcal{P}(\phi|\mathcal{A}) \sqsubseteq \mathcal{N}$，则对于某个 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$，有 $\mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{N}[\Lambda|\mathcal{A}]$。

证明。 令 $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{A}$ 为一个 ϕ-不变的、具有有限型的真 malnormal 子群系统，满足 $\mathcal{P}(\phi|\mathcal{A}) \sqsubseteq \mathcal{N}$。根据 引理 2.2 至 2.4，所有支撑 $\mathcal{A}$的自由因子系统的交 $\mathcal{F}(\mathcal{N})$是 $\mathcal{A}$的 ϕ-不变自由因子系统，且 $\mathcal{N}$。若 $\mathcal{F}(\mathcal{N}) \neq \mathcal{A}$，则结论由引理 4.1得出。否则， $\mathcal{F}(\mathcal{N}) = \mathcal{A}$，即 $\mathcal{A}$相对于 $\mathcal{N}$单端。

令 $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}$ 为 $(\mathcal{A},\mathcal{N})$ 的 JSJ 森林（定理 2.20）。根据定理 2.20(1)，存在$[A] \in \mathcal{A}$，使得树 $T^A_{\mathcal{N}}$ 包含一个非初等顶点 v。根据定理 2.20(3) 和引理 4.2，该顶点 v 是柔性的。对于某个 $m \geqslant 1$，外自同构 $(\phi^k|A)^m$ 保持 v 的轨道 $[v]$，并且我们有一个定义良好的自然同态 $\langle(\phi^k|A)^m\rangle \to \mathrm{Out}($ $\mathrm{Stab}(v))$，它由限制给出。用 Σ_v 表示与 v 相关联的紧曲面。根据定理 2.20(3c)，迭代映射 $(\phi^k|A)^m$ 限制为 Σ_v 的映射类 f_v。

我们断言 f_v 是伪Anosov。事实上，根据柔性顶点的定义，对于每个$[H] \in \mathcal{N}$，交集 $H \cap \pi_1(\Sigma_v)$ 是 $\pi_1(\partial\Sigma_v)$-周边的。由于 $\mathcal{P}(\phi|\mathcal{A}) \sqsubseteq \mathcal{N}$，这意味着 f_v 中任何 $\pi_1(\Sigma_v)$ -周期共轭类都是 $\pi_1(\partial\Sigma_v)$-周边的。因此，根据 Nielsen–Thurston分类，映射类 f_v 是伪Anosov [Thu88，定理 4]。

令 Λ_v 为与 f_v 相关联的 Σ_v 的吸引奇异叶状结构。于是 Λ_v 确定了 $\phi|\mathcal{A}$ 的一个吸引层状结构，也记作 Λ_v。一方面，如果 $g \in \mathbb{F}$ 是 $\mathcal{A}$-周边的，并且弱吸引至轨道 $[\Lambda_v] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$，那么经过共轭和 ϕ 次迭代后， $g \in A$。此外，如果这样的元素 g 是 $T^A_{\mathcal{N}}$ 的椭圆等距变换，那么再经过一次共轭后， g 固定 v，且不是 $\pi_1(\partial\Sigma_v)$-周边的。另一方面，每个 $\mathcal{N}|A$-周边元素在 $T^A_{\mathcal{N}}$ 中都是椭圆型的，并且对于每个 $[H] \in \mathcal{N}$， $H \cap \pi_1(\Sigma)$ 都是 $\pi_1(\partial\Sigma_v)$-周边的。因此，没有 $\mathcal{N}$-周边元素会弱吸引至 $[\Lambda_v]$，即 $\mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{N}[\Lambda_v|\mathcal{A}]$。 □

5 层状结构深度的群不变性

固定一个外自同构 $\phi \in \mathrm{Out}(\mathbb{F})$ 及其映射环面 $\mathbb{G} \coloneqq M(\phi) = \mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$。如果一个与 ϕ 相关联的对象／性质具有一种刻画，而该刻画只涉及关于 $\mathbb{G}$ 的代数陈述，那么我们称它在 $\mathbb{G}$ 中是典范 的。特别是，这些代数陈述不涉及表示 $M(\phi)$。

在本节余下部分， $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个具有有限型的 ϕ-不变自共轭子群系统， $\mathcal{G} \coloneqq M(\phi|\mathcal{A})$ 是相应的映射环面。与前面一样，我们称一个对象/性质

与 $\phi|\mathcal{A}$ 相关联的对象/性质若在 $\mathcal{G}$ 中具有典范性，则称其在 $\mathcal{G}$ 中是典范的，当且仅当它的刻画只涉及关于 $\mathcal{G}$ 和 $\mathbb{G}$的代数陈述。注意，典范性具有传递性：若某个对象在 $\mathcal{G}$ 中是典范的，且 $\mathcal{G}$在 $\mathbb{G}$中是典范的，则该对象在 $\mathbb{G}$中是典范的。

5.1 增长类型是典范的

关于 ϕ 在 $\mathbb{G}$中一个典范性质的首个例子，我们指出，ϕ 保留 $\mathbb{F}$ 的自由分裂，当且仅当 $\mathbb{G}$ 有一个循环分裂 [Mut24c，引理 31]。

更一般地，ϕ 的增长类型在 $\mathbb{G}$中是典范的，其代数刻画涉及归纳地选择循环分裂。令 $\mathcal{H}_0 = \{[\mathbb{G}]\}$，对于 $i \geqslant 0$，假设 $\mathcal{H}_i$ 是 $\mathbb{G}$的有限型自由群扩张循环群子群系。选取 $\mathcal{H}_i$ 的一个循环分裂 $\mathcal{S}_i$（如果存在）。根据 Bass–Serre理论，$\mathcal{S}_i$ 的非循环顶点稳定子群的共轭类构成一个真自由群扩张循环群子群系 $\mathcal{H}_{i+1} \subsetneq \mathcal{H}_i$。如此归纳地得到一个滤过$\mathcal{H}_0 \supsetneq \mathcal{H}_1 \supsetneq \cdots$；当 $\mathcal{S}_i$的每个顶点稳定子群都是循环的，或 $\mathcal{H}_i$没有循环分裂时，我们就停止。若在某些（等价地，任意）循环分裂选择下，该过程在每个顶点稳定子群都为循环群时停止，我们就称 $\mathbb{G}$ 为多项式的。ϕ的增长类型在 $\mathbb{G}$中是典范的：$\mathbb{G}$是多项式的，当且仅当 ϕ是多项式增长的 [Mut24c，定理 3.2]。

最后，映射环面 $\mathcal{P}(M(\phi))$（定义见 §2.7）在 $\mathbb{G}$ 中是典范的，因为它是 $\mathbb{G}$ [Mut24c命题 36]中具有极大多项式增长的自由循环扩张子群的唯一子群系统。现在我们可以将其记为 $\mathcal{P}(\mathbb{G})$。令 $\mathcal{P}(\mathcal{G}) \coloneqq \mathcal{G} \wedge \mathcal{P}(\mathbb{G})$。由于它是 $\mathcal{G}$ 与 $\mathbb{G}$中的一个典范子群系统的交，$\mathcal{P}(\mathcal{G})$ 在 $\mathcal{G}$中是典范的。

5.2 极大真自正合映射环面是典范的

对于任意 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$，回忆一下，$\mathcal{N}[\Lambda|\mathcal{A}] \sqsubseteq \mathcal{A}$ 是一个 ϕ-不变的有限型真自正交子群系统；此外，它支撑 $\mathcal{P}(\phi|\mathcal{A})$，并且根据 $\phi|\mathcal{A}$-推论 3.3没有孪生子。映射环面 $M(\phi|\mathcal{N}[\Lambda|\mathcal{A}])$，现简记为 $\mathcal{M}[\Lambda|\mathcal{A}]$，是 $\mathcal{G}$ 中一个支撑 $\mathcal{P}(\mathcal{G})$的真自正交子群系统，这由引理 2.10至2.12得出。

本节中，假设 $\mathcal{G}$ 没有循环分裂，并令 $\mathcal{L}^{\max}_{\phi|\mathcal{A}} \coloneqq \left\{\text{为极大 } [\Lambda] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}\right\}$。现在我们给出与 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^{\max}_{\phi|\mathcal{A}}$相关联的映射环面$\mathcal{M}[\Lambda|\mathcal{A}]$ 的集族 $\mathcal{M}^{\max}_{\mathcal{G}}$ 的代数刻画。这是支撑本文其余部分的关键观察：

定理 5.1。设 $\phi \in$外自同构群$(\mathbb{F})$，且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个 ϕ-不变、自正交的有限型子群系统。若 $\mathcal{G} \coloneqq M(\phi|\mathcal{A})$ 没有循环分裂，则该集族

$$\mathcal{M}^{\max}_{\mathcal{G}} \coloneqq \left\{\mathcal{M}[\Lambda|\mathcal{A}] \,:\, [\Lambda] \in \mathcal{L}^{\max}_{\phi|\mathcal{A}}\right\}$$

是 $\mathcal{G}$ 中支撑 $\mathcal{P}(\mathcal{G})$的极大真 *malnormal* 自由循环子群系统的集合。此外，由 $[\Lambda] \mapsto \mathcal{M}[\Lambda|\mathcal{A}]$ 给出的自然函数 $\mathcal{L}^{\max}_{\phi|\mathcal{A}} \to \mathcal{M}^{\max}_{\mathcal{G}}$是一个双射。

因此，集族 $\mathcal{M}^{\max}_{\mathcal{G}}$在 $\mathcal{G}$中是典范的，我们也可以说 $\mathcal{L}^{\max}_{\phi|\mathcal{A}}$ 在 $\mathcal{G}$中是典范的。

证明。设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{G}$ 中支撑 $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ 的一个真自正交自由群扩张循环群子群系。由于 $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ 是有限型的，$\mathcal{H}$ 的某个有限子系统支撑它。对于支撑 $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ 的任意有限子系统 $\mathcal{H}' \sqsubseteq \mathcal{H}$，引理 2.15 表明，对于某个具有有限型的 ϕ-不变真自正交子群系统 $\mathcal{N}' \subsetneq \mathcal{A}$，有 $\mathcal{H}' = M(\phi|\mathcal{N}')$。根据引理 2.10，子群系统 $\mathcal{N}'$ 支撑 $\mathcal{P}(\phi|\mathcal{A})$，因为 $\mathcal{P}(\mathcal{G}) \sqsubseteq \mathcal{H}'$。由命题 4.3，对于某个 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$，有 $\mathcal{N}' \sqsubseteq \mathcal{N}[\Lambda|\mathcal{A}]$；因此，$\mathcal{H}' \sqsubseteq \mathcal{M}[\Lambda|\mathcal{A}]$。由于 $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ 是任意的，我们得到 $\mathcal{H} \sqsubseteq \mathcal{M}[\Lambda|\mathcal{A}]$。根据引理 2.10 和 3.5，不妨设 $[\Lambda]$ 属于 $\mathcal{L}^{\max}_{\phi|\mathcal{A}}$。

因此，支撑 $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ 的 $\mathcal{G}$ 的极大真自正规自由循环子群系统集族是 $\mathcal{M}^{\max}_{\mathcal{G}}$ 的子集。这个子集并非真子集。事实上，对于 $[\Lambda'] \in \mathcal{L}^{\max}_{\phi|\mathcal{A}}$，我们证明 $\mathcal{M}[\Lambda'|\mathcal{A}]$ 是支撑 $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ 的 $\mathcal{G}$ 的极大真自正规自由循环子群系统。

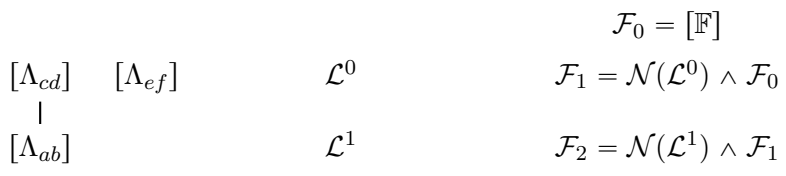

图 3：滤过：例 5.3

设 $\mathcal{M}[\Lambda'|\mathcal{A}] \sqsubseteq \mathcal{H}$ 是某个真自正规自由循环子群系统 $\mathcal{H}$，它属于 $\mathcal{G}$，并支撑 $\mathcal{P}(\mathcal{G})$。根据上一段，$\mathcal{M}[\Lambda'|\mathcal{A}] \sqsubseteq \mathcal{H} \sqsubseteq \mathcal{M}[\Lambda|\mathcal{A}]$ 对于某个 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^{\max}_{\phi|\mathcal{A}}$。于是$[\Lambda'] = [\Lambda]$ 因为 $\{\mathcal{M}[\Lambda|\mathcal{A}] : [\Lambda] \in \mathcal{L}^{+}_{\phi|\mathcal{A}}\}$ 自然地序同构于 $\mathcal{L}^{+}_{\phi|\mathcal{A}}$，依据 引理 2.10和 3.5。因此 $\mathcal{M}[\Lambda'|\mathcal{A}] = \mathcal{H}$ 如所需。

定理的最后一个结论由前述序同构得出。 □

T这导出了对 $M(\phi|\mathcal{N}(\mathcal{L}^{\max}_{\phi|\mathcal{A}}|\mathcal{A}))$ 的代数刻画，简称 $\mathcal{M}(\mathcal{L}^{\max}_{\phi|\mathcal{A}}|\quad\quad\quad

注意到 $\mathcal{F}_1$ 没有 $\phi|\mathcal{F}_1$-不变的真自由因子系统承载 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{F}_1} = \{[\Lambda_{ab}]\}$。事实上，循环自由因子不能支撑吸引层状结构。因此 $\mathcal{G}_1$ 没有循环分裂。由于 $\mathcal{L}^{\max}_{\phi|\mathcal{F}_1} = \mathcal{L}^1$，子群系统 $\mathcal{G}_2 \coloneqq \mathcal{M}(\phi|\mathcal{F}_2)$ 在 $\mathcal{G}_1$ 中由推论 5.2 再次可知其为典范的。我们将滤过停止于多项式子群系 $\mathcal{G}_2$。于是，我们得到一个典范滤过

$$[\mathbb{G}] = \mathcal{G}_0 \supsetneq \mathcal{G}_1 \supsetneq \mathcal{G}_2$$

其长度为 $2 = \delta(\phi)$。换言之，$\delta(\phi)$ 是将推论 5.2 应用于 $\mathbb{G}$以将其化为多项式增长的自由循环扩张子群系所需的典范应用次数。■

5.3 层状结构深度是典范的

在定理 5.1中，我们假设 $\mathcal{G}$ 没有循环分裂。本节首先证明，我们可以典范地将其约化到这种情形。接着，我们用自由循环扩张子群系统为 $\mathbb{G}$ 构造典范滤过，其长度为层状结构深度 $\delta(\phi)$。

令 $\mathcal{B}$ 为所有承载 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$ 的 $\mathcal{A}$ 的自由因子系统的交；根据引理 2.2 至 2.4，它就是用这些引理定义的 $\mathcal{A}$ 的自由因子系统。于是，$\mathcal{B}$ 是承载 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$ 的 $\mathcal{A}$ 的最小自由因子系统；由唯一性可知，它在 ϕ 下不变。由于 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 的有限型自共轭子群系统，且 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的自由因子系统，因此 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{F}$ 的有限型自共轭子群系统。注意，当且仅当 $\phi|\mathcal{A}$ 多项式增长时，$M(\phi|\mathcal{B})$ 为空。下一命题给出了 $\mathcal{G}$ 中映射环面 $M(\phi|\mathcal{B})$ 的代数刻画。

命题 5.4. 设 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$，$\mathcal{A}$ 是 ϕ-不变的有限型自共轭子群系统，且 $\mathcal{G} \coloneqq M(\phi|\mathcal{A})$。若 $\mathcal{B}$ 是承载 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$ 的 $\mathcal{A}$ 的 ϕ- 不变最小自由因子系统，则 $M(\phi|\mathcal{B})$ 没有循环分裂。此外，对于任意 $[G] \in \mathcal{G}$ 以及任何没有循环分裂的子群 $H \leqslant G$，都存在某个 $[G'] \in M(\phi|\mathcal{B})$ 使得 $H \leqslant G'$。

特别地，$M(\phi|\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{G}$ 中没有循环分裂的最大自由群扩张循环群子群系
循环分裂因此，$M(\phi|\mathcal{B})$ 在 $\mathcal{G}$ 中是典范的。

证明。对于任意 $[A] \in \mathcal{A}$，我们将首次返回外自同构类 $\phi^k|A \in \phi|\mathcal{A}$ 记作 $\psi \in$ 外自同构群(A)（回顾 定义 2.9）。令 $f\colon \Gamma_A \to \Gamma_A$ 为 ψ 的相对列车轨道映射f，其配备有一个f-不变子图 $\Gamma_{\mathcal{B}|A}$，该子图诱导出 $\mathcal{B}|A$ 的自由因子系 A（参见 附录 A）。由于$\mathcal{B}|A$ 是承载 $\mathcal{L}^+_\psi$ 的 A 的最小自由因子系统，因此 f 的每个 EG层都属于 $\Gamma_{\mathcal{B}|A}$。

假设 $M(\phi|\mathcal{B})$ 有一个循环分裂。这等价于以下情况：$M(\psi|(\mathcal{B}|A))$ 对于某个 $[A] \in \mathcal{A}$，有一个循环分裂。由此得到 ψ-不变的 $\mathcal{B}|A$自由分裂。因此存在一个真自由因子系 $\mathcal{N} \sqsubsetneq \mathcal{B}|A$，它承载 $\mathcal{L}^+_\psi$（例如，参见 [HM19，引理 4。4]）。我们将 $\mathcal{N}$ 扩展为 $\mathcal{N}' \sqsubsetneq \mathcal{B}$ 的一个自由因子系 $\mathcal{A}$，它承载 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$。这与 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{A}$中的极小性矛盾。因此，$M(\phi|\mathcal{B})$ 没有循环分裂。

对于任意 $[A] \in \mathcal{A}$ 及其对应的 $G = M(\psi)$，设 $H \leqslant G$ 是一个没有循环分裂的子群。Γ_A 与 $\Gamma_{\mathcal{B}|A}$ 之间的各层确定了一个循环分裂层级，其顶点群系统构成 G 的一个滤过，并以 $M(\psi|(\mathcal{B}|A))$结束，而 $M(\psi|(\mathcal{B}|A))$是 $M(\phi|\mathcal{B})$的子集。由于H 没有循环分裂，单元素集 $\{[H]\}$ 受到该层级中每个循环分裂的顶点群系统的支撑；因此，对于某个 $[G'] \in M(\phi|\mathcal{B})$，有 $H \leqslant G'$。□

备注。在 例 5.3中，每个 $\mathcal{F}_i$ 都是承载 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{F}_i}$的最小自由因子系统。这一般而言并不成立。因此，在接下来的定义中，我们将转而考虑 $\mathcal{F}'_i$ 的 $\mathcal{F}_i$ 最小自由因子系统，它承载其层状。这样一来，我们便可以得出结论：$\mathcal{G}'_i$ 没有循环分裂，并且 $\mathcal{G}_{i+1}$ 在 $\mathcal{G}'_i$中是典范的。

现在，我们描述 $\mathbb{F}$中的两个滤过。设 $\delta \coloneqq \delta(\phi)$，

$$\mathcal{L}^i \coloneqq \left\{\text{maximal } [\Lambda] \in \mathcal{L}^+_\phi \setminus \cup_{j=0}^{i-1} \mathcal{L}^j\right\}$$

对于 $0 \leqslant i < \delta$、 $\mathcal{F}_0 \coloneqq \{[\mathbb{F}]\}$和 $\phi_0 \coloneqq \phi$。因此 $\mathcal{L}_\phi^+ = \bigcup_{i=0}^{\delta-1} \mathcal{L}^i$。对某个 $i \geqslant 0$，假设 $\mathcal{F}_i$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个ϕ-不变的、具有有限型且 $\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{F}_i}^+ = \mathcal{L}_\phi^+ \setminus \cup_{j=0}^{i-1} \mathcal{L}^j$的自正规化子群系统。设 $\mathcal{F}_i'$为 $\mathcal{F}_i$ 的承载 $\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{F}_i}^+$的最小自由因子系统；因此， $\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{F}_i'}^{\max} = \mathcal{L}^i$。

若 $i < \delta$，则令 $\mathcal{F}_{i+1} \coloneqq \mathcal{N}(\mathcal{L}^i|\mathcal{F}_i')$。因此，根据 $\mathcal{F}_{i+1} \subsetneq \mathcal{F}_i'$ 是一个 ϕ-不变的、有限型真自正规化子群系统推论 3.3。注意，根据 $\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{F}_{i+1}}^+ = \mathcal{L}_\phi^+ \setminus \cup_{j=0}^{i} \mathcal{L}^j$ 引理 3.4，我们有 ϕ-不变滤过 $(\mathcal{F}_i)_{i=0}^{\delta}$, $(\mathcal{F}_i')_{i=0}^{\delta}$ 位于 $\mathbb{F}$ 中，且满足$\mathcal{F}_0 = \{[\mathbb{F}]\}$， $\mathcal{F}_\delta' = \varnothing$，并且 $\mathcal{F}_i \supseteq \mathcal{F}_i' \supsetneq \mathcal{F}_{i+1}$ 对 $0 \leqslant i < \delta$成立。

定义 5.5。 在 $\mathbb{G}$ 中，为 $0 \leqslant i \leqslant \delta$ 定义映射环面 $\mathcal{G}_i \coloneqq M(\phi|\mathcal{F}_i)$ 和 $\mathcal{G}_i' \coloneqq M(\phi|\mathcal{F}_i')$。

根据 命题 5.4， $\mathcal{G}_i' = M(\phi|\mathcal{F}_i')$ 在 $\mathcal{G}_i$ 中对于 $0 \leqslant i \leqslant \delta$是典范的。特别地，每个 $\mathcal{G}_i'$ 都没有循环分裂。根据 推论 5.2， $\mathcal{G}_{i+1} = \mathcal{M}(\mathcal{L}_{\phi|\mathcal{F}_i'}^{\max}|\mathcal{F}_i')$ 在 $\mathcal{G}_i'$ 中对于 $0 \leqslant i < \delta$是典范的。因此，我们定义了两个典范滤过 $(\mathcal{G}_i)_{i=0}^{\delta}$， $(\mathcal{G}_i')_{i=0}^{\delta}$ 位于 $\mathbb{G}$ 中，满足

$$\{[\mathbb{G}]\} = \mathcal{G}_0 \supseteq \mathcal{G}_0' \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{G}_\delta \supseteq \mathcal{G}_\delta' = \varnothing.$$

其长度 $\delta = \delta(\phi)$ 在 $\mathbb{G}$中是典范的：它是将命题 5.4和推论 5.2典范应用于 $\mathbb{G}$以将其化简为 $\varnothing$所需的次数。

定理 5.6。对于 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$，深度 $\delta(\phi)$ 是 $\mathbb{G} \coloneqq \mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$的群不变量。 □

这使我们能够将 $\mathbb{G}$ 的深度定义为 $\delta(\mathbb{G}) \coloneqq \delta(\phi)$。

推论 5.7。深度 $\delta(\mathbb{G})$ 是自由循环群 $\mathbb{G}$的可公度不变量。

证明。假设 $\mathbb{G} = M(\phi)$ 对于某个 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$。任意有限指数子群 $H \leqslant \mathbb{G}$ 都是子群 $M(\Psi) = \langle A, \ xt^k \rangle$其中 $x \in \mathbb{F}$， $k \geqslant 1$， $\Psi \in \phi^k$，且 $A \coloneqq H \cap \mathbb{F}$ 是 Ψ-不变有限指数子群 $\mathbb{F}$。令 $\psi \in$ 外自同构群(A) 为包含 Ψ 到 A的限制的外自同构。由命题 2.17（以及定理 5.6），可得

$$\delta(H) = \delta(\psi) = \delta(\phi^k) = \delta(\phi) = \delta(\mathbb{G}).$$ □

展开定理 5.6 的证明可知，对于 $0 \leqslant i < \delta$，存在一个自然双射（利用定理 5.1），它将 $\mathcal{L}^i$ 映到 $\mathcal{G}_i'$ 的自正规化自由循环扩张子群系的典范集合 $\mathcal{M}_{\mathcal{G}_i'}^{\max}$，且其交为 $\mathcal{G}_{i+1}$。这些双射定义了一个从 $\mathcal{L}_\phi^+$ 到 $\mathbb{G}$ 的自由循环子群系统的典范集合 $\mathcal{C}(\mathbb{G}) \coloneqq \bigcup_i \mathcal{M}_{\mathcal{G}_i'}^{\max}$ 的自然保序双射。因此，集合 $\mathcal{L}_\phi^+$ 与层 $\mathcal{L}^i$ 在 $\mathbb{G}$ 中是典范的。特别地，当 $\delta(\mathbb{G}) \leqslant 1$时，偏序集 $\mathcal{L}_\phi^+$ 在 $\mathbb{G}$ 中是典范的。遗憾的是，该双射不必是序同构： $\mathcal{C}(\mathbb{G})$ 上的偏序在 $\mathcal{L}_\phi^+$ 上诱导出一个偏序，使得对所有 $[\Lambda_1] \in \mathcal{L}^i$、 $[\Lambda_2] \in \mathcal{L}^j$ 和 $j < i$ 都迫使 $[\Lambda_1] \preccurlyeq [\Lambda_2]$。在最后一节中，我们将构造一个从 $\mathcal{L}_\phi^+$ 到 $\mathbb{G}$ 的自由循环子群系统的另一个典范集合 $\mathcal{H}(\mathbb{G})$ 的自然序同构。

6 层状结构偏序集的群不变性

固定 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$，并令 $\mathbb{G} \coloneqq M(\phi) = \mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$。我们的最终目标是证明，吸引层叠轨道的偏序集 $\mathcal{L}_\phi^+$ 在 $\mathbb{G}$ 中是典范的；为此，我们将构造一个自由循环子群系统的典范集族 $\mathcal{H}(\mathbb{G})$，它与 $\mathcal{L}_\phi^+$ 自然序同构。

在§3.2中，我们定义了 $\mathcal{S}[\Lambda]$ 的 $[\Lambda] \in \mathcal{L}_\phi^+$ 支撑子群系统。现在我们给出 $\mathcal{S}[\Lambda]$的归纳构造，进而将用它来构造典范集合$\mathcal{H}(\mathbb{G})$。回顾§3.2 中对支撑 $\Lambda^\downarrow$ 和外部 $\Lambda^\perp$的定义。

令 $\delta \coloneqq \delta(\phi)$ 和 $\mathcal{L}^i \coloneqq \left\{\text{为 } 0 \leqslant i \leqslant \delta\text{的极大 } [\Lambda] \in \mathcal{L}_\phi^+ \setminus \cup_{j=0}^{i-1} \mathcal{L}^j\right\}$。固定 $[\Lambda] \in \mathcal{L}_\phi^+$，并令 $\mathcal{S}_{-1}[\Lambda] \coloneqq \{[\mathbb{F}]\}$。对于 $0 \leqslant j \leqslant \delta$，令 $\mathcal{F}'_j[\Lambda]$ 为$\mathcal{S}_{j-1}[\Lambda]$ 的 ϕ-不变最小自由因子系统，且该系统承载 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{S}_{j-1}[\Lambda]}$，并定义

$$\mathcal{S}_j[\Lambda] \coloneqq \mathcal{N}(\Lambda^\perp \cap \mathcal{L}^j) \curlywedge \mathcal{F}'_j[\Lambda].$$

注意，$\mathcal{L}^\delta = \varnothing$ 且 $\mathcal{N}(\varnothing) = \{[\mathbb{F}]\}$。由推论 3.3，$\mathcal{S}_j[\Lambda] \sqsubseteq \mathcal{F}'_j[\Lambda]$ 是一个 ϕ-不变的有限型自共轭子群系统，且没有 $\phi|\mathcal{F}'_j[\Lambda]$-孪生；此外，剩余的层叠轨道是 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{S}_j[\Lambda]} = \mathcal{L}^+_\phi \setminus \cup_{k=0}^{j} (\Lambda^\perp \cap \mathcal{L}^k)$，根据引理 3.4。特别地，

$$\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{S}_{\delta-1}[\Lambda]} = \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{S}_\delta[\Lambda]} = \Lambda^\downarrow.$$

引理 6.1。对于 $[\Lambda] \in \mathcal{L}_\phi^+$，支撑子群系统 $\mathcal{S}[\Lambda] = \mathcal{S}_{\delta(\phi)}[\Lambda]$。

证明。回顾一下，$\mathcal{S}[\Lambda]$ 是承载 $\Lambda^\downarrow = \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{N}(\Lambda^\perp)}$的 $\mathcal{N}(\Lambda^\perp)$ 的最小自由因子系统。令 $\delta \coloneqq \delta(\phi)$。首先，根据引理 2.3，$\mathcal{S}_0[\Lambda]$ 是 $\mathcal{N}(\Lambda^\perp \cap \mathcal{L}^0)$ 的一个自由因子系统。如果 $\mathcal{S}_{j-1}[\Lambda]$是$\mathcal{N}(\Lambda^\perp \cap \bigcup_{k=0}^{j-1} \mathcal{L}^k)$的一个自由因子系统，那么根据引理 2.2 和引理 2.3，$\mathcal{S}_j[\Lambda] \coloneqq \mathcal{N}(\Lambda^\perp \cap \mathcal{L}^j) \curlywedge \mathcal{F}'_j[\Lambda]$ 是 $\mathcal{N}(\Lambda^\perp \cap \bigcup_{k=0}^{j} \mathcal{L}^k)$ 的一个自由因子系统。由归纳法，$\mathcal{S}_\delta[\Lambda] \sqsubseteq \mathcal{S}_{\delta-1}[\Lambda]$ 都是 $\mathcal{N}(\Lambda^\perp)$的自由因子系统。由于 $\mathcal{S}_\delta[\Lambda]$ 承载 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{S}_\delta[\Lambda]} = \Lambda^\downarrow$，由 $\mathcal{S}[\Lambda]$的极小性可得 $\mathcal{S}[\Lambda] \sqsubseteq \mathcal{S}_\delta[\Lambda]$，且 $\mathcal{S}[\Lambda]$ 是 $\mathcal{S}_{\delta-1}[\Lambda]$的一个自由因子系统。然而，$\mathcal{S}_\delta[\Lambda] = \mathcal{F}'_\delta[\Lambda]$ 是承载 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{S}_{\delta-1}[\Lambda]} = \Lambda^\downarrow$的 $\mathcal{S}_{\delta-1}[\Lambda]$ 的最小自由因子系统。因此，$\mathcal{S}_\delta[\Lambda] \sqsubseteq \mathcal{S}[\Lambda]$，这两个子群系统相等。

□

例 6.2。考虑层叠偏序集 $\mathcal{L}_\phi^+$，如 图 4所示，其中 $[\Lambda_i] = \Lambda_i$ 对所有 i均成立。我们来看子群系统 $\mathcal{S}_j[\Lambda_6]$。为简便起见，我们只写作 $\mathcal{S}_j$。为简单起见，我们还假设 $\mathcal{F}'_j[\Lambda_6] = \mathcal{S}_{j-1}[\Lambda_6]$。在以下计算中，第一个等式是通过识别 $\Lambda_6^\perp \cap \mathcal{L}^j$得到的，第二个等式则是通过识别 $\mathcal{L}^{\max}_{\phi|S_{j-1}}$（图中以红圈标出图 4）。

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0 &= \mathcal{N}(\{\Lambda_1, \Lambda_2\}) \curlywedge \mathcal{S}_{-1} = \mathcal{N}(\mathcal{L}^0) \curlywedge [\mathbb{F}] = \mathcal{F}_1 \\
\mathcal{S}_1 &= \mathcal{N}(\{\Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5\}) \curlywedge \mathcal{S}_0 = \mathcal{N}(\mathcal{L}^1) \curlywedge \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \\
\mathcal{S}_2 &= \mathcal{N}(\{\Lambda_7, \Lambda_8\}) \curlywedge \mathcal{S}_1 = \mathcal{N}(\mathcal{L}^{\max}_{\phi|S_1} \setminus \Lambda_6) \curlywedge \mathcal{F}_2 \\
\mathcal{S}_3 &= \mathcal{N}(\{\Lambda_{11}\}) \curlywedge \mathcal{S}_2 = \mathcal{N}(\mathcal{L}^{\max}_{\phi|S_2} \setminus \Lambda_6) \curlywedge \mathcal{S}_2 \\
\mathcal{S}_4 &= \mathcal{N}(\{\Lambda_{13}, \Lambda_{14}\}) \curlywedge \mathcal{S}_3 = \mathcal{N}(\mathcal{L}^{\max}_{\phi|S_3} \setminus \Lambda_6) \curlywedge \mathcal{S}_3 \\
\mathcal{S}_5 &= \mathcal{N}(\varnothing) \curlywedge \mathcal{S}_4 = \mathcal{N}(\mathcal{L}^{\max}_{\phi|S_4} \setminus \Lambda_6) \curlywedge \mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_4 \\
\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{S}_4} &= \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{S}_5} = \Lambda_6^\downarrow
\end{aligned}$$

注意，对于 $0 \leqslant j < 2$，$[\Lambda_6] \in \mathcal{L}^2$ 和 $S_j[\Lambda_6] = \mathcal{F}_{j+1}$。 ■

现在考虑 $\mathbb{G}$ 中对应的映射环面。对于 $[\Lambda] \in \mathcal{L}_\phi^+$，令 $\mathcal{H}[\Lambda] \coloneqq M(\phi|\mathcal{S}[\Lambda])$。定义集族

$$\mathcal{H}(\phi) \coloneqq \left\{\mathcal{H}[\Lambda] \,:\, [\Lambda] \in \mathcal{L}_\phi^+\right\}.$$

根据 引理 2.10 和 3.6，$\mathcal{H}(\phi)$ 自然地与 $\mathcal{S}(\phi)$ 序同构，且 $\mathcal{L}_\phi^+$。

定理 6.3。设 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$ 和 $\mathbb{G} = \mathbb{F} \rtimes_\phi \mathbb{Z}$。集族 $\mathcal{H}(\phi)$ 在 $\mathbb{G}$中是典范的。特别地，偏序集 $\mathcal{L}_\phi^+$ 是 $\mathbb{G}$的群不变量。

作为一个典范集合，我们最终可以定义 $\mathcal{H}(\mathbb{G}) \coloneqq \mathcal{H}(\phi)$。

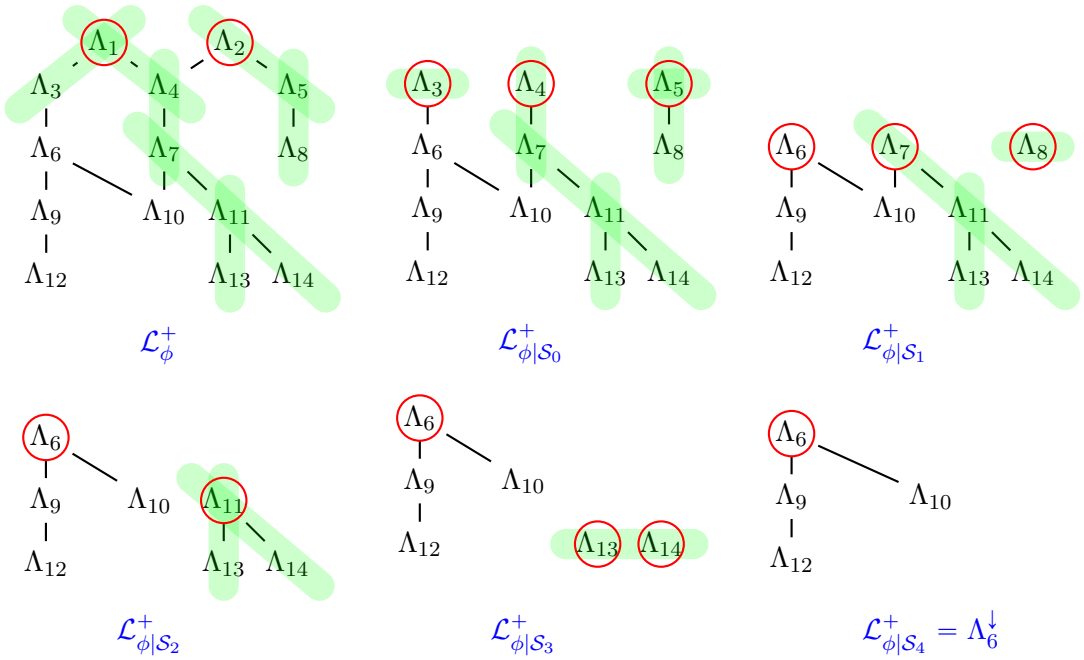

图 4：构建 $\mathcal{S}[\Lambda_6] = \mathcal{S}_5[\Lambda_6]$ 的示意图。对于每个 j，高亮集合表示 $\Lambda_6^{\downarrow} \cap \mathcal{L}^+_{\phi|S_j}$，圈出的层状结构表示 $\mathcal{L}^{\max}_{\phi|S_j}$ 的元素。

证明。 根据前面的讨论，偏序集 $\mathcal{L}^+_\phi$ 是 $\mathbb{G}$ 的群不变量，只要我们知道 $\mathcal{H}(\phi)$ 在 $\mathbb{G}$中是典范的。令 $\delta \coloneqq \delta(\phi)$。回顾 $\mathcal{G}_i \coloneqq M(\phi|\mathcal{F}_i)$和 $\mathcal{G}'_i \coloneqq M(\phi|\mathcal{F}'_i)$ 在 $\mathbb{G}$ 中的典范映射环面 $0 \leqslant i \leqslant \delta$（定义 5.5）。只需证明，对于$0 \leqslant i < \delta$，层

$$\mathcal{H}(\phi)^i \coloneqq \{\mathcal{H}[\Lambda] : [\Lambda] \in \mathcal{L}^i\}$$

在 $\mathcal{G}'_i$ 中是典范的。

固定 $0 \leqslant i < \delta$。对于 $0 \leqslant j \leqslant \delta$，定义映射环面

$$\mathcal{H}(\phi)^i_j \coloneqq \{M(\phi|\mathcal{S}_j[\Lambda]) : [\Lambda] \in \mathcal{L}^i\}.$$

根据构造，对于任意 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^i$ 和 $0 \leqslant j \leqslant i$， $\mathcal{S}_{j-1}[\Lambda] = \mathcal{F}_j$ 和 $\mathcal{F}'_j[\Lambda] = \mathcal{F}'_j$。因此，集族 $\{\mathcal{S}_i[\Lambda] : [\Lambda] \in \mathcal{L}^i\}$ 由 $\mathcal{F}'_i$ 中的系统组成，这些系统是 $\{\mathcal{N}[\Lambda|\mathcal{F}'_i] : [\Lambda] \in \mathcal{L}^i\}$ 中除一个之外所有系统的交（见例 6.2）。由于 $\mathcal{L}^i = \mathcal{L}^{\max}_{\phi|\mathcal{F}'_i}$，集族 $\mathcal{H}(\phi)^i_i$ 由 $\mathcal{G}'_i$ 中的系统组成，这些系统是 $\left\{\mathcal{M}[\Lambda|\mathcal{F}'_i] : [\Lambda] \in \mathcal{L}^{\max}_{\phi|\mathcal{F}'_i}\right\}$ 中除一个之外所有系统的交。根据定理 5.1，后一个集族在 $\mathcal{G}'_i$ 中是典范的，因此， $\mathcal{H}(\phi)^i_i$ 在 $\mathcal{G}'_i$ 中是典范的。对于 $j > i$，只需用代数方式根据 $\mathcal{H}(\phi)^i_{j-1}$ 刻画 $\mathcal{H}(\phi)^i_j$。事实上，由于 $\mathcal{H}(\phi)^i_i$ 在 $\mathcal{G}'_i$ 中是典范的，且典范性具有传递性，因此该代数刻画可归纳地推出 $\mathcal{H}(\phi)^i = \mathcal{H}(\phi)^i_\delta$ 在 $\mathcal{G}'_i$ 中是典范的。

对于 $j > i$ 和 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^i$，系统 $\mathcal{S}_j[\Lambda]$ 还可如下刻画：设 $\mathcal{F}'_j[\Lambda]$为承载 $\mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{S}_{j-1}[\Lambda]}$的 $\mathcal{S}_{j-1}[\Lambda]$ 的 ϕ-不变最小自由因子系统；那么 $\mathcal{S}_j[\Lambda]$ 是 $\mathcal{F}'_j[\Lambda]$ 中唯一一个不受 $\mathcal{F}_{i+1}$ 支撑、但又是 $\mathcal{L}^{\max}_{\phi|\mathcal{F}'_j[\Lambda]}$ 的所有非吸引子群系统中除一个以外其余系统之交的子群系统（见例 6.2）。类似地，我们用 $\mathcal{H}(\phi)^i_{j-1}$ 来刻画$\mathcal{H}(\phi)^i_j$。对于任意 $\mathcal{H} \in \mathcal{H}(\phi)^i_{j-1}$，即某个 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^i$的 $\mathcal{H} = M(\phi|\mathcal{S}_{j-1}[\Lambda])$，令 $\mathcal{H}' \coloneqq M(\phi|\mathcal{F}'_j[\Lambda])$；根据命题 5.4， $\mathcal{H}'$ 在 $\mathcal{H}$中是典范的。最后，再由定理 5.1，

映射环面 $M(\phi|\mathcal{S}_j[\Lambda]) \in \mathcal{H}(\phi)_j^i$ 是 $\mathcal{H}'$ 中唯一一个不受 $\mathcal{G}_{i+1}$ 支撑、但又是 $\mathcal{H}'$ 中所有支撑 $\mathcal{P}(\mathcal{H}')$的极大真自正规化自由循环扩张子群系中除一个以外其余系统之交的自由循环扩张子群系统。 □

该深度谱自由循环群 $\mathbb{G}$ 为 $\delta\mathcal{S}(\mathbb{G}) \coloneqq \delta\mathcal{S}(\phi)$，其由定理 6.3良好定义。与推论 5.7一样，我们根据命题 2.17得出以下结论。

推论 6.4。深度谱 $\delta\mathcal{S}(\mathbb{G})$ 是 $\mathbb{G}$的一个可公度不变量。 □

A 吸引层状结构与相对列车轨道

本附录旨在证明命题 2.17 （见附录 A.1）和引理 2.19 （见附录 A.2）。这两个证明都需要一些关于相对列车轨道和吸引层状结构的一般背景知识，现回顾如下。

设 Γ 是一个连通有限图，其基本群与 $\mathbb{F}$ 同构。标记是一个同构 $m\colon \pi_1(\Gamma) \to \mathbb{F}$。该标记诱导出一个等变同胚，将$\widetilde{\qquad}\ \widetilde{\Gamma}$ 的万有覆盖 Γ 的格罗莫夫边界 $\partial_\infty\Gamma$ 与 $\mathbb{F}$ 的格罗莫夫边界联系起来。进而，这诱导出 $\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 与 Γ中双无限、无向、约化路径空间 $\mathfrak{B}(\Gamma) \coloneqq \pi_1(\Gamma)\backslash\partial^2\widetilde{\Gamma}$ 之间的一个同胚。我们固定此识别 $\mathfrak{B}(\mathbb{F}) \cong \mathfrak{B}(\Gamma)$。

令 $\phi \in$外自同构群$(\mathbb{F})$ 为给定的外自同构。根据 [BFH00，定义 3.1，5], 一条直线$\ell \in \mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 称为 一般的，相对于 ϕ 若满足以下条件：

- ℓ是双向递归的，也就是说， ℓ 的每个有限子路径都会在 ℓ的两个端点处无限次出现；并且
- 存在一个整数 $k \geqslant 1$ 和 ℓ 的一个邻域 $U \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{F})$ ，使得 $\phi^k(U) \subseteq U$ 和$\{\phi^{kn}(U) : n \geqslant 1\}$ 是 ℓ的一个邻域基；

所引定义还有第三个条件（ℓ 不是某个元素的轴），但在我们的假设下（于 §2.3 中） $\mathbb{F}$ 为非阿贝尔，该条件可由第二个条件推出，因而是多余的。对于 ϕ ，一个吸引层状结构是其一条一般直线在 $\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 中的闭包。 ϕ。

现在我们转向有关相对列车轨道映射的相关背景。令 $f\colon \Gamma \to \Gamma$为表示 ϕ的一个相对列车轨道映射。图 Γ 配有一个 f-不变滤过

$$\Gamma = \Gamma_0 \supsetneq \Gamma_1 \supsetneq \ldots \supsetneq \Gamma_K = \varnothing.$$

对于 $0 \leqslant r < K$，令 $H_r \coloneqq \overline{\Gamma_r \backslash \Gamma_{r+1}}$ 为 Γ的第 r层。对于与相对列车轨道映射相关联的滤过，根据与该层相关联的转移矩阵的谱半径，该层为指数增长（EG）、非指数增长（NEG）或零层。若边路径 ρ 穿过某一层 H_r ，则 ρ 包含 H_r的一条边。

若 σ 是 Γ中的一条（不一定约化的）边路径，我们用 $[\sigma]$ 表示其对应的约化边路径：它是与 σ 端点相对同伦的浸入路径。若 σ 是闭边路径，我们也用 $[\sigma]$ 表示其对应的循环约化边路径，即与 σ自由同伦的浸入闭路径。令 $f_\#$ 为将 Γ 的一条边路径 σ 映射到 $[f(\sigma)]$的映射。

Bestvina–Feighn–Handel [BFH00，引理3.1.10] 证明，对于每个吸引层叶轨道 $[\Lambda] \in \mathcal{L}_\phi^+$ ，存在唯一的 EG层 H_r ，使得 $[\Lambda]$ 中任意一般直线所穿过的最高层都是 H_r。此外，存在一条一般直线 $\ell \in \Lambda$ ，它由某条（等价地，任意一条）边的 $f_\#$次迭代穷竭得到 e ，该边属于 H_r [BFH00，引理3.1.10(4)]。

转向是 Γ 中起点为同一顶点的一对无序有向边。若构成转向的边包含于子图 Γ_r 中但不包含于 Γ_{r+1}中，则该转向的深度为 r 。若转向由不同的有向边组成，则称其为非退化；否则称为退化。若边路径 ρ 包含子路径 e_1e_2（或 e_2e_1），则称其穿过转向 $\{e_1, e_2\}$。对于 $e \in E\Gamma$，令 $Tf(e)$ 为约化（非平凡）路径 $f(e)$的第一条边。相对列车轨道 f 诱导出一个映射

Tf 将转向映射为：把 $\{e_1,\ e_2\}$ 映到 $\{Tf(e_1),\ Tf(e_2)\}$。若一个转向相对于 f 是合法的，则其 Tf 次迭代均为非退化。若路径 ρ 所穿过的所有深度为 r 的转向都是合法的，则称该路径为 r-合法。我们回顾以下由 Bestvina–Handel 提出的引理。

引理 A.1. *[BH92，引理 5。8]* 令 $f\colon \Gamma \to \Gamma$ 为一个相对列车轨道映射，且 $H_r \subseteq \Gamma$ 为一个 *EG* 层。假设 $\sigma = a_1 b_1 \cdots a_\ell b_\ell$ 是一个 r-合法路径分解成子路径$a_j \subseteq H_r$和 $b_j \subseteq \Gamma_{r+1}$（其中 a_1和 b_ℓ可能是平凡的）。那么，对每个 $i \in \{1, \dots, \ell\}$，路径 $f(a_i)$ 都是约化边路径，并且

$$f_\#(\sigma) = f(a_1) f_\#(b_1) f(a_2) f_\#(b_2) \cdots f(a_\ell) f_\#(b_\ell).$$

令 $A \leqslant \mathbb{F}$ 为一个有限指数子群，且 $p_A\colon \Gamma_A \to \Gamma$ 为与共轭类 $[A]$相关联的 Γ 的覆盖空间。假设 $\phi[A] = [A]$。那么，存在一个提升 $f_A\colon \Gamma_A \to \Gamma_A$，它是 f的提升，使得 $p_A \circ f_A = f \circ p_A$，也就是说，以下图表交换。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_A & \xrightarrow{f_A} & \Gamma_A \\ {\scriptstyle p_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_A} \\ \Gamma & \xrightarrow[f]{} & \Gamma \end{array}$$

现在我们来说明，如何由 f上的相对列车轨道结构诱导出 f_A 上的相对列车轨道结构。

引理 A.2 (参见 [CH17，引理 4。5])。 不妨将 ϕ取幂，使得以下条件成立：

- 的每个 *EG* 层 f 都有一个本原转移矩阵；
- f 的每个 *NEG* 层 H_r 都由一条边 e 组成，其中 $f(e) = eu$ 对某条闭边路径 $u \subseteq \Gamma_{r+1}$成立；
- Γ的每个顶点 v都满足： $f(v)$被 f固定。

那么，提升 f_A： $\Gamma_A \to \Gamma_A$ 存在一个使其成为相对列车轨道映射的滤过。此外，对于任意 *EG* 层 $H_A \subseteq \Gamma_A$，存在唯一的 *EG* 层 $H_r \subseteq \Gamma$，使得：

- H_A 包含于 $p_A^{-1}(H_r)$； $p_A(H_A) = H_r$；
- $f_A(H_A) \subseteq H_A \cup p_A^{-1}(\Gamma_{r+1})$。

反过来，对于 *EG* 层 $H_r \subseteq \Gamma$，子图 $p_A^{-1}(H_r)$ 是 Γ_A 的 *EG* 层的并。 □

备注。 唯一性 H_r 以及引理的最后一个陈述包含在[CH17，引理 4 的证明中。5],特别参见 [CH17，第 1985] 页。

A.1 深度的虚拟不变性

本节的目标是证明深度的虚拟不变性：

命题 2.17。 假设 $A \leqslant \mathbb{F}$ 具有有限指数， Φ： $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ 是一个自同构，满足$\Phi(A) = A$，且 Ψ： $A \to A$ 是 Φ 在 A上的限制。令 $\phi \coloneqq [\Phi]$ 属于 外自同构群$(\mathbb{F})$，且 $\psi \coloneqq [\Psi]$ 属于外自同构群(A)。那么 $\delta(\phi^m) = \delta(\phi) = \delta(\psi)$ 并且 $\delta\mathcal{S}(\phi^m) = \delta\mathcal{S}(\phi) = \delta\mathcal{S}(\psi)$ 对所有 $m \geqslant 1$均成立。

事实上，存在一个自然的保严格序满射 π： $\mathcal{L}^+(\psi) \to \mathcal{L}^+(\phi)$，并且 $\mathcal{L}^+(\phi)$ 中的链可以通过 π 提升为 $\mathcal{L}^+(\psi)$ 中长度相同的链。

证明。 我们立即得到 $\delta\mathcal{S}(\phi^m) = \delta\mathcal{S}(\phi)$，因为 $\mathcal{L}^+(\phi^m) = \mathcal{L}^+(\phi)$。由于 $\delta(\phi) = \max \delta\mathcal{S}(\phi)$，只需证明 $\delta\mathcal{S}(\phi) = \delta\mathcal{S}(\psi)$。

令 $N = [\mathbb{F}\colon\ A]$ 为 A的指标。利用与包含 $A \leqslant \mathbb{F}$等变的自然同一 $\partial_\infty A = \partial_\infty \mathbb{F}$，我们得到一个自然的 N 对 1 开连续满射 $q\colon\ \mathfrak{B}(A) \to \mathfrak{B}(\mathbb{F})$。注意， Φ 及其在 A 上的限制所诱导的 $\partial_\infty \mathbb{F}$ 与 $q \circ \psi = \phi \circ q$之间的同胚相同。

我们首先描述一个自然映射 $\pi\colon\ \mathcal{L}^+(\psi) \to \mathcal{L}^+(\phi)$。设 $f\colon \Gamma \to \Gamma$ 是表示 ϕ的相对列车轨道映射，并选取一个表示 ψ的提升 $f_A\colon \Gamma_A \to \Gamma_A$。假设 f 满足引理 A.2 的假设——通过取 ϕ 的某个幂作为 $\delta\mathcal{S}(\phi) = \delta\mathcal{S}(\phi^m)$，对每个 $m \geqslant 1$都可以做到这一点。因此，由引理 A.2， f 的提升 $f_A\colon \Gamma_A \to \Gamma_A$ 是一个表示 $\psi \in$外自同构群(A)的相对列车轨道映射。对于每个 EG层 $H_A \subset \Gamma_A$，存在唯一的 EG层$H_r \subseteq \Gamma$（其层状为 Λ_r）使得 $p_A(H_A) = H_r$；因此，对于每个以 H_A 为其穿过的最高层的层状 Λ_A，我们可以定义 $\pi(\Lambda_A) = \Lambda_r$。

关于 π的满射性，设 $\Lambda \in \mathcal{L}^+(\phi)$以及 $H_r \subset \Gamma$ 是与某个对应的EG层。由引理 A.2，边 e 包含于f_A的某个 EG 层中。因此， e 的 $(f_A)_\#$- 次迭代穷尽了某个吸引层状结构 $\bar{\Lambda}_A \in \mathcal{L}^+(\psi)$ 的一般直线 ℓ'。像 $q(\ell')$ 是 ϕ的某个吸引层状结构的一般直线。由于 ℓ' 所穿过的最高层位于 H_r的原像中，$q(\ell')$ 所穿过的最高层是 H_r。因此，$\pi(\Lambda_A) = \Lambda$。所以 Λ 位于 π的像中，并且由于 Λ 是任意的， π 是满射。

接下来，我们证明 π 严格保序，即对于 Λ_1、 $\Lambda_2 \in \mathcal{L}^+(\psi)$， $\Lambda_1 \subsetneq \Lambda_2$ 蕴含 $\pi(\Lambda_1) \subsetneq \pi(\Lambda_2)$。为此，我们发现直接处理抽象空间 $\mathfrak{B}(A)$、 $\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 比使用相对列车轨道更为方便。设 ℓ_1、 $\ell_2 \in \mathfrak{B}(A)$ 是 ψ 的一般直线，其相应的闭包为 Λ_1、 $\Lambda_2 \in \mathcal{L}^+(\psi)$，并设 $U \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 是 $q(\ell_1)$的任意邻域。假设 $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$，即 ℓ_1 的任意邻域都包含 ℓ_2。那么 $q^{-1}(U)$ 是 ℓ_1 的一个邻域，因而必须包含 ℓ_2；因此，U 包含 $q(\ell_2)$，且 $\pi(\Lambda_1) \subseteq \pi(\Lambda_2)$。进一步假设 $\pi(\Lambda_1) = \pi(\Lambda_2)$，并且$V \subseteq \mathfrak{B}(A)$ 是 ℓ_2的任意邻域。由于 q 是开映射， $q(V)$ 是 $q(\ell_2)$ 的一个邻域，因而必须包含 $q(\ell_1)$。特别地， V 与原像 $q^{-1}(q(\ell_1))$相交；后者是一个大小为 N 且包含 ℓ_1的集合。因此， ℓ_2 位于 $q^{-1}(q(\ell_1))$的闭包中，而后者是 N个闭子集的并。换言之， Λ_2 位于某个 $\ell_1' \in q^{-1}(q(\ell_1))$的闭包 $\Lambda_1' \subseteq \mathfrak{B}(A)$ 中。因此，$\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \subseteq \Lambda_1'$；此外，作为 $\partial^2\mathbb{F}$的子集， $\ell_1' = g \cdot \ell_1$ 对于某个 $g \in \mathbb{F}$成立。选择 $k \geqslant 1$ 使得 $g^k \in A$。由传递性， $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \subseteq g^k \cdot \Lambda_1 = \Lambda_1$ 且 $\Lambda_1 = \Lambda_2$；因此， π 严格保序。

我们最后指出， $\mathcal{L}^+(\phi)$ 中的链可以提升为 $\mathcal{L}^+(\psi)$中的链，从而$\delta\mathcal{S}(\psi) = \delta\mathcal{S}(\phi)$亦然。设 $\bar{\ell}_1$, $\bar{\ell}_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 是 ϕ的一般位置的线，层状结构 $\bar{\Lambda}_1$， $\bar{\Lambda}_2 \in \mathcal{L}^+(\phi)$ 分别是它们的闭包，使得 $\bar{\Lambda}_1 \subseteq \bar{\Lambda}_2$，且 $\ell_1 \in q^{-1}(\bar{\ell}_1)$ 是 $\bar{\ell}_1$的任意提升。在上一段中，我们（利用 q的开性）证明 ℓ_1 的闭包 $\Lambda_1 \in \pi^{-1}(\bar{\Lambda}_1)$ 位于某个 $\Lambda_2 \in \pi^{-1}(\bar{\Lambda}_2)$ 中，从而完成证明。 □

A.2 一般位置的线的逼近

固定 $\phi \in$外自同构群$(\mathbb{F})$，并令 $\mathcal{A}$ 为一个 ϕ-不变自正规化子群系统，属于 $\mathbb{F}$ 且具有有限型。我们将证明引理 2.19，它给出一条一般直线 ℓ （ $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$ 的）借助某条周期线 $[[g]] \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$的逼近。首先，我们证明标准情形 $\mathcal{A} = [\mathbb{F}]$。

引理 A.3. 对于 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_\phi$， 某个元素 $g \in \mathbb{F}$ 具有如下性质：

对任意 $[\Lambda'] \in \mathcal{L}^+_\phi$， g 被弱吸引到 $[\Lambda']$ 当且仅当 $[\Lambda'] \subseteq [\Lambda]$。

证明。设 $f\colon\ \Gamma \to \Gamma$ 为表示 ϕ 的相对列车轨道，且 H_r 为 Γ中与 $[\Lambda]$相关联的 EG层。选取 H_r 的一条有向边 e 及整数 $M \geqslant 1$，使得约化r-合法路径 $f^M_\#(e)$ 至少包含 e的两个副本——这样的 M 存在，因为 H_r 是 EG层。注意，对任意 $n \geqslant 1$， $f^n_\#(e)$的任意有限子路径都是 $f^n\#(e)$的 $f^M\#$-迭代的有限子路径，此由引理 A.1 得到。

定义 σ 为 $f^M_\#(e)$ 中连接 e的两个不同副本起点的循环约化子路径。我们将 σ 视为 Γ 中的一个圈，并用 $[g]$ 表示元素的共轭类

在 $\mathbb{F}$ 中由 σ 所表示。由构造， σe 是 $f^M{}_\#(e)$ 的子路径，因此它是 r-合法的。由于 e 是 σ 的起始边，引理 A.1 蕴含 $f^n{}_\#(\sigma)$ 是循环约化的，并且以 $f^n_\#(e)$ 作为所有 $n \geqslant 1$ 的起始子路径。

回想一下，我们将 $\mathfrak{B}(\mathbb{F})$ 认作 $\mathfrak{B}(\Gamma)$，即 Γ 中双无限无向约化路径所构成的空间。设 k 表示 ϕ-轨道 $[\Lambda]$ 的大小，并假设 Λ 的一般直线穿过边 e。根据 [BFH00，引理 3.1。10]，一个无向路径 ρ 是 Λ 的一般直线的有限子路径，当且仅当它是某个无向 $f^k_\#$-次迭代 e 的子路径。

设 $[\Lambda'] \in \mathcal{L}^+_\phi$，并假设元素 g 弱吸引于 $[\Lambda']$。取 Λ' 的一条一般直线中的任意无向有限子路径 ρ'。那么，对于无穷多个 $N \geqslant 1$，ρ' 都是周期线 $\phi^N[[g]]$ 的子路径。当 N 足够大时，约化路径 $f^N_\#(e)$ 将比 ρ' 更长；因此，对于无穷多个 $N \geqslant 1$，ρ'（取某个方向）是有向路径 $f^N_\#(\sigma)$ 的某个循环置换的子路径。由于 e 是 σ 的初始边，我们推得，对于某个足够大的 $N \geqslant 1$，ρ' 是约化路径 $f^N_\#(\sigma) f^N{}_\#(e) = f^N{}_\#(\sigma e)$ 的子路径——后者是 $f^{N+M}{}_\#(e)$ 的子路径，因为 σe 是 $f^M_\#(e)$ 的子路径。因此，ρ' 是 $\phi^N(\Lambda)$ 的一般直线的子路径。由于 ρ' 是任意选取的，我们已经证明，Λ' 的一般直线属于 $[\Lambda]$ 的一般直线的闭包，因此 $\Lambda' \subseteq [\Lambda]$。这一结论也推广到 ϕ-轨道：$[\Lambda'] \subseteq [\Lambda]$。

反过来，假设 $[\Lambda'] \subseteq [\Lambda]$。不失一般性，我们可以假设 $\Lambda' \subseteq \Lambda$。取一条 Λ' 的一般直线中的无向有限子路径 ρ'。那么 ρ' 是一条 Λ 的一般直线的子路径。等价地，ρ'（取某个方向）是 e 的某个 $f^k_\#$ 次迭代的子路径。根据第一段和第二段中的观察，ρ' 是 e 的无穷多个 $f_\#$ 次迭代的子路径，因此 σ。由于 ρ' 是任意的，元素 g 弱吸引于 Λ'，这也推广到 $[\Lambda']$。

□

引理 2.19。对于 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$，某个 $\mathcal{A}$-外围元素 $g \in \mathbb{F}$ 具有以下性质：

for any $[\Lambda'] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$, g *is weakly attracted to* $[\Lambda']$ *if and only if* $[\Lambda'] \subseteq [\Lambda]$.

证明。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个 ϕ-不变自正交子群系统 $\mathbb{F}$，它是有限型且 $[\Lambda] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$。取一个轨道代表元 $\Lambda \in \mathcal{L}^+(\phi|\mathcal{A})$。那么存在唯一的共轭类 $[A] \in \mathcal{A}$，使得 $\Lambda \subseteq \mathfrak{B}(A)$。令 $\psi \in$ 外自同构群(A) 表示限制 $\phi^k|A \in \phi|\mathcal{A}$（见 定义 2.9）。由于 ψ 对 $\mathfrak{B}(A)$ 的作用是 ϕ对 $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$的作用的首次回归映射的限制，我们得到 $\Lambda \in \mathcal{L}^+(\psi)$。根据 引理 A.3，某个元素 $g \in A$ 相对于 $\mathfrak{B}(A)$具有这一性质：

> 对任意 $[\Lambda'] \in \mathcal{L}^+_\psi$，$g$ 在正向 ψ 迭代下弱吸引于 $[\Lambda']$，当且仅当 $[\Lambda'] \subseteq [\Lambda]$（作为 $\mathfrak{B}(A)$ 中的 ψ 轨道）。

注意，g 是 $\mathbb{F}$ 的一个 $\mathcal{A}$-周边元素。令 $[\Lambda'] \in \mathcal{L}^+_{\phi|\mathcal{A}}$ 为由 $\mathcal{A}$ 承载的吸引层状结构的任意一个 ϕ 轨道。若 $[\Lambda']$ 和 $\mathfrak{B}(A)$ 不相交，则可将 $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ 划分为两个 ϕ- 不变的闭子集：一个包含 $[[g]]$，另一个包含 $[\Lambda']$。因此，g 在正向 ϕ 迭代下不会弱吸引于 $[\Lambda']$，并且 $[\Lambda'] \not\subseteq [\Lambda]$。现在假设某个由 A 承载的 ϕ 轨道代表元 Λ'。利用前面关于 ψ 在 $\mathfrak{B}(A)$ 上的作用的观察，我们可以完成证明：

1. $[\Lambda'] \subseteq [\Lambda]$ 作为 $\mathfrak{B}(A)$ 中的 ψ 轨道，当且仅当 $[\Lambda'] \subseteq [\Lambda]$ 作为 $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ 中的 ϕ 轨道；

以及 2. g 在正向 ψ 迭代下弱吸引于 $[\Lambda']$，当且仅当 g 在正向 ϕ 迭代下弱吸引于 $[\Lambda']$。

□

B 典范拓扑树

We 说明如何根据所引用文献中的结果推导出定理 3.1 [Mut24b]。

固定一个外自同构 $\phi \in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$ 及其一个代表元 $\Phi \in \phi$。为进行归纳，令 $N_1 \coloneqq \mathbb{F}$，$\phi_1 \coloneqq \phi$，并令 $\mathcal{L}^+_1 \coloneqq \mathcal{L}^+_\phi$。根据 [Mut24b，命题 2。2]，存在一个极大层状结构轨道 $[\Lambda_1] \in \mathcal{L}^+_1$ 以及一棵 $\mathbb{R}$-树 (T_1, d_1) 满足：

1. N_1 通过等距变换在 T_1 上极小作用，且弧稳定子平凡；2. 存在一个（唯一的） Φ-等变的 λ_1-相似变换 $h_1\colon (T_1,\ d_1)\to(T_1,\ d_1)$ 满足 $\lambda_1>1$；以及 3. 元素 $g\in N_1$ 在 T_1 中为椭圆型，当且仅当它不被 $[\Lambda_1]$弱吸引。

根据引理 A.3，T_1 的非平凡点稳定子的子群系统 $\mathcal{N}_2\coloneqq\mathcal{N}(T_1)$ 承载其余的层状结构 $\mathcal{L}_1^+\backslash\{[\Lambda_1]\}=\mathcal{L}^+_{\phi_1|\mathcal{N}_2}$。对每个 $[N_2]\in\mathcal{N}_2$，令 $\phi_2\in$ 外自同构群(N_2) 为 $\phi_1|\mathcal{N}_2$ 中相应的限制，且 $\mathcal{L}_2^+\subseteq\mathcal{L}_1^+$ 为与 $\mathcal{L}^+_{\phi_2}$ 等同的子集。再次应用[Mut24b，命题 2.2]，存在一个层状 $[\Lambda_2]\in\mathcal{L}_2^+$以及一棵 $\mathbb{R}$-树 $(T_2,\ d_2)$ 如前。

[Mut24a] 的主要构造描述了如何等变地将树 T_2代入点 $p_2\in T_1$ （其具有非平凡稳定子 N_2）。该过程是拓扑性的，因为它忽略了^度量 d_1、d_2，并产生一棵拓扑树 T_2，其极小的非嵌套 N_1-作用具有^平凡的弧稳定子。等变地压缩 T_2 中 T_2 的各个副本可恢复 T_1，而 d_1 经由商映射 $T_2\to T_1$ 的^拉回是 T_2 上的一个伪度量，我们仍将其记为d_1。因此，T_2 的等变副本恰好是 T_2 中 d_1-直径为0的非退化极大子集^；此外，这些子集继承 F_2-不变度量 d_2。将^这一结构记为元组 $(T_2$、$(d_1$、$d_2))$。

^归纳应用 [Mut24b，命题 22]，得到一个元组$(T_n,\ (d_1,\ \ldots\ldots,\ d_n))$满足：

^^ ^1. 存在一个 Φ-等变同胚 $h_n\colon T_n\to T_n$，它相对于伪度量 d_i 是一个 λ_i-相似变换，对每个 i均成立；并且^2. 元素 $g\in\mathbb{F}$ 在 T_n 中是椭圆型，当且仅当它不被 $\mathcal{L}_\phi^+$ 中的任何层状弱吸引（即 g 在 ϕ迭代下具有多项式增长）。

前面的陈述概述了 [Mut24b，定理 3.1 和命题 34]；此外，^底层拓扑树 $T_\phi=T_n$ 是唯一的 [Mut24b，推论 39]。

对于元组中的任意伪度量 d_i，相应的层状 $[\Lambda_i]\in\mathcal{L}_\phi^+$ 自然可由 T_ϕ中一个 $\mathbb{F}$-不变的极大弧集族实现，该集族中的元素称为 $[\Lambda_i]$的 T_ϕ-叶。根据构造，T_ϕ 中的一条弧包含一个具有正 d_i直径的子弧，当且仅当它包含 $[\Lambda_i]$的一条 T_ϕ-叶的非退化子弧。定义 d_i为 T_ϕ -双曲型，是指它在 T_ϕ 中的轴包含一个具有正 d_i直径的子弧。根据 [Mut24b，命题 3.5]，，是 d_i-双曲型等价于被 $[\Lambda_i]$弱吸引。借用测度论中的记号，若 T_ϕ 中任何包含具有正 d_i直径的子弧的弧，也必定包含具有正 d_j直径的子弧，我们就记作 $d_i\ll d_j$。最后，[Mut24b，断言 3.6]指出，$d_i\ll d_j$ 当且仅当 $[\Lambda_j]\subseteq[\Lambda_i]$。

定理 3.1. 对于 $\phi\in$ 外自同构群$(\mathbb{F})$ 和 $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{L}_\phi^+$，存在一棵典范拓扑树 $T_\mathcal{L}$，其上有 $\mathbb{F}$ 的非嵌套连续作用，使得：

1. 该作用是极小的，且弧稳定子平凡；*2.* 对于任意代表 ϕ 的自同构 $\Phi\colon\mathbb{F}\to\mathbb{F}$，存在一个扩张的 Φ-等变同胚 $h_\mathcal{L}\colon T_\mathcal{L}\to T_\mathcal{L}$；*3.* 元素 $g\in\mathbb{F}$ 在 $T_\mathcal{L}$ 中是椭圆型，当且仅当它不弱吸引于任何 $[\Lambda]\in\mathcal{L}$。

证明。设给定一个子集 $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{L}_\phi^+$。通过压缩 T_ϕ 中所有不包含 $\mathcal{L}$中层状的 $[\Lambda]\in\mathcal{L}_\phi^+$ 的叶子，构造拓扑树 $T_\mathcal{L}$。等价地，我们等变地压缩所有满足如下条件的伪度量 d：对于所有对应于 $[\Lambda_i]\in\mathcal{L}$的伪度量 d_i，均有 $d\not\ll d_i$。因此，$T_\mathcal{L}$ 继承了一个具有平凡弧稳定子的非嵌套极小 $\mathbb{F}$-作用，而诱导的 Φ-等变同胚 $h_\mathcal{L}\colon T_\mathcal{L}\to T_\mathcal{L}$ 对于未压缩的伪度量 d_i仍是一个 λ_i-相似变换。根据构造，元素 $g\in\mathbb{F}$ 在 $T_\mathcal{L}$ 中是椭圆型，当且仅当它不弱吸引于任何 $[\Lambda]\in\mathcal{L}$。由于 T_ϕ 是唯一的，$T_\mathcal{L}$ 的构造是典范的。 □

参考文献

[BFH00] Mladen Bestvina、Mark Feighn 和 Michael Handel。外自同构群 (F_n) 的蒂茨替代定理 I：指数增长自同构的动力系统。《数学年刊》（第 2 辑），151(2):517–623，2000。[BH92] Mladen Bestvina 和 Michael Handel。自由群的折线路径与自同构。《数学年刊》（第 2 辑），135(1):1–51，1992。[Bow12] Brian H. Bowditch。相对双曲群。Internat. J. Algebra Comput., 22(3):1250016, 66, 2012。[Bri00] Peter Brinkmann。自由群的双曲自同构。Geom. Funct. Anal., 10(5):1071–1089, 2000。[CH17] R´emi Coulon 和 Arnaud Hilion。自由群与自由 Burnside 群的自同构的增长与阶。Geom. Topol., 21(4):1969–2014, 2017。[DGO17] Fran¸cois Dahmani、Vincent Guirardel 和 Denis Osin。作用于双曲空间的群中的双曲嵌入子群与旋转族。《美国数学会回忆录》，245(1156):v+152, 2017。[DKL15] Spencer Dowdall、Ilya Kapovich 和 Christopher J. Leininger。自由群扩张循环群的动力系统。Geom. Topol., 19(5):2801–2899, 2015。[DL22] Fran¸cois Dahmani 和 Ruoyu Li。自由积与自由群自同构的相对双曲性。J. Topol. Anal., 14(1):55–92, 2022。[FH99] Mark Feighn 和 Michael Handel。自由群自同构的映射环面是相干的。《数学年刊》（第 2 辑），149(3):1061–1077, 1999。[FH11] Mark Feighn 和 Michael Handel。外自同构群 (F_n) 的识别定理。Groups Geom. Dyn., 5(1):39–106, 2011。[Gho23] Pritam Ghosh。自由群扩张循环群的相对双曲性。Compos. Math., 159(1):153–183, 2023。[GL95] Damien Gaboriau 和 Gilbert Levitt。R 树上作用的秩。Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4), 28(5):549–570, 1995。[GL04] Fran¸cois Gautero 和 Martin Lustig。（单端双曲群）扩张循环群的相对双曲化。Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 137(3):595–611, 2004。[GL15] Vincent Guirardel 和 Gilbert Levitt。相对双曲群的分裂与自同构。Groups Geom. Dyn., 9(2):599–663, 2015。[GL17] Vincent Guirardel 和 Gilbert Levitt。群的 JSJ 分解。Ast´erisque, 395:vii+165, 2017。[HM19] Michael Handel 和 Lee Mosher。自由群的自由分裂复形 II：双曲型外自同构。Trans. Amer. Math. Soc., 372(6):4053–4105, 2019。[HM20] Michael Handel 和 Lee Mosher。外自同构群 (F_n) 中的子群分解。《美国数学会回忆录》，264(1280):vii+276, 2020。[Lev05] Gilbert Levitt。双曲群与群图的自同构。Geom. Dedicata, 114:49–70, 2005。[Lev09] Gilbert Levitt。自由群自同构增长类型的计数。Geom. Funct. Anal., 19(4):1119–1146, 2009。[Mac00] Nataˇsa Macura。多项式增长自由群自同构的映射环面的二次等周不等式。Geom. Funct. Anal., 10(4):874–901, 2000。

[MSW03] Lee Mosher、Michah Sageev 和 Kevin Whyte。树上的拟作用。一、有界度数。《数学年刊》（第 2 辑），158(1):115–164，2003 年。[Mut21] Jean Pierre Mutanguha。自由群自同态的不可约性是一个映射环面不变量。《赫尔维数学评论》，96(1):47–63，2021 年。[Mut24a] Jean Pierre Mutanguha。自由群自同构的极限前树：存在性。《Forum Math. Sigma》，12：论文编号 e57，共 29 页，2024 年。[Mut24b] Jean Pierre Mutanguha。自由群自同构的极限树：普适性。《Forum Math. Sigma》，12：论文编号 e122，2024 年。[Mut24c] Jean Pierre Mutanguha。关于多项式自由循环群。预印本，2024 年。arXiv:2412.16150。[Neu90] Walter D. Neumann。自由群的有限生成子群的交集。载于《群论——堪培拉 1989》，《数学讲义》第 1456 卷，第 161–170 页。Springer，柏林，1990 年。[Osi06] Denis V. Osin。相对双曲群：内在几何、代数性质与算法问题。《美国数学会回忆录》，179(843):vi+100，2006 年。[Pap07] Panos Papasoglu。群分解与渐近拓扑。《纯粹与应用数学杂志》，602:1–16，2007 年。[Thu88] William P. Thurston。关于曲面的微分同胚的几何与动力系统。《美国数学会通报》（新辑），19(2):417–431，1988 年。