arXiv:2602.10448v1 [math.PR] 11 Feb 2026

阿尔福斯正则域上反射跳扩散的热核

曹世平和陈振清

Abstract. 我们研究一般度量测度空间中阿尔福斯正则域上的反射跳扩散。假设环境空间上的狄利克雷型满足容量上界估计，我们构造了一个从反射狄利克雷空间到环境狄利克雷空间的延拓算子，并证明其满足尺度不变的局部界。其次，假设环境空间上的过程满足同类型的热核估计，我们建立了反射跳扩散的混合稳定型热核估计。

1. 引言

已知，在内一致域上，如果环境空间支撑一个满足高斯或次高斯热核估计的对称扩散，那么相应的反射扩散也满足高斯或次高斯热核估计 [23, 29, 2]。对于欧几里得空间中一致域上的带跳反射扩散过程，也有类似结果 [16]。关于反射狄利克雷型和反射对称马尔可夫过程的一般结果，参见 [10, 11]。

本文旨在研究局部紧可分度量空间中一大类开集上的反射混合类稳定跳扩散的双边热核估计。本文称 $(\mathcal{X},\ d,\ m)$ 为度量测度空间，如果 $(\mathcal{X},\ d)$ 是局部紧可分度量空间，且 m 是定义在 $(\mathcal{X},\ d)$ 上并具有全支撑的拉东测度。本文的结果具有若干重要推论。例如，结合 [9] 中的最新结果，我们可以将删失过程 [6] 的边界哈纳克原理推广到更一般的区域。另请参见 [8, 26]，了解关于反射扩散迹过程的最新研究。

由于跳过程不再要求底层空间具有连通性，因此在研究反射扩散的热核时所需的内一致域条件，对于反射跳扩散而言可以大幅放宽。事实证明，反射跳扩散的一个自然且适当的条件是开集为阿尔福斯正则集；这一概念将在下文针对度量测度空间的定义 1.1 中引入。它是经典的 d 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 中阿尔福斯d-正则集的自然推广。回顾一下，若存在一个测度 m 定义在 F 上，使得对于每个 $x\in\mathcal{X}$ 和 $0<r<1$，都有 $m(B(x,r))\asymp r^d$，则称博雷尔可测集$F\subset\mathbb{R}^n$ 对于某个 $d\in(0,n]$ 是阿尔福斯 d-正则的。这里 $B(x,r):=\{y\in F\colon |y-x|<r\}$,

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：60J76、60J45、35K08、60J46；次要分类：60J25、31C25、、31E05。*Key words and phrases.* 反射跳扩散、反射狄利克雷型、热核、跳核、延拓算子、惠特尼覆盖、能量估计。

而记号 $f \asymp g$ 表示存在一个常数 $c \geq 1$，使得在 f 与 g 的共同定义域上，$c^{-1}g \leq f \leq cg$。众所周知（参见 [25]），上述定义中的拉东测度 m 与 F 上的 d 维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^d$ 一致可比。

早在2003年，陈和熊谷 [14]就建立了 α稳定型热核估计

$$p(t,x,y) \asymp t^{-d/\alpha} \wedge \frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}} \quad \text{for } 0<t<1 \text{ and } x,y \in \mathcal{X},$$

适用于与对称非局部狄利克雷型（$\mathcal{E},\mathcal{F}$）相关联的 Hunt 过程

$$\mathcal{F} := \Big\{ f \in L^2(\mathcal{X};m) : \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} (f(x)-f(y))^2 \frac{1}{|x-y|^{d+\alpha}} m(dx)m(dy) < \infty \Big\}, \quad (1.1)$$

$$\mathcal{E}(f,g) := \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \frac{c(x,y)}{|x-y|^{d+\alpha}} m(dx)m(dy), \quad f,\ g \in \mathcal{F}, \quad (1.2)$$

在 $L^2(\mathcal{X};\ m)$ 上，其中 $\mathcal{X}$ 是闭的 Ahlfors d-正则子集，属于 $\mathbb{R}^n$，且 $d \in (0,n]$，相对于 $\mathcal{X}$ 上的测度 m，满足对每个 $x \in \mathcal{X}$ 和 $r>0$，$m(B(x,r)) \leq cr^d$；此外，$c(x,y)$ 是定义在 $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ 上的对称可测函数，且有上下界，分别为两个正常数。上述热核结果已在 [15] 中推广到更一般的混合稳定型非局部狄利克雷型，这些形式定义在满足体积倍增（VD）、反向体积倍增（RVD）条件及一致体积可比条件的度量测度空间上。我们提及，Ahlfors d-正则开子集 $D \subset \mathbb{R}^d$ 的边界可能极不规则，但其边界 ∂D 的勒贝格测度为零。因此，[14, 15] 中的结果特别给出了 $\mathbb{R}^d$ 中 Ahlfors d-正则开子集的闭包上反射稳定型过程的混合稳定型热核估计。

我们指出，当 $\mathcal{X}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的阿尔福斯正则 d 集时，参数 α 必须严格小于 2，因为对于 $\alpha \geq 2$，由 (1.1) 定义的函数空间 $\mathcal{F}$ 仅由常函数构成。在更一般的度量测度空间中，包括 $\mathbb{R}^n$ 中的谢尔宾斯基垫片和谢尔宾斯基地毯，可能出现 $\alpha \geq 2$ 的情形；此时，我们需要稳定型过程的截断索об列夫不等式，以及更一般的混合稳定型热核估计。关于此类热核估计必要且充分条件的最新进展，见 [17, 18, 21, 27]。这些工作可视为扩散过程和有限程随机游走相关研究的对应成果，其中包括 [1, 3, 4, 5, 7, 22]。特别地，Chen-Kumagai-Wang [17, 定理 1.13] 建立了如下热核估计的刻画。假设度量测度空间 $(\mathcal{X},d,m)$ 满足 (VD) 和 (RVD) 条件，那么，对于由定义在 $L^2(\mathcal{X};\ m)$ 上的纯非局部对称正则狄利克雷型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 所关联的 Hunt 过程，当且仅当其跳核 $J(x,y)$ 满足双边界 J_ϕ，且该狄利克雷型满足截断索об列夫不等式条件 $\mathrm{CSJ}(\phi)$ 时，双边混合稳定型热核估计成立。其定义和精确表述见第 2 节。条件 J_ϕ 和 $\mathrm{CSJ}(\phi)$ 在跳核 $J(x,y)$ 的可比扰动下保持不变。混合稳定型对称 Hunt 过程的抛物型哈纳克不等式的稳定刻画已在 [18] 中建立。[17, 18] 中的 (RVD) 条件排除了度量测度空间 $(\mathcal{X},d,m)$ 含有原子的情形。在近期的一篇论文 [27], 中，通过引入一个辅助空间将 (QRVD) 化为 (RVD) 情形，上述热核稳定刻画已扩展到允许含有原子的度量测度空间，方法是将 (RVD) 条件放宽为准反向体积倍增条件 (QRVD)。

定义 1.1。对于度量测度空间 $(\mathcal{X}, d, m)$，若存在常数 $c_D \in (0,1]$ 使得，则称子集 $D \subset \mathcal{X}$ 为阿尔福斯正则

$$m(B(x,r)\cap D) \geq c_D m(B(x,r)) \quad \text{for every } x \in D \text{ and } 0 < r < \operatorname{diam}(D)/2. \tag{1.3}$$

这里，$\operatorname{diam}(D) := \sup_{x,y\in\mathcal{X}} d(x,y)$ 表示 D 的直径。显然，当且仅当对任意 $x \in \mathcal{X}$ 和 $0 < r < \operatorname{diam}(D)/2$，$D \subset \mathcal{X}$ 是阿尔福斯正则的，当 $m(B(x,r)\cap D) \asymp m(B(x,r)$ 时成立。据我们所知，这是首次在度量测度空间上引入阿尔福斯正则集的这一定义。它与 $\mathbb{R}^d$ 中阿尔福斯 d-正则集的定义一致，其中球 $B(x,r)$ 的勒贝格体积为 $c_d r^d$。度量测度空间 $(\mathcal{X}, d, m)$ 上的阿尔福斯正则集具有一些理想性质。我们在下文的引理 2.5 中证明：若 $(\mathcal{X}, d, m)$ 满足 (VD)，且 $D \subset \mathcal{X}$ 是阿尔福斯正则开子集，则 $m(\partial D) = 0$，并且 (D, d, m_0) 满足 (VD)，其中 $m_0 := \overline{m|_D}$，也就是说，对任意博雷尔子集 $A \subset \underline{D}$，有 $m_0(A) := \underline{m}(A \cap D)$；若 $(\mathcal{X}, d, m)$ 满足 (QRVD)，则 $(\underline{D}, d, m_0)$ 也满足 (QRVD)。这里，$\underline{D}$ 是 D 在 $\mathcal{X}$ 中的闭包，而 $\partial D := D \setminus \underline{D}$ 是其边界。

现在假设度量测度空间 $(\mathcal{X}, d, m)$ 满足 (VD) 和 (QRVD)，且 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 是定义在 $L^2(\mathcal{X};\, m)$ 上、满足双边热核估计 HK(ϕ) 的纯非局部正则对称狄利克雷型（其定义见定义 2.6(b)）。对于一个开子集 $D \subset \mathcal{X}$，记 $(\bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{F}})$ 为 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 在 D 上、关于 [10, 11] 意义下定义于 $L^2(D;\, m_0)$ 的主动反射狄利克雷型。本文的主要结果是定理 2.8。该定理断言，对于 $\mathcal{X}$ 的任意阿尔福斯正则开子集 D，度量测度 Dirichlet 空间 $(D, d, m_0, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ 是正则的，并且满足双边热核估计 HK(ϕ)。由 [17, 27] 可知，在 (VD) 和 (QRVD) 下，HK(ϕ) $\iff$ J$_\phi$ +CSJ(ϕ)。由于定义在 $L^2(D;\, m_0)$ 上的主动反射狄利克雷型 $(\bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{F}})$ 的 J$_\phi$ 条件继承自 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 的相应条件，根据上文提到的引理 2.5 的结果 $\bar{\ }$ $\bar{\ }$，只需证明 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 的 CSJ(ϕ) 同样继承自 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 的相应条件即可。由于截断索об列夫不等式 CSJ(ϕ) 是用能量和 L^2-范数表述的（见下文定义 2.6(e)），因此自然可以尝试证明存在一个从 D 到 $\mathcal{X}$ 的延拓算子，使其保持能量和 L^2 界。该方法确实可行，本文将对此展开论证。

当 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 是 $L^2(\mathcal{X};\, m)$ 上满足双侧次高斯热核界的强局部正则对称狄利克雷型，且 $D \subset \mathcal{X}$ 是一致域时，Murugan [29] 构造了这样一个延拓算子，并用它为 D 上的反射扩散建立截断索об列夫不等式。根据扩散的次高斯热核界的类似解析刻画，可知 D 上的反射扩散具有双侧次高斯估计。最近，这一结果已推广到 [2] 中的内一致域。

本文为反射跳跃过程构造延拓算子的方法，与 [29] 为反射扩散构造延拓算子的方法有很大不同。

阿尔福斯正则开集比一致域和内一致域一般得多。它们不满足一致域和内一致域所具备的开瓶器条件，因此，按照 [29, 命题 3.12]，从外部区域的惠特尼覆盖到内部域的惠特尼覆盖进行“反射”的方法行不通。我们转而在命题 3.3 中引入一类函数，使其发挥该域惠特尼覆盖的作用。

另一个区别是，由于我们的狄利克雷型是非局部的，因此需要估计长距离能量。我们需要将能量分成三部分：外部区域中的近对角线部分、

外部区域中的非对角线部分以及交叉能量，并在第 3 节中仔细估计每一部分。

本文其余部分安排如下。第 2 节陈述主要定理（定理 2.8）及相关条件。第 3 节构造一个延拓算子，并给出 L^2 范数的局部尺度不变估计。第 4 节证明延拓算子的能量局部尺度不变估计，特别地，这表明主动反射狄利克雷型是正则的。最后，第 5 节为主动反射狄利克雷型建立截断索об列夫不等式，并推导出阿尔福斯正则开子集闭包上的反射跳过程的双边热核估计。

2. Conditions and main theorem

在全文中，$(\mathcal{X},\ d)$ 是一个局部紧度量测度空间，而 m 是 $(\mathcal{X},\ d)$ 上具有全支撑且可能含有原子的拉东测度。记 $B(x,\ r) := \{y \in \mathcal{X}:\ d(x,\ y) < r\}$ 为 $\mathcal{X}$ 中以 x 为中心、半径为 r 的开球。简记为

$$V(x,r) = m(B(x,r)) \ \text{ for } x \in \mathcal{X} \text{ and } r > 0$$

有时我们采用$:=$ 作为定义方式。我们用 $d(A,B) := \inf\{d(x,y):\ x \in A,\, y \in B\}$ 表示两个集合 A, $B \subset \mathcal{X}$之间的距离，并将 $d(x,A) := d(\{x\},A)$定义为 $x \in \mathcal{X}$ 和 $A \subset \mathcal{X}$。我们用 $\mathcal{B}(\mathcal{X})$表示$\mathcal{X}$的所有博雷尔可测子集组成的集族；对于 $F \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$， $\mathcal{B}(F)$表示 F的所有博雷尔可测子集组成的集族。

对于集合 $E \subset \mathcal{X}$，用 $E^c := \mathcal{X} \setminus E$ 表示它在 $\mathcal{X}$中的补集，用 E 表示其闭包，并用 $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$表示 E的边界。用 $\mathbb{1}_E$ 表示 $E \subset \mathcal{X}$的示性函数，即，

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in E, \\ 0 & \text{for } x \in \mathcal{X} \setminus E. \end{cases}$$

定义 2.1。如果存在 $C_1 \in (1,\infty)$ 使得度量测度空间$(\mathcal{X},d,m)$ 满足体积倍增条件(VD)，则称其满足体积倍增条件

$$V(x,2r) \le C_1\, V(x,r) \qquad \textit{for every } x \in \mathcal{X} \textit{ and } r \in (0,\infty),$$

其中 $V(x,\ r)\colon = m(B(x,\ r))$。这等价于存在正常数 c_1 和d_1，使得

$$\frac{V(x,R)}{V(x,r)} \le c_1 \Big(\frac{R}{r}\Big)^{d_1} \qquad \textit{for every } x \in \mathcal{X} \textit{ and } 0 < r \le R < \infty. \tag{2.1}$$

如果存在 $\lambda_0 \ge 2$ 和 $C_2 > 1$，使得反向体积倍增性质 (RVD) 成立，我们称其满足该性质。

$$V(x,\lambda_0 r) \ge C_2 V(x,r) \qquad \textit{for every } x \in \mathcal{X} \textit{ and } 0 < r < \operatorname{diam}(\mathcal{X})/\lambda_0. \tag{2.2}$$

这等价于存在正常数 c_2 和 d_2，使得

$$\frac{V(x,R)}{V(x,r)} \ge c_2 \Big(\frac{R}{r}\Big)^{d_2} \qquad \textit{for every } x \in \mathcal{X} \textit{ and } 0 < r \le R < \operatorname{diam}(\mathcal{X}).$$

（RVD）条件意味着，对每个 $x \in \mathcal{X}$， $m(\{x\}) = 0$。近期一篇论文 [27]，引入了以下拟反向体积加倍（QRVD）条件，以取代（RVD），从而将 [17] 中关于纯跳对称马尔可夫过程热核估计的稳定性结果推广到包含图在内、具有原子的某些度量测度空间。

定义 2.2。如果存在常数 $\lambda_0 \geq 2$ 和 $C > 1$，使得度量测度空间 $(\mathcal{X}, d, m)$ 满足准反向体积倍增（QRVD）条件，则称其为准反向体积倍增空间。

$$V(x, \lambda_0 r) \geq CV(x, r) \quad for\ x \in \mathcal{X}\ and\ d(x, \mathcal{X} \setminus \{x\}) \leq r < \mathrm{diam}(\mathcal{X})/\lambda_0.$$

显然，当 $(\mathcal{X}, d)$ 没有孤立点时，(RVD) 与 (QRVD) 等价。

2.1. (VD) 和 (QRVD) 的推论。

引理 2.3. 假设 $(\mathcal{X}, d, m)$ 满足(体积倍增)，且 c_1 和 d_1 是(2.1)中的常数。那么

$$\frac{V(x, r_1)}{V(y, r_2)} \leq c_1 \Big(\frac{d(x, y) + r_1}{r_2} \Big)^{d_1} \quad for\ x, y \in \mathcal{X}\ and\ r_1, r_2 > 0. \tag{2.3}$$

引理 2.4. 假设 $(\mathcal{X}, d, m)$ 满足(体积倍增)，且 c_1 和 d_1 是(2.1)中的常数。设 E 是 $\mathcal{X}$ 的有界子集，且 $r > 0$。存在一个有限子集 $\{x_i\}_{i=1}^N \subset E$，满足$N \leq c_1(1 + 4$直径$(E)/r)^{d_1}$，使得 $d(x_i, x_j) > r$ 对于 $1 \leq i < j \leq N$和 $E \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r)$成立。此外，以下性质成立。

(a) $\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B(x_i, \eta r)} \leq c_1(2\eta + 1)^{d_1}$ *for every* $\eta \geq 1$.
(b) $\bigcup_{x \in E} B(x, (\eta - 1)r) \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \eta r)$ *for every* $\eta > 1$.

证明。对于加倍度量测度空间 $(\mathcal{X}, d, m)$，第一个结论是众所周知的（参见[24, 第 10.13] 节）。为方便读者，我们在此给出详细证明。我们按以下步骤求得有限点集 $\{x_i\}_{i=1}^N$。首先，选取 $x_1 \in E$。接下来，若 $E \subset B(x_1, r)$，则以 $\{x_1\}$ 结束该过程即可；否则，选取 $x_2 \in E \setminus B(x_1, r)$，构成一个更大的集合 $\{x_i\}_{i=1}^2$。然后，对集合$\{x_i\}_{i=1}^2$重复上述步骤。若 $E \subset \bigcup_{i=1}^2 B(x_i, r)$，则结束该过程；否则，选取 $x_3 \in E \setminus \bigcup_{i=1}^2 B(x_i, r)$，构成 $\{x_i\}_{i=1}^3$。我们不断重复，直到 $E \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r)$。该过程必定在有限步后停止，且 $N \leq c_1(1 + 4\mathrm{diam}(E)/r)^{d_1}$。这是因为 $\{B(x_i, r/2);\ i \geq 1\}$ 两两不相交，并且对于 $i \geq 1$,

$$B(x_i, r/2) \subset B(x_1, \mathrm{diam}(E) + r/2) \subset B(x_i, 2\mathrm{diam}(E) + r/2),$$

因此，由 (2.1),

$$\begin{aligned} N \cdot V(x_1, \mathrm{diam}(E) + r/2) &\leq \sum_{i=1}^N V(x_i, 2\mathrm{diam}(E) + r/2) \\ &\leq c_1(1 + 4\,\mathrm{diam}(E)/r)^{d_1} \sum_{i=1}^N V(x_i, r/2) \\ &\leq c_1(1 + 4\,\mathrm{diam}(E)/r)^{d_1} V(x_1, \mathrm{diam}(E) + r/2). \end{aligned}$$

这证明了存在有限多个点 $\{x_i\}_{i=1}^N$，它们位于 E 中，并具有所需性质，且满足 $N \leq c_1(1 + 4\mathrm{diam}(E)/r)^{d_1}$。

(a). 这一部分可以用类似思路证明。令 $x \in \mathcal{X}$。对于每个满足$x \in B(x_i, \eta r)$的 $1 \leq i \leq N$,

$$B(x_i, r) \subset B(x, (\eta + 1)r) \subset B(x_i, (2\eta + 1)r),$$

因此由 (2.1),

$$\#\{1\le i\le N: x\in B(x_i,\eta r)\}\cdot V(x,(\eta+1)r)\le \sum_{1\le i\le N: x\in B(x_i,\eta r)} V(x_i,(2\eta+1)r)$$

$$\le c_1(2\eta+1)^{d_1}\sum_{1\le i\le N: x\in B(x_i,\eta r)} V(x_i,r)$$

$$\le c_1(2\eta+1)^{d_1}V(x,(\eta+1)r).$$

由此可得 $\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B(x_i,\eta r)}(x) = \#\{1\le i\le N: x\in B(x_i,\eta r)\}\le c_1(2\eta+1)^{d_1}$.

(b). 对于每个 $x\in E$，我们可以找到 $1\le i\le N$，使得 $x\in B(x_i,r)$，因此 $B(x,(\eta-1)r)\subset B(x_i,\eta r)$。□

为便于记号，对于任意开集 $D\subset\mathcal{X}$，我们记 $B_D(x,r):=D\cap B(x,r)$.

引理 2.5. 假设 $D\subset\mathcal{X}$ 是阿尔福斯正则的。

(a) 若$(\mathcal{X},d,m)$满足(VD)，则 $m(\partial D)=0$，因此 $m_0=m|_D$。*(b)* 若$(\mathcal{X},d,m)$满足(VD)，则(D,d,m_0)也满足。*(c)* 若$(\mathcal{X},d,m)$满足(QRVD)，则(D,d,m_0)也满足。

证明。(a)。我们的证明采用与 [29, 引理 3.5] 相同的思路。对每个 $x\in\partial D$ 和 $0<r<\mathrm{diam}(D)$，取 $y\in B_D(x,r/2)$。显然，

$$B(y,r/2)\subset B(x,r)\subset B(y,2r).$$

因此

$$\frac{m(B(x,r)\cap\partial D)}{V(x,r)}\le 1-\frac{m(B(x,r)\cap D)}{V(x,r)}\le 1-\frac{m(B(y,r/2)\cap D)}{V(y,2r)}$$

$$\le 1-c_D\frac{V(y,r/2)}{V(y,2r)}\le 1-C_1$$

其中 C_1 仅依赖于 (VD) 的参数和 (1.3) 中的常数 c_D。因此，根据勒贝格微分定理 [24, 定理 1.8],

$$\mathbb{1}_{\partial U}(x)=\lim_{r\to 0}\frac{m(B(x,r)\cap\partial D)}{m(B(x,r))}\le 1-C_1<1 \quad \text{for } m\text{-a.e. } x\in\partial U.$$

这意味着 $m(\partial U)=0$。

(b)。对于 $x\in D$ 和 $r<\mathrm{diam}(D)$，令 $y\in D$ 满足 $d(x,y)<r/2$。那么，根据 $(\mathcal{X},d,m)$ 的 (VD) 性质以及 $D\subset\mathcal{X}$ 的 Ahlfors 正则性，

$$m_0(B(x,2r))\le V(x,2r)\le V(y,3r)\le C_1V(y,r/2)\le C_2m_0(B(y,r/2))\le C_2m_0(B(x,r)),$$

其中 $C_2=C_1/c_D$。

(c). 令 $\lambda_0\ge 2$ 和 $C_3>1$ 为 $(\mathcal{X},d,m)$ 的 (QRVD) 常数，并令 $c_D\in(0,1)$ 为 (1.3) 中的常数。不失一般性，假设 $1/c_D>C_3$。注意，$d(x,D\setminus\{x\})\ge d(x,\mathcal{X}\setminus\{x\})$。

对于每个 $x \in D$ 和 $d(x, \overline{D} \setminus \{x\}) \le r < \mathrm{diam}(D)/\lambda_0$，由 $D \subset \mathcal{X}$ 的 Ahlfors 正则性以及 $(\mathcal{X}, d, m)$ 的 (QRVD),

$$m_0(B(x, \lambda_0 r)) \ge c_D^{-1} V(x, \lambda_0 r) \ge C_4 V(x, r) \ge C_4 m_0(B(x, r)),$$

其中 $C_4 = (c_D \cdot C_3)^{-1} > 1$。对于 $x \in \partial D$ 以及 $0 < r < \mathrm{diam}(D)/\lambda_0$，我们选取 $y \in D$ 使得 $d(x, y) < r/4$。注意 $d(y, D \setminus \overline{\{y\}}) \le d(x, y) < r/4$。因此由上述可得

$$m_0(B(x, \lambda_0 r)) \ge m_0(B(y, \lambda_0 r/2)) \ge C_4 m_0(B(y, r/2)) \ge C_4 m_0(B(x, r/4)).$$

由此确立了 (D, d, m_0) 的 (QRVD) 性质。 □

2.2. 本文的主要结果。 在本文其余部分，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 是 $L^2(\mathcal{X}; m)$ 上的对称正则 Dirichlet 形式，为纯跳型，其跳测度为 $J(dx, dy) = J(x, y)m(dx)m(dy)$，其中

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \left\{ u \in L^2(\mathcal{X}; m) : \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} (u(x) - u(y))^2 J(dx, dy) < \infty \right\}, \\ \mathcal{E}(u, v) &:= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) J(dx, dy) \quad \text{for } u, v \in \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

在本文中，我们总是用函数 $f \in \mathcal{F}$ 的 $\mathcal{E}$-拟连续版本来表示它，该版本在不计一个 $\mathcal{E}$-极集的意义下是唯一的。众所周知，存在一个与 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 相联系的、定义在 $\mathcal{X} \setminus \mathcal{N}$ 上的 m-对称 Hunt 过程 X，其中 $\mathcal{N} \subset \mathcal{X}$ 是 X 的一个 Borel 可测的适当例外集，特别地它是 $\mathcal{E}$-极集。我们称 $(\mathcal{X}, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ 为度量测度 Dirichlet 空间 (MMD)。关于上述事实以及 Dirichlet 形式的其他基本性质与术语，我们请读者参阅 [11, 20] 。

设 $\phi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ 是一个严格递增函数，满足 $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1$，且存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 和 $\beta_2 \ge \beta_1 > 0$，使得

$$c_1 (\frac{R}{r})^{\beta_1} \le \frac{\phi(R)}{\phi(r)} \le c_2 (\frac{R}{r})^{\beta_2} \quad \text{for all } 0 < r \le R < \infty. \tag{2.5}$$

定义 2.6. (a) 若**J**$_\phi$ 成立，则称

$$\frac{C_1}{V(x, d(x, y))\phi(d(x, y))} \le J(x, y) \le \frac{C_2}{V(x, d(x, y))\phi(d(x, y))} \quad \text{for every } x \ne y \in \mathcal{X}.$$

若上述公式中的上界（分别为下界）成立，则称 **J**$_{\phi,\le}$ （分别为 **J**$_{\phi,\ge}$）成立。

(b) 记 X 为 $L^2(\mathcal{X}; m)$ 上与 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 相关联的 m-对称 Hunt 过程，定义在 $\mathcal{X}$ 上。若该过程 X 满足混合型双边热核估计**HK**(ϕ)，则称其具有关于测度 m 的转移密度函数 $p(t, x, y)$，定义在 $(0, \infty) \times (\mathcal{X} \setminus \mathcal{N}) \times (\mathcal{X} \setminus \mathcal{N})$ 上，并且对每个 $(t, x, y) \in (0, \infty) \times (\mathcal{X} \setminus \mathcal{N}) \times (\mathcal{X} \setminus \mathcal{N})$,

$$\begin{aligned} &c_1 \Big(\frac{1}{V(x, \phi^{-1}(t))} \wedge \frac{t}{V(x, d(x, y))\phi(d(x, y))} \Big) \\ &\qquad \le p(t, x, y) \le c_2 \Big(\frac{1}{V(x, \phi^{-1}(t))} \wedge \frac{t}{V(x, d(x, y))\phi(d(x, y))} \Big). \end{aligned} \tag{2.6}$$

若 (2.6) 中的上界成立，则称 **UHK**(ϕ) 成立。

(c) 我们通过以下方式定义 $A \subsetneq B \subsetneq \mathcal{X}$ 的相对容量

$$\mathrm{Cap}(A,B) := \inf\{\mathcal{E}(f,f) : f \in \mathcal{F},\, f|_A = 1,\, f|_{\mathcal{X}\setminus B} = 0\}.$$

我们称条件 Cap(ϕ)$\leq$ 对 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$成立，如果存在 $c>0$，使得对每个$x \in \mathcal{X}$和 $r < \mathrm{diam}(\mathcal{X})/3$,

$$\mathrm{Cap}\left(B(x,r), B(x,2r)\right) \leq c\frac{m(B(x,r))}{\phi(r)}.$$

(d) 设 $U \subset V$是 $\mathcal{X}$的开集，且满足 $U \subset \overline{U} \subset V$。我们称非负有界可测函数 φ是 $U \subset V$的截断函数，若 $\varphi = 1$在 U上， $\varphi = 0$在 $\mathcal{X}\setminus V$上，且 $0 \leq \varphi \leq 1$ 在 $\mathcal{X}$上。

(e) 我们称条件 CSJ(ϕ)对 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$成立，如果存在常数 $c, C_0 \in (0,1]$和$C_1, C_2 > 0$，使得对每个 $0 < r \leq R < c\,\mathrm{diam}(\mathcal{X})$、几乎所有 $x_0 \in \mathcal{X}$以及任意$f \in \mathcal{F}$，存在一个 $B(x_0,R) \subset B(x_0,R+r)$的截断函数 $\varphi \in \mathcal{F}$，使得以下条件成立:

$$\begin{aligned}&\int_{B(x_0,R+(1+C_0)r)} f^2 d\Gamma(\varphi,\varphi)\\ &\leq C_1 \int_{U\times U^*} \big(f(x)-f(y)\big)^2 J(dx,dy) + \frac{C_2}{\phi(r)} \int_{B(x_0,R+(1+C_0)r)} f(x)^2 m(dx),\end{aligned}$$

where $U = B(x_0,R+r)\setminus B(x_0,R)$, $U^* = B(x_0,R+(1+C_0)r)\setminus B(x_0,R-C_0r)$ and

$$\Gamma(u,v)(dx) = \int_{\mathcal{X}} \big(u(x)-v(y)\big)\big(u(x)-v(y)\big) J(dx,dy) \quad \text{for } u,v \in \mathcal{F}.$$

注 2.7. (i) 根据 [17, 命题 3.1(2)], , HK(ϕ) 中的下界意味着 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是保守的，即过程 X对每个$x \in \mathcal{X}\setminus\mathcal{N}$都有无限寿命 P_x-a.s.。此外，根据 [17,定理 1.13 和引理 5.6],, (VD) 与 HK(ϕ) 蕴含转移密度函数 $p(t,x,y)$ 关于 (x,y) 联合 H¨older 连续，对每个 $t>0$均成立，因此双边估计 (2.6) 对所有 $x,y \in \mathcal{X}$均成立。特别地，这意味着在 (VD) 和 HK(ϕ) 下，Hunt 过程 X 可以精化为从 $\mathcal{X}$中的每一点出发，并且根据 (2.6)， X 是一个在 $\mathcal{X}$上具有强 Feller 性质的 Feller 过程。此外，根据 [18, 定理 1.18 和推论 1.3] 以及 [27,定理 1.20 和 1.21], , 在 (VD)、(QRVD) 和 HK(ϕ) 下， X的转移密度函数 $p(t,x,y)$ 关于 (t,x,y) 在 $(0,\infty)\times\mathcal{X}\times\mathcal{X}$上联合 H¨older 连续。

(ii) 在 (VD) 下，由 [17,命题 3.3],,

$$\mathbf{UHK}(\phi) + (\mathcal{E},\mathcal{F}) \text{ is conservative} \Longrightarrow \mathbf{J}_{\phi,\leq} \quad \text{and} \quad \mathbf{HK}(\phi) \Longrightarrow \mathbf{J}_{\phi}. \tag{2.7}$$

我们由 [17] 的命题 3.6 与定义 1.5(ii) 可知

$$(\mathrm{VD}) + \mathbf{UHK}(\phi) + (\mathcal{E},\mathcal{F}) \text{ is conservative} \Longrightarrow \mathrm{CSJ}(\phi), \tag{2.8}$$

并由 [17, 命题 2.3]可知

$$(\mathrm{VD}) + \mathbf{J}_{\phi,\leq} + \mathrm{CSJ}(\phi) \Longrightarrow \mathrm{Cap}(\phi)_{\leq}. \tag{2.9}$$

通过构造一个辅助空间来平滑原子，证明了 [27, 定理 1.20] 在将条件 (RVD) 放宽为 (QRVD) 后仍然成立，即 [17, 定理 1.13] 成立。

也就是说，当 $(\mathcal{X}, d)$ 无界时，以下等价关系成立：

$$(\mathrm{VD}) + (\mathrm{QRVD}) + \mathbf{HK}(\phi) \Longleftrightarrow (\mathrm{VD}) + (\mathrm{QRVD}) + \mathbf{J}_\phi + \mathrm{CSJ}(\phi). \tag{2.10}$$

(iii) 尽管在 [17] 中假设状态空间是无界的，但其中的结果同样适用于有界状态空间，只需进行一些细微修改，也可作一些简化；详情请参见 [8, 注83] 。按照 [27], 中通过构造将原子平滑化的辅助空间，对于有界的（$\mathcal{X}$， d），等价关系（2.10）同样成立。

(iv) 在S. Eriksson-Bique [19], 最近一篇预印本所取得的局部情形研究进展的基础上，Murugan 证明了 [30, 定理16]:

$$(\mathrm{VD}) + \mathbf{J}_\phi + \mathrm{Cap}(\phi)_{\leq} \Longrightarrow \mathrm{CSJ}(\phi) \tag{2.11}$$

结合（2.9）和（2.10）可得

$$\begin{aligned} (\mathrm{VD}) + (\mathrm{QRVD}) + \mathbf{HK}(\phi) &\iff (\mathrm{VD}) + (\mathrm{QRVD}) + \mathbf{J}_\phi + \mathrm{CSJ}(\phi) \\ &\iff (\mathrm{VD}) + (\mathrm{QRVD}) + \mathbf{J}_\phi + \mathrm{Cap}(\phi)_{\leq}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

在本文中，我们既不使用蕴含关系（2.11），也不使用（2.12）中的第二个等价关系。

设 $D \subset \mathcal{X}$ 为一个开子集。设 m_0 为定义在D 上的拉东测度，其定义为

$$m_0(A) = m(A \cap D) \quad \text{for any } A \in \mathcal{B}(\overline{D}).$$

令 $\mathcal{F}^D := \{u \in \mathcal{F}: \ u = 0 \ \mathcal{E}\text{-准处处成立于 } \mathcal{X} \setminus D\}$ 上。众所周知， [11, 20] $(\mathcal{E}, \mathcal{F}^D)$ 是 $L^2(D; m_0)$ 上的狄利克雷型，对应于 X 在离开 D 时被杀死的部分过程 X^D 。记 $(\bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{F}})$ 为 $(\mathcal{E}, \mathcal{F}^D)$ 的主动反射狄利克雷空间，即

$$\bar{\mathcal{F}} := \left\{ u \in L^2(\overline{D}; m_0) : \int_{D\times D} (u(x) - u(y))^2 J(dx, dy) < \infty \right\}, \tag{2.13}$$

$$\bar{\mathcal{E}}(u, v) := \frac{1}{2} \int_{D\times D} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) J(dx, dy) \quad \text{for } u, v \in \bar{\mathcal{F}}; \tag{2.14}$$

见 [10, 11]。文献 [10] 证明了 $(\bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{F}})$ 始终是 $L^2(D; m_0)$ 上的狄利克雷型。我们称 $(D, d, m_0, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ 为反射度量测度狄利克雷空间。注意，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 依赖于 D，但为简化记号，我们不在记号中标明 D。当 $D = \mathcal{X}$ 时，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ 就是 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$。本文旨在为 $\mathcal{X}$ 的真开子集 D 寻找一个充分条件，使得 $(\bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{F}})$ 是 $L^2(\bar{D}; m_0)$ 上的正则狄利克雷型，并且满足双侧热核界 HK(ϕ)。

下面是本文的主要定理。

定理 2.8。 假设$(\mathcal{X}, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ 满足(体积倍增)、(QRVD) 和$\mathbf{HK}(\phi)$，且 D 是 $\mathcal{X}$的阿尔福斯正则开子集。那么，反射 *MMD* $(D, d, m_0, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ 在 $L^2(D; m_0)$ 上是正则的，并满足(体积倍增)、(QRVD) 和 $\mathbf{HK}(\phi)$。

3. An extension operator

本节中，我们构造一个延拓算子 $\mathfrak{E}: L^2(D; m_0) \to L^2(\mathcal{X}; m)$，它在能量和 L^2-范数方面具有良好性质。这是为 $L^2(\bar{D}; m_0)$上的(2.13)-(2.14)所定义的主动反射狄利克雷空间（$\bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{F}}$）建立 CSJ($\phi$) 性质的关键步骤，其中 $D \subset \mathcal{X}$是阿尔福斯正则的。我们的方法使用 $\mathcal{X} \setminus D$的惠特尼覆盖。根据 [29, 命题 3.2], ，对于任意非空开子集 $U \subsetneq \mathcal{X}$ 和 $\varepsilon \in (0, 1/2)$，存在一个 ε-惠特尼覆盖 U，其定义如下。

定义 3.1. 设 $\varepsilon \in (0, 1/2)$，且 U 是 $\mathcal{X}$ 的非空真开子集。若 $\{B(x_i, r_i): x_i \in U, r_i > 0, i \in I\}$ 是 U 中由开球构成的一个集族，并满足以下性质，则称其为 U 的 ε-惠特尼覆盖。

(i) 开球集族 $\{B(x_i, r_i): i \in I\}$ 两两不相交。(ii) 对所有 $i \in I$，$r_i = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} d(x_i, \mathcal{X} \setminus U)$。(iii) $\bigcup_{i \in I} B\big(x_i, 2(1+\varepsilon) r_i\big) = U$。

设 $D \subset \mathcal{X}$ 是一个满足 $D \subsetneq \mathcal{X}$ 的开子集。本文余下部分中，我们固定 $\mathcal{X} \setminus D$ 的一个 $\frac{1}{4}$-惠特尼覆盖 $\{B(x_i, r_i): x_i \in \overline{\mathcal{X} \setminus D}, r_i > 0, i \in I\}$。为简化记号，对每个 $i \in I$ 和 $\lambda > 0$，我们记

$$B_i := B(x_i, r_i) \quad \text{and} \quad \lambda B_i := B(x_i, \lambda r_i). \tag{3.1}$$

根据定义 3.1，我们有以下性质。

(D.i) 集族 $\{B_i: i \in I\}$ 两两不相交。(D.ii) $d(x_i, D) = 5r_i$ 对每个 $i \in I$ 都成立。(D.iii) $\mathcal{X} \setminus D = \bigcup_{i \in I} \frac{5}{2} B_i$。

Let

$$\Lambda := \{i \in I : 0 < r_i < \operatorname{diam}(D)/2\}.$$

以下引理给出了这个惠特尼覆盖的一些基本性质。

引理 3.2。 设 $(\mathcal{X}, d, m)$ 满足 (VD)。

(a) 若对于某些 $i, j \in I$，$1 < \lambda < 5$ 且 $\lambda B_i \cap \lambda B_j \neq \emptyset$，则

$$\frac{5-\lambda}{5+\lambda} r_i \le r_j \le \frac{5+\lambda}{5-\lambda} r_i.$$

(b) 对于 $1 < \lambda < 5$，存在一个正的常数 C，它取决于 λ 和(2.1) 中的参数，使得 $\#\{j \in I: \lambda B_j \cap \lambda B_i \neq \emptyset\} \le C$ 对每个 $i \in I$ 都成立。

(c) 如果存在 $i \in I$ 和 $0 < \lambda < 5$ 使得 $x \in \lambda B_i$，那么

$$\frac{1}{5+\lambda} d(x, \overline{D}) \le r_i \le \frac{1}{5-\lambda} d(x, \overline{D}).$$

(d) 对于 $0 < \lambda < 5$，存在一个正的常数 C，它依赖于 λ 以及(2.1) 中的参数，使得$\#\{i \in I: x \in \lambda B_i\} \le C$ 对每个 $x \in \mathcal{X} \setminus D$ 都成立。(e) 假设 D 有界。那么，对每个 r、$s > 0$,

$$\#\{i \in I : r_i < r, \lambda B_i \setminus (\cup_{x \in \overline{D}} B(x, s)) \neq \emptyset\} < \infty.$$

*Pr*证毕。 (a)。由于 $\lambda B_i \cap \lambda B_j \neq \emptyset$，我们有 $d(x_i, x_j) \leq \lambda(r_i + r_j)$。因此，由 (D.ii) 可得，

$$5r_j = d(x_j, \overline{D}) \leq d(x_i, \overline{D}) + d(x_i, x_j) \leq 5r_i + (\lambda r_i + \lambda r_j).$$

由此立即可得 $r_j \leq \frac{5+\lambda}{5-\lambda} r_i$。对称地，我们也有 $r_i \leq \frac{5+\lambda}{5-\lambda} r_j$。 (b)。由 (a)，若 $\lambda B_i \cap \lambda B_j \neq \emptyset$，则

$$B_j \subset B(x_i, \lambda r_i + \lambda r_j + r_j) \subset B(x_i, \lambda r_i + \lambda \frac{5+\lambda}{5-\lambda} r_i + \frac{5+\lambda}{5-\lambda} r_i) = \frac{5+11\lambda}{5-\lambda} B_i$$

对称地，$B_i \subset \frac{5+11\lambda}{5-\lambda} B_j$。因此，由 (D.i) 和 (2.1)，

$$C_1 m(B_i) \geq m(\frac{5+11\lambda}{5-\lambda} B_i) \geq \sum_{j \in I:\, \lambda B_i \cap \lambda B_j \neq \emptyset} m(B_j)$$

$$\geq \sum_{j \in I:\, \lambda B_i \cap \lambda B_j \neq \emptyset} C_1^{-1} m(\frac{5+11\lambda}{5-\lambda} B_j) \geq C_1^{-1} \#\{j \in I :\, \lambda B_j \cap \lambda B_i \neq \emptyset\} m(B_i),$$

其中 $C_1 = c_1(\frac{5+11\lambda}{5-\lambda})^{d_1}$。因此，$\#\{j \in I :\ \lambda B_j \cap \lambda B_i \neq \emptyset\} \leq C_1^2$。

(c)。由 (D.ii) 和以下观察可立即得出：

$$(5-\lambda) r_i \leq -d(x, x_i) + d(x_i, \overline{D}) \leq d(x, \overline{D}) \leq d(x, x_i) + d(x_i, \overline{D}) \leq (5+\lambda) r_i.$$

(d)。由 (c)，若 $x \in \lambda B_i$，

$$B_i \subset B(x, \lambda r_i + r_i) \subset B(x, \frac{1+\lambda}{5-\lambda} d(x, \overline{D}))$$

$$\subset B(x_i, \lambda r_i + \frac{1+\lambda}{5-\lambda} d(x, \overline{D})) \subset B(x_i, \lambda r_i + \frac{(1+\lambda)(5+\lambda)}{5-\lambda} r_i) = \frac{5+11\lambda}{5-\lambda} B_i.$$

因此，由 (2.1)，

$$C_2\, m(B_i) \geq m(\frac{5+11\lambda}{5-\lambda} B_i) \geq m(B(x, \frac{1+\lambda}{5-\lambda} d(x, \overline{D}))),$$

其中 $C_2 = c_1(\frac{5+11\lambda}{5-\lambda})^{d_1}$。于是，由 (D.i)，

$$m(B(x, \frac{1+\lambda}{5-\lambda} d(x, \overline{D}))) \geq \sum_{i \in I:\, x \in \lambda B_i} m(B_i)$$

$$\geq \#\{i \in I :\, x \in \lambda B_i\} C_2^{-1} m(B(x, \frac{1+\lambda}{5-\lambda} d(x, \overline{D}))).$$

因此，$\#\{i \in I :\ x \in \lambda B_i\} \leq C_2$。

(e). 固定 $z \in D$，并简记 $J = \{i \in I :\ r_i < r, \lambda B_i \setminus (\cup_{x \in D} B(x, s)) \neq \emptyset\}$。若 $r_i < r$，则

$$d(x, x_i) \leq \mathrm{diam}(D) + d(x_i, \overline{D}) \leq \mathrm{diam}(D) + 5r \quad \text{and} \quad B_i \subset B(x, \mathrm{diam}(D) + 6r).$$

由 (c)，$r_i > s/(5+\lambda)$ 对每个 $i \in J$ 均成立。因此，注意到 $B_i, i \in I$ 互不相交，并由 (2.1)

$$\#J \cdot m(B(x, \mathrm{diam}(D) + 6r)) \leq \sum_{i \in J} C_3 m(B_j) \leq C_3\, m(B(x, \mathrm{diam}(D) + 6r)),$$

其中 $C_3 = c_1(\frac{(2\mathrm{diam}(D)+11r)(5+\lambda)}{s})^{d_1}$。因此，$\#J \leq C_3$。 □

命题 3.3。 假设 $(\mathcal{X}, d, m)$ 具有 *(VD)*，且 $D \subset \mathcal{X}$ 是阿尔福斯正则的。存在一个可数集 $\{f_i : \ i \in \Lambda\} \subset L^2(\mathcal{X}; \ m)$，满足以下性质。

(D.1) $0 \le f_i \le 1$ 且 $\sum_{i\in\Lambda} f_i \le \mathbb{1}_D$ m-几乎处处

(D.2) $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}[f_i]) \le 2r_i$ 对每个 $i \in \Lambda$。

(D.3) $d(x_i, \operatorname{supp}[f_i]) \le 7r_i$ 对每个 $i \in \Lambda$。

(D.4) 存在 $C > 1$ 使得 $C^{-1}m(B_i) \le \int_D f_i(x)m(dx) \le C\, m(B_i)$ 对每个 $i \in \Lambda$。这里，$\operatorname{supp}[f_i]$ 表示 f_i的支撑，即 $\mathcal{X}$ 的最小闭子集，使得在其补集上$f = 0$ m-几乎处处成立。

证明。 对于 $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}2$，我们称 $(a, b) > (c, d)$ 按字典序排列，其含义是：要么$a > c$，要么 $a = c$, $b > d$。

回顾 (3.1) 中 $\mathcal{X} \setminus D$ 的定义:= $\{B_i$-惠特尼覆盖 $= B(x_i, \ r_i) : \ x_i \in \mathcal{X} \setminus D, \ r_i \overline{>} 0, \ i \in I\}$。对于每个 $\overline{i} \in \Lambda$，根据性质 (D.ii)，存在 $y_i \in D$ 使得$d(x_i, \ y_i) \le 6r_i$。由 (1.3) 和 (2.3)，存在常数 $C_1 \ge 1$ 和 $0 < C_2 \le C_3$，使得

$$m(23B_i) \le C_1 m(B_i) \qquad \text{for every } i \in \Lambda, \tag{3.2}$$

$$C_2 m(B_i) \le m\big(B(y_i, r_i) \cap D\big) \le C_3 m(B_i) \qquad \text{for every } i \in \Lambda. \tag{3.3}$$

对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，我们定义

$$\Lambda_k = \{i \in \Lambda : \ 2^k \le r_i < 2^{k+1}\},$$

并对 Λ_k 中的元素排序，因此记作 $\Lambda_k = \{i(k, \ n)\}_{n=1}^{N_k}$，其中 N_k 可以是 ∞。

对于 $k \in \mathbb{Z}$，我们令 $f_i^{(k)} = 0$ 对于 $i \in \bigcup_{l<k} \Lambda_l$，并按照以下规则定义 $f_{(k)\ i} \in L^2(\mathcal{X}; \ m)$，其中 $i \in \bigcup_{l=k}^{\infty} \Lambda_l$。

首先，作为~~$\frac{C_2}{2C_1C_3}$~~ $\le \frac{1}{2}$，存在某个 $f_{i\ k}^{(k)}{}_{(,1)} \in L^2(\mathcal{X}; \ m)$，使得

$$0 \le f_{i(k,1)}^{(k)} \le \mathbb{1}_{B_D(y_{i(k,1)}, r_{i(k,1)})}$$

and

$$\int_{\mathcal{X}} f_{i(k,1)}^{(k)} dm = \frac{C_2}{2C_1C_3} m(B_D(y_{i(k,1)}, r_{i(k,1)})).$$

接下来，递归地，对于 $(l, j) > (k, 1)$，存在某个 $f_{i\ l}^{(k)}{}_{(,j)} \in L^2(\mathcal{X}; \ m)$，使得

$$0 \le f_{i(l,j)}^{(k)} \le \mathbb{1}_{B_D(y_{i(l,j)}, r_{i(l,j)})} \Big(1 - \sum_{(n,q)<(l,j)} f_{i(n,q)}^{(k)}\Big) \tag{3.4}$$

并且

$$\int_{\mathcal{X}} f_{i(l,j)}^{(k)} dm = \frac{C_2}{2C_1C_3} m\big(B_D(y_{i(l,j)}, r_{i(l,j)})\big). \tag{3.5}$$

事实上，对于 $(n, q) < (l, j)$，我们注意到，如果

$$\operatorname{supp}[f_{i(n,q)}^{(k)}] \cap B_D(y_{i(l,j)}, r_{i(l,j)}) \ne \emptyset,$$

then

$$B_D(y_{i(n,q)}, r_{i(n,q)}) \cap B_D(y_{i(l,j)}, r_{i(l,j)}) \ne \emptyset,$$

这意味着

$$d(x_{i(n,q)}, x_{i(l,j)}) \le d(x_{i(n,q)}, y_{i(n,q)}) + d(y_{i(n,q)}, y_{i(l,j)}) + d(y_{i(l,j)}, x_{i(l,j)})$$

$$\begin{aligned}&\le 6r_{i(n,q)} + \big(r_{i(n,q)} + r_{i(l,j)}\big) + 6r_{i(l,j)}\\ &\le 21 r_{i(l,j)}.\end{aligned}$$

这里我们利用了如下事实：对每个 $i \in \Lambda$，$r_{i(n,q)} < 2r_{i(l,j)}$ 与 $d(x_i, y_i) \le 6r_i$，因此

$$B_{i(n,q)} \subset 23 B_{i(l,j)}. \tag{3.6}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{(n,q)<(l,j)\\ E^{(k)}_{i(n,q)} \cap B_D(y_{i(l,j)}, r_{i(l,j)}) \neq \emptyset}} \int_{\mathcal{X}} f^{(k)}_{i(n,q)} dm\\ =&\sum_{\substack{(n,q)<(l,j)\\ E^{(k)}_{i(n,q)} \cap B_D(y_{i(l,j)}, r_{i(l,j)}) \neq \emptyset}} \frac{C_2}{2C_1 C_3} m\big(B_D(y_{i(n,q)}, r_{i(n,q)})\big)\\ \le&\sum_{\substack{(n,q)<(l,j)\\ E^{(k)}_{i(n,q)} \cap B_D(y_{i(l,j)}, r_{i(l,j)}) \neq \emptyset}} \frac{C_2}{2C_1} m\big(B_{i(n,q)}\big)\\ \le&\frac{C_2}{2C_1} m(23 B_{i(l,j)})\\ \le&\frac{1}{2} m\big(B_D(y_{i(l,j)}, r_{i(l,j)})\big),\end{aligned}$$

其中，等式中用到了这一事实 $\int f^{(k)}_{i\,(\eta,q)} dm = \frac{C_2}{2C_1C_3} m\big(B_D(y_{i(\eta,q)}, r_{i(\eta,q)})\big)$ for $(n,q) < (l,j)$，第二个不等式中使用了 (3.3)，第三个不等式中使用了 (3.6) 以及 $B_i, i \in \Lambda$ 两两不相交这一事实，最后一个不等式中则根据 (3.2) 和 (3.3) 使用了 $m(23B_i) \le C_1 m(B_i) \le \frac{C_1}{C_2} m(B_D(y_i, r_i))$。由此立即可得

$$\int_{B_D(y_{i(l,j)}, r_{i(l,j)})} \Big(1 - \sum_{(n,q)<(l,j)} f^{(k)}_{i(n,q)}\Big) dm \ge \frac{1}{2} m\big(B_D(y_{i(l,j)}, r_{i(l,j)})\big).$$

由于根据构造，$\sum_{(n,q)<(l,j)} f_{(k)\,i(n,q)} \le 1$，我们可以找到某个 $f^{(k)}_{i\;l\;(,j)}$，使其满足 (3.4) 和 (3.5)。

总之，对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，我们得到一个集族 $\{f^{(k)}_i : i \in \Lambda\}$ 满足以下三个性质：

(D.k.1) $\sum_{i\in\Lambda} f^{(k)}_i \le \mathbb{1}_D$；(D.k.2) $0 \le f^{(k)}_i \le \mathbb{1}_{B_D(y_i,\ r_i)} \le \mathbb{1}_D$ 对于每个 $i \in \Lambda$；(D.k.3) $\int_{\mathcal{X}} f^{(k)}_i dm = \frac{C_2}{2C_1C_3} m(B_D(y_i,\ r_i))$ 对于每个 $i \in \Lambda$。

最后，我们选取一个子序列 $\{k_n;\ n \ge 1\}$ 使得 $k_n \to -\infty$ 当 $n \to \infty$ 满足 $f^{(k_n)\,i}$ 在 $L^2(\mathcal{X};\ m)$ 中弱收敛于某个 f_i，对每个 $i \in \Lambda$ 均成立。接下来我们验证 (D.1)–(D.4)。

首先，我们证明 (D.1)。为简便起见，记 $\langle f,\ g\rangle_{L^2(\mathcal{X};\ m)} = \int_{\mathcal{X}} fgdm$ for $f,\ g \in L^2(\mathcal{X};\ m)$。由以下观察可知，$0 \le f_i \le \mathbb{1}_{B_D(y_i,\ r_i)} \le 1$ m-几乎处处成立

$$0 \le \int_E f_i(x)m(dx) = \lim_{n\to\infty} \langle f_i^{(k_n)}, \mathbb{1}_E\rangle_{L^2(\mathcal{X};m)} \le m(E\cap B_D(y_i,r_i)) \text{ for every bounded } E \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

其中最后一个不等式用到了 (D.k.2)。接下来，对于 $\sum_{i\in\Lambda} f_i \le \mathbb{1}_D$ m-几乎处处成立，因为对于每个有界的 $E \subset \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned}\int_E \sum_{i\in\Lambda} f_i(x)m(dx) = \sum_{i\in\Lambda}\int_E f_i(x)m(dx) &= \sum_{i\in\Lambda} \lim_{n\to\infty} \langle f_i^{(k_n)}, \mathbb{1}_E\rangle_{L^2(\mathcal{X};m)} \\ &\le \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in\Lambda} \langle f_i^{(k_n)}, \mathbb{1}_E\rangle_{L^2(\mathcal{X};m)} \le m(E\cap D),\end{aligned}$$

其中最后一个不等式用到了 (D.k.1)。

(D.2) 和 (D.3) 可由以下事实推出：$d(x_i,\ y_i) \le 6r_i$ 且 $0 \le f_i \le \mathbb{1}_{B_D(y_i,\ r_i)}$ m-几乎处处成立。

最后，由 $f^{(k_n)}{}_i$ 弱收敛到 f_i （当 $n\to\infty$ 时）以及 (D.k.3),

$$\begin{aligned}\int_D f_i(x)m(dx) = \int_{B_D(y_i,r_i)} f_i(x)m(dx) &= \langle \mathbb{1}_{B_D(y_i,r_i)}, f_i\rangle_{L^2(\mathcal{X};m)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle 1_{B_D(y_i,r_i)}, f_i^{(k_n)}\rangle_{L^2(\mathcal{X};m)} = \frac{C_2}{2C_1C_3} m(B_D(y_i,r_i)),\end{aligned}$$

(D.4) 随即由 (3.3) 得出。 □

现在，我们引入延拓算子。

在本节其余部分，我们假设 $(\mathcal{X},d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ 满足 (VD)，并满足 Cap(ϕ)。对每个 $i\in I$，令 $\eta_i \in \mathcal{F}$ 使得

$$0 \le \eta_i \le 1, \quad \eta_i|_{\frac{5}{2}B_i} = 1, \quad \eta_i|_{\mathcal{X}\setminus 3B_i} = 0 \ \text{ and } \ \mathcal{E}(\eta_i,\eta_i) \le C\frac{m(B_i)}{\phi(r_i)}, \tag{3.7}$$

其中某个 $C>0$ 依赖于 Cap(ϕ)、(2.5) 与 (2.3) 中的常数。

对 $i\in I$，定义 ψ_i 为

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta_i(x)}{\sum_{j\in I}\eta_j(x)} & \text{for } x\in\mathcal{X}\setminus\overline{D}, \\ 0 & \text{for } x\in\overline{D}. \end{cases} \tag{3.8}$$

下面的引理 4.2 将证明，对每个 $i\in I$ 有 $\psi_i \in \mathcal{F}$。

我们在下面的引理中记录若干显然的观察。

引理 3.4. 假设$(\mathcal{X},d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$是(VD)，且满足Cap($\phi$)。我们有(a) $\sum_{i\in I}\psi_i = \mathbb{1}_{\mathcal{X}\setminus D}$。
(b) $\psi_i|_{\mathcal{X}\setminus 3B_i} = 0$。(c) $0 \le \psi_i \le 1$。

引理 3.5。 假设$(\mathcal{X},d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$具有(VD)性质，且满足Cap($\phi$)。回顾一下， $\Lambda := \{i\in I : 0 < r_i < \operatorname{diam}(D)/2\}$。那么，

$$\sum_{i\in\Lambda}\psi_i(x) = 1 \quad \textit{for each } x\in\mathcal{X}\setminus\overline{D} \textit{ with } d(x,\overline{D}) < \operatorname{diam}(D).$$

证明。固定一个满足 $d(x,\overline{D}) < \mathrm{diam}(\overline{D})$ 的 $x \in \mathcal{X} \setminus D$。于是，根据引理 3.2(c) 和引理 3.4(b)，对于每个满足 $\psi_i(x)\neq 0$ 的 $i \in I$，都有 $r_i < d(x,D)/2 < \mathrm{diam}(D)/2$。这意味着$\sum_{i\in\Lambda}\psi_i(x) = \sum_{i\in I}\psi_i(x) = 1$。□

定义 3.6。对每个 $u \in L^2(D;\ m_0)$，定义函数 $\mathfrak{E}u$ 于 $\mathcal{X}$ 上：

$$(\mathfrak{E}u)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{if } x \in \overline{D}, \\ \sum_{i\in\Lambda}[u]_i\psi_i(x) & \text{if } x \in \mathcal{X}\setminus\overline{D}, \end{cases}$$

其中

$$[u]_i = \frac{\int_D f_i(x)u(x)m(dx)}{\int_D f_i(x)m(dx)}. \tag{3.9}$$

且 $\{f_i;\ i\in\Lambda\}$ 是命题 *3.3* 中非负函数的可数集。

命题 3.7。设 (VD) 和 $\mathrm{Cap}(\phi)\leq$ 对 $(\mathcal{X},d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$成立，且 $D\subset\mathcal{X}$ 是阿尔福斯正则的。存在 $C>0$，使得对每个 $u\in L^2(D;\ m_0)$，$x_0\in D$ 和 $r>0$,

$$\int_{B(x_0,r)} |\mathfrak{E}u(x)|^2 m(dx) \leq C\int_{B_D(x_0,7r)} u(x)^2 m_0(dx). \tag{3.10}$$

特别地，$\mathfrak{E}$ 是从 $L^2(D;\ m_0)$ 到 $L^2(\mathcal{X};\ m)$ 的有界线性延拓算子，且满足

$$\int_{\mathcal{X}} |\mathfrak{E}u(x)|^2 m(dx) \leq C\int_{D} u(x)^2 m_0(dx). \tag{3.11}$$

证明。固定 $x_0\in\overline{D}$, $r>0$和 $u\in L^2(D;m_0)$。对于满足 $3B_i\cap B(x_0,r)\neq\emptyset$的 $i\in\Lambda$，我们选取 $x\in B(x_0,r)\cap 3B_i$。根据引理 3.2 (c)，有 $r_i\leq\frac{1}{2}d(x,D)\preceq\frac{1}{2}d(x,x_0)$。接着，由命题 3.3 (D.2) 和 (D.3)，可得

$$\begin{aligned} d(x_0,\mathrm{supp}[f_i]) &\leq d(x_0,x)+d(x,x_i)+d(x_i,\mathrm{supp}[f_i]) \\ &= d(x_0,x)+3r_i+7r_i \leq 6d(x,x_0)\leq 6r, \\ \mathrm{diam}(\mathrm{supp}[f_i]) &\leq 2r_i \leq d(x,x_0)\leq r. \end{aligned}$$

因此,

$$\{i\in\Lambda:\ 3B_i\cap B(x_0,r)\neq\emptyset\}\subset\{i\in\Lambda:\ \mathrm{supp}[f_i]\subset B(x_0,7r)\}. \tag{3.12}$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,r)\setminus\overline{D}} \mathfrak{E}u(x)^2 m(dx) &= \int_{B(x,r)\setminus\overline{D}} \big(\sum_{i\in\Lambda}[u]_i\psi_i(x)\big)^2 m(dx) \\ &\leq \int_{B(x,r)\setminus\overline{D}} \sum_{i\in\Lambda}\psi_i(x)[u]_i^2 m(dx) \\ &= \sum_{i\in\Lambda:\,3B_i\cap B(x_0,r)\neq\emptyset} [u]_i^2 \int_{3B_i\cap B(x_0,r)} \psi_i(x)m(dx) \\ &\leq \sum_{i\in\Lambda:\,\mathrm{supp}[f_i]\subset B(x_0,7r)} [u]_i^2 m(3B_i) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le C_1 \sum_{i\in\Lambda:\,\mathrm{supp}[f_i]\subset B(x_0,7r)} [u]_i^2 \int_D f_i(x)m(dx)\\
&\le C_1 \sum_{i\in\Lambda:\,\mathrm{supp}[f_i]\subset B(x_0,7r)} \frac{\int_D u(x)^2 f_i(x)m(dx)}{\int_D f_i(x)m(dx)} \int_D f_i(x)m(dx)\\
&= C_1 \sum_{i\in\Lambda:\,\mathrm{supp}[f_i]\subset B(x_0,7r)} \int_D u(x)^2 f_i(x)m(dx)\\
&\le C_1 \int_{B_D(x_0,7r)} u(x)^2 m(dx),
\end{aligned}
$$

其中，第一处不等式用到了柯西–施瓦茨不等式以及引理 3.4 的 (a) 和 (c) 部分，第二处等式用到了引理 3.4(b)，第二处不等式用到了 (3.12) 以及引理 3.4 的 (b) 和 (c) 部分，第三处不等式用到了 (2.1) 和命题 3.3(D.4)，第四处不等式用到了詹森不等式，最后一处不等式用到了命题 3.3(D.1)。这就证明了 (3.10)。在 (3.10) 中令 $r\to\infty$，即可得到不等式 (3.11)。□

4. Energy estimates

本节中，我们为定义 3.6 中定义的延拓算子 $\mathfrak{E}$ 建立如下能量估计。对于 $L^2(\mathcal{X};\,m)$ 上的狄利克雷型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 以及常数 $\alpha>0$，定义 $\mathcal{E}_\alpha(u,v):=\mathcal{E}(u,v)+\alpha\int_{\mathcal{X}} u(x)v(x)m(dx)$，其中 $u,v\in\mathcal{F}$。对于 $L^2(\bar{D};\,m_0)$ 上的主动反射狄利克雷型 $(\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{F}})$（见 (2.13)-(2.14)），也采用类似记号；即，$\bar{\mathcal{E}}_\alpha(u,v):=\bar{\mathcal{E}}(u,v)+\alpha\int_D u(x)v(x)m_0(dx)$，其中 $u,v\in\bar{\mathcal{F}}$。

命题 4.1. 假设$(\mathcal{X},d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$满足(VD)、$\mathrm{Cap}(\phi)_{\le}$和$\mathbf{J}_\phi$，且 $D\subset\mathcal{X}^{-}$是阿尔福斯正则的。那么，对每个 $u\in\mathcal{F}$，都有 $\mathfrak{E}u\in\mathcal{F}$。此外，存在一个常数 $C>0$，它取决于(VD)、$\mathrm{Cap}(\phi)_{\le}$、$\mathbf{J}_\phi$ 和(2.5)中的参数，使得

$$
\mathcal{E}_1(\mathfrak{E}u,\mathfrak{E}u)\le C\bar{\mathcal{E}}_1(u,u)\quad \textit{for every } u\in\bar{\mathcal{F}},
\tag{4.1}
$$

and

$$
\int_{B(x_0,r)\times B(x_0,r)} \big(\mathfrak{E}u(x)-\mathfrak{E}u(y)\big)^2 J(dx,dy)\le C\int_{B_D(x_0,7r)\times B_D(x_0,14r)} \big(u(x)-u(y)\big)^2 J(dx,dy)
\tag{4.2}
$$

$^{-}$对每个 $u\in\mathcal{F}$、$x_0\overline{\in} D$ 和 $0<r<\mathrm{diam}(D)$。

粗略而言，我们将左侧的能量分成三部分：$\mathcal{X}\setminus D$中的近对角线部分、$\mathcal{X}\setminus D$ 中的非对角线部分，以及 $(\mathcal{X}\setminus D)\times D$中的交叉能量部分。为简便起见，我们使用以下记号。

记号。对于每个博雷尔集 $\mathcal{O}\subset\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ 以及在 $\mathcal{O}$ 上几乎处处相对于 m 定义的博雷尔可测函数 f，我们定义

$$
\mathcal{E}^{(\mathcal{O})}(f,f):=\int_{\mathcal{O}} \big(f(x)-f(y)\big)^2 J(dx,dy).
$$

4.1. 中的近对角能量。 回顾 (3.1)， $\{\overline{B_i} := B(x_i, r_i) : x_i \in \mathcal{X} \setminus D, r_i > 0, i \in I\}$ 是 $\mathcal{X} \setminus D$ 的 $\frac{1}{4}$-惠特尼覆盖。在本小节中，我们对 $\mathcal{E}^{(\mathcal{O}_d)}$ 进行局部估计，其中

$$\mathcal{O}_d := \bigcup_{i \in I} 4B_i \times 4B_i.$$

引理 4.2. 假设$(\mathcal{X}, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ 满足(VD) 和$\mathrm{Cap}(\phi)\leq$。令 ψ_i 为由(3.8)定义的函数。则存在一个正的常数 C ，它取决于(VD)和$\mathrm{Cap}(\phi)\leq$ 中的参数，使得

$$\psi_i \in \mathcal{F} \quad and \quad \mathcal{E}(\psi_i, \psi_i) \leq C \frac{m(B_i)}{\phi(r_i)} \quad for\ i \in I.$$

证明。 对每个 $f \in I$，定义 $g_i := \sum_{\substack{j \in I \\ 3B_i \cap 3B_j \neq \emptyset}} \eta_j \in C(\mathcal{X})$，其中 $\{\eta_j;\ j \in I\}$ 由 (3.7) 定义。于是,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} (1 \vee g_i(x) - 1 \vee g_i(y))^2 J(dx, dy) \\ &\leq \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} (g_i(x) - g_i(y))^2 J(dx, dy) = \mathcal{E}(g_i, g_i) \\ &\leq \#\{j \in I : 3B_i \cap 3B_j \neq \emptyset\} \sum_{j \in I : 3B_i \cap 3B_j \neq \emptyset} \mathcal{E}(\eta_j, \eta_j) \leq C_1 \frac{m(B_i)}{\phi(r_i)}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了引理 3.2 的 (a) 和 (b) 部分、(2.5)、(2.3)，以及 $\eta_j, j \in I$ 的能量估计。因此,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} (\psi_i(x) - \psi_i(y))^2 J(dx, dy) \\ &= \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \Big(\frac{\eta_i(x)}{1 \vee g_i(x)} - \frac{\eta_i(y)}{1 \vee g_i(y)}\Big)^2 J(dx, dy) \\ &\leq 2 \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} (\eta_i(x) - \eta_i(y))^2 J(dx, dy) + 2 \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} (\frac{1}{1 \vee g_i(x)} - \frac{1}{1 \vee g_i(y)})^2 J(dx, dy) \\ &\leq 2 \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} (\eta_i(x) - \eta_i(y))^2 J(dx, dy) + 2 \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} (1 \vee g_i(x) - 1 \vee g_i(y))^2 J(dx, dy) \\ &\leq C_2 \frac{m(B_i)}{\phi(r_i)}, \end{aligned}$$

其中，等式由 g_i 和 ψ_i 的定义得出，第一个不等式利用了 $0 \leq \eta_i \leq 1$ 和 $1 \vee g_i \geq 1$ 这一事实，第二个不等式由事实 $1 \vee g_i \geq 1$ 得出，最后一个不等式则由 (4.3) 和 η_i 的能量估计得出。最后，注意到$\psi_i \in L^2(\mathcal{X}; m)$，我们得到 $\psi_i \in \mathcal{F}$。□

命题4.3。 假设对$(\mathcal{X}, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$，条件(VD)、$\mathrm{Cap}(\phi)\leq$和$\mathbf{J}_{\phi,\geq}$均成立，且$D \subset \mathcal{X}$是阿尔福斯正则的。那么存在常数 $C > 0$ 使得

$$\mathcal{E}^{\left(\mathcal{O}_d \cap (B(x_0,r) \times B(x_0,r))\right)}(\mathfrak{E}u, \mathfrak{E}u) \leq C \int_{B_D(x_0,7r) \times B_D(x_0,14r)} \big(u(x) - u(y)\big)^2 J(dx, dy),$$

对任意 $u \in \mathcal{F}$、 $x_0 \in D$ 和 $r < \mathrm{diam}(D)$均成立。

证明。 固定 $x_0 \in \overline{D}$和 $u \in L^2(D;\overline{m_0})$。对于每个满足 $B(x_0,r) \cap 4B_i \neq \emptyset$ 的 $i \in \Lambda$，我们取$x \in B(x_0, r) \cap 4B_i$。 由引理 3.2 (c)，有 $r_i \leq d(x,D)\overline{\ } \leq d(x,x_0)$。于是，根据命题 3.3 (D.2) 和 (D.3)，我们得到

$$\begin{aligned} d(x_0, \mathrm{supp}[f_i]) &\leq d(x_0,x) + d(x,x_i) + d(x_i, \mathrm{supp}[f_i]) \\ &= d(x_0,x) + 4r_i + 7r_i \leq d(x_0,x) + 11d(x,x_0) = 12d(x,x_0) \leq 12r, \\ \mathrm{diam}(\mathrm{supp}[f_i]) &\leq 2r_i \leq 2d(x,x_0) \leq 2r. \end{aligned}$$

因此,

$$\{i \in \Lambda : 4B_i \cap B(x_0,r) \neq \emptyset\} \subset \{i \in \Lambda : \mathrm{supp}[f_i] \subset B(x_0,14r)\}. \tag{4.4}$$

对于每个 $i \in \Lambda$ 和 $r < \mathrm{diam}(D)$,

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}^{\left((4B_i \times 4B_i) \cap (B(x_0,r) \times B(x_0,r))\right)}(\mathfrak{E}u, \mathfrak{E}u) \\ = \ & \mathcal{E}^{\left((4B_i \times 4B_i) \cap (B(x_0,r) \times B(x_0,r))\right)}(\mathfrak{E}u - [u]_i, \mathfrak{E}u - [u]_i) \\ = \ & \mathcal{E}^{\left((4B_i \times 4B_i) \cap (B(x_0,r) \times B(x_0,r))\right)}\Big(\sum_{\substack{j \in \Lambda \\ 3B_j \cap B(x_0,r) \neq \emptyset}} ([u]_j - [u]_i)\psi_j, \sum_{\substack{j \in \Lambda \\ 3B_j \cap B(x_0,r) \neq \emptyset}} ([u]_j - [u]_i)\psi_j \Big) \\ \leq \ & C_1 \sum_{\substack{j \in \Lambda \\ 3B_j \cap 4B_i \cap B(x_0,r) \neq \emptyset}} ([u]_i - [u]_j)^2 \mathcal{E}(\psi_j, \psi_j) \\ \leq \ & C_2 \sum_{\substack{j \in \Lambda \\ 3B_j \cap 4B_i \cap B(x_0,r) \neq \emptyset}} ([u]_i - [u]_j)^2 \frac{m(B_j)}{\phi(r_j)}, \end{aligned}$$

其中，第二个等式用到了引理 3.5；根据第一个不等式中的引理 3.2(b)，$\#\{j \in I : 3B_j \cap 4B_i \neq \emptyset\} \leq C_1$，其中$C_1$ 仅取决于 (VD) 的参数；第二个不等式用到了引理 4.2。此外，对于上述求和中的每一项，我们有

$$\begin{aligned} ([u]_i - [u]_j)^2 \frac{m(B_j)}{\phi(r_j)} &\leq \frac{\int_{D\times D} f_i(x) f_j(y) \big(u(x) - u(y)\big)^2 m(dx) m(dy)}{\int_{D\times D} f_i(x) f_j(y) m(dx) m(dy)} \cdot \frac{m(B_j)}{\phi(r_j)} \\ &\leq C_3 \int_{D\times D} f_i(x) f_j(y) \frac{\big(u(x) - u(y)\big)^2}{m(B_i)\phi(r_j)} m(dx) m(dy) \\ &\leq C_4 \int_{D\times D} f_i(x) f_j(y) \big(u(x) - u(y)\big)^2 J(dx,dy), \end{aligned}$$

其中，第一个不等式中用到了詹森不等式，而事实是

$$m(B_i) \asymp \int_D f_i(x) m(dx), m(B_j) \asymp \int_D f_j dm$$

由第二个不等式中的命题 3.3，以及 (2.3)、$\mathbf{J}_{\phi,\ \geq}$、(2.5)，还有以下事实：$\frac{1}{9} r_j \leq r_i \leq 9 r_j$ 且 $d(x,\ y) \leq d(x,\ x_i) + d(x_i,\ x_j) + d(y,\ x_j) \leq 13(r_i + r_j)$（由引理 3.2(a) 可得），以及

第三个不等式中的命题 3.3(D.2)、(D.3)。因此，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}^{\left(\mathcal{O}_d\cap(B(x_0,r)\times B(x_0,r))\right)}(\mathfrak{E}u,\mathfrak{E}u)\\
\le&\sum_{\substack{i\in I\\ 4B_i\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}}\mathcal{E}^{\left((4B_i\times 4B_i)\cap(B(x_0,r)\times B(x_0,r))\right)}(\mathfrak{E}u,\mathfrak{E}u)\\
\le& C_2C_4\sum_{\substack{i\in I\\ 4B_i\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}}\sum_{\substack{j\in I\\ 3B_j\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}}\int_{D\times D}f_i(x)f_j(y)\big(u(x)-u(y)\big)^2J(dx,dy)\\
\le& C_2C_4\int_{B_D(x_0,14r)\times B_D(x_0,7r)}\big(u(x)-u(y)\big)^2J(dx,dy),
\end{aligned}\tag{4.5}$$

最后一个不等式中，我们使用了 (3.12)、(4.4) 和命题 3.3 (D.i)。 □

4.2. **中的非对角能量**$\mathcal{X}\setminus D$。 回忆一下， $\mathcal{O}_d=\bigcup_{i\in I}4B_i\times 4B_i$。在本小节中，我们考虑 $\mathcal{E}^{\left(\mathcal{O}_f\cap(B(x_0,r)\times B(x_0,r))\right)}$，其中

$$\mathcal{O}_f=\big((\mathcal{X}\setminus\overline{D})\times(\mathcal{X}\setminus\overline{D})\big)\setminus\mathcal{O}_d.$$

命题 4.4。 假设 (VD)、Cap(ϕ)≤和 **J**ϕ 在$(\mathcal{X},d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$上成立，并且$D\subset\mathcal{X}$ 是阿尔福斯正则的。存在常数 $C>0$ 使得

$$\mathcal{E}^{\left(\mathcal{O}_f\cap(B(x_0,r)\times B(x_0,r))\right)}(\mathfrak{E}u,\mathfrak{E}u)\le C\int_{B_D(x_0,7r)\times B_D(x_0,7r)}\big(u(x)-u(y)\big)^2J(dx,dy),$$

对每个 $u\in\mathcal{F}$、 $x_0\in D$ 和 $0<r<\operatorname{diam}(D)$均成立。

证明。 首先，我们断言

$$d(x,y)\ge\frac{1}{9}\max\{r_i,r_j\}\quad\text{ for every } i,j\in I,\ x\in 3B_i,\ y\in 3B_j\setminus 4B_i.\tag{4.6}$$

为证明 (4.6)，我们考虑两种情形。

情形 1： $4B_i\cap 4B_j\neq\emptyset$。在此情形下， $r_i\ge r_j/9$ 由引理 3.2 (a) 可得，从而

$$d(x,y)\ge d(x_i,y)-d(x_i,x)\ge 4r_i-3r_i=r_i\ge\max\{r_i,r_j\}/9.$$

情形 2： $4B_i\cap 4B_j=\emptyset$。在此情形下，我们有

$$\begin{aligned}
&d(x,y)\ge d(\mathcal{X}\setminus 4B_j,y)\ge d(\mathcal{X}\setminus 4B_j,x_j)-d(y,x_j)\ge 4r_j-3r_j\ge r_j,\\
&d(x,y)\ge d(x_i,y)-d(x_i,x)\ge r_i.
\end{aligned}$$

因此，(4.6) 在两种情形下均成立。由此，

$$d(x_i,\ x_j)\ \le 3r_i+d(x,\ \ y)\ +3r_j\le 55d(x,\ \ y)\text{ 对每一个 }\ i,\ \ j\in I,\ \ \ x\in 3B_i,\ \ \ y\in 3B_j\setminus 4B_i.\tag{4.7}$$

现在我们继续对.....进行界定

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}^{\left(\mathcal{O}_f\cap(B(x_0,r)\times B(x_0,r)\right)}(\mathfrak{E}u,\mathfrak{E}u)\\
=&\int_{\mathcal{O}_f\cap\left(B(x_0,r)\times B(x_0,r)\right)}\big(\sum_{i\in\Lambda}[u]_i\psi_i(x)-\sum_{j\in\Lambda}[u]_j\psi_j(y)\big)^2J(dx,dy)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{O}_f\cap\left(B(x_0,r)\times B(x_0,r)\right)} \Big(\sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in\Lambda}\psi_i(x)\psi_j(y)([u]_i-[u]_j)\Big)^2 J(dx,dy)\\
&\le \int_{\mathcal{O}_f\cap\left(B(x_0,r)\times B(x_0,r)\right)} \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in\Lambda}\psi_i(x)\psi_j(y)\big([u]_i-[u]_j\big)^2 J(dx,dy)\\
&\le \sum_{\substack{i\in\Lambda\\ 3B_i\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}}\ \sum_{\substack{j\in\Lambda\\ 3B_j\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}} \big([u]_i-[u]_j\big)^2 \int_{3B_i\times(3B_j\setminus 4B_i)}\psi_i(x)\psi_j(y)J(dx,dy)\\
&\le C_1 \sum_{\substack{i\in\Lambda\\ 3B_i\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}}\ \sum_{\substack{j\in\Lambda\\ 3B_j\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}} \frac{\big([u]_i-[u]_j\big)^2 m(B_i)m(B_j)}{m\big(B(x_i,d(x_i,x_j)+r_i+r_j)\big)\phi(x_i,d(x_i,x_j)+r_i+r_j)}\\
&\le C_2 \sum_{\substack{i\in\Lambda\\ 3B_i\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}}\ \sum_{\substack{j\in\Lambda\\ 3B_j\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}} \frac{\int_{D\times D} f_i(z)f_j(w)\big(u(z)-u(w)\big)^2 m(dz)m(dw)}{m\big(B(x_i,d(x_i,x_j)+r_i+r_j)\big)\phi(x_i,d(x_i,x_j)+r_i+r_j)}\\
&\le C_3 \sum_{\substack{i\in\Lambda\\ 3B_i\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}}\ \sum_{\substack{j\in\Lambda\\ 3B_j\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}} \int_{D\times D} f_i(z)f_j(w)\big(u(z)-u(w)\big)^2 J(dz,dw)\\
&\le C_3 \int_{B_D(x_0,7r)\times B_D(x_0,7r)} \big(u(z)-u(w)\big)^2 J(dz,dw).
\end{aligned}
$$

第二个等号由引理 3.5 得出。上面的第一个不等式由引理 3.5 和詹森不等式得出。第二个不等式源于事实 $3B_i\times 4B_i\subset 4B_i\times 4B_i\subset\mathcal{O}_d$，因此 $(3B_i\times 4B_i)\cap\mathcal{O}_f=\emptyset$。在第三个不等式中，我们用到了 (VD)、(2.3)、$\mathbf{J}_{\phi,\le}$、(4.6)、(4.7) 和 (2.5)。第四个不等式成立是因为詹森不等式以及 $\int_D f_i(x)m(dx)\asymp m(B_i)$ $\int_D f_j dm\asymp m(B_j)$；第五个不等式则由 (2.5)、事实 $d(x,\ y)\le d(x_i,\ y_i)+9r_i+9r_j$ 对每个 $x\in\mathrm{supp}[f_i],\ y\in\mathrm{supp}[f_j]$ 均成立（根据命题 3.3 和 $\mathbf{J}_{\phi,\ge}$）得出。最后一个不等式成立是因为事实 $\sum_{i\in\Lambda} f_i\le 1$ 以及 (3.12)。至此，命题得证。□

4.3。**交叉能量**。最后，我们考虑能量 $\mathcal{E}^{(\mathcal{O}_c\cap(B(x_0,\ r)\times B(x_0,\ r)))}$，其中

$$\mathcal{O}_c:=(\mathcal{X}\setminus\overline{D})\times D.$$

命题 4.5。假设对于 $(\mathcal{X},d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$，(VD)、$\mathrm{Cap}(\phi)_{\le}$ 和 $\mathbf{J}_\phi$ 成立，并且 $D\subset\mathcal{X}$ 是阿尔福斯正则的。存在常数 $C>0$ 使得

$$\mathcal{E}^{\left(\mathcal{O}_c\cap(B(x_0,r)\times B(x_0,r))\right)}(\mathfrak{E}u,\mathfrak{E}u)\le C\int_{B_D(x_0,7r)\times B_D(x_0,r)}\big(u(x)-u(y)\big)^2J(dx,dy),$$

$^-$对于每个 $u\in\mathcal{F}$、$x_0\in D$ 和 $0<r<\mathrm{diam}(D)$。

证明。 首先，我们断言

$$d(x,y)\ge\frac{2}{5}d(x_i,y)\quad\text{for every } i\in I,\ x\in 3B_i,\ y\in D,\tag{4.8}$$

$$d(x_i,y)\ge\frac{5}{14}d(z,y)\quad\text{for every } i\in I,\ z\in\mathrm{supp}[f_i],\ y\in D.\tag{4.9}$$

为证明 (4.8)，注意到 $d(x,x_i)\le 3r_i$ 和 $d(x,y)\ge d(x_i,y)-d(x,x_i)\ge d(x_i,D)-3r_i\ge 5r_i-3r_i=2r_i$ 由 (D.ii) 可得，因此

$$\frac{d(x,y)}{d(x_i,y)}\ge\frac{d(x,y)}{d(x,y)+d(x_i,x)}\ge\frac{d(x,y)}{d(x,y)+3r_i}\ge\frac{2r_i}{2r_i+3r_i}=\frac{2}{5}.$$

为证明 (4.9)，注意到 $d(x_i,y)\ge d(x_i,D)\ge 5r_i$，由 (D.ii) 可得；而 $d(x_i,z)\le 9r_i$，由命题 3.3 (D.2) 和 (D.3) 可得，因此

$$\frac{d(x_i,y)}{d(z,y)}\ge\frac{d(x_i,y)}{d(x_i,y)+d(x_i,z)}\ge\frac{d(x_i,y)}{d(x_i,y)+9r_i}\ge\frac{5r_i}{5r_i+9r_i}=\frac{5}{14}.$$

现在我们来估计

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}^{\left(\mathcal{O}_c\cap(B(x_0,r)\times B(x_0,r))\right)}(\mathfrak{E}u,\mathfrak{E}u)\\
=&\int_{(B(x_0,r)\setminus\overline{D})\times B_D(x_0,r)}\Big(\sum_{i\in\Lambda}[u]_i\psi_i(x)-u(y)\Big)^2J(dx,dy)\\
\le&\int_{(B(x_0,r)\setminus\overline{D})\times B_D(x_0,r)}\sum_{i\in\Lambda}\psi_i(x)\big([u]_i-u(y)\big)^2J(dx,dy)\\
\le&\sum_{\substack{i\in\Lambda\\3B_i\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}}\int_{3B_i\times B_D(x_0,r)}\big([u]_i-u(y)\big)^2J(dx,dy)\\
\le&C_1\sum_{\substack{i\in\Lambda\\3B_i\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}}\int_{3B_i\times B_D(x_0,r)}\frac{\big([u]_i-u(y)\big)^2}{m\big(B(y,d(x_i,y))\big)\phi\big(d(x_i,y)\big)}m(dx)m(dy)\\
=&C_1\sum_{\substack{i\in\Lambda\\3B_i\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}}\int_{B_D(x_0,r)}\frac{m(3B_i)\big([u]_i-u(y)\big)^2}{m\big(B(y,d(x_i,y))\big)\phi\big(d(x_i,y)\big)}m(dy)\\
\le&C_2\sum_{\substack{i\in\Lambda\\3B_i\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}}\int_{B_D(x_0,r)\times D}\frac{f_i(z)\big(u(z)-u(y)\big)^2}{m\big(B(y,d(x_i,y))\big)\phi\big(d(x_i,y)\big)}m(dy)m(dz)\\
\le&C_3\sum_{\substack{i\in\Lambda\\3B_i\cap B(x_0,r)\neq\emptyset}}\int_{B_D(x_0,r)\times D}f_i(z)\big(u(z)-u(y)\big)^2J(dy,dz)\\
\le&C_3\int_{B_D(x_0,r)\times B_D(x_0,7r)}\big(u(y)-u(z)\big)^2J(dy,dz).
\end{aligned}$$

上述推导中，第一次不等式用到了詹森不等式以及事实 $\psi_i(x)\ge 0,\sum_{i\in I}\psi_i(x)=1$；第二次不等式用到了事实 $0\le\psi_i\le 1$ 和 ψ_i 在 $3B_i$ 上有支撑；第三次不等式用到了 (4.8)、(2.3)、(2.5) 以及 $\mathbf{J}_{\phi,\le}$；第四次不等式用到了詹森不等式以及事实 $\int_D f\,dm\asymp m(3B_i)$；第五次不等式用到了 (4.9)、(2.3)、(2.5) 以及 $\mathbf{J}_{\phi,\ge}$；最后一个不等式用到了 (3.12) 以及事实 $\sum_{i\in I}f_i\le 1$。□

4.4. **证明 o f 命题 4.1**。 我们先回顾引理 [17, Lemma 2.1] 中的以下结论 .

引理4.6. 假设 $(\mathcal{X}, d, m)$ 满足 (VD)。存在常数 $c > 0$，它仅取决于(2.1) 和(2.5) 中的界，使得对任意 $x \in \mathcal{X}$ 和 $r > 0$,

$$\int_{\mathcal{X}\setminus B(x,r)} \frac{1}{m(B(x,d(x,y))\phi(d(x,y))} m(dy) \le \frac{c}{\phi(r)}.$$

因此，我们得到以下估计。

引理4.7. 假设$(\mathcal{X}, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ 满足(VD) 和$\mathbf{J}_{\phi,\le}$。存在常数 $c > 0$，它仅取决于(2.1)、(2.5) 和 $\mathbf{J}_{\phi,\le}$ 中的界，使得对任意 $f \in L^2(\mathcal{X}; m)$ 和$r > 0$,

$$\int_{\substack{\mathcal{X}\times\mathcal{X}\\ d(x,y)\ge r}} (f(x)-f(y))^2 J(dx,dy) \le \frac{c}{\phi(r)} \|f\|^2_{L^2(\mathcal{X};m)}.$$

证明。

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{\mathcal{X}\times\mathcal{X}\\ d(x,y)\ge r}} (f(x)-f(y))^2 J(dx,dy) \le \int_{\substack{\mathcal{X}\times\mathcal{X}\\ d(x,y)\ge r}} (2f(x)^2+2f(y)^2) J(dx,dy)\\
&= 4\int_{\substack{\mathcal{X}\times\mathcal{X}\\ d(x,y)\ge r}} f(x)^2 J(dx,dy) = \int_{\mathcal{X}} f(x)^2 \Big(\int_{\mathcal{X}\setminus B(x,r)} J(x,y) m(dy)\Big) m(dx)\\
&\le \frac{c}{\phi(r)} \int_{\mathcal{X}} f(x)^2 m(dx) = \frac{c}{\phi(r)} \|f\|^2_{L^2(\mathcal{X};m)},
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 $\mathbf{J}_{\phi,\ \le}$ 和引理4.6得出。 □

命题 *4.1* 的证明。 估计式 (4.2) 由命题4.3、4.4和4.5得出。当 D无界时，在 (4.2) 中取 $r \to \infty$，并利用命题 3.7，可得 $\mathfrak{E}u \in \mathcal{F}$，因此 (4.1) 成立。

剩下的情形是证明当 D 有界时的 $\mathfrak{E}u \in \mathcal{F}$。对于 $0 < r < 1$，定义

$$D_r := \bigcup_{x_0 \in \overline{D}} B(x_0, r\,\mathrm{diam}(D)).$$

由于 $L^2(\mathcal{X};\ m)$ 上的狄利克雷型 $(\mathcal{E},\ \mathcal{F})$ 具有正则性，存在某个 $\psi \in C_c(\mathcal{X}) \cap \mathcal{F}$，使得

$$\psi|_{D_{1/4}} = 1,\ \ \psi|_{\mathcal{X}\setminus D_{1/2}} = 0 \quad \text{and} \quad 0 \le \psi \le 1.$$

¯首先，我们可以检查对每个 $u \in \mathcal{F}$ 都有 $\psi\mathfrak{E}u \in \mathcal{F}$。事实上,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} (\psi(x)\mathfrak{E}u(x) - \psi(y)\mathfrak{E}u(y))^2 J(dx,dy)\\
&\le 2\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \psi(x)^2 (\mathfrak{E}u(x)-\mathfrak{E}u(y))^2 J(dx,dy) + 2\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \mathfrak{E}u(y)^2 (\psi(x)-\psi(y))^2 J(dx,dy)\\
&\le 2\int_{D_{1/2}\times\mathcal{X}} (\mathfrak{E}u(x)-\mathfrak{E}u(y))^2 J(dx,dy) + 2\int_{\mathcal{X}\times(\mathcal{X}\setminus D_{1/8})} \mathfrak{E}u(y)^2 (\psi(x)-\psi(y))^2 J(dx,dy)\\
&\quad + 2\int_{(\mathcal{X}\setminus D_{1/4})\times D_{1/8}} \mathfrak{E}u(y)^2 (\psi(x)-\psi(y))^2 J(dx,dy). \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

我们声称，该和由 $C_0\mathcal{E}_1(u,\ u)$ 控制，其中 C_0 是一个常数，只依赖于 ψ、$\mathrm{diam}(D)$、(VD) 中的参数、$\mathrm{Cap}(\phi)\leq$ 以及 $\mathbf{J}_\phi$。事实上，对于第一项，根据引理 2.4，我们可以选取一个有限子集 $z_j\in D,\ 1\leq j\leq N$，使得 $D_{1/2}\subset\bigcup_{j=1}^N B(z_j,\ 3\mathrm{diam}(D)/4)$。然后由 (4.2) 可得，

$$\sum_{j=1}^N\int_{B(z_j,3\mathrm{diam}(D)/4)\times B(z_j,\mathrm{diam}(D))}(\mathfrak{E}u(x)-\mathfrak{E}u(y))^2J(dx,dy)\leq C_1N\bar{\mathcal{E}}(u,u).$$

此外，由引理4.7和命题 3.7，

$$\sum_{j=1}^N\int_{B(z_j,3\mathrm{diam}(D)/4)\times(\mathcal{X}\setminus B(z_j,\mathrm{diam}(D)))}(\mathfrak{E}u(x)-\mathfrak{E}u(y))^2J(dx,dy)\leq\frac{C_2N}{\phi(\mathrm{diam}(D)/4)}\|u\|^2_{L^2(\overline{D};m_0)}.$$

由此可知，(4.10) 的第一项是有限的。接下来注意到 $\mathfrak{E}u=\sum_{i\in\Lambda:\ \ 3B_i\cap(\mathcal{X}\setminus D_{1/8})\neq\emptyset}[u]_i\psi_i$在 $\mathcal{X}\setminus D_{1/8}$上，因此根据引理 3.2(e)，$\mathfrak{E}u$ 在 $\mathcal{X}\setminus D_{1/8}$ 上有界，因为 $\#\{i\in\Lambda:\ 3B_i\cap(\mathcal{X}\setminus D_{1/8})\neq\emptyset\}<\infty$。因此，(4.10) 的第二项由 $\mathcal{E}(\psi,\psi)$ 的一个倍数所界。最后，对于 (4.10) 的第三项

$$\begin{aligned}&\int_{(\mathcal{X}\setminus D_{1/4})\times D_{1/8}}\mathfrak{E}u(y)^2(\psi(x)-\psi(y))^2J(dx,dy)\leq 4\int_{(\mathcal{X}\setminus D_{1/4})\times D_{1/8}}\mathfrak{E}u(y)^2J(dx,dy)\\&\leq 4\int_{D_{1/8}}\mathfrak{E}u(y)^2\int_{\mathcal{X}\setminus B(x,\mathrm{diam}(D)/8)}J(x,y)m(dx)m(dy)\\&\leq 4\int_{D_{1/8}}\mathfrak{E}u(y)^2\frac{C_3}{\phi(\mathrm{diam}(D)/8)}m(dy)\leq\frac{C_4}{\phi(\mathrm{diam}(D)/8)}\|u\|_{L^2(\overline{D};m_0)}\end{aligned}$$

根据引理4.6和命题 3.7。这证明了 (4.10) 由 $C_0\mathcal{E}(u,u)$ 所界这一断言。注意，由 (3.11)，当 $\psi\mathfrak{E}u\in L^2(\mathcal{X};\ m)$ 时，我们有 $\psi\mathfrak{E}u\in\mathcal{F}$。

接下来，注意到由引理 3.2(e)，$\#\{i\in\Lambda:\ 3B_i\cap(\mathcal{X}\setminus D_{1/4})\neq\emptyset\}<\infty$。因此，由引理 4.2 可得 $(1-\psi)\mathfrak{E}u=\sum_{i\in\Lambda:\ \ 3B_i\cap(\mathcal{X}\setminus D_{1/4})\neq\emptyset}(1-\psi)[u]_i\psi_i\in\mathcal{F}$其中

$$\begin{aligned}\mathcal{E}((1-\psi)\mathfrak{E}u,(1-\psi)\mathfrak{E}u)^{1/2}&\leq\sum_{i\in\Lambda:\,3B_i\cap(\mathcal{X}\setminus D_{1/4})\neq\emptyset}[u]_i\left(\|1-\psi\|_\infty\mathcal{E}(\psi_i,\psi_i)^{1/2}+\|\psi_i\|_\infty\mathcal{E}(\psi,\psi)^{1/2}\right)\\&\leq c\sum_{i\in\Lambda:\,3B_i\cap(\mathcal{X}\setminus D_{1/4})\neq\emptyset}\|u\|_{L^2(\bar{D};m_0)}\end{aligned}$$

由此可得 $\mathfrak{E}u=\psi\mathfrak{E}u+(1-\psi)\mathfrak{E}u\in\mathcal{F}$，且 (4.1) 成立。 □

本节最后证明 $(\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{F}})$ 是 $L^2(D;\ m_0)$ 上的正则狄利克雷型。

推论 4.8。设 $(\mathcal{X},d,m,\mathcal{E},\mathcal{F})$ 满足 (VD)、$\mathrm{Cap}(\phi)\leq$ 和 $\mathbf{J}_\phi$，且 $D\subset\mathcal{X}$ 是阿尔福斯正则的。那么，$(\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{F}})$ 是 $L^2(D;\ m_0)$上的正则狄利克雷型。

证明。首先，对于每个 $u\in C_c(D)$，我们都可以找到 $v\in C_c(\mathcal{X})$，使得根据 Tietze 延拓定理有 $v|_D=u$。然后，根据正则性，存在 $v_n\in\mathcal{F}\cap C_c(\mathcal{X})\ n\geq 1$，使得$\|v_n-v\|_{L^\infty}\to 0$如 $n\to\infty$。接着，$u_n=v_n|_D\in\mathcal{F}\cap C_c(D)$，且 $\|u_n-u\|_{L^\infty}\to 0$如 $n\to\infty$。这表明 $C_c(D)\cap\mathcal{F}$在 $C_c(D)$ 中稠密。

接下来，根据命题 4.1， $\mathfrak{E}u \in \mathcal{F}$对于每个 $u \in \mathcal{F}$，存在一个序列 $v_n \in \mathcal{F}\cap C_c(\mathcal{X})$ $n \geq 1$，使得 $\|v_n - \mathfrak{E}u\|_{\mathcal{F}} \to 0$如 $n \to \infty$，其中 $\|f\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{\mathcal{E}(f,\ f) + \|f\|^2_{L^2(\mathcal{X};\ m)}}$ 对于 $f \in \mathcal{F}$。然后，$v_n = u_n\big|_D \in \mathcal{F}$且$\|v_n|_D - v\|_{\bar{\mathcal{F}}} \to 0$如 $n \to \infty$。这表明 $\mathcal{F} \cap C_c(\overline{D})$ 关于范数 $\|f\|_{\bar{\mathcal{F}}} = \sqrt{\bar{\mathcal{E}}(f,\ f) + \|f\|^2_{L^2(D;\ m_0)}}$ 在 $\bar{\mathcal{F}}$ 中稠密。□

5. Heat kernel estimates

本节证明，反射跳扩散满足混合稳定型热核估计**HK(**ϕ**)**。注意，在体积倍增 (VD) 和 (QRVD) 条件下，由定理 1.13]和定理 1.20]（见注 2.7）可得$\mathbf{J}_\phi$ +CSJ(ϕ) $\Longleftrightarrow$ **HK(**ϕ**)**。根据引理 2.5，只需证明反射 MMD $(D, d, m_0, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ 满足 CSJ(ϕ)。下面，我们给出 CSJ(ϕ) 的一种等价表述，在我们的情形下更易于验证。

定义 5.1. 我们称条件 CSJB(ϕ) 对 $(\mathcal{X}, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ 成立，若存在正常数 C_1, C_2, c和 $\lambda \geq 3$，使得对每个 $r \in (0, c\,\mathrm{diam}(\mathcal{X}))$、几乎所有 $x_0 \in \mathcal{X}$ 以及任意 $f \in \mathcal{F}$，都存在一个适用于 $B(x_0, r) \subset B(x_0, 2r)$ 的截断函数 $\varphi \in \mathcal{F}$，使得

$$\begin{aligned}&\int_{B(x_0,3r)\times B(x_0,3r)} f(x)^2\big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)^2 J(dx,dy)\\ \leq\ & C_1\int_{B(x_0,\lambda r)\times B(x_0,\lambda r)}\big(f(x)-f(y)\big)^2 J(dx,dy)+\frac{C_2}{\phi(r)}\int_{B(x_0,\lambda r)} f(x)^2 m(dx).\end{aligned}$$

引理 5.2。 假设 (VD) 和 $\mathbf{J}_{\phi,\leq}$ 对 $(\mathcal{X}, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$成立。则 $\mathrm{CSJ}(\phi)\Longleftrightarrow\mathrm{CSJB}(\phi)$.

证明。 ($\Longrightarrow$) 假设 CSJ(ϕ)成立，并令 $c, C_0 \in (0, 1], C_1, C_2$为 CSJ($\phi$)的参数。那么，对于 $R = r \in (0, c\,\mathrm{diam}(\mathcal{X}))$，$x_0 \in \mathcal{X}$，$f \in \mathcal{F}$，存在一个截断函数 $\varphi \in \mathcal{F}$，使得对于$B(x_0, r) \subset B(x_0, 2r) = B(x_0, R + r)$

$$\begin{aligned}&\int_{B(x_0,(2+C_0)r)} f^2 d\Gamma(\varphi,\varphi)\\ &\leq C_1\int_{U\times U^*}(f(x)-f(y))^2 J(dx,dy)+\frac{C_2}{\phi(r)}\int_{B(x_0,(2+C_0)r)} f^2 dm \qquad (5.1)\\ &\leq C_1\int_{B(x_0,(2+C_0)r)\times B(x_0,(2+C_0)r)}(f(x)-f(y))^2 J(dx,dy)+\frac{C_2}{\phi(r)}\int_{B(x_0,(2+C_0)r)} f^2 dm.\end{aligned}$$

此外，由于 $\mathbf{J}_{\phi,\leq}$ 以及 (2.5)，在 $\mathcal{X}\setminus B(x_0,\ (2+C_0)r)$ 上，

$$\begin{aligned}\Gamma(\varphi,\varphi)(dx) &= \int_{\mathcal{X}}(\varphi(x)-\varphi(y))^2 J(dx,dy)\\ &\leq C_3 m(dx)\int_{B(x_0,2r)}\frac{m(dy)}{m(B(x,d(x,y)))\phi(d(x,y))}\\ &\leq C_3 m(dx)\int_{\mathcal{X}\setminus B(x,C_0 r)}\frac{m(dy)}{m(B(x,d(x,y)))\phi(d(x,y))}\\ &\leq C_4 m(dx)/\phi(r).\end{aligned}$$

因此,

$$\int_{B(x_0,3r)\setminus B(x_0,(2+C_0)r)} f^2 d\Gamma(\varphi,\varphi) \le \frac{C_4}{\phi(r)} \int_{B(x_0,3r)\setminus B(x_0,(2+C_0)r)} f^2 dm. \tag{5.2}$$

注意到

$$\int_{B(x_0,3r)\times B(x_0,3r)} f(x)^2\big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)^2 J(dx,dy) \le \int_{B(x_0,3r)} f^2 d\Gamma(\varphi,\varphi).$$

由 (5.1) 和 (5.2) 可得 CSJB(ϕ)，其中 $\lambda = 3$。

($\Longleftarrow$) 假设 CSJB(ϕ) 成立，并设 λ, c, C_1, C_2 为 CSJB(ϕ) 中的正常数。固定 $x_0 \in \mathcal{X}$、$f \in \mathcal{F}$ 和 $0 < r \le R < 4c\,\mathrm{diam}(\mathcal{X})$。记

$$B_l = B(x_0, R + lr/4) \ \text{ for } l = 0,1,2,3,4.$$

我们如下定义 $B_2 \subset B_3$ 的截断函数 φ。

(i) 根据引理 2.4，我们可以找到一个有限点集 $\{x_j\}_{j\in J} \subset B_2 \setminus B_1$，使得$\{B(x_j, \frac{r}{8\lambda}) : j \in J\}$两两不相交，且 $\bigcup_{j\in J} B(x_j, \frac{r}{4\lambda}) \supset B_2 \setminus B_1$。(ii) 对每个 $j \in J$，根据 CSJB(ϕ)，我们为 $B(x_j, \frac{r}{4\lambda})$ 选择一个截断函数 $\varphi_j \in \mathcal{F}$，$\subset B(x_j, \frac{r}{2\lambda})$，使得

$$\begin{aligned} &\int_{B(x_j,\frac{3r}{4\lambda})\times B(x_j,\frac{3r}{4\lambda})} f(x)^2\big(\varphi_j(x)-\varphi_j(y)\big)^2 J(dx,dy) \\ &\le C_1 \int_{B(x_j,r/4)\times B(x_j,r/4)} \big(f(x)-f(y)\big)^2 J(dx,dy) + \frac{C_2}{\phi(r)} \int_{B(x_j,r/4)} f(x)^2 m(dx). \end{aligned} \tag{5.3}$$

(iii) 选择 $\psi \in C_c(\mathcal{X}) \cap \mathcal{F}$，使得 $0 \le \psi \le 1$、$\psi|_{B_1} = 1$ 和 $\psi|_{\mathcal{X}\setminus B_2} = 0$。定义

$$\varphi = (\max_{j\in J} \varphi_j) \vee \psi.$$

那么，φ 是 $B_2 \subset B_3$ 的截断函数。自动地，φ 是 $B_0 = B(x_0, R) \subset B_4 = B(x_0, R+r)$ 的截断函数。

注意到 $\varphi = \max_{j\in J} \varphi_j$ 在 $\mathcal{X}\setminus B_1$ 上，且 $|\varphi(x)-\varphi(y)| \le \max_{j\in J} |\varphi_j(x)-\varphi_j(y)|$ 对 $x, y \in \mathcal{X}\setminus B_1$ 成立。我们有

$$\begin{aligned} &\int_{\substack{(B_4\setminus B_1)\times(B_4\setminus B_1)\\ d(x,y)\le \frac{r}{4\lambda}}} f(x)^2\big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)^2 J(dx,dy) \\ \le\ &\int_{\substack{(B_4\setminus B_1)\times(B_4\setminus B_1)\\ d(x,y)\le \frac{r}{4\lambda}}} f(x)^2 \sum_{j\in J} \big(\varphi_j(x)-\varphi_j(y)\big)^2 J(dx,dy) \\ \le\ &\sum_{j\in J} \int_{B(x_j,\frac{3r}{4\lambda})\times B(x_j,\frac{3r}{4\lambda})} f(x)^2\big(\varphi_j(x)-\varphi_j(y)\big)^2 J(dx,dy) \\ \le\ &\sum_{j\in J} \Big(C_1 \int_{B(x_j,r/4)\times B(x_j,r/4)} \big(f(x)-f(y)\big)^2 J(dx,dy) + \frac{C_2}{\phi(r)} \int_{B(x_j,r/4)} f(x)^2 m(dx)\Big) \\ \le\ &C_1C_3 \int_{U\times U} \big(f(x)-f(y)\big)^2 J(dx,dy) + \frac{C_2C_3}{\phi(r)} \int_U f(x)^2 m(dx), \end{aligned} \tag{5.4}$$

其中 $U = B_4 \setminus B_0$。在第二个不等式中，我们用到了这样一个事实：只有当 $\varphi_j(x) - \varphi_j(y) \neq 0$ 时，才有 $\{x, y\} \cap B(x_j, \frac{2r}{4\lambda}) \neq \emptyset$，这意味着 $\{x, y\} \subset B(x_j, \frac{3r}{4\lambda})$。在第三个不等式中，我们用到了 (5.3)。在最后一个不等式中，我们用到了以下事实：对每个 $j \in J$，都有 $B(x_j, r/4) \subset B_4 \setminus B_0$；并且根据引理 2.4，$\sum_{j\in J} 1_{B(x_j, r/4)} \leq C_3 < \infty$。

此外，根据引理 4.6 和 4.7、(2.5) 以及 φ 是 $B_2 \subset B_3$的一个截断函数这一事实，我们可以很容易地验证

$$\int_{\substack{(B_4\setminus B_1)\times(B_4\setminus B_1)\\ d(x,y)>\frac{r}{4\lambda}}} f(x)^2\big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)^2 J(dx,dy) \leq \frac{C_4}{\phi(r)} \int_{B_4\setminus B_1} f(x)^2 m(dx), \tag{5.5}$$

$$\int_{(B_4\setminus B_1)\times\left(\mathcal{X}\setminus(B_4\setminus B_1)\right)} f(x)^2\big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)^2 J(dx,dy) \leq \frac{C_5}{\phi(r)} \int_{B_4\setminus B_1} f(x)^2 m(dx), \tag{5.6}$$

$$\int_K f^2 d\Gamma(\varphi,\varphi) \leq \frac{C_6}{\phi(r)} \int_K f(x)^2 m(dx) \quad \text{for each } K \subset \mathcal{X} \setminus (B_4 \setminus B_1). \tag{5.7}$$

这表明，根据 (5.4)–(5.7)，CSJ(ϕ) 对 $C_0 = 1$ 成立。 □

定理 5.3。 设 (VD)、**J**ϕ和CSJ(ϕ) 对$(\mathcal{X}, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$成立，且 $D \subset \mathcal{X}$ 是阿尔福斯正则的。则CSJ(ϕ) 对$(D, d, m_0, \mathcal{E}, \mathcal{F})$成立。

证明。 根据引理 5.2，CSJB(ϕ) 对 $(\mathcal{X}, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$成立。令 λ, c, C_1, C_2为 CSJB(ϕ) 对 $(\mathcal{X}, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ 的参数。

固定 $x_0 \in D$, $f \in \mathcal{F}$, $0 < r < c\,\mathrm{diam}(D)$ 和 $g = \mathfrak{E}f$。由命题 4.1，$g \in \mathcal{F}$。因此，根据 CSJB(ϕ)，对于 $(\mathcal{X}, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$，存在一个截断函数 $\varphi \in \mathcal{F}$，适用于 $B(x_0, r) \subset B(x_0, 2r)$，使得

$$\begin{aligned}
&\int_{B_D(x_0,3r)\times B_D(x_0,3r)} f(x)^2\big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)^2 J(dx,dy)\\
&\leq \int_{B(x_0,3r)\times B(x_0,3r)} g(x)^2\big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)^2 J(dx,dy)\\
&\leq C_1 \int_{B(x_0,\lambda r)\times B(x_0,\lambda r)} \big(g(x)-g(y)\big)^2 J(dx,dy) + \frac{C_2}{\phi(r)} \int_{B(x_0,\lambda r)} g(x)^2 m(dx).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

由命题 3.7 和 4.1，

$$\int_{B(x_0,\lambda r)} g(x)^2 m(dx) \leq C_3 \int_{B_D(x_0,7\lambda r)} f(x)^2 m(dx),$$

$$\int_{B(x_0,\lambda r)\times B(x_0,\lambda r)} \big(g(x)-g(y)\big)^2 J(dx,dy) \leq C_4 \int_{B_D(x_0,14\lambda r)\times B_D(x_0,14\lambda r)} \big(f(x)-f(y)\big)^2 J(dx,dy).$$

由此可知，对于 $(D, d, m_0, \mathcal{E}, \mathcal{F})$，CSJB($\phi$) 成立。根据引理 5.2，这就完成了定理的证明。□

定理 *2.8* 的证明。 定理 2.8 是引理 2.5、定理 5.3 以及注 2.7 中 (2.10) 的直接推论。□

References

[1] S. Andres 和 M.T. Barlow。截断函数的能量不等式及其若干应用。

J. Reine ( ), –。

Angew. Math. **699** 2015 183 215

[2] R. Anttila。内一致域上反射扩散的次高斯热核估计。arXiv:2510.04725[3] M.T. Barlow 和 R.F. Bass。抛物型哈纳克不等式的稳定性。 *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004年)第 4 期，1501–1533。[4] M.T. Barlow、R.F. Bass 和 T. Kumagai。度量测度空间上抛物型哈纳克不等式的稳定性。 *J. Math. Soc. Japan (2)* **58** (2006年)，485–519。[5] M.T. Barlow、Z.-Q. Chen 和 M. Murugan。EHI 的稳定性与 MMD 空间的正则性。arXiv:2008.05152。[6] K. Bogdan、K. Burdzy 和 Z.-Q. Chen。删失稳定过程。 *Probab. Theory Related Fields* **127** (2003年)，第 1 期，89–152。[7] M.T. Barlow 和 M. Murugan。椭圆型哈纳克不等式的稳定性。 *Ann. Math. (2)* **187** (2018年)，777–823。[8] S. Cao 和 Z.-Q. Chen。一致域上反射扩散的边界迹定理。arXiv:2410.19201。即将发表于 *Probab. Theory Related Fields*。[9] S. Cao 和 Z.-Q. Chen。度量测度空间上非局部算子的一致边界哈纳克原理。arXiv:2410.20719。[10] Z.-Q. Chen。关于反射狄利克雷空间。 *Probab. Theory Related Fields* **94** (1992年)，135-162。[11] Z.-Q. Chen 和 M. Fukushima。 *Symmetric Markov Processes*、 *Time Change*、 *and Boundary Theory*。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2012年。[12] Z.-Q. Chen 和 M. Fukushima。狄利克雷型理论中的局部化公式。

Proc. Amer. Math. Soc. ( ), -。

140 2012 1815 1822

[13] Z.-Q. Chen、M. Fukushima 和 J. Ying。对称马尔可夫过程的迹及其刻画。*Ann. Probab.* **34** (2006年)，1052-1102。[14] Z.-Q. Chen 和 T. Kumagai。

d *Stochastic Process* -集上类稳

Appl. **108** 2003 27 62

定过程的热核估计。( )， -。[15] Z.-Q. Chen 和 T. Kumagai。度量测度空间上混合类型跳过程的热核估计。 *Probab. Theory Related Fields* **140** (2008年)，第 1-2 期，277–317。[16] Z.-Q. Chen、P. Kim、T. Kumagai 和 J. Wang。内一致域上带跳跃的反射扩散的热核。 *Trans. Amer. Math. Soc.* **375** (2022年)，第 10 期，6797–6841。[17] Z.-Q. Chen、T. Kumagai 和 J. Wang。度量测度空间上对称跳跃过程热核估计的稳定性。 *Mem. Amer. Math. Soc.* **271** (2021年)，第 1330 卷。[18] Z.-Q. Chen、T. Kumagai 和 J. Wang。对称非局部狄利克雷型的抛物型哈纳克不等式稳定性。 *J. Eur. Math. Soc.* **22** (

2020 11, 3747 3803)，第 – 期。S. Eriksson-Bique。关于电阻猜

[19] 2602 05477

想。arXiv: 。[20] M. Fukushima、Y.

Oshima 和 M. Takeda。《 *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*》，扩充版。Walter de Gruyter & Co.，柏林，2011年。[21] A. Grigor

´ *Adv.* yan、E.

Math. **330** 2018 433 515

Hu 和 J. Hu。跳跃型狄利克雷型热核的双边估计。( )， –。[22] A. Grigor´yan、J. Hu 和 K.-S. Lau。度量空间上狄利克雷型的广义容量、哈纳克不等式与热核。 *J. Math. Soc. Japan.* **67** (2015年) 1485–1549。[23] P. Gyrya 和 L. Saloff-Coste。内一致域中的诺伊曼热核与狄利克雷热核。 *Astérisque*

No. **336** 2011 +144 ( )，viii 页。

[24] J. Heinonen。《度量空间分析讲义》，Universitext。施普林格出版社，纽约，2001年。x+140 页。[25] A. Jonsson 和 H. Wallin。 *Function Spaces on Subsets of* $\mathbb{R}^n$。《数学报告》，第 2 卷，第 1 部分。Harwood 学术出版社，伦敦，1984年。[26] N. Kajino 和 M. Murugan。一致域上反射扩散边界迹的热核估计。arXiv:2312.08546。

[27] J. Malmquist. 度量测度空间上带原子的对称跳跃过程的稳定性结果. *Potential Anal.* **59** (2023年), 167-235. [28] P. Mattila 与 P. Saaranen. Ahlfors-David 正则集与双利普希茨映射. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicae Mathematica* **34** 2009 487 502 ( ), - . [29] M. Murugan. 一致域上反射扩散的热核与延拓性质. *Probab. Theory Related Field* **190** 2024 543 599 ( ), - . [30] M. Murugan. 稳定型热核估计的一个简化刻画 . arXiv:2602.06388

Department of Mathematics, The Chinese University of Hong Kong, Shatin, Hong Kong
Email address: spcao@math.cuhk.edu.hk

Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, WA 98195, USA
Email address: zqchen@uw.edu