arXiv:2602.10497v1 [math.CV] 11 Feb 2026

¨Hörmander–Bernhardsson 极值零点的可容许性

KHAI-HOAN NGUYEN-DANG

Abstract. 设 φ 为 H¨ormander–Bernhardsson 极值函数，$(\pm\tau_n)_{n\geq 1}$ 为其全部实零点。利用近期对零点集 τ_n的解析描述，我们证明，零点平方 $\lambda_n = \tau_n^2$ 构成 Quine–Heydari–Song 意义下的可容许序列：热迹$\Theta(t) = \sum_{n\geq 1} e^{-\lambda_n t}$ 具有关于 $t^{1/2}$的纯幂完整 $t \to 0^+$ 展开。证明基于一种解析标准形

$$\lambda_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)^2 + q!\Big(\left(n + \tfrac{1}{2}\right)^{-2}\Big),$$

关于 t的一致泰勒展开，以及对由此得到的加权高斯和进行 Mellin–Hurwitz ζ 分析。作为应用，我们得到相关谱 ζ 函数和 ζ 正则化乘积的亚纯延拓及特殊值信息，并获得典范乘积 $\prod_n(1 + z/\lambda_n)$ 的尖锐大参数渐近分析。特别地，我们推导出 Bondarenko–Ortega-Cerd`a–Radchenko–Seip 关于与 φ相关的狄利克雷型级数特殊值的猜想。我们还确立了奇偶二分：当 m为偶数时，序列 (τ_n^m) 是 QHS 可容许的；而当 m 为奇数时，一个非零的 t对数 t 项会阻碍可容许性。

Contents

1. 引言 2 1.1. H¨ormander–Bernhardsson 极值函数及其零点集 2 1.2. 热迹、ζ正则化与可容许序列 3 1.3. 主要结果：可容许性、奇偶性，以及关于 L_+ 3的函数方程 1.4. 方法：加权高斯和的解析标准形与梅林分析 5 1.5. 与其他研究的关系及范围 6 1.6. 关于可容许性概念 7 1.7. 未来方向 8 论文结构 9 致谢 9 2. Quine–Heydari–Song 意义下的可容许序列 9 2.1. 设定 9 2.2. 关于条件（1）和（3） 10 2.3. 化归为加权高斯和 11 2.4. $\Theta_m(t)$ 的完整渐近分析 13 2.5. $F_r(t)$ 的完整渐近分析 15 2.6. 完整热迹展开与可容许性 17 3. 可容许性的推论与应用 18 3.1. 首项热系数与 Weyl 定律 18 3.2. 谱 ζ 函数：亚纯延拓与特殊值 20

Date：2026年2月12日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 30D15、33E30、34A30、42A05。
Key words and phrases. H¨ormander–Bernhardsson 极值函数、Quine–Heydari–Song 的可容许性、热迹、谱 ζ 函数。

3.3. 预解算子迹与典范乘积 $W(\lambda)$ 22 3.4. 稳健可容许性判据：二次格的解析扰动 25 4. 在 [BOCRS25] 26中证明猜想 1 4.1. φ 26的反演恒等式 4.2. 扇形对数与偶系数不变性 27 4.3. 0 处及 ∞ 29处的系数对应关系 5. 高次幂 $(\tau_n)_{n\geq 1}$ 30 的可容许性 5.1. 所有 m 31的条件（1）和（3） 5.2. 奇 m: τ_n^m 31中的一个显式 a_n^{-1}项 5.3. 奇 m：调和加权和产生对数 33 5.4. 奇 m： $\theta_m(t)$中的一个非零 $t\log\, t$ 项 33 5.5. 偶 m：可容许性 35 6. 奇偶二分的推论 38 6.1. 与 τ_n^m 38相关的谱ζ函数 6.2. 偶次幂：简洁的 QHS 推论 38 6.3. 偶次幂：典范乘积及无穷远处的系数提取 40 6.4. 奇次幂：留数与对数 40 参考文献 42

1. Introduction

1.1. H¨ormander–Bernhardsson 极值函数及其零点集。 复分析与调和分析中的一个经典主题是：对指定指数型的整函数所提出的极值问题，蕴含着刚性的谱数据：零点、典范乘积以及狄利克雷级数，其表现仿佛源自一维谱。一个尤为引人注目的例子是 H¨ormander 和 Bernhardsson [HB93] 所研究的极值问题：在满足归一化条件 $f(0) = 1$ 的指数型至多为 π 的整函数 f 中，使其在实轴上的 L^1–范数最小。等价地，用 Paley–Wiener 的语言来说，我们要在点值固定的约束下寻找PW^1–范数最小的函数。唯一的极值函数（除自然对称变换外）是一个偶整函数 φ，其指数型为 π，归一化为 $\varphi(0) = 1$，且具有实单零点

$$\{\pm\tau_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}, \qquad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots \to \infty.$$

Bondarenko–Ortega-Cerd`a–Radchenko–Seip [BOCRS25、BOCRS26], 的研究近期极大地推动了对该函数的分析。他们得到了一个分解$\varphi(z) = \Phi(z)\Phi(-z)$，将其表示为典范乘积，并建立了一个反演型非线性函数方程，将 Φ 在 z 处的值与其在 $(2\pi iCz)^{-1}$ 处的值联系起来，其中常数 $C > 0$具有明确表达式。作者还给出了关于 H¨ormander– Bernhardsson 极值函数的实零点 $\pm\tau_n$ 的精确渐近信息。他们指出，偏差 $\tau_n - (n + \frac{1}{2})$从整体上看非常小（特别是属于 ℓ^2 型），因此 $\{\tau_n\}$ 处于半整数格的稳定扰动这一经典情形。

这一结构最有成效的副产品之一，是由这些零点构造出的两个狄利克雷级数的出现，

$$L_+(s) := \sum_{n\geq 1} \tau_n^{-s}, \qquad L_-(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\tau_n^s}, \qquad (\Re s > 1),$$

其解析延拓、特殊值和留数反映了关于 φ 及其函数方程的精细信息。

本文关注同一零点集的另一面，在某种意义上与之互补：按照 Quine– Heydari–Song [QHS93] 的意义，从 $\{\tau_n\}$ 中提取的序列的可容许性 。这一概念属于 ζ正则化的一般演算，旨在精确刻画使谱 ζ 函数和 ζ正则化乘积呈现椭圆谱理论中那种行为的解析条件。我们的目标是将 H¨ormander–Bernhardsson 零点纳入这一演算框架，再利用由此得到的 ζ 计算工具解决 [BOCRS25]中提出的猜想 1。

1.2. **热迹、ζ正则化与可容许序列**。给定右半平面中的一个序列(X_n)，可以构造热迹

$$H(t) := \sum_n e^{-X_n t}, \qquad t > 0,$$

以及与之相关的谱 ζ 函数

$$\zeta_X(s) := \sum_n X_n^{-s}.$$

在几何与解析谱理论中，当(X_n)由正椭圆算子的特征值组成时， $H(t)$具有完整的短时间渐近展开，而 $\zeta_X(s)$可亚纯延拓至复平面。这是构造 ζ正则化行列式 $\det_\zeta X := \exp(-\zeta_X'(0))$ 的标准途径之一，其源于 Ray–Singer 的工作及其后续改进 [RS71, See67, Gil95, Vor87]。Quine–Heydari–Song [QHS93]精确地抽象出了在不借助几何信息的情况下运用这套梅林变换方法所需的(X_n)假设。其定义要求 $H(t)$在 $t > 0$处收敛，具有作为 $t \to 0^+$ 纯幂（无对数）的完整多重齐次展开，以及一个排除病态抵消的温和增长条件。在这些条件下，纯解析框架中便可得到熟悉的一系列结果： $\zeta_X(s)$的亚纯延拓、留数系数恒等式、非正整数处的特殊值公式，以及定义良好的 ζ正则化乘积 [QHS93, §2–§4]。

从这一观点出发，自然会问由H¨ormander– Bernhardsson零点导出的序列是否具有谱行为。第一个障碍在于，零点集 $\{\tau_n\}$ 并不是二次格点；相反，它是半整数的精细扰动。在 [BOCRS25] 中证明了

$$\tau_n = n + \frac{1}{2} - d_n, \qquad d_n \in \ell^2,$$

一种Paley–Wiener型扰动条件，它对 PW^1 中的唯一性与插值以及控制典范乘积都很有效。然而，与格点的 ℓ^2–接近本身并不意味着相应的热迹是多重齐次的：对数项可能通过调和权重出现，而此类对数被严格的Quine–Heydari–Song定义禁止。精确理解对数何时出现、何时不出现，是本文的核心要点之一。

1.3. **主要结果：可容许性、奇偶性以及 L_+的函数方程**。我们的基本谱对象是平方零序列

$$\lambda_n := \tau_n^2, \qquad n \geq 1,$$

以及相应的热迹

$$\theta(t) := \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda_n t}.$$

我们的第一个主要定理证明，(λ_n) 按照 Quine–Heydari–Song 的意义是可容许的。

定理 1.1（热迹展开与可容许性）。热迹 $\theta(t) = \sum_{n\geq 1} e^{-\tau_n^2 t}$具有完整的短时间渐近展开，当 $t \to 0^+$ 时，该展开由纯半整数次幂组成：

$$\theta(t) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, t^{j_\nu}, \qquad j_\nu \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}, \quad j_0 < j_1 < \cdots \to +\infty.$$

因此，$(\tau_n^2)_{n\geq 1}$ 在 [QHS93] 的意义下是可容许的。

与一般的 QHS 演算 [QHS93]，一样，这一可容许性陈述立即给出谱 ζ 函数 $Z(s) := \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-s} = L_+(2s)$ 的亚纯延拓、留数系数恒等式，以及在非正整数处的特殊值公式。此外，它还为无穷远处的典范乘积 $W(\lambda) = \prod_{n\geq 1}(1+\lambda/\lambda_n)$ 提供了稳健的系数提取机制。这些结果构成了我们证明 L_+ 在 [BOCRS25] 中发现的猜想的对称性的解析基础。

定理 1.2（[BOCRS25] 的猜想 1）。设 C 是 Φ 在 [BOCRS25] 中的反演函数方程里出现的常数。那么对每个 $k \in \mathbb{Z}$，

$$L_+(-2k) = \frac{L_+(2k)}{(2\pi i C)^{2k}}.$$

定理 1.2 的证明阐明了可容许性在这一问题中的概念性作用：极值函数的函数方程为 φ 导出一个精确的反演恒等式，从而对小扇区（$Tz = (2\pi i C z)^{-1}$）中 $\log \varphi(Tz)$ 的渐近展开中的偶系数施加奇偶性约束。可容许性提供了缺失的解析输入，通过无穷远处的系数提取，将这些偶系数与负整数处的 ζ 特殊值对应起来。这样一来，关于 $L_+(2k)$ 与 $L_+(-2k)$ 之间的猜想关系，就成为两个可独立计算的系数泛函之间的等式。

超越平方情形，我们为幂序列确立了一个精确的奇偶性现象（奇偶二分）。设 $m \geq 1$ 为一个整数，并考虑 $\theta_m(t) = \sum_{n\geq 1} e^{-\tau_n^m t}$.

定理 1.3

（*1*）如果 m 为偶数，则 $(\tau_n^m)_{n\geq 1}$ 在 [QHS93] 的意义下是可容许的。（*2*）如果 m 为奇数，则 $\theta_m(t)$ 的小时间展开包含一个非零对数项 $\kappa_m\, t\log t$。特别地，(τ_n^m) 在严格 *QHS* 意义下不具备可容许性。

奇次幂出现对数并非估计造成的假象：它是由 $a_n^{-1}\,\tau_n^m$ 的渐近展开中的一个特定项所必然导致的（其中 $a_n = n + \frac{1}{2}$），其系数可通过 $L_-(m)$ 显式表示，从而使热迹图景与 L_+ 在负奇整数处的留数公式相协调；该公式记载于 [BOCRS25, §10.2]。因此，奇次幂不具可容许性有着精确的解析特征：小时间对数项对应于梅林空间中的高阶极点现象，也对应于预解迹和典范乘积的大参数展开中的 $\log\lambda$ 修正项。这自然引出了对 QHS 可容许性的对数–多重齐次扩展，与奇点几何问题中出现对数热项的方式相平行 [Che83, Gil95]。

最后，我们的论证得出了一个关于二次格点解析扰动的一般可容许性判据，它的适用范围应远远超出 H¨ormander–Bernhardsson 的情形。

定理 1.4（二次格点的解析扰动）。设 $a > 0$，且 q 在 $[0, a^{-2}]$ 的一个邻域内解析。则序列

$$\lambda_n = (n+a)^2 + q\big((n+a)^{-2}\big)$$

按照 [QHS93]，的定义是可容许的，前提是 $\lambda_n > 0$ 对所有 n 均成立。

1.4. 方法：加权高斯和的解析正规形与梅林分析。Quine–Heydari–Song 可容许性概念的一个显著特征是严格多重齐次的短时展开

$$\sum_{n} e^{-X_n t} \sim \sum_{\nu \ge 0} c_\nu t^{j_\nu} \qquad (t \to 0^+),$$

其中不允许对数因子 $t^{\alpha}(\log t)^{q}$。这一条件并非装饰性的：它正是迫使相关谱 ζ 函数 $Z(s) = \sum_n X_n^{-s}$至多具有简单极点的条件，也正是使 ζ 正则化乘积演算表现得如同整洁的魏尔斯特拉斯理论的原因（例如，典范乘积由有限个热系数控制）。

当前问题之所以微妙，源于一个结构性原因：H ¨ormander–Bernhardsson 极值零点 τ_n 是带有半整数扰动的，其首个临界修正项的量级为 $1/n$。更确切地说，记 $a_n := n + \frac{1}{2}$，BOCRS参数化给出

$$\tau_n = a_n - \rho(a_n^{-1}), \qquad \rho(z) = \sum_{m \ge 1} a_m z^m, \quad a_m \ge 0,$$

因此，主导偏差 $a_n - \tau_n$ 的阶为 a_n^{-1}（事实上有展开式 $\rho(a_n^{-1}) = \frac{a_1}{a_n} + O(a_n^{-3})$）。这恰好是对指数逐项线性化会产生调和权重的情形：

$$e^{-\tau_n t} = e^{-a_n t} \exp\big((a_n - \tau_n)t\big) = e^{-a_n t}\Big(1 + t\,\frac{a_1}{a_n} + O(t a_n^{-3}) + O(t^2 a_n^{-2})\Big).$$

对 n 求和第一修正项，便得到经典的对数放大 n

$$t \sum_{n \ge 1} \frac{e^{-a_n t}}{a_n} \sim t \log \frac{1}{t} \qquad (t \to 0^+),$$

因此，尽管逐点扰动 $a_n - \tau_n$ 很小，临界权 a_n^{-1} 的整体效应仍会在热迹中产生真正的 t对数 t 项。换言之：障碍并非局限于 n 的局部，而是存在于拉普拉斯求和的整体过程中；只有追踪精确的首个不可求和修正项，才能发现它。这正是 BOCRS可容许性（对 a_n 的一种 ℓ^2 扰动）并不自动蕴含 QHS可容许性（纯幂热展开）的原因。

解决方法是找出一种正规形，使得有问题的调和权不可能出现。对于零点平方

$$\lambda_n := \tau_n^2,$$

ρ 的奇性意味着解析重参数化

$$\tau_n = a_n - a_n^{-1}\sigma(a_n^{-2}) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_n = a_n^2 + q(a_n^{-2}),$$

其中 q 在 $[0, r_0]$ 的某个邻域内解析（因而在那里有界）。这是关键的抵消：平方运算消除了 a_n^{-1} 项，并将其替换为 u_n 中的解析修正项：$= a_n^{-2}$。因此，在热迹中

$$\theta(t) = \sum_{n \ge 1} e^{-\lambda_n t} = \sum_{n \ge 1} e^{-a_n^2 t}\, e^{-t q(u_n)},$$

我们从未遇到产生 $t$log t 的调和权 a_n^{-1}。

证明随后分为两个稳健的部分。

（i）在时间上进行泰勒展开，并带有可求和余项。我们将 $e^{-tq(u)}$ 按 t 的幂展开，对于 $u \in [0, 4/9]$，该展开是一致的；而不在 u中展开 q。因此，对于任意截断阶

R,

$$\theta(t) = \sum_{r=0}^{R} \frac{(-t)^r}{r!} F_r(t) \; + \; O(t^{R+1})\Theta_0(t), \qquad F_r(t) := \sum_{n\geq 1} q(u_n)^r e^{-a_n^2 t},$$

因此误差 i 继承模型高斯和 $\Theta_0(t)$的尖锐 $t^{-1/2}$ 增长 $= \sum_{n\geq 1} e^{-a_n^2 t}$.

（ii）加权高斯和的梅林变换与围道平移。对于固定的 r，权 $u \mapsto q(u)^r$ 是解析的，并在 $[0, 4/9]$ 上具有绝对收敛的幂级数。这将 $F_r(t)$化为加权 theta 和的一个收敛线性组合

$$\Theta_m(t) := \sum_{n\geq 1} a_n^{-2m} e^{-a_n^2 t}.$$

然后我们通过梅林反演与围道平移研究 $\Theta_m(t)$：

$$\Theta_m(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re s = c} \Gamma(s)\, t^{-s} \Big(\zeta(2(m+s), \tfrac{1}{2}) - 2^{2(m+s)} \Big)\, ds,$$

利用 Γ 的亚纯结构以及赫尔维茨 ζ 函数。由于所有极点均为单极点，且在偶次幂情形下互不重合，因此可得到关于 t 的半整数次幂的完整渐近展开，且余项受控；而 q 的解析性保证随后的无穷 m求和几何收敛，并可逐项进行。由此得到 $\theta(t)$的完整展开，从而得到 QHS 可容许性。

对于奇次幂 $\tau_n^{2\ell+1}$，同一梅林机制精确说明了对数是如何产生的：调和权 a_n^{-1}出现在 $\tau_n^{2\ell+1}$ 的大n 展开中，相应的加权高斯和具有首项渐近 $\frac{1}{m}\log(1/t)$，从而迫使热迹中出现非零的 t log t 项。

关键之处在于，对于 $\lambda_n = \tau_n^2$ （更一般地，对于偶次幂 τ_n^{2p}），谱容许解析标准形

$$\lambda_n = (n+a)^2 + q\big((n+a)^{-2}\big),$$

从而排除调和权重，并允许纯粹的多重齐次梅林演算。

可容许性证明背后的解析引擎是热迹 $\Theta(t)$ 及其小-t渐近分析。热核展开及其谱意义的标准参考文献是[Gil95, BGV92, Vas03]。当可能出现对数项时（通常出现在奇异或边值情形中），Cheeger 的分析提供了一个有用的基准 [Che83]。

要从热渐近过渡到 ζ 信息，我们依赖于梅林变换与积分路径平移技术。对于 θ 型的和以及调和和渐近，一个特别有效的工具集是 Flajolet–Gourdon–Dumas 的梅林渐近框架 [FGD95], ，连同梅林–巴恩斯技术与经典渐近分析参考文献 [PK01, Olv74, Won01]，以及 DLMF 中整理的标准特殊函数恒等式（例如赫尔维茨 ζ 函数） [NIS25]。

1.5. 与其他研究的关系及范围。 极值函数 φ 属于带限函数傅里叶分析极值问题的一个悠久脉络，其起源可追溯至帕利–维纳理论 [PW34] 以及整函数希尔伯特空间的德布朗日理论 [dB68]。H¨ormander–Bernhardsson 最小化问题 [HB93] 是其中一个独特的 PW^1 类似问题，其解展现出异常刚性的结构。 [BOCRS25] 近期的分析揭示了相关狄利克雷级数新的代数对称性和解析延拓。该研究计划的早期阶段见于 [BOCRS26], ，这些工作对 φ的零点集 $\{\pm\tau_n\}$ 进行了定量控制，包括其与半整数的 ℓ^2型接近性 τ_n 。最近， [BCOCS24, Ins24, Ber25]从帕利–维纳和德布朗日框架出发，提出了关于同一极值函数主题的互补观点。特别是，这些研究发展了一种基于算子和

空间理论的框架，用于研究 PW^p 中的点值以及模型空间中的点值，并提供了相关工具，可用于需要对极值函数及其相关谱数据作出稳定性论断的情形。

本文中的可容许性概念以 ζ 正则化乘积的语言表述。Quine–Heydari–Song [QHS93], 给出了序列正则化乘积的系统框架，提出了关于序列的解析条件，从而保证相关 ζ 函数具有亚纯延拓，并且相应的正则化乘积可以通过 exp(−ζ′(0)) 定义。这种序列演算与椭圆算子理论中发展起来的谱对应相一致：Seeley 的复幂 [See67]以及 Ray–Singer 解析扭率计划 [RS71] 说明了热迹渐近如何控制谱ζ函数及行列式的亚纯延拓。

作为背景，并为便于与更广泛的 ζ 正则化理论（以及反常现象）进行比较，我们还参考了 Voros 和 Kontsevich–Vishik 的经典著作 [Vor87, KV94]，以及专著形式的论述 [JL93, Pay12, Kir01, EOR+94]。

1.6. 关于可容许性概念。 形容词可容许 在这里讨论的两种情形中指的是截然不同的假设。

在 BOCRS 框架中，考虑严格递增序列 $t = (t_n)_{n\ge1} \subset (0,\infty)$，并称其可容许，如果

$$d_n := n + \tfrac{1}{2} - t_n \in \ell^2.$$

这是一个扰动型 Paley–Wiener 型条件：它保证由 t构造的典范乘积，例如

$$\psi_t(z) := \prod_{n\ge1}\Big(1 - \frac{z^2}{t_n^2}\Big), \qquad \Psi_t(z) := \prod_{n\ge1}\Big(1 + (-1)^n\frac{z}{t_n}\Big),$$

与相应的半整数模型乘积具有基本相同的指数型和增长行为，并支持对 PW^1 进行插值论证。

在 QHS 框架中，从一个满足 $\Re X_k > 0$ 的序列 (X_k) 出发，并假设热迹

$$H(t) := \sum_k e^{-X_k t}$$

con对 $t > 0$ 收敛，且当 $t \to 0^+$ 时具有如下形式的完整 渐近展开

$$H(t) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{j_\nu}\, t^{j_\nu}, \qquad j_0 < j_1 < \cdots \to +\infty,$$

以及温和的小t 增长条件（例如，对于某个 $\beta > 0$， $t^\beta H(t) \to 0$ ）。关键的是，这一假设是纯多重齐次的（没有对数项），专为梅林变换论证而设，从而得到相关 ζ 函数及 ζ 正则化乘积的亚纯延拓。

BOCRS可容许性是度量条件，用于控制点 t_n 与 $n + \frac{1}{2}$ （某种 ℓ^2 扰动）之间的接近程度；而 –QHS可容许性是渐近条件，用于控制 $H(t)$的小时间结构。因此，一般而言，这两个概念互不蕴含：

- •QHS–可容许序列未必是 BOCRS可容许的（例如， $X_k = k^2$ 具有标准热迹展开，但 k^2 并非 $k + \frac{1}{2}$ 的 ℓ^2 扰动）。 –
- BOCRS–可容许序列不一定是 QHS–可容许的。特别是，对于 H¨ormander–Bernhardsson 零点序列 τ_n ，有如下形式的展开式

$$\tau_n = n + \tfrac{1}{2} - \frac{a_1}{n+\frac{1}{2}} + O\big(n^{-3}\big),$$

因此 $n+\frac{1}{2}-\tau_n \asymp 1/n$。展开 $e^{-\tau_n t} = e^{-(n+\frac{1}{2})t}\exp\big((n+\frac{1}{2}-\tau_n)t\big)$ 可得到一个与下式成正比的修正项

$$t\sum_{n\geq 1}\frac{e^{-(n+\frac{1}{2})t}}{n+\frac{1}{2}} \sim t\log(1/t),$$

这会在 $H(t)$ 中产生 $t\log t$ 项，因此违反了纯幂渐近展开这一严格的 QHS 要求。

如果希望涵盖热迹中含有 $t^\alpha(\log t)^q$ 项的序列（例如，奇次幂重参数化，如 $X_k=\tau_k^{2m+1}$，自然会产生这类项），一种自然的做法是扩展 QHS可容许性，允许对数多重齐次 展开。在 ζ 函数方面，这对应于允许高阶极点（简单极点对应纯幂），随后便可在这一更广泛的框架下使用 ζ 重整化来定义正则化乘积。

1.7. 未来方向。 解析标准形

$$\lambda_n = (n+a)^2 + q\big((n+a)^{-2}\big) \qquad (q \text{ analytic near } [0,a^{-2}])$$

并非 H¨ormander–Bernhardsson 极值问题 [BOCRS25]，所独有，而是多个领域中常见的大参数结构。以下列出三个具体方向，在这些方向中，预计同一机制也适用，而且本文的可容许性判据几乎可以原样应用。

(1) 一维谱问题（Sturm–Liouville、Schr¨odinger）。对于区间上的正则边值问题，特征值满足

$$\lambda_n \sim (n+a)^2 + \sum_{j\geq 1} c_j (n+a)^{-2j},$$

其中系数由边界条件和势决定（Liouville–Green 渐近分析）；例如参见 [Zet05, LS91, PT87]。当渐近级数受到解析控制时（例如对于解析势或可积族），修正项通常可以整理为 $(n+a)^{-2}$ 的解析函数，从而使谱纳入二次格点框架的解析扰动研究范围。一个直接的成果是得到简洁的热展开，进而获得行列式类信息；比较[GY60, BFK95, KM04]。

(2) 特殊函数谱（贝塞尔函数和艾里型零点及其 ζ 函数）。分析和数学物理中的许多典范乘积都由特殊函数的零点 x_n 构成，其大-n展开为

$$x_n \sim (n+a)\pi + \sum_{j\geq 1}\frac{\alpha_j}{(n+a)^{2j-1}}.$$

平方后，通常得到

$$x_n^2 \sim \pi^2(n+a)^2 + \widetilde{q}\big((n+a)^{-2}\big),$$

其中 $\widetilde{q}$ 在适当的一致性假设下于 0 的邻域内解析。这正是解析二次格点范式，并由此导出 QHS 风格的可容许性（比较[QHS93，参见67]）、相关 ζ 函数的亚纯延拓以及受控的典范乘积；贝塞尔 ζ 函数研究的代表性成果见 [AB96、Spr04、NBC22、AKR25]。

(3) **具有二次化格点的 de Branges 采样问题**。 在 Paley–Wiener 环境中，Hermite–Biehler 函数（或正弦型函数）的零点常常构成近似格点 $n+a+\varepsilon_n$；参见 [dB68、Sei04]。在自然地转而考察这类零点的平方（或偶次幂）的问题中（例如通过偶次典范乘积、谱变换或函数方程），所得序列往往会变成

$$(n+a)^2 + q\big((n+a)^{-2}\big)$$

当扰动由解析重参数化产生时，具有 q 解析性。这为 Paley–Wiener 情形下的热迹渐近和 ζ 正则化乘积公式提供了一条可移植的途径；它与纯粹的 ℓ^2 扰动理论相平行（但并不相同）：可将密度观点 [Lan67, OCS02, MNO12] 与指数 Riesz 基 [Kad64, Avd74, Pav79]的尖锐扰动判据相比较。

在这三种情形中，同一原理决定是否会出现对数：奇次幂（或未平方）扰动可能留下残余的 $(n+a)^{-1}$ 调和权，从而产生t对数 t；而偶次幂二次化往往会消去该项，并恢复纯幂热演算；例如参见[BS85, BS87]中的正则奇异热展开。

论文结构。 第 2 节回顾 Quine–Heydari–Song 意义下可容许性的概念，并为平方零序列 $\lambda_n = \tau_n^2$建立基本框架。特别地，我们推导出解析标准形 $\lambda_n = a_n^2 + q(a_n^{-2})$，并将热迹$\theta(t) = \sum_{n\ge1} e^{-\lambda_n t}$ 化为加权高斯和（第 2.3 节）。对这些加权和进行 Mellin–Hurwitz ζ 分析，可得完整的短时渐近展开（第 2.4 节和第 2.5 节）；第 2.6 节则得出 (λ_n) 的可容许性。

第 3 节记录可容许性的谱 ζ 函数推论，包括谱 ζ 函数的亚纯延拓与特殊值恒等式，以及相关典范乘积的系数提取陈述和大参数渐近。第 4 节将这些可容许性推论与 φ 的反演恒等式结合起来，证明 [BOCRS25] 的猜想 1。第 5 节确立了 $\theta_m(t) = \sum_{n\ge1} e^{-\tau_{m,n}^{m} t}$ 的奇偶二分，表明偶次幂会产生可容许序列，而奇次幂则会导致非零的 $t\log t$ 阻碍。最后，第 6 节讨论对数多重齐次（奇次幂）情形中相应的 ζ 函数理论与典范乘积推论。

致谢。 感谢 Quoc-Hung Nguyen 让我们关注到这个问题和猜想。我们感谢 Vu Quang Huynh 在 ζ正则化方面给予的宝贵指导，并感谢他在我们本科期间与我们进行相关讨论。感谢 Kristian Seip 的鼓励与通信。我们感谢中国科学院晨兴数学中心提供支持，并营造了富有启发性的研究环境。

2. On admissible sequences in the sense of Quine–Heydari–Song

2.1. 设定。

我们回顾 [QHS93, §2]中的定义。

定义 2.1 (可容许序列)。 若一个序列 $(X_k)_{k\ge0} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 满足以下条件，则称其为可容许：(1) X_k 对于每个 k 都位于半平面 $\operatorname{Re} X > 0$；(2) 级数 $\sum_{k\ge0} \mathrm{e}^{-X_k t}$ 对每个 $t>0$ 都绝对收敛，并且当 $t\to0^+$ 时具有如下形式的完整渐近展开

$$\sum_{k\ge0} \mathrm{e}^{-X_k t} \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{j_\nu}, \qquad j_0 < j_1 < \cdots, \quad j_\nu \to +\infty;$$

(3) 存在 $\beta > 0$ 使得

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\beta} \sum_{k\geq 0} \mathrm{e}^{-|X_k|t} = 0.$$

注 2.2. Quine–Heydari–Song 从 $k = 0$ 开始为其序列编索引，而我们自然会从 $n \geq 1$ 开始。添加或删除有限项不会影响定义 2.1 中的三个条件，因此我们可以在这两种约定之间自由切换。

本文中，可容许 始终指符合 Quine–Heydari–Song 意义上的可容许。

2.2. **关于条件 (1) 和 (3)**。 设 $a_n := n + \frac{1}{2}$。以下是对 [BOCRS25 中定理 6.1 和定理 1.2] 所证明结果的改述。

定理 2.3 （ τ_n 的收敛幂级数表示）。 存在一个奇幂级数

$$\rho(z) = \sum_{m\geq 1} a_m z^m, \qquad a_m \geq 0,$$

使得：

(1) 级数 ρ 收敛当且仅当 $|z| \leq 2$；(2) $\rho(2) = \frac{1}{2}$；(3) 对每一个 $n \geq 1$,

$$\tau_n = a_n - \rho(a_n^{-1}) = n + \frac{1}{2} - \rho\Big(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\Big). \tag{2.1}$$

注 2.4. 由于 ρ 的系数是非负的，且该级数在 $z = 2$处收敛，因此它在 $[0, 2]$ 上绝对收敛，并在该处定义一个连续递增函数。

全文中我们令 $\lambda_n := \tau_n^2$ 且

$$\theta(t) := \sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-\lambda_n t}.$$

引理 2.5 （下界，对于 τ_n）。 对每一个 $n \geq 1$，有 $\tau_n \geq n$。因此 $\lambda_n \geq n^2$。

证明。 由于 ρ 具有非负系数，且在 $z = 2$ 处收敛（从而 $\sum_{j\geq 1} \rho_j 2^j < \infty$），定义 ρ的级数依魏尔斯特拉斯 M-判别法在 $[0, 2]$ 上绝对且一致收敛。因此 ρ在 $[0, 2]$, 上连续，并且由于每个部分和在 $[0, 2]$, 上递增，极限函数 ρ 在 $[0, 2]$上递增。

根据定理 2.3， ρ具有非负系数，因此在 $[0, 2]$上递增。由于 $a_n \geq \frac{3}{2}$，我们有 $a_n^{-1} \leq \frac{2}{3} < 2$，所以

$$0 \leq \rho(a_n^{-1}) \leq \rho(2) = \frac{1}{2}.$$

利用（2.1）可得

$$\tau_n = a_n - \rho(a_n^{-1}) \geq \Big(n + \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2} = n,$$

平方后得到 $\lambda_n \geq n^2$。 □

推论 2.6. **</style}级数 (*t*)** </style}对每个 都绝对收敛，并满足 $(t) = O(t^{-1/2})$当 $t \to 0^+$ 时。特别地，定义 ***2.1(3)*** **</style}**对 $\beta = 1$成立。

证明. 由引理 2.5， $\theta(t) \le \sum_{n\ge1} \mathrm{e}^{-n^2 t}$。对于 $t>0$,

$$\sum_{n\ge1} \mathrm{e}^{-n^2 t} \le \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2 t}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}},$$

这意味着 $\theta(t) = O(t^{-1/2})$。因此，当 $t\to 0^+$ 时， $t\,\theta(t) = O(t^{1/2}) \to 0$ ，从而证明了定义 2.1(3)。□

2.3. **化归为加权高斯和**。还需证明定义 2.1(2)，即完整的短时渐近展开。我们利用 ρ 的奇性，将 λ_n 改写为二次主项加上一个解析修正项。

将 ρ 写成奇级数

$$\rho(z) = \sum_{j\ge0} b_j z^{2j+1}, \qquad b_j := a_{2j+1} \ge 0,$$

并定义

$$\sigma(u) := \sum_{j\ge0} b_j u^j.$$

那么 $\rho(z) = z\,\sigma(z^2)$，因此对于 $x>0$,

$$\rho(1/x) = x^{-1}\sigma(x^{-2}). \tag{2.2}$$

由于 ρ收 敛于 $|z|\le 2$，级数 σ 在 $|u|\le 4$ 上收敛。定义解析函数 n

$$q(u) := -2\sigma(u) + u\sigma(u)^2, \qquad |u|\le 4. \tag{2.3}$$

引理 2.7 （ λ_n 的解析修正项）。令 $a_n = n+\frac12$ 且 $u_n = a_n^{-2}$。则

$$\lambda_n = \tau_n^2 = a_n^2 + q(u_n). \tag{2.4}$$

此外， $(u_n)_{n\ge1} \subset (0,\ 4/9]$。

证明。由（2.1）和（2.2），

$$\tau_n = a_n - a_n^{-1}\sigma(a_n^{-2}) = a_n - a_n^{-1}\sigma(u_n).$$

两边平方得

$$\tau_n^2 = a_n^2 - 2\sigma(u_n) + u_n\sigma(u_n)^2 = a_n^2 + q(u_n),$$

这就是 (2.4)。最后， $u_n = a_n^{-2} \le (3/2)^{-2} = 4/9$ 对于 $n\ge1$。 □

回忆一下，根据引理 2.7，我们有

$$\lambda_n = a_n^2 + q(u_n), \qquad a_n = n+\frac12, \qquad u_n = a_n^{-2} \in (0, r_0], \quad r_0 := \frac{4}{9},$$

因此

$$\theta(t) = \sum_{n\ge1} \mathrm{e}^{-a_n^2 t}\,\mathrm{e}^{-t q(u_n)}. \tag{2.5}$$

在这一部分，我们将 $\theta(t)$ 在 $t\to0^+$ 时的渐近分析归结为基本的加权高斯和

$$\Theta_m(t) := \sum_{n\ge1} a_n^{-2m}\mathrm{e}^{-a_n^2 t}, \qquad m\ge0.$$

关键在于，我们不会对变量 u 中的 q 进行截断，只关于时间变量 t 作一致泰勒展开，这会产生大小为 $t^{R+1}\Theta_0(t)$ 的误差，因此最终得到 $O(t^{R+1/2})$。

2.3.1. 关于 t 的一致泰勒展开。 由于 q 在 $[0, r_0]$ 的某个邻域内解析，因此它在那里有界。令

$$Q_* := \sup_{u\in[0,r_0]} |q(u)| < \infty.$$

引理 2.8 （指数函数的一致泰勒余项）。 设 $R \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。则对所有 $x \in \mathbb{C}$以及所有 $t \in [0, 1]$,

$$e^{-tx} = \sum_{r=0}^{R} \frac{(-tx)^r}{r!} + O_R\big(t^{R+1}|x|^{R+1}e^{t|x|}\big). \tag{2.6}$$

证明。 由指数级数可得,

$$e^{-tx} - \sum_{r=0}^{R} \frac{(-tx)^r}{r!} = \sum_{n=R+1}^{\infty} \frac{(-tx)^n}{n!}.$$

取绝对值并利用 $t \in [0, 1]$ ，得

$$\left| e^{-tx} - \sum_{r=0}^{R} \frac{(-tx)^r}{r!} \right| \leq \sum_{n=R+1}^{\infty} \frac{(t|x|)^n}{n!} = \frac{(t|x|)^{R+1}}{(R+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t|x|)^k}{(R+2)\cdots(R+1+k)}.$$

由于 $(R + 2) \cdots (R + 1 + k) \geq k!$ ，我们得到

$$\sum_{n=R+1}^{\infty} \frac{(t|x|)^n}{n!} \leq \frac{(t|x|)^{R+1}}{(R+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t|x|)^k}{k!} = \frac{(t|x|)^{R+1}}{(R+1)!} e^{t|x|},$$

从而得到所声称的界。 □

定义 $r \geq 0$ 和 $t > 0$ 的辅助和

$$F_r(t) := \sum_{n\geq 1} q(u_n)^r \, \mathrm{e}^{-a_n^2 t}. \tag{2.7}$$

这些级数对每个 $t > 0$ 都绝对收敛，因为 $|q(u_n)| \leq Q_*$ 且 $\sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-a_n^2 t} < \infty$.

Pr命题 2.9 (在 t 中有限归约)。 固定一个整数 $R \geq 0$。那么对于 $t \in (0,1]$,

$$\theta(t) = \sum_{r=0}^{R} \frac{(-t)^r}{r!} F_r(t) \; + \; \mathrm{Err}_R(t), \tag{2.8}$$

其中误差满足

$$\mathrm{Err}_R(t) = O(t^{R+1})\, \Theta_0(t). \tag{2.9}$$

证明。 将 (2.6) 中的 $u = u_n$ 代入 (2.5):

$$\mathrm{e}^{-tq(u_n)} = \sum_{r=0}^{R} \frac{(-t)^r}{r!} q(u_n)^r + O(t^{R+1}),$$

对 $t \in (0, 1]$, 在 n 中一致成立。两边乘以 $\mathrm{e}^{-a_n^2 t}$ ，并对 $n \geq 1$ 求和，得到 (2.8)，其中

$$\mathrm{Err}_R(t) = \sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-a_n^2 t} O(t^{R+1}) = O(t^{R+1}) \sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-a_n^2 t} = O(t^{R+1})\Theta_0(t),$$

即为（2.9）。 □

2.3.2. 在 u 中的解析展开及化归到 Θ_m。 对于每个 $r \geq 0$，函数 $u \mapsto q(u)^r$ 在 $|u| < 4$ 中解析，因此在 $u = 0$附近可展开为幂级数：

$$q(u)^r = \sum_{m=0}^{\infty} c_{r,m}\, u^m, \qquad |u| < 4, \tag{2.10}$$

具有实系数$c_{r,\ m}$ （因为 q 具有实泰勒系数）。

引理 2.10 （系数的几何界 $c_{r,\ m}$）。 固定 $r \geq 0$ ，并选取任意满足$r_0 < \rho < 4$的 ρ 。则存在$C_{r,\ \rho} > 0$ ，使得

$$|c_{r,m}| \leq C_{r,\rho}\, \rho^{-m} \qquad (m \geq 0). \tag{2.11}$$

特别地，级数$\sum_{m\geq 0} |c_{r,\ m}|\, r_0^m$收敛。

证明。B y对圆周 $|u| = \rho$上的解析函数 $q(u)^r$ 应用柯西估计 ，

$$|c_{r,m}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\rho} \frac{q(u)^r}{u^{m+1}}\, du \right| \leq \rho^{-m} \sup_{|u|=\rho} |q(u)|^r.$$

这g ives (2.11)，其中$C_{r,\ \rho} := \sup_{|u|=\rho} |q(u)|^r$。由于 $r_0/\rho < 1$，最终结论随之成立。 □

Proposi tion 2.11 （用 $\Theta_m(t)$展开 $F_r(t)$）。对每一个 $r \geq 0$ 以及 $t > 0$，

$$F_r(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{r,m}\, \Theta_m(t), \tag{2.12}$$

且右边的级数绝对收敛。

证明。由于 $u_n \in (0,\ r_0]$ 且(2.10)在 $[0, r_0]$上绝对收敛，我们有 $q(u_n)^r = \sum_{m\geq 0} c_{r,\ m} u_n^m = \sum_{m\geq 0} c_{r,\ m} a_n^{-2m}$。因此，

$$F_r(t) = \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{m\geq 0} c_{r,m} a_n^{-2m} \right) \mathrm{e}^{-a_n^2 t}.$$

为说明可以交换求和次序，注意对每个固定的 $t > 0$，

$$\sum_{n\geq 1} \sum_{m\geq 0} |c_{r,m}|\, a_n^{-2m} \mathrm{e}^{-a_n^2 t} \leq \sum_{m\geq 0} |c_{r,m}| \left(\sup_{n\geq 1} a_n^{-2m} \right) \sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-a_n^2 t} = \Theta_0(t) \sum_{m\geq 0} |c_{r,m}|\, r_0^m,$$

右侧由引理 2.10 可知是有限的。因此，托内利定理适用，并得到 (2.12)。□

结合 命题 2.9 和命题 2.11，对于任意 $R \geq 0$ 和 $t \in$ ，可得 $0, 1]$ 的表示 n

$$\theta(t) = \sum_{r=0}^{R} \frac{(-t)^r}{r!} \sum_{m=0}^{\infty} c_{r,m}\, \Theta_m(t) \ + \ O(t^{R+1}) \Theta_0(t). \tag{2.13}$$

2.4. **() 的完整渐近展开**。 我们将使用赫尔维茨 ζ 函数 $\zeta(s,\ a) = \sum_{n\geq 0} (n+a)^{-s}$ ，其中 Re $s > 1$。

引理 2.12 （半整数恒等式）。当 Re $p > 1$，

$$\sum_{n\geq 0} (n + \tfrac{1}{2})^{-p} = \zeta(p, \tfrac{1}{2}) = (2^p - 1)\zeta(p).$$

因此，作为关于 p的亚纯函数，

$$\zeta(p, \tfrac{1}{2}) = (2^p - 1)\zeta(p). \tag{2.14}$$

证明。当 $\operatorname{Re} p > 1$时，

$$\sum_{n\geq 0}(n+\tfrac{1}{2})^{-p} = 2^p\sum_{n\geq 0}(2n+1)^{-p} = 2^p\Big(\sum_{m\geq 1} m^{-p} - \sum_{n\geq 1}(2n)^{-p}\Big) = (2^p-1)\zeta(p).$$

两边均可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，因此由解析延拓可得 (2.14)。 □

回顾

$$\Theta_m(t) = \sum_{n\geq 1} a_n^{-2m}\mathrm{e}^{-a_n^2 t} = \sum_{n\geq 1}(n+\tfrac{1}{2})^{-2m}\mathrm{e}^{-(n+\frac{1}{2})^2 t}.$$

命题 2.13 （的完整渐近展开（t））。对于每个整数 $m \geq 0$，函数Θ_m（t）在 $t \to 0^+$ 时存在一个完整渐近展开，其指数属于 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$。

更确切地说，固定一个整数 $K \geq 0$，并令 $s_K := -K - \frac{1}{2}$。那么存在常数 $A_{m,\,j}(0 \leq j \leq K)$，使得当 $t \to 0^+$时，

$$\Theta_m(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathbf{1}_{\{m=0\}}\,t^{-1/2} + \sum_{j=0}^{K} A_{m,j}\,t^j + \mathbf{1}_{\{1\leq m\leq K\}}\frac{1}{2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}-m\Big)\,t^{m-1/2} + O\big(t^{K+1/2}\big). \tag{2.15}$$

特别地，

$$\Theta_0(t) = O(t^{-1/2}), \qquad \Theta_m(t) = \Theta_m(0) + O(t^{1/2})\ (m=1), \qquad \Theta_m(t) = \Theta_m(0) + O(t)\ (m\geq 2),$$

因此对于每个 $m \geq 1$，有 $\Theta_m(t) = O(1)$。

证明。固定 $m \geq 0$。对于 $y > 0$ 和 $c > 0$，梅林反演给出

$$\mathrm{e}^{-y} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} s=c}\Gamma(s)\,y^{-s}\,ds.$$

将其应用于 $y = a_n^2 t$，并选择 $c > \max(0,\ \frac{1}{2} - m)$，使得 $\sum_{n\geq 1} a_n^{-2(m+c)}$绝对收敛。由富比尼定理可得

$$\Theta_m(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} s=c}\Gamma(s)\,t^{-s}\,S_m(s)\,ds, \tag{2.16}$$

其中

$$S_m(s) := \sum_{n\geq 1} a_n^{-2(m+s)} = \sum_{n\geq 1}(n+\tfrac{1}{2})^{-2(m+s)}.$$

利用引理 2.12 及 $p = 2(m+s)$，并减去 $n=0$项 $(\frac{1}{2})^{-2(m+s)} = 2^{2(m+s)}$，我们得到亚纯恒等式

$$S_m(s) = (2^{2(m+s)}-1)\zeta(2(m+s)) - 2^{2(m+s)}. \tag{2.17}$$

ζ 的唯一极点位于 1，因此 $S_m(s)$ 至多在

$$2(m+s) = 1 \iff s = \frac{1}{2} - m,$$

并且 $\Gamma(s)$ 在 $s = 0,\ -1,\ -2,$ ..... 处有简单极点。

固定 $K \geq 0$，并将 (2.16) 中的积分路径从 $\operatorname{Re} s = c$ 移至 $\operatorname{Re} s = s_K = -K - \frac{1}{2}$。这会越过极点 $s = 0,\ -1,$ ....., $-K$，并且可能越过 $s = \frac{1}{2} - m$（当且仅当 $m \leq K$ 时，它位于 s_K 的右侧）。所有极点都是简单极点。根据留数定理，

$$\Theta_m(t) = \sum_{\substack{s_0\in\{\frac{1}{2}-m,\,0,\,-1,\,\ldots,\,-K\}\\ s_K<\operatorname{Re} s_0<c}} \operatorname{Res}_{s=s_0}\big(\Gamma(s)t^{-s}S_m(s)\big) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} s=s_K}\Gamma(s)t^{-s}S_m(s)\,ds.$$

我们来计算留数。对于 $j=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ K$，$\operatorname{Res}_{s=-j}\Gamma(s)=(-1)^j/j!$，因此 $s=-j$ 处的留数贡献项 $A_{m,\,j}t^j$，其中 $A_{m,\,j}$ 为适当的常数。在 $s=\frac12-m$ 处（当 $m\le K$ 时），利用 $\zeta(p)$ 在 $p=1$ 处的留数为 1，且 $p=2(m+s)$ 满足 $dp/ds=2$，而 (2^p-1) 在 $p=1$ 处等于 1。因此 $\operatorname{Res}_{s=\frac12-m}S_m(s)=\frac12$。由于 Γ 在 $s=\frac12-m$ 处全纯，这就得到半整数项

$$\frac12\,\Gamma\Big(\frac12-m\Big)\,t^{m-1/2}.$$

对于 $m=0$，这是首项 $\frac12\Gamma(\frac12)t^{-1/2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}t^{-1/2}$。

最后，我们对平移后的积分进行估计。在 $\operatorname{Re}s=s_K$ 上，我们有 $|t^{-s}|=t^{K+1/2}$。此外，根据斯特林估计，$|\Gamma(s_K+iy)|\ll_K(1+|y|)^{-K-1}\mathrm{e}^{-\pi|y|/2}$。由 (2.17) 以及 $\zeta(\sigma+iy)$ 在垂直带内的标准估计，函数 $S_m(s)$ 关于 $|y|$ 在竖直线上至多具有多项式增长。因此，被积函数在 y 上绝对可积，从而得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=s_K}\Gamma(s)t^{-s}S_m(s)\,ds=O(t^{K+1/2})\qquad(t\to0^+),$$

其中隐含常数依赖于 K 和 m。这证明了 (2.15)，进而证明了完整渐近展开的存在性。所述的特别界可通过考察前几个指数得出：对于 $m\ge1$，存在 t^0 项；若 $m=1$，则下一个指数为 $1/2$，而若$m\ge2$，则为 1。□

注 2.14（围道平移与积分路径上的极点）。在梅林反演论证中，我们将竖直直线 $\Re s=c$ 向左平移，并取留数。如果被积函数的某个极点恰好 位于预定的新积分路径上（例如，ζ 函数的极点 $s=s_0$ 与目标直线$\Re s=\sigma$重合），我们按标准方法处理：要么

（a）改为平移至 $\Re s=\sigma-\eta$，其中 $\eta>0$为某个固定值；要么（b）在 s_0 附近将积分路径绕开，并取柯西主值加上留数。

由于进一步向左稍作平移只会使 t^{-s} 在 $t\to0^+$时的衰减更快，因此所得误差项不受影响（实际上还会改善）。我们不会在每次围道平移时都重复说明这些细节。

2.5. **()的完整渐近分析**。现在我们将 $\Theta_m(t)$的渐近分析转化为加权和 $F_r(t)$的渐近分析。

命题 2.15（（t）的完整渐近展开）。对每个整数 $r\ge0$，在（2.7）中定义的函数F_r（t）当 $t\to0^+$ 时有完整渐近展开，其指数属于 $\frac12\mathbb{Z}$。

更确切地说，对于每个整数 $K\ge0$，都存在常数 $B_{r,j}$、$j\in\{-\frac12,0,\frac12,1,\ldots,K\}$，使得

$$F_r(t)=\sum_{j\in\{-\frac12,0,\frac12,1,\ldots,K\}}B_{r,j}\,t^j+O(t^{K+1/2})\qquad(t\to0^+).\tag{2.18}$$

证明。固定 $r\ge0$ 和 $K\ge0$。由命题 2.11，

$$F_r(t)=\sum_{m=0}^{\infty}c_{r,m}\,\Theta_m(t),$$

对每个 $t>0$ 均绝对收敛。对于每个 $m\ge0$，应用命题 2.13（取相同的 K），并写作

$$\Theta_m(t)=\mathcal{P}_{m,K}(t)+R_{m,K}(t),$$

其中，$\mathcal{P}_{m,\,K}(t)$ 是 (2.15) 中的截断部分，而 $R_{m,\,K}(t)=O(t^{K+1/2})$ 如 $t\to0^+$。

余项的一致控制以及对 m 求和。令 $M := K+2$。拆分

$$\sum_{m\ge 0} c_{r,m}R_{m,K}(t) = \sum_{m\le M} c_{r,m}R_{m,K}(t) + \sum_{m>M} c_{r,m}R_{m,K}(t).$$

第一个求和是有限的，因此 $O(t^{K+1/2})$。

对于尾项 $m > M$，我们使用命题 2.13 的证明中通过围道平移得到的余项表示。具体而言，若写作 $s_K := -K - \frac{1}{2}$，则（在减去截至阶数 K的留数之后）

$$R_{m,K}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re s = s_K} \Gamma(s)\, t^{-s}\, S_m(s)\, ds, \tag{2.19}$$

其中

$$S_m(s) = \sum_{n\ge 1} \big(n+\tfrac{1}{2}\big)^{-2(m+s)}.$$

由于 $x \mapsto x^{-\alpha}$ 在 $[a_1,\infty)$上随 $\alpha > 1$递减，我们有标准估计

$$\sum_{n\ge 1} a_n^{-\alpha} \le a_1^{-\alpha} + \int_{a_1}^{\infty} x^{-\alpha}\, dx = a_1^{-\alpha} + \frac{a_1^{-\alpha+1}}{\alpha-1}.$$

将此应用于 $\alpha := 2(m+\Re s)$。在直线 $\Re s = s_K = -K-\frac{1}{2}$ 上且对于 $m \ge K+2$，我们有 $\alpha = 2m-2K-1 \ge 3$，因此 $(\alpha-1)^{-1} \le \frac{1}{2}$。所以

$$|S_m(s)| \le \sum_{n\ge 1} a_n^{-2(m+\Re s)} \ll_K a_1^{-2(m+\Re s)} + a_1^{-2(m+\Re s)+1} \ll_K a_1^{-2m}.$$

由于 $a_1 = \frac{3}{2}$，这给出了几何界 $|S_m(s)| \ll_K (4/9)^m$，且该界对 $\Im s$ 一致成立。由于$a_1^{-2} = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}=: r_0$，因此得到一致的几何界

$$|S_m(s)| \ll_K r_0^m \qquad (\Re s = s_K,\ m > M), \tag{2.20}$$

对 $\Im s$ 一致成立。将 (2.20) 代入 (2.19)，可得，对于 $t \in (0,1]$ 和 $m > M$，

$$|R_{m,K}(t)| \le \frac{t^{-s_K}}{2\pi}\Big(\sup_{\Re s = s_K} |S_m(s)|\Big)\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(s_K+iy)|\, dy \ll_K r_0^m\, t^{K+1/2},$$

因为对于固定的 s_K，$\int_{\mathbb{R}} |\Gamma(s_K+iy)|\, dy < \infty$。因此，利用引理 2.10（即 $\sum_{m\ge 0}|c_{r,m}|r_0^m < \infty$），

$$\sum_{m>M} |c_{r,m}||R_{m,K}(t)| \ll_K t^{K+1/2}\sum_{m>M}|c_{r,m}|r_0^m = O(t^{K+1/2}).$$

因此

$$\sum_{m\ge 0} c_{r,m}R_{m,K}(t) = O(t^{K+1/2}) \qquad (t\to 0^+).$$

截断部分的求和。函数 $\mathcal{P}_{m,K}(t)$ 是单项式 $t^{-1/2}$、t^0, t^1、.....、t^K 的有限线性组合；当 $1 \le m \le K$ 时，还包括半整数次单项式 $t^{m-1/2}$。因此，$\sum_{m\ge 0} c_{r,m}\mathcal{P}_{m,K}(t)$ 是由相同指数项构成的有限线性组合，只要我们证明整数次幂系数绝对收敛即可。

对于整数幂 t^j $(0 \le j \le K)$，命题 2.13 给出

$$A_{m,j} = \frac{(-1)^j}{j!}\, S_m(-j).$$

如果 $m \geq j+2$，那么 $S_m(-j) = \sum_{n\geq 1} a_n^{-2(m-j)}$绝对收敛，并且与 (2.20) 相同的估计给出

$$|S_m(-j)| \ll_j r_0^m,$$

因此，对于每个 j，$\sum_{m\geq 0} |c_{r,\,m} A_{m,\,j}| < \infty$，因为只剩下有限多个 $m < j+2$，且 $\sum_{m\geq 0} |c_{r,\,m}| r_0^m < \infty$。

将有限多个指数 $j \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, K\}$对应的系数收集起来，可得常数$B_{r,\,j}$，使得 (2.18) 成立。□

引理 2.16（解析权的几何尾项控制）。设 $g(u) = \sum_{m\geq 0} c_m u^m$ 在 $|u| < \rho$上解析，并假设对所有 n，$0 \leq u_n \leq u_0 < \rho$ 成立。那么对于每个 $M \geq 0$，都有一致余项界

$$g(u_n) = \sum_{m=0}^{M-1} c_m u_n^m \;+\; O_g\!\left(\left(\frac{u_0}{\rho}\right)^M\right),$$

因此，对于每个 $t \in (0,1]$，

$$\sum_{n\geq 0} g(u_n)\, e^{-a_n^2 t} = \sum_{m=0}^{M-1} c_m \sum_{n\geq 0} u_n^m e^{-a_n^2 t} \;+\; O_g\!\left(\left(\frac{u_0}{\rho}\right)^M \sum_{n\geq 0} e^{-a_n^2 t}\right),$$

其中隐含常数与 M 和 t无关。

注 2.17. 在应用中，我们取 $g(u) = q(u)^r$（或 $g(u) = q_p(u)^r$）。由于当 $t \to 0^+$ 时，$\sum_{n\geq 0} e^{-a_n^2 t} \asymp t^{-1/2}$，引理 2.16 中的尾项为 $O((u_0/\rho)^M t^{-1/2})$。因此，对于 t 中任意固定的截断阶，可以先展开每个有限的 m 和，再令 $M \to \infty$，从而证明所得渐近展开可以逐项求和。

2.6. **完整热迹展开与可容许性**。现在，我们将第 2.3 节的约化与第 2.4 节和第 2.5 节的渐近分析结合起来。

定理 2.18 ($\theta(t)$**)的小时间完整展开**。存在常数$(c_\nu)_{\nu\geq 0}$ 以及严格递增的指数 $j_0 < j_1 < \cdots \to +\infty$，满足 $j_\nu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$，使得

$$\theta(t) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{j_\nu} \qquad (t \to 0^+).$$

更具体地，对于每个整数 $N \geq 0$，都存在常数 $c_{-1/2}, c_0, c_{1/2}, \dots, c_N$，使得

$$\theta(t) = \sum_{j\in\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\dots,N\}} c_j\, t^j + O(t^{N+1/2}) \qquad (t \to 0^+). \tag{2.21}$$

证明。固定 $N \geq 0$，并取 $R = N$ 应用命题 2.9：

$$\theta(t) = \sum_{r=0}^{N} \frac{(-t)^r}{r!} F_r(t) + O(t^{N+1})\Theta_0(t), \qquad t \in (0,1].$$

由推论 2.6，$\Theta_0(t) = O(t^{-1/2})$ 当 $t \to 0^+$ 时，因此

$$O(t^{N+1})\Theta_0(t) = O(t^{N+1/2}).$$

For 对每个固定的 $r \in \{0,1,\dots,N\}$，应用命题 2.15 和 $K = N - r$，得到

$$F_r(t) = \sum_{j\in\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\dots,N-r\}} B_{r,j}\, t^j + O(t^{N-r+1/2}).$$

两边乘以 t^r，得到

$$\frac{(-t)^r}{r!}F_r(t) = \sum_{j\in\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\dots,N-r\}} \frac{(-1)^r}{r!}B_{r,j}\,t^{j+r} + O(t^{N+1/2}).$$

对 $r=0$、1、.....、N（有限和）求和，并合并同次幂，得到一个关于$\theta(t)$的展开，其中只含不超过 t^N 的半整数次幂，总余项为 $O(t^{N+1/2})$。这正是 (2.21)。由于 N 是任意的，因此得到完整的渐近展开。□

推论 2.19（可容许性）。 序列 $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ 在 $\lambda_n = \tau_n^2$ 条件下，满足定义 *2.1* 中的可容许性。

证明。 由于 $\lambda_n > 0$，条件 (1) 成立。根据推论 2.6，条件 (3) 成立。由于 $\theta(t)$ 在 $t>0$ 时绝对收敛（推论 2.6），且根据定理 2.18，其关于 $t\to 0^+$ 有完整的渐近展开，因此条件 (2) 成立。□

3. Consequences and applications of admissibility

本节记录可容许性的一些标准推论，这些推论在应用中很有用（例如 ζ 正则化、系数提取以及典范乘积的大参数渐近）。所有结论均直接由定理 2.18 中建立的热迹展开证明。梅林变换表示、谱 ζ 函数的亚纯延拓，以及在非正整数处的特殊值恒等式，都是 [QHS93 第 §2] 节中一般梅林变换理论的实例（尤其是其中的定理 3–4）。为求完整起见，我们给出证明，并记录采用本文归一化时的精确系数。

3.1. 首项热系数与 Weyl 定律。

我们首先提取 $\theta(t)$短时展开中的前两个系数。由于修正项 $q(u_n)$有界，这些系数对于当前模型而言是普适的。

引理 3.1（τ_n的双侧界）。 对每个 $n\geq 1$,

$$n \leq \tau_n \leq n+\frac{1}{2}, \qquad \textit{and hence} \qquad n^2 \leq \lambda_n \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)^2.$$

证明。 下界 $\tau_n \geq n$ 是引理 2.5。对于上界，由 (2.1) 可知，$\tau_n = a_n - \rho(a_n^{-1})$ 中的 $\rho(a_n^{-1}) \geq 0$（非负系数），因此有 $\tau_n \leq a_n = n+\frac{1}{2}$。平方后即可得到相应的 $\lambda_n = \tau_n^2$ 的界。□

引理 3.2（模型半整数热迹）。 设 $a_n = n+\frac{1}{2}$ 且 $\Theta_0(t) = \sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-a_n^2 t}$。则当 $t\to 0^+$时，

$$\Theta_0(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,t^{-1/2} - 1 + \frac{1}{4}\,t + O(t^2). \tag{3.1}$$

特别地，$\Theta_0(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}t^{-1/2} - 1 + O(t)$。

证明。 这是命题 2.13 的情形，带有显式留数。于是有

$$\Theta_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,s=c} \Gamma(s)\,t^{-s}\left((2^{2s}-1)\zeta(2s) - 2^{2s}\right)ds$$

对任意 $c>\frac{1}{2}$。将积分路径平移至 Re $s=-\frac{5}{2}$。穿过的极点为:

- $s=\frac{1}{2}$（$\zeta(2s)$ 在 $2s=1$ 处的单极点）；
- $s=0,\ -1,\ -2$（$\Gamma(s)$ 的简单极点）。

所有其他可能的极点都位于 $\mathrm{Re}\ s = -\frac{5}{2}$ 的左侧。$\mathrm{Re}\ s = -\frac{5}{2}$ 上的余项积分为$O(t^{5/2})$，因此由命题 2.13 中使用的相同界可得 $O(t^2)$。

现在计算留数。写作 $S_0(s) := (2^{2s}-1)\zeta(2s) - 2^{2s}$。在 $s = \frac{1}{2}$ 附近，$\zeta(2s) \sim \frac{1}{2s-1}$，因此 $S_0(s) \sim \frac{1}{2s-1}$。所以

$$\mathrm{Res}_{s=1/2}\big(\Gamma(s)t^{-s}S_0(s)\big) = \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\,t^{-1/2}\cdot \mathrm{Res}_{s=1/2}\,\frac{1}{2s-1} = \sqrt{\pi}\,t^{-1/2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,t^{-1/2}.$$

在 $s=0$ 处，$\Gamma(s)$ 的留数为 1，且 $t^{-s} = 1 + O(s)$，因此留数等于 $S_0(0)$。由于 $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ 且 $2^0 - 1 = 0$，我们有 $S_0(0) = -1$，从而得到常数项 -1。在 $s=-1$ 处，$\mathrm{Res}_{s=-1}\Gamma(s) = -1$ 且 $t^{-s} = t$，而

$$S_0(-1) = (2^{-2}-1)\zeta(-2) - 2^{-2} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4},$$

因为 $\zeta(-2) = 0$。因此，在 $s=-1$ 处的留数等于 $(-1)\cdot t\cdot(-1/4) = t/4$。

穿过 $s=-2$ 会产生一个大小为 $O(t^2)$ 的额外留数项，我们将其吸收到$O(t^2)$ 余项中。

对留数求和得到 (3.1)。 □

命题 3.3 ($\theta(t)$ **的第一热系数)。** 由于 $t \to 0^+$，

$$\theta(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,t^{-1/2} - 1 + O(t^{1/2}). \tag{3.2}$$

特别地，采用定理 *2.18* 的记号，有

$$c_{-1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad c_0 = -1.$$

证明。 回顾 $\lambda_n = a_n^2 + q(u_n)$，其中 $a_n = n + \frac{1}{2}$ 和 $u_n = a_n^{-2} \in (0,\ 4/9]$。由于 q 在 $[0,4/9]$ 上连续，令

$$Q_* := \sup_{u\in[0,4/9]} |q(u)| < \infty.$$

于是对于 $t \in (0,1]$ 以及所有 n，

$$\big|e^{-tq(u_n)} - 1\big| \le t\,|q(u_n)|\,e^{t|q(u_n)|} \le t\,Q_* e^{Q_*} = O(t),$$

对 n 一致。因此

$$\theta(t) - \Theta_0(t) = \sum_{n\ge 1} e^{-a_n^2 t}\big(e^{-tq(u_n)} - 1\big) = O(t)\sum_{n\ge1} e^{-a_n^2 t} = O(t)\,\Theta_0(t).$$

由引理 3.2，$\Theta_0(t) = O(t^{-1/2})$，故 $\theta(t) - \Theta_0(t) = O(t^{1/2})$。将引理 3.2 中的二项展开式 $\Theta_0(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}t^{-1/2} - 1 + O(t)$ 代入，即得（3.2）。□

作为推论，我们得到计数函数的精确一维 Weyl 定律。

推论 3.4（计数函数的 Weyl 定律）。设

$$N(\Lambda) := \#\{n \ge 1 :\ \lambda_n \le \Lambda\}, \qquad \Lambda \ge 0.$$

那么对所有 $\Lambda \ge 0$，

$$\big\lfloor \sqrt{\Lambda} - \tfrac{1}{2} \big\rfloor \le\ N(\Lambda)\ \le\ \big\lfloor \sqrt{\Lambda} \big\rfloor,$$

特别地，$N(\Lambda) = \sqrt{\Lambda} + O(1)$ 当 $\Lambda \to \infty$ 时。

证明。 由引理 3.1，$\lambda_n \le (n+\frac{1}{2})^2$ 以及 $\lambda_n \ge n^2$。若 $(n+\frac{1}{2})^2 \le \Lambda$，则 $\lambda_n \le \Lambda$，因此$N(\Lambda) \ge \lfloor \sqrt{\Lambda} - \frac{1}{2} \rfloor$。反之，若 $\lambda_n \le \Lambda$，则 $n^2 \le \Lambda$，因此 $n \le \sqrt{\Lambda}$ 以及 $N(\Lambda) \le \lfloor \sqrt{\Lambda} \rfloor$。所示界随即得出。□

3.2. **谱 ζ 函数：亚纯延拓与特殊值**。 定义与 λ_n 相关的谱 ζ 函数为

$$Z(s) := \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-s}, \qquad \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}. \tag{3.3}$$

当 $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ 时， $\lambda_n \geq n^2$ ，绝对收敛（引理 2.5）。

引理 3.5 (热迹的指数衰减**)**。 存在常数 $C > 0$ ，使得对所有 $t \geq 1$,

$$\theta(t) \leq C\, \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}.$$

证明。令

$$\theta(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-(\lambda_n - \lambda_1)t}.$$

对于 $t \geq 1$, $\mathrm{e}^{-(\lambda_n-\lambda_1)t} \leq \mathrm{e}^{-(\lambda_n-\lambda_1)}$，因此

$$\theta(t) \leq \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-(\lambda_n - \lambda_1)}.$$

右侧的级数收敛，因为 $\lambda_n \geq n^2$ ，因此 $\mathrm{e}^{-(\lambda_n-\lambda_1)} \leq \mathrm{e}^{\lambda_1}\mathrm{e}^{-n^2}$。将收敛的和并入常数 C。□

命题 3.6 （ $Z(s)$ 的梅林变换表示）。 对于 $\operatorname{Re}\ s > \frac{1}{2}$,

$$Z(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1}\theta(t)\, dt. \tag{3.4}$$

证明。 对于 $\operatorname{Re} s > 0$ 和 $\lambda > 0$ ，有

$$\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\, dt = \lambda^{-s}\Gamma(s).$$

对于 $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}$，定义 $Z(s)$ 的级数绝对收敛，因此由富比尼定理,

$$\int_0^\infty t^{s-1}\theta(t)\, dt = \sum_{n\geq 1} \int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-\lambda_n t}\, dt = \Gamma(s) \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-s} = \Gamma(s)Z(s),$$

这就是 (3.4)。 □

定理 3.7 （（s）的亚纯延拓及留数）。 函数 Z（s）可亚纯延拓至整个 $\mathbb{C}$，且至多在以下位置有单极点

$$s = \frac{1}{2} - k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

此外 *ver*，如果$c_{k-1/2}$ 表示热展开(2.21)中 $t^{k-1/2}$ 的系数，该 n

$$\operatorname{Res}_{s=1/2-k} Z(s) = \frac{c_{k-1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2} - k)}. \tag{3.5}$$

特别地，留数$_{s=1/2}\, Z(s) = \frac{1}{2}$。

证明。 固定 $N \in \mathbb{N}$ ，并将展开式 (2.21) 写为

$$\theta(t) = \sum_{j\in\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\ldots,N\}} c_j t^j + R_N(t), \qquad R_N(t) = O(t^{N+1/2}) \quad (t \to 0^+).$$

将梅林积分 (3.4) 在 1 处分开：

$$Z(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\Big(\int_0^1 t^{s-1}\theta(t)\,dt+\int_1^\infty t^{s-1}\theta(t)\,dt\Big)=:\frac{1}{\Gamma(s)}\big(I_0(s)+I_\infty(s)\big).$$

由引理 3.5，$I_\infty(s)$ 对每个 $s\in\mathbb{C}$ 都绝对收敛，并定义一个整函数。

对于 $I_0(s)$，代入 $\theta(t)=\sum c_j t^j+R_N(t)$：

$$I_0(s)=\sum_{j\in\{-\frac12,0,\frac12,\dots,N\}} c_j\int_0^1 t^{s+j-1}\,dt+\int_0^1 t^{s-1}R_N(t)\,dt.$$

当 $\mathrm{Re}(s+j)>0$ 时，$\int_0^1 t^{s+j-1}\,dt=\frac{1}{s+j}$，因此

$$I_0(s)=\sum_{j\in\{-\frac12,0,\frac12,\dots,N\}}\frac{c_j}{s+j}\;+\;H_N(s),$$

其中 $H_N(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\ s>-N-\frac12$ 内全纯，因为 $R_N(t)=O(t^{N+1/2})$。因此，$Z(s)$ 可亚纯延拓至 $\mathrm{Re}\,s>-N-\frac12$，其可能的极点仅位于 $s=-j$，其中$j\in\{=\frac12,0,\frac12,\dots,N\}$。令 $N\to\infty$，便得到到整个 $\mathbb{C}$ 的亚纯延拓，其可能的极点位于 $s=-j$，其中 $j\in\{-\frac12,\frac12,\frac32,\dots\}$，即 $s=\frac12-k$，其中 $k\ge0$。

为计算留数，注意到 $\Gamma(s)$ 在 $s=\frac12-k$ 处全纯且非零。由上面的分解可知，在 $s=\frac12-k$ 附近，$I_0(s)$ 中唯一的奇异项是 $\frac{c_{k-1/2}}{s-(1/2-k)}$，因此得到 (3.5)。

最后，由命题 3.3，$c_{-1/2}=\sqrt{\pi}/2$，因此 $\mathrm{Res}_{s=1/2}Z(s)=c_{-1/2}/\Gamma(1/2)=(\sqrt{\pi}/2)/\sqrt{\pi}=1/2$。□

注 3.8（在非正整数处的抵消）。在梅林表示中

$$Z(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\theta(t)\,dt,$$

$\theta(t)$ 的截断小-t 展开会使积分在点 $s=-j$ 处出现表观单极点，这些极点来自因子 $(s+j)^{-1}$。当 $j\in\mathbb{Z}_{\ge0}$ 时，该奇异性会被 $1/\Gamma(s)$ 在 $s=-j$ 处的单零点抵消（因为 Γ 在每个非正整数处都有一个单极点）。因此，$Z(s)$ 在 $s=0,\ -1,\ -2,$ .....处全纯。

定理 3.9（非正整数处的特殊值）。对于每个整数 $m\ge0$，$Z(s)$ 的亚纯延拓在 $s=-m$ 处全纯，并满足

$$Z(-m)=(-1)^m m!\,c_m, \tag{3.6}$$

其中 c_m 是短时展开(2.21)中 t^m 的系数。特别地，$Z(0)=c_0=-1$。

证明。固定 $m\ge0$，并在定理 3.7 的证明中所用的分解中选取 $N\ge m$。那么在 $s=-m$ 附近有

$$Z(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\Big(\frac{c_m}{s+m}+A(s)\Big),$$

其中 $A(s)$ 在 $s=-m$ 处全纯（它包含剩余的 $\frac{c_j}{s+j}$ 项，其中含有 $j\neq m$、函数 $H_N(s)$，以及整函数尾项 $I_\infty(s)$）。由于 $\Gamma(s)$ 在 $s=-m$ 处有一个单极点，其

留数为 $\operatorname{Res}_{s=-m}\Gamma(s) = \frac{(-1)^m}{m!}$，因此 $1/\Gamma(s)$ 在 $s=-m$ 处有一个单零点，并且可展开为

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = (-1)^m m!\,(s+m) + O\big((s+m)^2\big).$$

因此，

$$Z(-m) = \lim_{s\to -m} \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \frac{c_m}{s+m} = (-1)^m m! c_m,$$

剩余的全纯项 $A(s)$ 在极限中趋于零，因为 $1/\Gamma(s) \to 0$。这证明了 (3.6)。□

3.3. **预解算子迹与典范乘积** $W(\lambda)$。定义零属典范乘积

$$W(\lambda) := \prod_{n\geq 1} \Big(1 + \frac{\lambda}{\lambda_n}\Big). \tag{3.7}$$

由于 $\sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-1} < \infty$ （由 $\lambda_n \geq n^2$ 可知），该乘积绝对收敛且局部一致收敛，因此 W 是整函数。

命题 3.10 （W 的对数导数）。对于每个 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-\lambda_n :\ n \geq 1\}$,

$$\frac{W'(\lambda)}{W(\lambda)} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda + \lambda_n}, \tag{3.8}$$

其中级数在 λ 上局部一致收敛。

证明。固定一个紧集 $K \subset \mathbb{C} \setminus \{-\lambda_n\}$。那么存在 $\delta > 0$，使得对所有 $\lambda \in K$ 和所有 n，都有 $|\lambda + \lambda_n| \geq \delta\,\lambda_n$。因此，

$$\sum_{n\geq 1} \sup_{\lambda\in K} \Big|\frac{1}{\lambda+\lambda_n}\Big| \leq \delta^{-1} \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-1} < \infty.$$

因此，$\sum_{n\geq 1} \log(1+\lambda/\lambda_n)$ 在 K 上一致收敛，且可以逐项求导，从而得到 (3.8)。□

定义预解算子迹

$$R(\lambda) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda + \lambda_n}.$$

当 $\operatorname{Re}\lambda > 0$ 时，它具有拉普拉斯变换表示。

引理 3.11 （拉普拉斯表示）。当 $\operatorname{Re}\lambda > 0$,

$$R(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\theta(t)\,dt. \tag{3.9}$$

证明。对于 $\operatorname{Re}\lambda > 0$ 和 $\lambda_n > 0$,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_n)t}\,dt = \frac{1}{\lambda+\lambda_n}.$$

此外，对于每个固定的 λ，满足 $\operatorname{Re}\lambda > 0$ 时，级数 $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|\lambda+\lambda_n|}$ 收敛，因为它被 $\sum \lambda_n^{-1}$ 的一个常数倍所控制。因此，由富比尼定理，

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\theta(t)\,dt = \sum_{n\geq 1} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_n)t}\,dt = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda+\lambda_n} = R(\lambda).$$

□

现在，我们从短时热展开推导 $R(\lambda)$ 和 $\log W(\lambda)$ 的大-λ 渐近分析。这是经典的 Watson 引理机制；我们将给出一个针对当前情形的证明。

注 3.12 （扇形区域中的分支约定）。 固定 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 并令

$$\Sigma_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\arg \lambda| \le \tfrac{\pi}{2} - \delta\}.$$

在 Σ_δ 上，我们取 $\log \lambda$ 的主值分支（因此 $\arg \lambda \in (-\pi, \pi)$），并定义 $\lambda^\alpha := \exp(\alpha \log \lambda)$。由于 Σ_δ 是单连通的，且包含于开右半平面中，这些分支在 Σ_δ 上是单值且全纯的。特别地，从 1 到 λ 的线段位于 Σ_δ 中，因此沿该线段对 λ 中的渐近级数逐项积分是合理的。

引理 3.13 （拉普拉斯变换的 Watson 型引理）。 设 $f : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ 可测，且满足：

(a) 当 $t \to 0^+$,

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{M} a_\nu t^{\alpha_\nu} + O(t^{\alpha_{M+1}}), \qquad -1 < \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{M+1};$$

(b) 存在 c、$C > 0$ 使得 $|f(t)| \le C\mathrm{e}^{-ct}$ 对所有 $t \ge 1$ 均成立。

那么，对于每个 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$，当 $|\lambda| \to \infty$ 且 $|\arg \lambda| \le \frac{\pi}{2} - \delta$ 时，

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\, dt = \sum_{\nu=0}^{M} a_\nu \Gamma(\alpha_\nu + 1)\lambda^{-\alpha_\nu - 1} + O(|\lambda|^{-\alpha_{M+1}-1}).$$

证明。 固定 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$，并令 $\Sigma_\delta := \{\lambda : \ |\arg \lambda| \le \frac{\pi}{2} - \delta\}$。对于 $\lambda \in \Sigma_\delta$，$\operatorname{Re} \lambda \ge |\lambda| \sin \delta$。在 1 处分割拉普拉斯积分：

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\, dt = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\, dt + \int_1^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\, dt =: I_0(\lambda) + I_\infty(\lambda).$$

由假设 (b)，对于 $\lambda \in \Sigma_\delta$,

$$|I_\infty(\lambda)| \le \int_1^\infty \mathrm{e}^{-\operatorname{Re}\lambda\, t}\, C\mathrm{e}^{-ct}\, dt \le C \int_1^\infty \mathrm{e}^{-(|\lambda|\sin\delta + c)t}\, dt \ll_\delta \mathrm{e}^{-|\lambda|\sin\delta},$$

因此 $I_\infty(\lambda)$ 指数级趋于零，尤其对于每个 N，都有 $O(|\lambda|^{-N})$。

对于 $I_0(\lambda)$，代入 (a) 中的展开式：

$$I_0(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{M} a_\nu \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} t^{\alpha_\nu}\, dt + \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} O(t^{\alpha_{M+1}})\, dt.$$

余项积分满足

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} O(t^{\alpha_{M+1}})\, dt\Big| &\ll \int_0^1 \mathrm{e}^{-\operatorname{Re}\lambda\, t} t^{\alpha_{M+1}}\, dt \\ &\le \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(|\lambda|\sin\delta)t} t^{\alpha_{M+1}}\, dt \\ &= \Gamma(\alpha_{M+1}+1)\,(|\lambda|\sin\delta)^{-\alpha_{M+1}-1},\end{aligned}$$

因此它是 $O_\delta(|\lambda|^{-\alpha_{M+1}-1})$。

最后，对于每个 $\alpha > -1$ 和 $\lambda \in \Sigma_\delta$,

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} t^\alpha\, dt = \lambda^{-\alpha-1}\int_0^\lambda \mathrm{e}^{-u} u^\alpha\, du = \Gamma(\alpha+1)\lambda^{-\alpha-1} + O_\delta(\mathrm{e}^{-|\lambda|\sin\delta}),$$

因为 $\int_\lambda^\infty \mathrm{e}^{-u} u^\alpha\, du = O(\mathrm{e}^{-\operatorname{Re}\lambda})$。结合以上内容，证明完毕。

□

定理 3.14（预解算子迹的渐近分析）。固定 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$。当 $|\lambda| \to \infty$ 满足 $|\arg \lambda| \le \frac{\pi}{2} - \delta$,

$$R(\lambda) = \sum_{j \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \dots, N\}} c_j \Gamma(j+1) \lambda^{-j-1} + O(|\lambda|^{-N-3/2}) \tag{3.10}$$

对于每个 $N \in \mathbb{N}$。特别地，首项为 $R(\lambda) \sim \frac{\pi}{2} \lambda^{-1/2}$。

证明。将引理 3.13 应用于 $f(t) = \theta(t)$，条件 (a) 使用定理 2.18，条件 (b) 使用引理 3.5，然后使用 (3.9)。首项系数由命题 3.3 得出：$c_{-1/2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{\pi}{2}$。□

我们对预解式展开积分，得到 $\log W(\lambda)$ 关于大-λ 的展开。固定 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$，并通过从 $\lambda = 0$ 沿 Σ_δ 中的任意路径作解析延拓，在 Σ_δ 上定义 $\log W(\lambda)$ 的一个分支。

定理 3.15 (典范乘积的渐近分析)。固定 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 并令 $\Sigma_\delta = \{\lambda : |\arg \lambda| \le \frac{\pi}{2} - \delta\}$。存在一个常数 $C_W \in \mathbb{C}$（取决于所选的 $\log W$ 分支），使得当 $|\lambda| \to \infty$ 且 $\lambda \in \Sigma_\delta$ 时，

$$\log W(\lambda) = \pi \lambda^{1/2} + c_0 \log \lambda + C_W - \sum_{\substack{j \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\} \\ j \le N}} \frac{c_j \Gamma(j+1)}{j} \lambda^{-j} + O(|\lambda|^{-N-1/2}), \tag{3.11}$$

对每个 $N \in \mathbb{N}$，其中 $\lambda^{1/2}$ 和 $\log \lambda$ 均在 Σ_δ 上取主值分支。特别地，对于每个整数 $m \ge 1$，λ^{-m} 在 $\log W(\lambda)$ 的渐近展开中的系数等于

$$[\lambda^{-m}] \log W(\lambda) = \frac{(-1)^{m+1}}{m} Z(-m). \tag{3.12}$$

证明。由命题 3.10，$d(\log W)/d\lambda = R(\lambda)$ 在 Σ_δ 上。沿着从 1 到 λ 的线段对 $R(\lambda)$ 积分。利用 (3.10)，逐项积分得到：

- $j = -\frac{1}{2}$ 项的积分为 $2c_{-1/2}\Gamma(1/2)\lambda^{1/2} = \pi\lambda^{1/2}$；
- $j = 0$ 项的积分为 $c_0 \log \lambda$；
- 每个 $j > 0$ 项的积分为 $-\frac{c_j \Gamma(j+1)}{j} \lambda^{-j}$。

积分余项 $O(|\lambda|^{-N-3/2})$ 的贡献为 $O(|\lambda|^{-N-1/2})$。下限 1 以及分支选择所产生的所有贡献均并入常数 C_W 中。由此证明了 (3.11)。

对于 (3.12)，将 $j = m \in \mathbb{N}$ 代入 (3.11)：λ^{-m} 的系数为 $-\frac{c_m \Gamma(m+1)}{m!} = -\frac{m!\, c_m}{m} = -\frac{c_m}{m}$。根据定理 3.9，$c_m = (-1)^m Z(-m)/m!$，因此该系数等于 $\frac{(-1)^{m+1}}{m} Z(-m)$。□

回顾一下，

$$\varphi(w) = \prod_{n \ge 1} \Big(1 - \frac{w^2}{\tau_n^2}\Big) = \prod_{n \ge 1} \Big(1 + \frac{-w^2}{\lambda_n}\Big) = W(-w^2).$$

前述定理立即给出了系数比较论证所需的系数提取陈述。

推论 3.16（无穷远处的系数提取）。固定 w 平面上的一个扇区 $\mathcal{S}$，使得$-w^2 \in \Sigma_\delta$对于某个 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 成立（例如 $|\arg w + \frac{\pi}{2}| \le \frac{\pi}{4} - \varepsilon$对于某个 $\varepsilon > 0$）。那么当 $|w| \to \infty$且 $w \in \mathcal{S}$ 时，

$$\log \varphi(w) = \log W(-w^2) = \text{（涉及 } w \text{ 和 } w^{-1}\text{的奇次幂的项）} - \sum_{m=1}^{N} \frac{Z(-m)}{m} w^{-2m} + O(|w|^{-2N-1})$$

对每个 $N \in \mathbb{N}$均成立。特别地，对每个 $m \ge 1$,

$$[w^{-2m}] \log \varphi(w) = -\frac{Z(-m)}{m}. \tag{3.13}$$

证明。取 $\lambda = -w^2$，应用定理 3.15。选择 Σ_δ上 $\sqrt{\lambda}$ 的一个一致分支后，项$-\lambda^{1/2}$ 和 λ^{-j} 中的 $j \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 变为 w 和 w^{-1} 的奇次幂。对于整数 $m \ge 1$，$\lambda^{-\overline{m}} = (-w^2)^{-m} = (-1)^m w^{-2m}$，而 (3.12) 中的系数给出 $-\frac{Z(-m)}{m} w^{-2m}$。余项 $O(|\lambda|^{-N-1/2})$变为 $O(|w|^{-2N-1})$。□

3.4. **稳健可容许性判据：二次格的解析扰动**。上述证明在扰动下仍然成立，且仅依赖于修正项的解析性。我们记录一个一般判据，它或许对相关的极值函数问题有所帮助。

定理 3.17（一般可容许性判据）。固定 $a > 0$。假设 q 在闭区间 $[0, a^{-2}]$ 的某个邻域内解析（等价地，存在 $\rho > a^{-2}$ 使得 q 在 $|u| < \rho$上解析），并且 q 在 $[0, a^{-2}]$上取实值。定义

$$\lambda_n := (n+a)^2 + q\big((n+a)^{-2}\big), \qquad n \ge 0,$$

并假设对所有 n都有 $\lambda_n > 0$。那么序列 $(\lambda_n)_{n\ge 0}$ 按照定义 *2.1* 的意义是可容许的。

证明。令 $a_n := n + a$，并令 $u_n := a_n^{-2}$。那么 $u_n \in (0, u_0]$，其中 $u_0 = a^{-2}$。选取 $\rho > a^{-2}$，使得 q 在圆盘 $|u| < \rho$上解析。令 $u_0 := a^{-2}$，从而对所有 n都有 $0 < u_n \le u_0 < \rho$。那么 q在 $[0, u_0]$上有界，例如 $\sup_{u\in[0,u_0]} |q(u)| \le Q_* < \infty$。

(1) 和绝对收敛。由于 $q(u_n)$ 是实数且有界，并且 $a_n^2 \to \infty$，我们有$\lambda_n \to +\infty$ 和 $\Re\lambda_n = \lambda_n > 0$。此外，$\lambda_n \ge a_n^2 - Q_* \gg n^2$，因此对每个 $t > 0$，$\sum_{n\ge 0} e^{-\lambda_n t}$ 都绝对收敛，并且当 $t \to 0^+$ 时 $\sum_{n\ge 0} e^{-\lambda_n t} \ll t^{-1/2}$，由此像之前一样推出可容许性 (3)。

(2) 完整热迹展开。设

$$\theta(t) := \sum_{n\ge 0} e^{-\lambda_n t} = \sum_{n\ge 0} e^{-a_n^2 t} e^{-tq(u_n)}.$$

固定 $N \in \mathbb{N}$。由于 $|q(u_n)| \le Q_*$，泰勒定理给出，当 $t \in$ 时（对 n一致成立，$0, 1]$, ,

$$e^{-tq(u_n)} = \sum_{r=0}^{N} \frac{(-t)^r}{r!} q(u_n)^r + O(t^{N+1}).$$

因此

$$\theta(t) = \sum_{r=0}^{N} \frac{(-t)^r}{r!} F_r(t) + O(t^{N+1})\Theta_{a,0}(t), \qquad F_r(t) := \sum_{n\ge 0} q(u_n)^r e^{-a_n^2 t},$$

其中 $\Theta_{a,0}(t) := \sum_{n\ge 0} e^{-a_n^2 t}$. 由于 $\Theta_{a,0}(t) = O(t^{-1/2})$，当 $t \to 0^+$ 时，余项为 $O(t^{N+1/2})$。

接下来只需证明每个 $F_r(t)$ 都有完整展开。由于 q 在 $\{|u| \le r\}$ 上解析，函数 $q(u)^r$ 有一个幂级数

$$q(u)^r = \sum_{m\ge 0} c_{r,m} u^m, \qquad |u| < r,$$

并且由柯西估计，存在 $C_r > 0$ 使得 $|c_{r,\,m}| \le C_r r^{-m}$。由于 $0 < u_n \le u_0 < r$，

$$\sum_{m\ge 0} |c_{r,m}| \sum_{n\ge 0} u_n^m e^{-a_n^2 t} \le \Theta_{a,0}(t) \sum_{m\ge 0} C_r \Big(\frac{u_0}{r}\Big)^m < \infty,$$

因此我们可以交换求和次序，得到

$$F_r(t) = \sum_{m\ge 0} c_{r,m}\, \Theta_{a,m}(t), \qquad \Theta_{a,m}(t) := \sum_{n\ge 0} a_n^{-2m} e^{-a_n^2 t}.$$

最后，每个 $\Theta_{a,\,m}(t)$ 都可通过梅林/赫尔维茨 ζ 函数轮廓移位得到完整的短时展开（与命题 2.13 中完全相同，其中 $\zeta(\cdot,\ a)$），且上面的 m-和绝对收敛并呈几何级数收敛，因此可以逐项对展开求和。这便为每个 $F_r(t)$ 得到完整展开，进而也为 $\theta(t)$ 得到完整展开。因此，可容许性 (2) 成立，证明完成。□

4. Proof of Conjecture 1 in [BOCRS25]

本节证明 BOCRS [25] 的猜想 1。回顾

$$L_+(s) := \sum_{n\ge 1} \tau_n^{-s} \qquad (\operatorname{Re} s > 1),$$

并且 L_+ 可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$ （例如通过定理 3.7 中的谱 ζ 函数$Z(s) = \sum_{n\ge 1} \lambda_n^{-s} = L_+(2s)$）。

定理 4.1 （ [BOCRS25] 的猜想 1）。 对每个 $k \in \mathbb{Z}$，有

$$L_+(-2k) = \frac{L_+(2k)}{(2\pi i C)^{2k}}.$$

4.1. 关于 φ 的反演恒等式。 我们采用 [BOCRS25] 的记号。特别地，

$$\varphi(z) = \Phi(z)\Phi(-z), \qquad \Phi(z) = \prod_{n\ge 1} \Big(1 + (-1)^n \frac{z}{\tau_n}\Big),$$

且 φ 是经过规范化的极值函数，满足 $\varphi(0) = 1$ （因此 $\Phi(0) = 1$）。Le t

$$Tz := \frac{1}{2\pi i C z}, \qquad z \in \mathbb{C}^*, \tag{4.1}$$

并定义规范化函数

$$A(z) := \mathrm{e}^{\frac{1}{4Cz}} \Phi(z), \qquad z \in \mathbb{C}^*. \tag{4.2}$$

注意，对所有 $z \ne 0$， $A(z)A(-z) = \Phi(z)\Phi(-z) = \varphi(z)$。

引理 4.2 (规范化函数方程)。 设 A 由(4.2)定义。那么对于每个 $z \in \mathbb{C}^*$,

$$2\sqrt{\pi C}\, z\, A(z) = \mathrm{e}^{-i\pi/4} A(Tz) + \mathrm{e}^{i\pi/4} A(-Tz). \tag{4.3}$$

证明。 我们从函数方程 [BOCRS25, (1.6)] 出发，该方程适用于 Φ （对每个 $z \in \mathbb{C}^*$均成立），

$$\Phi(z)\mathrm{e}^{\frac{1}{4Cz}} = \frac{\mathrm{e}^{-i\pi/4+\frac{i\pi}{2}z}\,\Phi(Tz) + \mathrm{e}^{i\pi/4-\frac{i\pi}{2}z}\,\Phi(-Tz)}{2\sqrt{\pi C}\,z}.$$

利用 (4.2) 和恒等式

$$\frac{1}{4C(Tz)} = \frac{1}{4C}\cdot(2\pi i C z) = \frac{\pi i}{2}z,$$

我们有 $\Phi(Tz) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4C(Tz)}}A(Tz) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{2}z}A(Tz)$，类似地， $\Phi(-Tz) = \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2}z}A(-Tz)$。将这些表达式代入 [BOCRS25, (1.6)] ，可消去依赖于 z的指数项，并得到 (4.3)。□

命题 4.3 (反演恒等式)。 对每个 $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\varphi(Tz) = \pi C z^2\big(A(z)^2 + A(-z)^2\big). \tag{4.4}$$

等价地，令 $R(z) := A(z)/A(-z)$,

$$\varphi(Tz) = \pi C z^2\,\varphi(z)\,\big(R(z) + R(z)^{-1}\big). \tag{4.5}$$

证明。 在 z 和 $-z$ 处应用引理 4.2。由于 $T(-z) = -Tz$，我们得到线性方程组

$$\mathrm{e}^{-i\pi/4}A(Tz) + \mathrm{e}^{i\pi/4}A(-Tz) = 2\sqrt{\pi C}\,z\,A(z),$$
$$\mathrm{e}^{i\pi/4}A(Tz) + \mathrm{e}^{-i\pi/4}A(-Tz) = -2\sqrt{\pi C}\,z\,A(-z).$$

求解 $A(Tz)$ 与 $A(-Tz)$，并将两个解相乘；由于 $\mathrm{e}^{-i\pi/2}+\mathrm{e}^{i\pi/2} = 0$，混合项相互抵消，于是得到

$$A(Tz)A(-Tz) = \pi C z^2\big(A(z)^2 + A(-z)^2\big).$$

最后，注意到 $A(Tz)A(-Tz) = \Phi(Tz)\Phi(-Tz) = \varphi(Tz)$（规范因子相互抵消），由此证明了 (4.4)。等价形式 (4.5) 由 $A(z)^2 + A(-z)^2 = A(z)A(-z)\big(R + R^{-1}\big) = \varphi(z)\big(R + R^{-1}\big)$ 得出。□

4.2. **扇形对数与偶系数不变性**。 现在我们从 (4.5) 中提取关于 $\log\,\varphi(Tz)$ 的小z 展开中偶 系数的一条奇偶性陈述。

定义 4.4 （带对数的 Poincar´e 渐近系数）. 设 S 是顶点位于 0 的扇区，并在 S 上固定 $\log z$ 的一个全纯分支。设 F 在 $S \cap \{0 < |z| < r\}$ 上全纯。

我们称 F 在 S 上具有（对数型）庞加莱渐近展开，如果存在一个整数 n_0 和 $P \in \mathbb{N}_0$，使得对每个整数 $N > n_0$，都有

$$F(z) = \sum_{p=0}^{P}(\log z)^p \sum_{n=n_0}^{N-1} a_{n,p}\,z^n \;+\; O(|z|^N) \qquad (z \to 0,\ z \in S),$$

对于某些系数 $a_{n,\,p} \in \mathbb{C}$ （仅依赖于 F 和 S）。这些系数是唯一确定的，我们记作

$$[z^n(\log z)^p]_{\mathrm{as}}\,F := a_{n,p}, \qquad \text{and in particular} \qquad [z^n]_{\mathrm{as}}\,F := [z^n(\log z)^0]_{\mathrm{as}}\,F.$$

如果 F 在 0 处全纯（因此不会出现对数项或负幂项），那么 $[z^n]_{\mathrm{as}}F$与通常的泰勒系数一致，记作 $[z^n]_{\mathrm{Tay}}F$。

注 4.5。 如果 G 在 ∞ 处的一个扇区内全纯，且存在关于负幂的渐近展开，那么我们将对应扇区内的 $z \to 0$ 解释为 $[z^n(\log z)^p]_{\mathrm{as}}(G(1/z))$，其中 $[w^{-n}(\log w)^p]_{\mathrm{as}}G$ 表示为 $[z^n(\log z)^p]_{\mathrm{as}}(G(1/z))$。

引理 4.6 (log 的奇 Laurent 结构 R 在 0 附近)。 存在 $r>0$，使得在 $|z|<r$上可以选取一个全纯分支

$$H(z):=\log R(z)=\log\frac{A(z)}{A(-z)}$$

满足 $H(z)=\frac{1}{2Cz}+h(z)$，其中 h 在0 处全纯且为奇函数（因此 $h(z)=\sum_{m\ge0}h_{2m+1}z^{2m+1}$）。

证明。 利用 (4.2)，我们有

$$R(z)=\frac{A(z)}{A(-z)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2Cz}}\frac{\Phi(z)}{\Phi(-z)}.$$

由于 $\Phi(0)=1$，比值 $\Phi(z)/\Phi(-z)$ 在 0 附近全纯，且在 $z=0$ 处等于 1。因此我们可以选取全纯对数

$$h(z):=\log\frac{\Phi(z)}{\Phi(-z)}$$

满足 $h(0)=0$。那么 $h(-z)=\log\frac{\Phi(-z)}{\Phi(z)}=-h(z)$，所以 h 为奇函数。定义 $H(z):=\frac{1}{2Cz}+h(z)$，即可得到所需的 $\log R(z)$ 分支。□

接着我们定义 $\log\big(R(z)+R(z)^{-1}\big)$ 在 $S_\varepsilon\cap\{|z|<r\}$ 上满足恒等式 $\log\big(R+R^{-1}\big)=H+\log\big(1+e^{-2H}\big)$，其中 $\log(1+u)$ 是 $|u|<1/2$ 上的主全纯对数。此选择与因式分解 $R+R^{-1}=e^H(1+e^{-2H})$ 相容，并避免了分支歧义。

引理 4.7 （偶系数不变性）。 固定 $\varepsilon\in(0,\pi/4)$ 并令

$$S_\varepsilon:=\Big\{z\in\mathbb{C}:\ 0<|z|<\tau_1,\ |\arg z|<\varepsilon\Big\}.$$

在 S_ε 上，我们取 对数 z 的分支，使得 辐角 $z\in(-\varepsilon,\varepsilon)$。那么 对数 $\varphi(Tz)$ 具有对数型庞加莱渐近展开，其中 $z\to0$ 在 S_ε 中趋于 $z\to0$，其意义见定义 *4.4*；并且对每个整数 $k\ge1$,

$$[z^{2k}]_{\mathrm{as}}\log\varphi(Tz)=[z^{2k}]_{\mathrm{Tay}}\log\varphi(z). \tag{4.6}$$

证明。 在 S_ε 上，我们有 $\Re(1/z)\ge(\cos\varepsilon)/|z|$。由引理 4.6，我们可以选取 $r>0$ 及一个全纯分支

$$H(z):=\log R(z)=\log\frac{A(z)}{A(-z)}\qquad(0<|z|<r),$$

使得 $H(z)=\frac{1}{2Cz}+h(z)$，其中 h 在 0 处全纯且为奇函数。

因此，当 $z\to0$ 属于 S_ε 时，

$$\Re H(z)=\Re\Big(\frac{1}{2Cz}\Big)+O(|z|)\to+\infty,$$

所以对于某个 $c>0$，$\mathrm{e}^{-2H(z)}=O(\mathrm{e}^{-c/|z|})$，因此对每个 $N\in\mathbb{N}$,

$$\mathrm{e}^{-2H(z)}=O(|z|^N)\qquad(z\to0,\ z\in S_\varepsilon). \tag{4.7}$$

必要时缩小 r，我们可以假设 $|\mathrm{e}^{-2H(z)}|\le1/2$ 在 $S_\varepsilon\cap\{|z|<r\}$ 上成立，因此 $\log(1+\mathrm{e}^{-2H(z)})$ 在那里是全纯的，并且根据 (4.7) 在 0 处平坦。

利用（4.5），并记

$$R(z)+R(z)^{-1}=\mathrm{e}^{H(z)}\big(1+\mathrm{e}^{-2H(z)}\big),$$

我们在 $S_\varepsilon \cap \{|z| < r\}$ 上得到恒等式

$$\log\varphi(Tz) = \log(\pi C z^2) + \log\varphi(z) + H(z) + \log\bigl(1 + \mathrm{e}^{-2H(z)}\bigr), \tag{4.8}$$

其中，$\log(\pi C z^2) = \log(\pi C) + 2\log z$ 在 S_ε 上使用 log 的固定分支 z。由于 $\varphi(0) = 1$ 且 φ 在 $|z| < \tau_1$ 中没有零点，因此 $\log\varphi(z)$ 在 $|z| < \tau_1$ 中全纯，并且其泰勒展开仅含偶次幂。

现在考察系数 $[z^{2k}]_{\mathrm{as}}$ 中关于 $k \ge 1$ 的各项贡献：

- $\log(\pi C z^2) = \log(\pi C) + 2\log z$ 不贡献 z 的任何正次幂。
- $H(z) = \frac{1}{2Cz} + h(z)$ 不贡献 z 的任何正偶次幂，因为 $\frac{1}{2Cz}$ 是一个 z^{-1} 项，而 h 是奇数。
- $\log(1+\mathrm{e}^{-2H(z)})$ 根据 (4.7) 是平坦的，因此对（对数）Poincaré 展开没有贡献。

因此，对于每个 $k \ge 1$，$\log\varphi(Tz)$ 的对数庞加莱展开中 z^{2k} 的系数，等于 $\log\varphi(z)$ 中 z^{2k} 的泰勒系数，这恰好就是 (4.6)。□

4.3. 在 0 和 ∞ 处的系数对应关系。 现在我们计算 (4.6) 右边和左边的偶数系数。

引理 4.8（在 0 处的泰勒系数）。对于 $|z| < \tau_1$，有

$$\log\varphi(z) = -\sum_{k\ge1} \frac{L_+(2k)}{k}\, z^{2k}. \tag{4.9}$$

特别地，对于每个 $k \ge 1$，

$$[z^{2k}]_{\mathrm{Tay}} \log\varphi(z) = -\frac{L_+(2k)}{k}.$$

证明。由 [BOCRS25 的 (1.1) 和 (1.5)]（或者直接由 φ 的乘积）可得

$$\varphi(z) = \prod_{n\ge1}\Bigl(1 - \frac{z^2}{\tau_n^2}\Bigr),$$

并且 $\sum_{n\ge1}\tau_n^{-2} < \infty$ 意味着该乘积局部一致收敛。对于 $|z| < \tau_1$，我们可以展开 $\log(1-w) = -\sum_{k\ge1} w^k/k$，并逐项求和，得到

$$\log\varphi(z) = \sum_{n\ge1}\log\Bigl(1 - \frac{z^2}{\tau_n^2}\Bigr) = -\sum_{k\ge1}\frac{z^{2k}}{k}\sum_{n\ge1}\tau_n^{-2k},$$

即为 (4.9)。□

引理 4.9 (渐近系数于 ∞). 设 $w \to \infty$ 属于一个扇区 $\mathcal{S}$，使得 $\lambda = -w^2$ 保持在一个扇区 Σ_δ 内，如推论 *3.16* 所示。那么对每个 $N \in \mathbb{N}$，

$$\log\varphi(w) = \text{（涉及 } w \text{ 和 } w^{-1} \text{ 的奇次幂的项）} - \sum_{m=1}^{N} \frac{L_+(-2m)}{m}\, w^{-2m} + O(|w|^{-2N-1}). \tag{4.10}$$

因此，对每个 $m \ge 1$，

$$[w^{-2m}]_{\mathrm{as}} \log\varphi(w) = -\frac{L_+(-2m)}{m}.$$

证明。这正是推论 3.16，注意到 $Z(-m) = L_+(2(-m)) = L_+(-2m)$。□

引理4.10（log 的渐近系数 $\varphi(Tz)$ 在 0 附近）。设 $\varepsilon \in (0,\ \pi/4)$ 和 S_ε 如引理 *4.7* 中所述。则对每个整数 $k \geq 1$,

$$[z^{2k}]_{\mathrm{as}} \log \varphi(Tz) = -\frac{L_+(-2k)}{k}\,(2\pi i C)^{2k}. \tag{4.11}$$

证明。我们按照注 4.5 的意义理解渐近系数。对数项（源自 $\log(-w^2)$）只影响 z 中的常数项，因此对于 $k \geq 1$，不会对$[z^{2k}]_{\mathrm{as}}$ 有所贡献。

对于 $z \in S_\varepsilon$，我们有 $w = Tz = \frac{1}{2\pi i C z}$，其中 $|w| \to \infty$ 且 $|\arg\, w + \frac{\pi}{2}| \prec \varepsilon$。因此 $-w^2$ 位于正实轴周围的扇区 Σ_δ 内，且 $\delta = \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon > 0$，所以引理 4.9 适用于 $\log\, \varphi(w)$。将 $w = Tz$ 代入 (4.10)，并利用 $w^{-2k} = (2\pi i C)^{2k} z^{2k}$，得到 (4.11)。□

定理 *4.1* 的证明。我们先证明关于 $k \geq 1$ 的恒等式。根据引理 4.7，对于每个 $k \geq 1$,

$$[z^{2k}]_{\mathrm{as}} \log \varphi(Tz) = [z^{2k}]_{\mathrm{Tay}} \log \varphi(z).$$

根据引理 4.8，右侧等于 $-^{L_+\,(2k)\ k}$。根据引理4.10，左侧等于$_^{\,L_+\,(-2k)\ k}\,(2\pi i C)^{2k}$。令这两个表达式相等并消去 $-1/k$，得到

$$L_+(-2k) = \frac{L_+(2k)}{(2\pi i C)^{2k}} \qquad (k \geq 1).$$

对于 $k = 0$，该恒等式显然成立。对于 $k \leq -1$，写成 $k = -m$，其中 $m \geq 1$，并使用已证明的情形 $m \geq 1$:

$$L_+(2m) = \frac{L_+(-2m)}{(2\pi i C)^{-2m}} \quad \Longleftrightarrow \quad L_+(-2k) = \frac{L_+(2k)}{(2\pi i C)^{2k}}.$$

这就完成了对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 的证明。 □

论证中唯一真正非局部的输入是无穷远处的系数提取（引理 4.9）；在我们的设定下，它由 $\lambda_n = \tau_n^2$ 的可容许性以及 Quine–Heydari–Song ζ正则化演算推出。其余步骤都是函数方程 [BOCRS25, (1.6)] 的代数推论，并结合了在 0 附近一个小扇区中的奇偶性论证。

5. Admissibility of higher powers of $(\tau_n)_{n\geq 1}$

令 $(\tau_n)_{n\geq 1}$ 为来自 [BOCRS25] 的正零点，并设 $a_n := n + \frac{1}{2}$。对于每个整数$m \geq 1$，定义热迹

$$\theta_m(t) := \sum_{n\geq 1} e^{-\tau_n^m t} \qquad (t > 0).$$

本节将证明以下定理。

定理 5.1（奇偶二分）。设 $m \geq 1$ 为一个整数。

(a) 若 m 为奇数，则热迹 $\theta_m(t)$ 包含一个非零 项，其形式为

$$\kappa_m\, t \log t,$$

因此$(\tau_n^m)_{n\geq 1}$ 不符合 *Quine–Heydari–Song* 意义下的可容许性。特别是，$(\tau_n)_{n\geq 1}$（即 $m = 1$）不可容许，且对于任意奇数 $m \geq 3$，(τ_n^m) 也不可容许。(b) 若 m 为偶数，则$(\tau_n^m)_{n\geq 1}$ 符合 *Quine–Heydari–Song* 意义下的可容许性。

5.1. 对所有 m，条件 (1) 和 (3)。根据 [BOCRS25，定理 1，2]存在一个非负系数的奇幂级数 ρ，其收敛半径为 2，且满足 $\rho(2)=\frac{1}{2}$，使得

$$\tau_n = a_n - \rho(a_n^{-1}), \qquad n \ge 1. \tag{5.1}$$

由于 $a_n^{-1} \le 2/3 < 2$ 和 $\rho(z) = \sum_{j\ge1} \alpha_j z^j$ 具有非负系数，并且在$|z| \le 2$ [BOCRS25 定理 6.1], 上收敛，因此部分和在 $[0,2]$ 上单调递增，从而 ρ 在该处也单调递增。因此

$$0 \le \rho(a_n^{-1}) \le \rho(2) = \tfrac{1}{2},$$

所以 (5.1) 给出 $\tau_n \ge a_n - \frac{1}{2} = n$对所有 $n \ge 1$均成立。

特别地，对于每个整数 $m \ge 1$，都有 $\tau_n^m \ge n^m$，因此 $\theta_m(t)$ 对每个 $t>0$ 都绝对收敛，并满足 $\theta_m(t) \ll t^{-1/m}$，当 $t \to 0^+$时。因此，对于每个 m，QHS 可容许性条件 (1) 和 (3) 对 $(\tau_n^m)_{n\ge1}$均成立：条件 (1) 显然成立，因为 $\tau_n^m > 0$；条件 (3) 则由 $t^\beta \theta_m(t) \to 0$，当 $t \to 0^+$ 时，对任意 $\beta > 1/m$ 均成立（例如，$\beta = 2$ 对所有$m \ge 1$都一致成立）。因此，只需检验纯幂 展开要求（QHS 条件 (2)）。

5.2. 奇数 m：一个显式的 a_n^{-1}项，出现在 τ_n^m中。令 $m = 2\ell+1$，其中 $\ell \ge 0$。我们证明，τ_n^m具有一个 a_n^{-1}项，其系数可由 BOCRS 狄利克雷级数显式计算

$$L_-(s) := \sum_{n\ge1} \frac{(-1)^n}{\tau_n^s} \qquad (\Re s > 1),$$

在前文中记作 $L_\tau(s)$，并且根据 BOCRS25 第 10.2 节，它关于 s 是整函数].

引理 5.2 (a_n^{-1}在 $\tau_n^{2\ell+1}$中的系数)。设 $m = 2\ell+1$ 为奇数。那么当 $n \to \infty$ 时，有如下渐近展开

$$\tau_n^m = a_n^m + \sum_{j=1}^{\ell} c_{m,j}\, a_n^{m-2j} \;+\; d_m\, a_n^{-1} \;+\; O(a_n^{-3}), \tag{5.2}$$

for 一些实常数 $c_{m,\,j}$，其中系数 d_m 由以下闭式给出 *la*

$$d_m = (-1)^\ell \, \frac{L_-(m)}{2^{m-1}\,\pi^{m+1}\,C^m}. \tag{5.3}$$

特别地，对每个奇数 $m \ge 1$，都有 $d_m \ne 0$ 。

证明。定义 $\tau(z) := z^{-1} - \rho(z)$，使得 (5.1) 可写为 $\tau_n = \tau(a_n^{-1})$。那么 $\tau(z)^m$是在 $z=0$ 处以首项 z^{-m} 开头的洛朗级数，并且

$$\tau(a_n^{-1})^m = a_n^m + \cdots + \big([z^1]\tau(z)^m\big)a_n^{-1} + O(a_n^{-3}).$$

因此 $d_m = [z^1]\tau(z)^m$。

计算 这个系数时，我们使用 BOCRS25 第 §6] 节中引入的辅助级数 g [:

$$g(w) := \frac{1}{\pi i} \sum_{k\ge0} \frac{2\,L_-(2k-1)}{2k-1}\, w^{2k-1}, \qquad 0 < |w| < \tau_1,$$

以及 ρ 的定义恒等式（ [BOCRS25] 中的方程 (6.2)）：

$$g\!\left(\frac{1}{2\pi i C\,\tau(z)}\right) = \frac{1}{z} \qquad (|z| \text{ small}). \tag{5.4}$$

证明 $f = 1/g$ 在0处是全纯且局部可逆的。该 $k = 0$项见

定义中的 g 涉及 $L_-(-1)$，它由解析延拓定义，并满足$L_-(-1) = -\frac{1}{4C}$ [BOCRS25, §10.2, eq. (10.1)]。因此

$$g(w) = \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{2L_-(-1)}{-1}\, w^{-1} + O(w) = \frac{1}{2\pi i C}\, w^{-1} + O(w) \qquad (w \to 0),$$

因此， $f(w) := 1/g(w)$ 在 0 附近全纯，且 $f(0) = 0$并且 $f'(0) = 2\pi i C \neq 0$。设

$$w(z) := \frac{1}{2\pi i C\, \tau(z)}.$$

Th于是 (5.4) 变为 $g(w(z)) = z^{-1}$。等价地，写作 $f(w) := 1/g(w)$，我们有

$$f(w(z)) = z, \tag{5.5}$$

因此， $w(z)$ 是 f 在 0 处的局部反函数。

Now

$$\tau(z)^m = \frac{1}{(2\pi i C)^m}\, w(z)^{-m},$$

因此 $d_m = [z^1]\tau(z)^m = (2\pi i C)^{-m}\,[z^1]w(z)^{-m}$。通过留数计算 d_m。由于 f 在 0 附近全纯，且 $f(0) = 0$ 并且 $f'(0) \neq 0$，拉格朗日–伯曼（留数）公式给出，对于 $\psi(w) = w^{-m}$，

$$[z^1]\psi(w(z)) = \mathrm{Res}_{w=0}\, \frac{\psi'(w)}{f(w)}\, dw.$$

将 $\psi(w) = w^{-m}$ 应用于此处（因此 $\psi'(w) = -mw^{-m-1}$），得到

$$[z^1]\, w(z)^{-m} = \mathrm{Res}_{w=0}\left(-mw^{-m-1}\right) \frac{dw}{f(w)} = \mathrm{Res}_{w=0}\left(-mw^{-m-1}\right) g(w)\, dw = -m\,[w^m]\, g(w).$$

因此

$$d_m = (2\pi i C)^{-m}[z^1]\, w(z)^{-m} = -\frac{m}{(2\pi i C)^m}\,[w^m]g(w).$$

由于 $g(w)$ 是一个奇洛朗级数，对于偶数 m，有 $[w^m]g(w) = 0$；对于奇数 m，我们有 e

$$[w^m]g(w) = \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{2\, L_-(m)}{m}.$$

代入后得到

$$d_m = -\frac{m}{(2\pi i C)^m} \cdot \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{2L_-(m)}{m} = -\frac{2L_-(m)}{\pi i} \cdot \frac{1}{(2\pi i C)^m},$$

这可化简为 (5.3)，因为 $m = 2\ell + 1$ 意味着 $i^{m+1} = i^{2\ell+2} = (-1)^{\ell+1}$。

最后， $L_-(m) \neq 0$ 对每个整数 $m \geq 1$都成立。事实上， τ_n 严格递增，因为 a_n递增，而 $\rho(a_n^{-1})$递减（因为 a_n^{-1}递减且 ρ 递增）。因此， τ_n^{-m}递减至 0。对于 $m = 1$，定义 $L_-(1)$ 的级数 $= \sum_{n\geq 1}(-1)^n\tau_n^{-1}$由交错级数判别法可知收敛；对于 $m \geq 2$，该级数绝对收敛。在所有情况下， $L_-(m)$的符号都与其首项相同，因此 $L_-(m) < 0$，特别是 $L_-(m) \neq 0$。

□

5.3. **奇数 m：调和加权和产生对数**。定义调和权和

$$H_m(t) := \sum_{n\ge 1} a_n^{-1} e^{-a_n^m t}.$$

引理5.3（对数渐近）。对每个整数 $m \ge 1$,

$$H_m(t) := \sum_{n\ge 1} a_n^{-1} e^{-a_n^m t} = \frac{1}{m}\log\frac{1}{t} + O(1) \qquad (t \to 0^+).$$

证明。固定 $c > 0$。由梅林反演,

$$e^{-y} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re s = c} \Gamma(s)\, y^{-s}\, ds \qquad (y > 0).$$

取 $y = a_n^m t$ 并对 $n \ge 1$ 求和（由于 $\sum_{n\ge1} a_n^{-1-ms}$ 对 $\Re s > 0$ 绝对收敛，富比尼定理适用），得到

$$H_m(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re s = c} \Gamma(s)\, t^{-s}\, S_m(s)\, ds, \qquad S_m(s) := \sum_{n\ge1} a_n^{-1-ms}.$$

利用 $\sum_{n\ge0}(n+\tfrac12)^{-p} = \zeta(p,\tfrac12)$ 并减去 $n=0$ 项，得到亚纯恒等式

$$S_m(s) = \zeta(1+ms, \tfrac12) - 2^{1+ms}.$$

由于 $\zeta(\cdot,\tfrac12)$ 在 1 处有一个留数为 1 的单极点，因此

$$S_m(s) = \frac{1}{ms} + O(1) \qquad (s \to 0),$$

而 $\Gamma(s) = \frac{1}{s} + O(1)$ 且 $t^{-s} = 1 - s\log t + O(s^2)$。因此

$$\Gamma(s)t^{-s}S_m(s) = \frac{1}{m}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{m}\frac{\log t}{s} + O(1),$$

因此，$1/s$ 的系数等于 $-\frac{1}{m}\log t + O(1)$。

现在将积分路径从 $\Re s = c$ 移至 $\Re s = -\frac12$。穿过的唯一极点位于 $s=0$，根据 Γ 的斯特林界以及 ζ 在垂直带中的多项式增长，$\Re s = -\frac12$ 上的积分为 $O(t^{1/2})$。因此,

$$H_m(t) = -\frac{1}{m}\log t + O(1) = \frac{1}{m}\log\frac{1}{t} + O(1),$$

如所述。 □

5.4. **奇数 m：$\theta_m(t)$ 中非零的 $t\log t$ 项**。

引理 5.4（多项式部分没有对数项）。设 $m = 2\ell+1$ 为奇函数，并定义

$$b_n := a_n^m + \sum_{j=1}^{\ell} c_{m,j}\, a_n^{m-2j}.$$

那么热迹

$$\vartheta_m(t) := \sum_{n\ge1} e^{-b_n t}$$

具有如下完整渐近展开：$t \to 0^+$ *in* 纯幂（特别是，没有 t 对数 t 项）。

证明。 记 $u_n := a_n^{-2}$并令

$$F(u) := 1 + \sum_{j=1}^{\ell} c_{m,j} u^j, \qquad \text{so that} \qquad b_n = a_n^m F(u_n) = a_n^m + a_n^{m-2} q(u_n),$$

其中 $q(u) := (F(u) - 1)/u = \sum_{j=1}^{\ell} c_{m,\,j} u^{j-1}$ 是一个多项式（因此在 $|u| < \infty$ 上解析）。由于 $u_n \le 4/9$, q 在 $[0, 4/9]$ 上有界。

现在展开

$$\vartheta_m(t) = \sum_{n \ge 1} e^{-a_n^m t}\, e^{-t\, a_n^{m-2} q(u_n)}$$

对 t 进行泰勒展开，并带有一个可求和余项（如偶次幂论证中所示）：对每个固定的 $R \ge 0$,

$$e^{-t\, a_n^{m-2} q(u_n)} = \sum_{r=0}^{R} \frac{(-t)^r}{r!}\, a_n^{(m-2)r} q(u_n)^r + (\text{remainder}).$$

Ne再展开 $q(u)^r = \sum_{k=0}^{r(\ell-1)} c_{r,\,k} u^k$ 并注意，每个由此得到的权重指数

$$(m-2)r - 2k \;\ge\; (m-2)r - 2r(\ell-1) = r \;\ge\; 0.$$

因此， $\vartheta_m(t)$ 是有限个这类和的线性组合（在 t 的幂次方面至多相差任意小的余项）：

$$\sum_{n \ge 1} a_n^q\, e^{-a_n^m t} \qquad (q \in \mathbb{Z}_{\ge 0}).$$

对于这样的 q，梅林反演表明，赫尔维茨 ζ 因子带来的唯一额外极点出现在 $s = (q+1)/m > 0$，因此不会与 $\Gamma(s)$ 在 0、-1、-2 等处的极点重合。因此，围道平移产生关于小 t 的纯幂完整展开，且不含对数。□

命题 5.5（奇次幂带有对数项）。设 m 为奇数。那么当 $t \to 0^+$ 时，

$$\theta_m(t) = \cdots + \frac{d_m}{m}\, t \log t + O(t),$$

其中 $d_m \ne 0$ 是引理 *5.2* 中的系数。特别地， $\theta_m(t)$ 不可能具有纯幂的完整渐近展开，因此 (τ_n^m) 在 [QHS93] 的意义下不可容许。

证明。设 m 为奇数。由引理 5.2，存在 $N \ge 1$ 及常数 $C > 0$，使得对所有 $n \ge N$,

$$\tau_n^m = b_n + d_m a_n^{-1} + \varepsilon_n, \qquad b_n := a_n^m + \sum_{j=1}^{(m-1)/2} c_{m,j}\, a_n^{m-2j}, \qquad |\varepsilon_n| \le C a_n^{-3}.$$

有限多个项 $n < N$ 在 $t = 0$ 处贡献一个解析函数（因此是纯幂级数），所以不会影响 $t \log t$ 项是否存在，也不会影响其系数。因此，我们将重点放在 $n \ge N$ 上。

固定 $t \in (0, 1]$。写出

$$e^{-\tau_n^m t} = e^{-b_n t}\, e^{-d_m t a_n^{-1}}\, e^{-\varepsilon_n t}.$$

由于 $a_n^{-1} \le 2/3$ 与 $t \le 1$，量 $|d_m| t a_n^{-1}$在 n中一致有界。利用标准估计 $|e^{-x} - 1 + x| \ll x^2 e^{|x|}$，我们得到

$$e^{-d_m t a_n^{-1}} = 1 - d_m t a_n^{-1} + O(t^2 a_n^{-2}),$$

并且类似地（由于 $|\varepsilon_n|t \ll a_n^{-3}$）

$$e^{-\varepsilon_n t} = 1 + O(t a_n^{-3}).$$

将这些相乘并吸收交叉项后，对于 $n \ge N$，得到

$$e^{-\tau_n^m t} = e^{-b_n t}\Big(1 - d_m t a_n^{-1}\Big) + O\Big(e^{-b_n t}\,(t^2 a_n^{-2} + t a_n^{-3})\Big).$$

对 $n \ge N$ 求和并利用 $\sum_{n\ge1} a_n^{-2} < \infty$ 和 $\sum_{n\ge1} a_n^{-3} < \infty$，可得

$$\theta_m(t) = \sum_{n\ge1} e^{-b_n t} - d_m t \sum_{n\ge1} a_n^{-1} e^{-b_n t} + O(t). \tag{5.6}$$

比较 $\sum a_n^{-1} e^{-b_n t}$ 与 $H_m(t)$。由于当 $n \to \infty$ 时 $b_n = a_n^m + O(a_n^{m-2})$，因此存在 $K > 0$ 和 $N' \ge N$，使得对所有 $n \ge N'$，均有 $|b_n - a_n^m| \le K a_n^{m-2}$。对于 $t \in (0,1]$ 和 $n \ge N'$，

$$|e^{-b_n t} - e^{-a_n^m t}| = e^{-a_n^m t}\big|e^{-(b_n - a_n^m)t} - 1\big| \le e^{-a_n^m t}\,|b_n - a_n^m|\,t\,e^{|b_n - a_n^m| t}.$$

选取 $N'' \ge N'$，使得对所有 $n \ge N''$，均有 $a_n^2 \ge 2K$。那么对于这样的 n，我们有 $|b_n - a_n^m| t \le \frac{1}{2} a_n^m t$，因此

$$|e^{-b_n t} - e^{-a_n^m t}| \ll t\, a_n^{m-2}\, e^{-\frac{1}{2} a_n^m t}.$$

因此

$$\sum_{n\ge1} a_n^{-1}\big(e^{-b_n t} - e^{-a_n^m t}\big) = O(1) + O\left(t \sum_{n\ge1} a_n^{m-3} e^{-\frac{1}{2} a_n^m t}\right) = O(1),$$

其中，最后一个界由积分比较得出。若 $m = 1$ 该和为 $\ll t \sum a_n^{-2} = O(t)$，且若 $m \ge 3$（仍为奇数），则 $t \sum a_n^{m-3} e^{-c a_n^m t} \ll t \cdot t^{-(m-2)/m} = t^{2/m} = O(1)$。因此，

$$\sum_{n\ge1} a_n^{-1} e^{-b_n t} = H_m(t) + O(1) \qquad (t \to 0^+).$$

由引理5.3，$H_m(t) = \frac{1}{m} \log \frac{1}{t} + O(1)$，因此

$$\sum_{n\ge1} a_n^{-1} e^{-b_n t} = \frac{1}{m} \log \frac{1}{t} + O(1).$$

由于根据引理5.4，$\sum_{n\ge1} e^{-b_n t} = \vartheta_m(t)$中没有 $t\log t$ 项，因此 $\theta_m(t)$中 $t\log t$ 的系数恰好为 d_m/m。将其代入(5.6)，得到

$$\theta_m(t) = \sum_{n\ge1} e^{-b_n t} - d_m t\Big(\frac{1}{m}\log\frac{1}{t} + O(1)\Big) + O(t) = \sum_{n\ge1} e^{-b_n t} + \frac{d_m}{m}\, t \log t + O(t).$$

Since $d_m \neq 0$, $t\log t$ 项非零，因此 QHS 可容许性条件 (2) 不成立。 □

5.5. **偶数 m：可容许性**。设 $m = 2p$ 满足 $p \ge 1$。像之前一样，写作 $\rho(z) = z\sigma(z^2)$，于是 σ 在 $|u| < 4$ 中解析，且

$$\tau_n = a_n - a_n^{-1}\sigma(a_n^{-2}) = a_n\big(1 - u_n \sigma(u_n)\big), \qquad u_n := a_n^{-2}.$$

Set

$$F_p(u) := \big(1 - u\sigma(u)\big)^{2p}, \qquad u \in [0, r_0], \quad r_0 := 4/9.$$

于是 F_p 在 $|u| < 4$ 上解析（因此在 $[0, r_0]$的一个邻域内解析），并满足$F_p(0) = 1$。因此 $F_p(u) - 1$ 在 $u = 0$ 处消失，我们可以写成

$$F_p(u) = 1 + u\, q_p(u), \qquad q_p(u) := \frac{F_p(u) - 1}{u},$$

其中 q_p 在 $|u|<4$上解析。特别地,

$$\tau_n^{2p} = a_n^{2p} F_p(u_n) = a_n^{2p} + a_n^{2p-2} q_p(u_n). \tag{5.7}$$

定义热迹

$$\theta_{2p}(t) := \sum_{n\geq 1} e^{-\tau_n^{2p} t} = \sum_{n\geq 1} e^{-a_n^{2p} t}\, e^{-t a_n^{2p-2} q_p(u_n)}.$$

引理 5.6 （一致指数泰勒界）。令 $R\geq 0$。对所有 $x\in\mathbb{C}$ 以及所有 $t\in[0,1]$,

$$e^{-tx} = \sum_{r=0}^{R} \frac{(-t)^r}{r!}\, x^r + O_R\Big(t^{R+1}|x|^{R+1} e^{t|x|}\Big).$$

证明。使用指数级数尾项:

$$e^{-tx} - \sum_{r=0}^{R} \frac{(-t)^r}{r!} x^r = \sum_{n\geq R+1} \frac{(-tx)^n}{n!}.$$

取绝对值，并用完整指数级数对尾项进行界定，可得

$$\left| e^{-tx} - \sum_{r=0}^{R} \frac{(-t)^r}{r!} x^r \right| \leq \sum_{n\geq R+1} \frac{(t|x|)^n}{n!} \leq \frac{(t|x|)^{R+1}}{(R+1)!}\, e^{t|x|}.$$

□

步骤 *1*：在 t 中进行带可求和余项的泰勒展开。由于 q_p 在 $[0,r_0]$上连续，令$Q_* :=$ 上确界 $_{u\in[0,r_0]}\,|q_p(u)|<\infty$ 并定义

$$A_n := a_n^{2p-2} q_p(u_n), \qquad u_n = a_n^{-2}.$$

固定一个整数 $R\geq 0$。对于 $t\in(0,1]$ 且任意 n），带余项的泰勒定理给出

$$e^{-tA_n} = \sum_{r=0}^{R} \frac{(-t)^r}{r!}\, A_n^r + O\Big(t^{R+1}|A_n|^{R+1} e^{t|A_n|}\Big),$$

其中隐含常数仅依赖于 R。乘以 $e^{-a_n^{2p}t}$ 并对 n求和，得到

$$\theta_{2p}(t) = \sum_{r=0}^{R} \frac{(-t)^r}{r!}\, F_r(t) \;+\; \mathrm{Err}_R(t), \tag{5.8}$$

其中

$$F_r(t) := \sum_{n\geq 1} a_n^{(2p-2)r} q_p(u_n)^r\, e^{-a_n^{2p}t},$$

and

$$\mathrm{Err}_R(t) \ll_{p,R} t^{R+1} \sum_{n\geq 1} a_n^{(2p-2)(R+1)}\, e^{-a_n^{2p}t}\, e^{t|A_n|}.$$

由于$|A_n|\leq Q_* a_n^{2p-2}$，我们有

$$e^{-a_n^{2p}t} e^{t|A_n|} \leq \exp\big(-t\big(a_n^{2p} - Q_* a_n^{2p-2}\big)\big) = \exp\big(-t\, a_n^{2p-2}(a_n^2 - Q_*)\big).$$

选取 n_0，使得对所有 $n\geq n_0$ 都有 $a_n^2\geq 2Q_*$。于是，对于 $n\geq n_0$, $a_n^{2p} - Q_* a_n^{2p-2} \geq_{-2}^{1} a_n^{2p}$，因此

$$e^{-a_n^{2p}t} e^{t|A_n|} \leq e^{-\frac{1}{2}a_n^{2p}t}.$$

在 n_0 处分拆求和（对于 $n < n_0$，只有有限项），得到

$$\mathrm{Err}_R(t) = O_{p,R}(t^{R+1}) + O_{p,R}\left(t^{R+1} \sum_{n\ge 1} a_n^{(2p-2)(R+1)} e^{-\frac{1}{2}a_n^{2p}t} \right).$$

根据积分比较

$$\sum_{n\ge 1} a_n^{\alpha} e^{-ca_n^{2p}t} \ll_{\alpha,p,c} t^{-(\alpha+1)/(2p)} \qquad (t\to 0^+,\ \alpha \ge 0),$$

我们得到

$$\mathrm{Err}_R(t) = O\Big(t^{R+1-((2p-2)(R+1)+1)/(2p)}\Big) = O\Big(t^{(R+1)/p-1/(2p)}\Big).$$

特别地，通过选取足够大的 R，我们可以使 $\mathrm{Err}_R(t) = O(t^N)$，对任意给定的 N 均成立。

步骤 *2*：将 $q_p(u)^r$ 按 u 的幂展开，并归约为加权 *theta* 和。固定 $r \ge 0$。由于 q_p 在圆盘 $|u| < 4$上解析， $q_p(u)^r$也如此，因此

$$q_p(u)^r = \sum_{k\ge 0} c_{r,k} u^k$$

收敛半径为 4。选取 ϱ，使得 $r_0 < \varrho < 4$，由柯西估计可得 $|c_{r,\,k}| \ll_r \varrho^{-k}$。由于 $u_n \le r_0 < \varrho$ 且 $|c_{r,\,k}| \ll_r \varrho^{-k}$，我们有

$$\sum_{k\ge 0} |c_{r,k}|\, u_n^k \ \ll_r \ \sum_{k\ge 0} \left(\frac{r_0}{\varrho}\right)^k < \infty$$

关于 n一致，因此托内利定理允许交换 k 和 n 的求和。利用 $u_n = a_n^{-2} \le r_0$，我们可以交换求和（绝对收敛），得到

$$F_r(t) = \sum_{k\ge 0} c_{r,k} \sum_{n\ge 1} a_n^{(2p-2)r-2k}\, e^{-a_n^{2p}t} = \sum_{k\ge 0} c_{r,k}\, \Theta_{p,\,(2p-2)r-2k}(t),$$

其中，对于 $q \in \mathbb{R}$，我们令

$$\Theta_{p,q}(t) := \sum_{n\ge 1} a_n^q e^{-a_n^{2p}t}.$$

步骤 *3*：对 $\Theta_{p,\,q}(t)$ 进行梅林分析并排除对数项。对于每个固定的 $q \in \mathbb{R}$，梅林反演给出

$$\Theta_{p,q}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re s = c} \Gamma(s)\, t^{-s} \Big(\zeta(2ps - q, \tfrac{1}{2}) - 2^{2ps-q} \Big)\, ds,$$

对任意 $c > (q+1)/(2p)$ 均成立。 $\zeta(\cdot,\ 1\,2)$ 的唯一极点位于 1，因此被积函数至多在

$$2ps - q = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad s = \frac{q+1}{2p},$$

以及 Γ 在 $s = 0,\ -1,\ -2,$ .....处的通常简单极点。若 $q \in 2\mathbb{Z}$，则 $(q+1)/(2p)$ 不可能是非正整数，因此该极点不会与 Γ 的极点重合。因此，围道平移给出 $\Theta_{p,\,q}(t)$ 当 $t \to 0^+$ 时的完整渐近展开，其中仅含纯幂（没有对数项）。

步骤 *4*：拼合 $\theta_{2p}(t)$。对于每个固定的 R，(5.8) 中的有限和是函数 $F_r(t)$的有限线性组合，而这些函数各自都是由$\Theta_{p,q}(t)$组成的绝对收敛级数，且具有 $q \in 2\mathbb{Z}$。因此，当 $t \to 0^+$ 时，它具有纯幂形式的完整 Poincar´e 展开；余项 $\mathrm{Err}_R(t)$ 可以通过取足够大的 R 而任意小（按 t 的幂的意义）。这证明 $\theta_{2p}(t)$ 具有纯幂形式的完整小-t 展开。结合

本节开头的界，可知 $(\tau_n^{2p})_{n\ge1}$ 在 Quine–Heydari–Song 的意义下是可容许的。□

6. Consequences of the parity dichotomy

在本节中，我们始终假设定理 5.1 中的奇偶二分：对于每个整数$m \ge 1$，热迹

$$\theta_m(t) := \sum_{n\ge1} \mathrm{e}^{-\tau_n^m t} \qquad (t>0)$$

当 m 为偶数时，具有纯幂形式的完整短时展开；而当 m 为奇数时，其中包含一个非零对数项 $\kappa_m\, t\log t$。

6.1. 与 τ_n^m 相关联的谱ζ函数。对于每个 $m\ge1$，定义（最初收敛的）谱 ζ 函数

$$Z_m(s) := \sum_{n\ge1} (\tau_n^m)^{-s} = \sum_{n\ge1} \tau_n^{-ms} = L_+(ms), \qquad \operatorname{Re} s > \frac{1}{m}. \tag{6.1}$$

（等式 $Z_m(s) = L_+(ms)$ 最初依据定义成立；一旦解析延拓得到建立，作为亚纯函数仍然成立。）

引理 6.1（当 t较大时的指数衰减）。对于每个 $m\ge1$，存在 $C_m>0$，使得对于所有 $t\ge1$,

$$\theta_m(t) \le C_m\, \mathrm{e}^{-\tau_1^m t}.$$

证明。令 $\theta_m(t) = \mathrm{e}^{-\tau_1^m t}\sum_{n\ge1}\mathrm{e}^{-(\tau_n^m-\tau_1^m)t}$。对于 $t\ge1$，$\mathrm{e}^{-(\tau_n^m-\tau_1^m)t} \le \mathrm{e}^{-(\tau_n^m-\tau_1^m)}$。由于 $\tau_n \ge n$ (引理 2.5)，我们有 $\mathrm{e}^{-(\tau_n^m-\tau_1^m)} \le \mathrm{e}^{\tau_1^m}\mathrm{e}^{-n^m}$，且 $\sum_{n\ge1}\mathrm{e}^{-n^m} < \infty$。将收敛级数并入 C_m。□

命题 6.2（梅林表示）。当 $\operatorname{Re} s > \frac{1}{m}$，

$$Z_m(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1}\theta_m(t)\,dt. \tag{6.2}$$

证明。当 $\operatorname{Re} s>0$ 且 $\Lambda>0$ 时，$\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-\Lambda t}\,dt = \Gamma(s)\Lambda^{-s}$。当 $\operatorname{Re} s \ge \frac{1}{m}$ 时，级数 $Z_m(s) = \sum \tau_n^{-ms}$绝对收敛，因此由富比尼定理，

$$\int_0^\infty t^{s-1}\theta_m(t)\,dt = \sum_{n\ge1}\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-\tau_n^m t}\,dt = \Gamma(s)\sum_{n\ge1}\tau_n^{-ms} = \Gamma(s)Z_m(s).$$

□

6.2. 偶次幂：简洁的 QHS 推论。固定 $p\ge1$ 并令 $m=2p$。根据定理 5.1(b)，$(\tau_n^{2p})_{n\ge1}$ 在 [QHS93], 的意义下是可容许的，因此 $\theta_{2p}(t)$ 存在一个由纯幂构成的完整短时展开：

$$\theta_{2p}(t) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(2p)}\, t^{j_\nu^{(2p)}}, \qquad j_0^{(2p)} < j_1^{(2p)} < \cdots, \quad j_\nu^{(2p)} \to +\infty, \tag{6.3}$$

不含对数项。

定理 6.3 （关于 Z_{2p}）的亚纯延拓与留数。 函数 $Z_{2p}(s) = L_+(2ps)$ 可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，且至多有简单极点。更确切地说，若 $c_\alpha^{(2p)}$表示展开式（6.3）中 t^α 的系数，则 Z_{2p} 可能在 $s=-\alpha$处有一个单极点，其留数为

$$\operatorname{Res}_{s=-\alpha} Z_{2p}(s) = \frac{c_\alpha^{(2p)}}{\Gamma(-\alpha)}. \tag{6.4}$$

特别是，尽管梅林分析从 t^k 的系数中得出可能的项 $(s+k)^{-1}$，但因子 $1/\Gamma(s)$ 在 $s=-k$ 处有一个单零点，从而抵消了这一奇点。因此， Z_{2p} 在每个非正整数 $s=-k$ 处都是全纯的。

证明。 固定 $N\in\mathbb{N}$，并将 (6.3) 截断至 $t^{j_N^{(2p)}}$ 阶：

$$\theta_{2p}(t) = \sum_{\nu=0}^{N-1} c_\nu^{(2p)}\, t^{j_\nu^{(2p)}} + R_N(t), \qquad R_N(t) = O\big(t^{j_N^{(2p)}}\big) \quad (t\to 0^+).$$

将梅林积分 (6.2) 在 1 处分开：

$$Z_{2p}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\Big(\int_0^1 t^{s-1}\theta_{2p}(t)\,dt + \int_1^\infty t^{s-1}\theta_{2p}(t)\,dt\Big).$$

由引理 6.1， $[1,\infty)$–积分对每个 $s\in\mathbb{C}$ 都绝对收敛，并定义一个整函数。

在 $(0,1]$，上代入截断展开式，并逐项积分：

$$\int_0^1 t^{s-1}\theta_{2p}(t)\,dt = \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{c_\nu^{(2p)}}{s+j_\nu^{(2p)}} + \int_0^1 t^{s-1}R_N(t)\,dt.$$

余项积分在 $\operatorname{Re} s > -j_N^{(2p)}$ 时为全纯。因此， $Z_{2p}(s)$ 可亚纯延拓，其可能的极点仅位于 $s=-j_\nu^{(2p)}$，且均为单极点。由 (6.4) 可直接看出， Γ 在 $s=-\alpha$ 处全纯且非零，除非 $\alpha\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$。 最后，对于 $\alpha=k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$，因子 $1/\Gamma(s)$ 在 $s=-k$ 处有一个单零点，它抵消了来自 $(s+k)^{-1}$ 的单极点。因此， Z_{2p}在 $s=-k$ 处全纯。□

定理 6.4 (非正整数处的特殊值)。 对于每个整数 $k\ge 0$， $Z_{2p}(s)$ 的亚纯延拓在 $s=-k$ 处全纯，且

$$Z_{2p}(-k) = (-1)^k k!\, c_k^{(2p)}, \tag{6.5}$$

其中， $c_k^{(2p)}$ 表示短时展开 (6.3) 中 t^k 的系数。等价地，

$$L_+(-2pk) = Z_{2p}(-k) = (-1)^k k!\, c_k^{(2p)}.$$

证明。仿照定理 3.7 和定理 3.9 的证明：在 $s=-k$ 附近，来自 $(0,1]$ 积分的唯一可能奇异项是 $c_k^{(2p)}/(s+k)$。由于 $\Gamma(s)$ 在 $s=-k$ 处有一个留数为 $\operatorname{Res}_{s=-k}\Gamma(s) = (-1)^k/k!$ 的单极点，我们有

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = (-1)^k k!\,(s+k) + O\big((s+k)^2\big) \qquad (s\to -k),$$

因此 $Z_{2p}(s)$ 在 $s=-k$ 处全纯，且其极限等于 (6.5)。 □

恒等式 $Z_{2p}(s) = L_+(2ps)$ 表明， τ_n^{2p} 的可容许性提供了一种系统性的热核机制，可根据 $\theta_{2p}(t)$ 的小 t 展开生成特殊值 $L_+(-2pk)$ （并通过 $Z'_{2p}(0)$ 生成行列式型常数）。对于 $p=1$，将无穷远处的系数提取与 φ 的 BOCRS 反演恒等式结合，可得 [BOCRS25]（第 4 节）中的猜想 1。对于 $p>1$，可容许性给出了 $L_+(-2pk)$ 的展开形式；但要建立将 $L_+(-2pk)$ 与 $L_+(2pk)$ 联系起来的进一步对称性，则需要相应典范乘积满足额外的函数方程（目前只有 $p=1$ 可通过 Φ 和 φ 获得这些方程）。

6.3. **偶次幂：典范乘积与无穷远处的系数提取**。对于 $p \geq 1$定义亏格0典范乘积

$$W_{2p}(\lambda) := \prod_{n\geq 1} \Big(1 + \frac{\lambda}{\tau_n^{2p}}\Big). \tag{6.6}$$

由于 $\sum_{n\geq 1} \tau_n^{-2p} < \infty$，该乘积绝对收敛且局部一致收敛。另设

$$R_{2p}(\lambda) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda + \tau_n^{2p}} = \frac{W'_{2p}(\lambda)}{W_{2p}(\lambda)}.$$

引理 6.5 （拉普拉斯表示）。对于$\operatorname{Re}\lambda > 0$,

$$R_{2p}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \theta_{2p}(t)\, dt.$$

证明。 与引理 3.11 相同： $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+\tau_n^{2p})t}\, dt = (\lambda + \tau_n^{2p})^{-1}$ 当 $\operatorname{Re}\ \lambda > 0$ 时成立，而 $\sum_{n\geq 1} |\lambda + \tau_n^{2p}|^{-1} \ll \sum \tau_n^{-2p} < \infty$ 在 $\{\operatorname{Re}\ \lambda > 0\}$ 的紧子集上一致成立，因此可应用富比尼定理。□

定理6.6 （大λ 系数提取）。固定 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 并记 $\Sigma_\delta = \{\lambda : \ |$辐角 $\lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \delta\}$。于是对数 $W_{2p}(\lambda)$ 当 $|\lambda| \to \infty$ 时有渐近展开，其中 $\lambda \in \Sigma_\delta$，且对每个整数 $k \geq 1$ ，都有如下系数恒等式

$$[\lambda^{-k}]\, \log W_{2p}(\lambda) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, Z_{2p}(-k) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, L_+(-2pk). \tag{6.7}$$

证明。 将引理6.5与 Watson 引理（引理 3.13）应用于 $f(t) = \theta_{2p}(t)$ 相结合，使用小-t 展开式 (6.3) 以及引理 6.1 给出的大-t 指数衰减。这就得到了 $R_{2p}(\lambda)$ 关于 Σ_δ 的渐近展开。由于 $\frac{d}{d\lambda} \log W_{2p}(\lambda) = R_{2p}(\lambda)$，沿着从 1 到 λ 的线段逐项积分，可得 $\log W_{2p}(\lambda)$ 的相应展开，差一个依赖于分支的加法常数。

当 $k \geq 1$ 为整数时， $R_{2p}(\lambda)$ 中的 λ^{-k-1} 系数为 $c_k^{(2p)}\Gamma(k+1) = k!\, c_k^{(2p)}$ ，因此 $\log\ W_{2p}(\lambda)$ 中的 λ^{-k} 系数等于 $-\frac{k!\, c_k^{(2p)}}{k}$ 。利用定理 6.4， $Z_{2p}(-k) = (-1)^k k!\ c_k^{(2p)}$ ，由此得到 (6.7)。□

6.4. **奇次幂：留数与对数**。 取一个奇整数 $m = 2\ell + 1$。根据定理 5.1(a)，热迹 $\theta_m(t)$ 的小-t 展开中含有一个非零项 $\kappa_m\, t\log\ t$。按照命题 5.5 的记号，可以取 $\kappa_m = \frac{d_m}{m}$ ，其中 $d_m \neq 0$ 是 τ_n^m的大-n 展开中 a_n^{-1}的系数。

定理 6.7 （在 $s=-1$ 处的极点， Z_m）。 设 m 为奇数，并假设当 $t \to 0^+$时，

$$\theta_m(t) = \kappa_m\, t \log t + O(t), \qquad \kappa_m \neq 0.$$

那么 m $Z_m(s) = L_+(ms)$ 的亚纯延拓在 $s=-1$ 处有一个单极点，其

$$\operatorname{Res}_{s=-1} Z_m(s) = \kappa_m. \tag{6.8}$$

等价地， $L_+(s)$ 在 $s=-m$ 处有一个单极点，留数为

$$\operatorname{Res}_{s=-m} L_+(s) = m\,\kappa_m. \tag{6.9}$$

证明。 按照定理 3.7 的证明，将梅林表示（6.2）在 1 处分开。 $[1,\infty)$ 积分由引理 6.1 可知是整函数。在 $(0,1]$, 中令 $\theta_m(t) = \kappa_m\, t\log\, t + O(t)$，并计算

$$\int_0^1 t^{s-1}\,\kappa_m\, t\log t\,dt = \kappa_m \int_0^1 t^s \log t\,dt = -\frac{\kappa_m}{(s+1)^2}.$$

因此，梅林积分在 $s=-1$ 处有一个二阶极点，其主部为 $-\kappa_m(s+1)^{-2}$。由于$\Gamma(s)$ 在 $s=-1$ 处有一个留数为 -1的单极点，我们在 $s=-1$附近有 $1/\Gamma(s) = -(s+1) + O((s+1)^2)$。相乘得

$$Z_m(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\Big(-\frac{\kappa_m}{(s+1)^2} + O\Big(\frac{1}{s+1}\Big)\Big) = \frac{\kappa_m}{s+1} + O(1),$$

从而证明了（6.8）。通过变量代换$u = ms$，由 $Z_m(s) = L_+(ms)$ 可得陈述（6.9）。□

推论 6.8 （BOCRS 留数公式的恢复）。 对于奇数 $m = 2\ell+1$，利用命题 *5.5* 中的$\kappa_m = d_m/m$ 可得

$$\operatorname{Res}_{s=-m} L_+(s) = d_m.$$

代入引理 *5.2* 中 d_m 的显式值，得到

$$\operatorname{Res}_{s=-m} L_+(s) = (-1)^\ell\,\frac{L_-(m)}{2^{m-1}\,\pi^{m+1}\,C^m} = \frac{2i}{\pi}\,\frac{L_-(m)}{(2\pi i C)^m},$$

这与 [BOCRS25,§10.2] 中记录的 L_+ 留数恒等式一致。

对于 $m\ge 2$，零属乘积 $W_m(\lambda) = \prod_{n\ge1}(1+\lambda/\tau_n^m)$ 定义良好，并满足$\frac{d}{d\lambda}\log\, W_m(\lambda) = \sum_{n\ge1}(\lambda+\tau_n^m)^{-1}$。 $\theta_m(t)$ 中的 $t\log\, t$ 项导致预解算子迹和 $\log W_m(\lambda)$ 的大-λ 渐近分析中出现新的 $\log\,\lambda$ 修正项，反映出真正的*log*-多重齐次拉普拉斯变换行为。

引理 6.9 （ $t\log\, t$ 的拉普拉斯变换）。 对于 $\operatorname{Re}\lambda>0$,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,t\log t\,dt = \lambda^{-2}\,\big(1-\gamma-\log\lambda\big),$$

其中 γ 为欧拉常数，$\log\lambda$ 为主值对数。

证明。 对于 $\operatorname{Re}\lambda>0$ 和 $\operatorname{Re}\alpha>-1$， $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}t^\alpha\,dt = \Gamma(\alpha+1)\lambda^{-\alpha-1}$。对 α 求导并在 $\alpha=1$ 处取值，得到

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,t\log t\,dt = \Big(\Gamma'(2) - \Gamma(2)\log\lambda\Big)\lambda^{-2}.$$

由于 $\Gamma(2)=1$ 且 $\Gamma'(2) = \Gamma(2)\psi(2) = 1-\gamma$，结论得证。 □

命题 6.10 (奇数 m的乘积渐近中的对数项)。 假设 m 为奇数，且$\theta_m(t) = \kappa_m\, t$对数 $t + O(t)$ 当 $t\to 0^+$ 时，满足 $\kappa_m\neq 0$。对实部大于 $\lambda>0$ 定义预解算子迹

$$R_m(\lambda) := \sum_{n\ge1}\frac{1}{\lambda+\tau_n^m} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\theta_m(t)\,dt.$$

于是，正如在任意固定扇区 Σ_δ 中一样，

$$R_m(\lambda) = \cdots - \kappa_m\,\lambda^{-2}\log\lambda + O(|\lambda|^{-2}),$$

特别地， $R_m(\lambda)$ 包含一个非零的 λ^{-2} 对数 λ 项。因此，对于属为0 的乘积$W_m(\lambda) = \prod_{n\geq 1}(1+\lambda/\tau_n^m)$ $(m \geq 2)$，

$$\log W_m(\lambda) = \cdots + \kappa_m \frac{\log \lambda}{\lambda} + O(|\lambda|^{-1}) \qquad (|\lambda| \to \infty,\ \lambda \in \Sigma_\delta),$$

因此 $\log W_m(\lambda)$ 包含一个非零的 $(\log\ \lambda)/\lambda$ 项。

证明。 将定义 $R_m(\lambda)$ 的拉普拉斯积分在 1 处分开。由引理 6.1，来自 $[1,\infty)$ 的贡献在各扇区中呈指数级微小。在 $(0,1]$, 中，写成 $\theta_m(t) = \kappa_m\, t \log\ t + O(t)$，并应用引理 6.9（以及在各扇区中的初等估计 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} t\, dt \ll |\lambda|^{-2}$ ）。这就在 $R_m(\lambda)$ 中得到所述的$-\kappa_m \lambda^{-2} \log \lambda$ 项。

最后，由于在避开极点时 $-R_m(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \log W_m(\lambda)$，沿着从 1 到 λ 且位于 Σ_δ 内的线段逐项积分，$-\kappa_m \lambda^{-2} \log \lambda$ 的积分产生 $\kappa_m(\log \lambda)/\lambda$ （差一个低阶的 $|\lambda|^{-1}$ 贡献，这些贡献被吸收到 $O(|\lambda|^{-1})$ 项中）。 □

注释 6.11 （解读）。 奇偶二分可以这样理解：从热核／梅林视角来看，偶次幂 τ_n^{2p}的表现类似于经典的多重齐次谱：相应的 ζ 函数与行列式演算十分简洁，在非正整数处取特殊值，而 $\log\ W_{2p}$具有纯逆幂渐近展开。奇次幂 $\tau_n^{2\ell+1}$则表现出内在的对数多重齐次障碍（$t\log\ t$ 在 θ_m 中），该障碍与 $L_+(s)$在负奇整数处存在极点等价，其留数由奇次狄利克雷级数L_- 控制，如 BOCRS25, §10.2] 所示。

References

[AB96] Alan Actor 和 Itzhak Bender。由贝塞尔函数零点构造的 ζ 函数。*J. Phys. A: Math. Gen.*，29:6555–6580，1996。[AKR25] Clara L. Aldana、Klaus Kirsten 和 Julie Rowlett。巴恩斯与贝塞尔 ζ 函数的变分。*Complex Var. Elliptic Equ.*，第 1–36 页，2025。2025 年在线发表；另见 arXiv:2312.02108。[Avd74] S. A. Avdonin。关于指数函数里斯基的问题。 L^2 *Vestnik Leningrad.* 。，（）：–。俄文；英 *Univ. Ser. Mat. Mekh. Astron.* 13 5 12, 1974 *Vestnik Leningrad* 文译本见*Univ. Math.* **7** 1979 203 211 （），–。[BCOCS24] O.-F. Brevig、Alexandre Chirre、Joaquim Ortega-Cerd`a 和 Kristian Seip。Paley–Wiener 空间中的点求值。*J. Anal. Math.*，153:595–670，2024。[Ber25] Alex Bergman。H¨ormander 不等式与 de Branges 空间中的点求值。*Rev. Mat. Iberoam.*，2025 2025 2411 02226 2024。即将出版；已在线发表。另见 arXiv:。（）。[BFK95] Dan Burghelea、Leon Friedlander 和 Thomas Kappeler。线段上椭圆边值问题的行列式。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，123(10):3027–3038，1995。[BGV92] Nicole Berline、Ezra Getzler 和 Mich`ele Vergne。 *Heat Kernels and Dirac Operators*，*Grundlehren Math. Wiss.* 第 298 卷。柏林 Springer-Verlag，1992。[BOCRS25] Andriy Bondarenko、Joaquim Ortega-Cerd`a、Danylo Radchenko 和 Kristian Seip。h¨ormander–bernhardsson 极值函数， 2025 2504 05205 2025 *Acta Math.* 。预印本，[26] ` ¨ arXiv:。（），即将出版于 BOCRS Andriy Bondarenko、Joaquim Ortega-Cerda、Danylo Radchenko 和 Kristian Seip。《hormander–bernhardsson 极值函数：初步研究》。载于 Dmitriy Bilyk、Emil Iacob、Andrei Martinez-Finkelshtein 和 Alexander M. Stokolos 编，*Recent Advances in Approximation and Potential Theory* 77 88 ¨ 2026，应用与数值调和分析丛书，第 – 页。Birkhauser，Cham，。另见 arXiv:2407.00970（2024）。[BS85] Jochen Br¨uning 和 Robert Seeley。正则奇异渐近展开。 *Adv. Math.*，58(2):133–148，1985。[BS87] Jochen Br¨uning 和 Robert Seeley。二阶正则奇异算子的预解式展开。 *J. Funct. Anal.*，73(2):369–429，1987。[Che83] Jeff Cheeger。奇异黎曼空间的谱几何。 *J. Differential Geom.*，18 657，1983 4 575（）：–。[dB68] Louis de Branges。 *Hilbert Spaces of Entire Functions*。Prentice–Hall，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1968。[EOR+94] Emilio Elizalde、Sergei D. Odintsov、Alberto Romeo、Alexander A. Bytsenko 和 Sergio Zerbini。*Zeta Regularization Techniques with Applications*。World Scientific，新加坡，1994。

[FGD95] Philippe Flajolet、Xavier Gourdon 和 Philippe Dumas。梅林变换与渐近分析：调和和。 *Theoret. Comput. Sci.*，144:3–58，1995。[Gil95] Peter B. Gilkey。 *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah–Singer Index Theorem*。CRC Press，博卡拉顿，佛罗里达州，第 2 版，1995。[GY60] I. M. Gel'fand 和 A. M. Yaglom。泛函空间中的积分及其在量子物理中的应用。 *J. Math. Phys.*，1(1):48–69，1960。[HB93] Lars H¨ ormander 和 Bo Bernhardsson。玻尔不等式的推广。载于 J.-L. Lions 和 C. Baiocchi 编， *Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications*， *RMA Res. Notes Appl. Math.*第 29 卷，第 179–194 页。Masson，巴黎，1993。[Ins24] S. M. Instanes。Paley–Wiener 空间中的优化问题与点求值，2024。预印本，arXiv:2409.11963。[JL93] J. A. Jorgenson 和 Serge Lang。 *Basic Analysis of Regularized Series and Products*，*Lecture Notes in Mathematics*第 1564 卷。柏林 Springer-Verlag，1993。[Kad64] M. I. Kadets。Paley–Wiener 常数的精确值。 *Dokl. Akad. Nauk SSSR*，155(6):1253–1254，1964。俄文；英文译本见 *Soviet Math. Dokl.* **5**（1964），559–561。[Kir01] Klaus Kirsten。 *Spectral Functions in Mathematics and Physics*。Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2001。[KM04] Klaus Kirsten 和 A. J. McKane。一般斯图姆–刘维尔问题的泛函行列式。 *J.*，（）：–。[KV *Phys. A: Math. Gen.* 37 16 4649 4670, 2004 94] Maxim Kontsevich 和 Sergei Vishik。椭圆伪微分算子的行列式，1994。预印本 MPI/94–30，马克斯·普朗克数学科学研究所，莱比锡。另载于：*Functional Analysis on the Eve of the 21st Century*，第 I 卷，数学进展 131，Birkh¨ auser Boston，1995，第 173–197 页。[Lan67] H. J. Landau。某些整函数采样与插值的必要密度条件。*Acta Math.*，117:37–52，1967。[LS91] B. M. Levitan 和 I. S. Sargsjan。 *Sturm–Liouville and Dirac Operators*， 59 *Mathematics* 卷，。Kluwer *and Its Applications (Soviet Series)* 1991 Academic Publishers，Dordrecht，。[MNO12] Jordi Marzo、Shahar Nitzan 和 J.-F. Olsen。具有倍增相位的 de Branges 空间中的采样与插值。 *J. Anal. Math.*，117(1):365–395，2012。[NBC22] M. G. Naber、B. M. Bruck 和 S. E. Costello。贝塞尔ζ函数。 *J. Math. Phys.*，63 083504，2022 8 2211 05765（）：。另见 arXiv:。。[NIS25] 美国国家标准与技术研究院。NIST 数学函数数字图书馆。在线资源，2025。版本 1.2.5；发布日期 2025-12-15。由 F. W. J. Olver 等编辑。[OCS02] Joaquim Ortega-Cerd`a 和 Kristian Seip。傅里叶框架。 *Ann. of Math. (2)*，155(3):789–806，2002。[Olv74] F. W. J. Olver。 *Asymptotics and Special Functions*。Academic Press，纽约，1974。[Pav79] B. S. Pavlov。指数系统的基性与 Muckenhoupt 条件。 *Soviet Math. Dokl.*，20 655 1979 659，1979 1，37 40：–。译自 *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **247**（），第 – 期。[Pay12] Sylvie Paycha。 *Regularised Integrals, Sums and Traces: An Analytic Point of View*，*Univ. Lecture Ser.* 第 59 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2012。[PK01] R. B. Paris 和 D. Kaminski。 *Asymptotics and Mellin–Barnes Integrals*。剑桥大学出版社，剑桥，2001。[PT87] J¨ ¨ *Inverse Spectral Theory* 130 *Pure and Applied Mathematics* 1987 urgen Poschel 和 Eugene Trubowitz。，[卷，。Academic Press，波士顿，。34] PW *Fourier Transforms in the Complex Domain*R. E. A. C. Paley 和 Norbert Wiener。*Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*，[第 19 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1934。93] QHS *Trans. Amer. Math. Soc.*J. R. Quine、S. H. Heydari 和 R. Y. Song。ζ正则化乘积。[，338 1 213 231，1993 （）：–。71] RS *R* *Adv.* Daniel B. Ray 和 *Math.* 7 2 145 210, 1971 Isadore M. Singer。黎曼流形上的[-挠率与拉普拉斯算子。，（）：–。67] See *Singular Integrals (Proc. Sympos. Pure Math.,* R. T. Seeley。椭 *Vol. 10, Chicago, IL, 1966)* 10 *Proc. Sympos. Pure Math.* 288 307 圆算子的复幂。载于[，04] 卷， *Interpolation and Sampling in Spaces of Analytic Functions* 33 *Univ.*，第 – 页。美国数 *Lecture Ser.* 2004 学会，罗得岛州普罗维登斯，1967。[Sei04] Kristian Seip。 *Mathematika*，美国数学会第 卷，罗得岛州普罗维登斯，。[Spr03] Mauro Spreafico。关于非齐次二次贝塞尔ζ函数。 *Phys. Rep.*，51(1-2):123–130，2004。另见 arXiv:math-ph/0312020。VasDmitri V. Vassilevich。热核展开：使用指南。，388:279–360，2003。

[Vor87] Andr´e Voros . 谱函数、特殊函数与塞尔伯格 ζ 函数 . *Commun. Math. Phys.*, 110(3):439–465, 1987. [Won01] R. Wong. *Asymptotic Approximations of Integrals*. SIAM，宾夕法尼亚州费城，2001. [Zet05] 安东·泽特尔。 *Sturm–Liouville Theory*，美国数学会第121卷，罗得岛州普罗维登斯，2005。

Morningside Center of Mathematics, Chinese Academy of Sciences, No. 55, Zhongguancun EastRoad, Beijing, 100190, China*Email address*: khaihoann@gmail.com