arXiv:2602.10647v1 [math.GR] 11 Feb 2026

紧李群上的布拉斯坎普–利布不等式及其在齐次李群上的消失

MICHAEL G. COWLING、JI LI 和 CHONG-WEI LIANG

ABSTRACT. 我们研究局部紧非阿贝尔群上的布拉斯坎普–利布不等式，以及与一组布拉斯坎普–利布数据相关的 Brascamp–Lieb 常数 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$：局部紧群 G 和 G_j、一族同态 σ_j: $G \to G_j$ 以及 Lebesgue 指标 p_j。我们重点研究齐次李群和紧李群。对于齐次李群 G，我们证明常数 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 等于常数 $\mathbf{BL}(\mathfrak{g}, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$，其中 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，$\mathrm{d}\sigma_j$ 是 σ_j 的微分。对于类海森堡群 G，我们证明可能出现的唯一不等式是多线性 H¨older 不等式。对于紧李群，我们以 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 为条件，给出常数 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限的充要条件，并求得该常数的显式表达式，与 Bennett 和 Jeong 在阿贝尔情形下得到的结果类似。

1. 引言

布拉斯坎普–利布不等式（亦称 H¨older–布拉斯坎普–利布不等式）于 [9], 提出，在数学的诸多领域都备受关注；例如，参见 [7,3, 25] ，了解其影响，尤其是在傅里叶分析中的影响。这些不等式为相当广泛的多线性形式类别提供 Lebesgue 空间估计，这些形式出现在众多领域中，从调和分析和色散型偏微分方程，到加性组合学、凸几何和理论计算机科学（见 [12]）。最初，这些不等式是在欧几里得空间的背景下表述的；但较新的版本则涉及离散阿贝尔群、有限维紧阿贝尔群，以及紧齐性空间和海森堡群。关于这些不等式的更多背景，见下文。

本文的主要目标是描述更一般的局部紧群上的布拉斯坎普–利布不等式。这里所说的局部紧群，是指局部紧豪斯多夫拓扑群；我们将特别关注幂零李群和紧李群。在此，对偶性不再是那么有用的工具，因为非阿贝尔群的对偶并非一个群。本文要传达的观点是，缺乏交换性意味着可能存在的不等式要少得多。

现在我们定义布拉斯坎普–利布不等式，概述其部分历史，并介绍我们的主要结果。

定义 1.1. 一个布拉斯坎普–利布数据是一个三元组 $(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$，其中 G 是一个局部紧群，$\boldsymbol{\sigma}$ 是一组由 J 个同态组成的元组 σ_j: $G \to G_j$，这些同态作用于局部紧群；$\boldsymbol{p}$ 是一个由 J 个指标组成的元组 $(p_1, \dots, p_J)$，每个指标都属于 $[1, \infty]$。布拉斯坎普–利布输入 $\boldsymbol{f}$ 是一个由 J 个函数组成的元组 f_j，其中各函数属于 $L^{p_j}(G_j)$。

我们总是假设同态是连续的。同态的数量，也就是 J，并不是特别重要，我们常常不提及它。我们

2020年数学学科分类. 44A12, 52A40。关键词与短语. 布拉斯坎普–利布不等式，局部紧群。作者感谢 Jonathan Bennett 就布拉斯坎普–利布不等式所作的有益讨论。第一和第二作者获得澳大利亚研究理事会通过项目 DP220100285 和 DP260101083 提供的资助。第三作者部分获得 NSTC 项目 111-2115-M-002-010-MY5 的资助，另部分获得麦考瑞大学联合培养博士奖学金的资助。

将 $\boldsymbol{G}$ 记作乘积群 $G_1 \times \cdots \times G_J$；我们可以把 $\boldsymbol{\sigma}$ 视为从 G 到 $\boldsymbol{G}$的同态，其分量为 σ_j。

定义 1.2. A*Brascamp–Lieb* 不等式 是如下形式的不等式

$$\left| \int_G \prod_j (f_j \circ \sigma_j)(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq C \prod_j \|f_j\|_{L^{p_j}(G_j)} \qquad \forall f_j \in C_c(G_j), \tag{1.1}$$

其中 C 是一个常数。假设该不等式左侧的乘积函数可积。**(1.1)** 中 C 的最小可能值称为*Brascamp–Lieb* 常数，记作 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$; 若不存在这样的不等式，则记 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) = \infty$。

对于有限群 G 和 $\boldsymbol{G}$，Brascamp–Lieb 常数是有限的。

Brascamp–Lieb 常数 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 显然取决于 G 上的 Haar 测度以及在 **(1.1)** 中隐含出现的 G_j 所采用的选择。然而，常数的有限性并不受此影响，因为将 Haar 测度乘以一个因子，会使 **(1.1)** 的左侧乘以相同因子，而右侧则乘以该因子的某次幂。

现在我们简要回顾布拉斯坎普–利布不等式的历史。这类不等式是对赫尔德不等式、杨卷积不等式和 Loomis–Whitney 不等式等经典不等式的推广。现代研究始于 Brascamp 和 Lieb [9]，他们研究了欧几里得空间上的杨不等式推广形式。Barthe [1] 以及 Carlen、Lieb 和 Loss [10], 分别独立得到了 G 和 $\boldsymbol{G}$ 为欧几里得空间时的一般有限性结果；后者处理了每个 G_j 都是 $\mathbb{R}$的副本的情形。随后，Bennett、Carbery、Christ 和 Tao [3] 找到了当 G_j是任意有限维欧几里得空间时，$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限的充要条件，下面我们将回顾这些条件。

定义 1.3. 设 $(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是一个 Brascamp–Lieb 数据组，其中 G 和 $\boldsymbol{G}$ 是（实）向量空间，$\boldsymbol{\sigma}$ 是一个线性映射。*BCCT* 条件 为缩放等式

$$\dim(G) = \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{p_j} \dim(G_j) \tag{1.2}$$

以及维数不等式

$$\dim(H) \leq \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{p_j} \dim(\sigma_j(H)) \qquad \forall H \in \mathfrak{S}(G), \tag{1.3}$$

其中，$\mathfrak{S}(G)$ 是 G 的所有向量子空间的集合。

对于欧几里得空间，原则上至少在常数有限时，如何计算这些常数是已知的，这要归功于 Lieb 的一项基本结果 [21], ，该结果指出，只需在中心高斯函数 f_j 上进行检验即可。

对于 有限生成离散阿贝尔群 G 和 $\boldsymbol{G}$ ，Bennett、Carbery、Christ 和 Tao [4] 证明，$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限等价于秩条件，即 **(1.3)** 中以秩代替维数，且 H 遍历 G 的所有子群。后来，Christ [11], 得到了 Lieb 定理的离散类比，使得通过在有限子群的示性函数上进行检验即可计算常数 G。

Bennett 和 Jeong 在 [6, 定理 4.1 和 5.1] 中对紧致阿贝尔李群也得出了类似结论。此时，Brascamp– Lieb 常数有限的充要条件是满足以下余维不等式族

$$\sum_j \frac{1}{p_j} \left(\dim(G_j) - \dim(\sigma_j(H)) \right) \leq \dim(G) - \dim(H) \tag{1.4}$$

对所有 H 的 G闭连通子群均成立。此外，可以通过在 G的开子群的示性函数上检验来求得该常数。

最近，Bennett 和第一作者 [5]在局部紧阿贝尔群的背景下，为 Brascamp–Lieb 常数建立了一条结构定理；该定理扩展并统一了上述阿贝尔群有限性刻画。他们始终特别强调傅里叶不变性，这体现了在其研究背景下 Brascamp–Lieb 多线性形式所具有的基本傅里叶不变性。

我们还提及该不等式的非线性版本，其中群同态由光滑映射 [2]取代。在任意给定点 x，映射 σ_j 的导数 $\mathrm{d}\sigma_j$ 是从切空间 T_xG 到$T_{\sigma_j(x)}G_j$的线性映射。文中证明，若在某一点 x处，导数满足以下条件

$$\dim(H) \leq \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{p_j} \dim(\mathrm{d}\sigma_j(H))$$

对切空间 T_xG的所有子空间 H 均成立，则局部Brascamp–Lieb不等式成立，也就是说，不等式 (1.1) 还满足一个附加条件：每个 f_j的支集都包含在 $\sigma_j(x)$的一个足够小的邻域内。该结果已用于证明李群 [14]上 Brascamp–Lieb 不等式的若干特例。更确切地说，在单模局部紧群 G上，我们有卷积 Young 不等式及其迭代形式；下面给出一个例子。

例 1.4. 设 H 是一个单模局部紧群， G 是 $H \times H \times H$， $\boldsymbol{H}$ 是 $H \times H \times H \times H$，并定义 $\sigma_j\colon G \to H$，使得

$$\sigma_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 \qquad \sigma_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^{-1}x_2$$
$$\sigma_3(x_1, x_2, x_3) = x_2^{-1}x_3 \qquad \sigma_4(x_1, x_2, x_3) = x_3.$$

Then

$$\begin{aligned}\iiint_{\boldsymbol{G}} \prod_j f_j(\sigma_j(y))\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3 &= \iint f_1 * f_2(y_2) f_3(y_2^{-1}y_3) f_4(y_3)\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3 \\ &= \int f_1 * f_2 * f_3(y_3) f_4(y_3)\,\mathrm{d}y_3,\end{aligned}$$

而 H¨older 不等式的逆命题表明，若对 $(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 成立 Brascamp–Lieb 不等式，则

$$\|f_1 * f_2 * f_3\|_{L^{p_4'}(H)} \leq C \|f_1\|_{L^{p_1}(H)} \|f_2\|_{L^{p_2}(H)} \|f_3\|_{L^{p_3}(H)},$$

这就是卷积 Young 不等式的三线性形式。通过对 $1/p_4' = 1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3 - 2$ 的情形进行插值，可以证明该结论成立；其中两个 p_1、 p_2 和 p_3 为 1，第三个为p_4'。

本文讨论不一定是阿贝尔群的局部紧群上的 Brascamp–Lieb 不等式，重点关注幂零李群和紧李群。

在局部紧群的背景下，我们在第3节证明，除非同态 $\boldsymbol{\sigma}\colon G \to \boldsymbol{G}$ 是真映射（也就是说，U 紧时， $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(U)$ 也紧），且除非 σ_j 是开映射，或者对所有 j 都有 $p_j = \infty$，否则 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 为无穷大。由于我们主要关注 Brascamp–Lieb 常数有限的情形，因此假设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是真映射，且每个 σ_j 都是开且满射。由此可知，我们可以假设 $\ker(\boldsymbol{\sigma})$ 是平凡的，并且 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 G 到其子群 $\boldsymbol{\sigma}(G)$ 的同胚同构，该子群赋予相对拓扑。等价地，我们可以假设数据组是典范的，也就是说， G 是乘积群 $\boldsymbol{G}$ 的闭子群，而 σ_j 是

G 在典范投影 $\boldsymbol{G}$ 到各因子 G_j 上的限制。这种特殊类型的构形已在 [2]中得到确认。

在第 4 节中，我们考察齐次李群上的 Brascamp–Lieb 常数，也就是存在一参数自同构膨胀族的李群；这类群是幂零的（见 [23]）。这里有两个主要结果。首先，我们证明布拉斯坎普–利布不等式可以线性化。

定理 A. 设$(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{G})$ 是齐次李群的一个典范布拉斯坎普–利布数据组，且对所有 j 都有 $\sigma_j \circ \delta_t = \delta_t \circ \sigma_j$。则这些同态的导数 $\mathrm{d}\sigma_j$ 是相应李代数之间的线性映射，并且

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) = \mathbf{BL}(\mathfrak{g}, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \mathfrak{g}).$$

我们还证明，非交换性是布拉斯坎普–利布不等式存在的障碍：事实上，对于某些“类 Heisenberg 群” G，涉及同态 $\sigma_j\colon G \to G_j$ 的布拉斯坎普–利布不等式只有多线性 Hölder 不等式。这一结果的表述不那么确定，因为我们没有对“类 Heisenberg 群”进行分类。

我们的许多工作都涉及群 G 和 $\boldsymbol{G}$ 为紧李群的情形；在这种情况下，我们将数据组 $(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 称为紧李群的 Brascamp–Lieb 数据。（需要注意的是，紧李群到局部紧群的满射同态的像实际上是紧李群，因此只需假设 G 是紧李群。）当群 G和 $\boldsymbol{G}$ 是紧群时，$\boldsymbol{\sigma}$ 显然是真映射。

我们利用紧李群的结构理论来确定 Brascamp–Lieb 常数的有限性。对于拓扑群 G，我们用 G_e 表示其连通分支。

定理 B. 设$(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是紧李群的典范 *Brascamp–Lieb* 数据。设 ϕ_j 是将 σ_j 限制在 G_e 上，并以$(G_j)_e$为陪域所得的映射。那么，$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限，当且仅当$\mathbf{BL}(G_e, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{p})$ 有限。

这使我们能够专注于紧连通李群。

条件 (1.4) 的适当类似形式使我们能够给出紧李群上 Brascamp–Lieb 常数的有限性条件。为陈述我们的条件，我们需要引入更多记号。对于紧李代数 $\mathfrak{g}$，我们用 $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中所有李理想的集合；对于紧李群 G，我们用 $\mathfrak{N}(G)$ 表示 G 的所有闭连通正规子群的集合。

定义 1.5。 设 $(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是一个由紧连通李群组成的 Brascamp–Lieb 数据组，设 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}_j$ 分别是 G 和 G_j 的李代数，并设 $\mathrm{d}\sigma_j\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_j$ 是同态 $\sigma_j\colon G \to G_j$ 的导数。余维条件是指满足

$$\sum_j \frac{1}{p_j} \left(\dim(\mathrm{d}\sigma_j(\mathfrak{g}))\right) - \dim(\mathrm{d}\sigma_j(\mathfrak{h})) \le \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{h}) \qquad \forall \mathfrak{h} \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}); \tag{1.5}$$

or

$$\sum_j \frac{1}{p_j} \left(\dim(G_j) - \dim(\sigma_j(H)) \le \dim(G) - \dim(H) \qquad \forall H \in \mathfrak{N}(G). \tag{1.6}$$

李理论表明，(1.5) 蕴含 (1.6)，但反之未必成立；这一逆向蕴含由定理 C 得出。

定理 C。 假设$(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是紧李群的典范数据组。若余维条件(1.6) 成立，则$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限；而若$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$

有限，则余维条件(1.5) 成立。若所有 G_j 都是连通的， G 的 *Haar* 测度和 G_j 都归一化为 1，且$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限，则

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) = 1.$$

值得注意的是，向量空间的所有子空间都是闭的，而BCCT条件涉及对不可数多个子空间进行检验；在环面中，李代数里有不可数多个理想，群中也有不可数多个解析子群，但其中只有可数多个是闭的，因此检验条件(1.6)比检验条件(1.5)“更容易”。紧半单李代数只含有有限多个理想，紧半单李群也只有有限多个闭正规子群，因此在半单情形下，检验任一条件都非常直接。

我们的下一个主要结果将阿贝尔情形与半单情形分开。对于紧致连通李群 G，我们用 G' 表示其换位子群，用 $Z(G)_e$ 表示 G 的中心中包含单位元 e的连通分支，或等价地，表示 G的极大中心环面。如下文将看到的，每个紧致连通李群都是 G'与 $Z(G)_e$的乘积$G'Z(G)_e$，其中 G'是半单的，而 $Z(G)_e$是一个环面，且 $G'\cap Z(G)_e$ 是有限的。若 $\sigma_j\colon\ G \to G_j$ 是紧李群之间的满射开映射，则 $\sigma_j(G') = (\sigma_j(G))'$，且 $\sigma_j(Z(G)_e) = Z(\sigma_j(G))_e$。我们用 ϕ_j 表示将 σ_j 限制到 G' 上、以$(\sigma_j(G))'$为陪域的映射，并用 ψ_j 表示将 σ_j 限制到 $Z(G)_e$ 上、以 $Z(G_j)_e$为陪域的映射。

定理D。 设$(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是紧李群的典范 *Brascamp–Lieb* 数据。则$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限，当且仅当$\mathbf{BL}(G', \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{p})$ 和$\mathbf{BL}(Z(G)_e, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{p})$ 均有限。

我们的最后一个主要结果给出了 Brascamp–Lieb 常数在有限时的一个可显式计算的值。

定理E。 设$(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是紧李群的典范 *Brascamp–Lieb* 数据。若$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限，则

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) = \max_{H \in \mathcal{O}(G)} \frac{|H|_G}{|\sigma_j(H)|_{G_j}^{1/p_j}}, \tag{1.7}$$

其中 $\mathcal{O}(G)$ 表示 G 的开子群集合。

对于紧阿贝尔群， [6], 中基于 Christ 等人早期工作的类似结果见 [11, 12]； [6] 则证明该结果可推广到所有有限群。

本文其余部分安排如下。第2节介绍本文所用的记号，并阐述必要的背景知识，例如商积分公式和一些李理论。在第3节中，我们研究转到紧致商群和开子群时 Brascamp–Lieb 常数的变化，并说明如何转化为典范数据。在第4节中，我们研究齐次李群上的 Brascamp–Lieb 常数，并证明当考虑典范数据且将 G 限定为类 Heisenberg 群时，唯一的 Brascamp–Lieb 不等式是 Hölder 不等式。最后一节的主要内容是给出紧李群上 Brascamp–Lieb 常数有限的充要条件，以及计算该常数的显式公式。

2. Preliminaries

我们先介绍一些关于一般局部紧群的结果。我们回顾一下，每个局部紧群 G 都有左 Haar 测度，即一种左平移不变的正则博雷尔测度，也就是说，对于所有紧子集 E，xE的测度等于 E的测度，其中 $|xE|$和 $|E|$分别表示相应的集合。Haar 测度在相差一个乘法因子的意义下唯一。我们用 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 等表示 Haar 测度的微元。当群 G的 Haar 测度也右平移不变时，称该群为单模的 。

2.1. **商积分公式**。 商积分公式可以在局部紧群的框架下表述。

定理 2.1 (商积分公式 [15])。 设 G 是一个局部紧群， N 是 G 的一个闭正规子群。可以对 G、 N 上以及 G/N 上的 ***Haar*** 测度进行标准化，使得

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{G/N}\int_N f(xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \forall f \in C_c(G). \tag{2.1}$$

如果 N 在 G 中是开子群，那么自然可以将 N 上的 Haar 测度取为 G 上的 Haar 测度在其上的限制。在这种情况下，空间 G/N 是离散的；当其配备计数测度时，商积分公式成立。我们将这些选择称为标准开子群标准化。

同样，如果 N 是紧的，自然可以将其 Haar 测度标准化为总质量为 1。此时，使商积分公式成立的 G/N 上的测度选择称为标准紧商标准化。

当一个子群既是紧的又是开的时，这些标准化方式可能不同，因此需要谨慎处理。

2.2. **局部紧群之间的开同态与真同态**。我们的第一个结果的证明见 [13]。

引理 2.2. 设 $\sigma\colon G \to H$ 是局部紧群之间的一个同态。若σ 是开映射，则对 G的所有非空开子集 U ，都有 $|\sigma(U)| > 0$ 。若 σ 不是开映射，则对 G的所有紧子集 V ，都有$|\sigma(V)| = 0$ 。最后，当且仅当对 G的所有开子群 G_0 ， $\sigma(G_0)$ 在 H 中是开集时， σ 才是开映射。

接下来的三个结果在阿贝尔情形下于 [5] 中得到证明，但这些证明也适用于一般情形，唯一实质性的改动是在命题 2.4 中加上“正规”一词。当 G 是阿贝尔群时，正规性并非问题。

引理 2.3. 设 $\sigma\colon G \to H$ 是局部紧群之间的一个同态。那么， σ 是真映射，当且仅当$\ker(\sigma)$ 是紧集，$\sigma(G)$ 在 H中是闭集，并且当 $\sigma(G)$ 带有作为 H子空间的相对拓扑时， $\sigma\colon G \to \sigma(G)$是开映射。

命题 2.4。 设 σ： $G \to H$ 是一个局部紧群同态，且N 是 G 的闭正规子群，使得 σ（N） 是 H的正规子群。那么，限制映射 ρ： $N \to \sigma$（N）¯和诱导商映射 $\dot{\sigma}$： $G/N \to H/$（σ（N）¯） 也都是局部紧群同态。此外， σ 是真映射当且仅当 ρ和 $\dot{\sigma}$都是真映射；如果 σ 是真映射，则 σ（G） 在 H中是闭集。

我们研究同态 $\boldsymbol{\sigma}$： $G \to \boldsymbol{G}$，其中 $\boldsymbol{G}$： $= G_1 \times \cdots \times G_J$且 $\boldsymbol{\sigma}$ = （σ_1，.....， σ_J）。

推论 2.5。 同态 $\boldsymbol{\sigma}$： $G \to \boldsymbol{G}$ 是真映射，当且仅当核$\ker(\boldsymbol{\sigma})$ 是紧的，子群 $\boldsymbol{\sigma}$（G） 在 $\boldsymbol{G}$中是闭的，并且 $\boldsymbol{\sigma}$ 将 $G/\ker(\boldsymbol{\sigma})$ 通过带有相对拓扑的同胚映射到 $\boldsymbol{\sigma}$（G） 。

2.3. **一些李理论**。 我们简要概述本文将用到的李群一般理论。稍后我们将更详细地介绍齐次李群和紧李群。关于李群的更多内容，可参阅诸如 [20], [22]或 [24]等著作。

李群是一个局部紧群，作为拓扑空间，它是一个流形。希尔伯特第五问题的解表明，流形结构和群运算都可以取为解析的。李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 是单位元 e处的切空间 $T_e(G)$。 $\mathfrak{g}$ 中的每个 X 都是某个唯一左不变向量场 $X^{\rightarrow}$在 e 处的取值，我们将 $\mathfrak{g}$ 中元素的交换子定义为唯一的元素 $[X, Y]$

$\mathfrak{g}$ 中满足 $[X,Y]^{\rightarrow} = [X^{\rightarrow}, Y^{\rightarrow}]$ 的元素（右侧项是左不变向量场的交换子，它仍然是左不变的）。本文中的李群和代数均为有限维。

指数映射 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ 由以下条件定义：

$$\frac{\mathrm{d}\exp(tX)}{\mathrm{d}t} = X^{\rightarrow}_{\exp(tX)} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall X \in \mathfrak{g};$$

也就是说，$t \mapsto \exp(tX)$ 是向量场 $X^{\rightarrow}$ 的一条积分曲线。对于任意李群 G，在 $\mathfrak{g}$ 中存在 0 的一个邻域 U，使得 $\exp$ 在 U 上的限制是一个微分同胚，且其像包含于 G 中。

李群 $G \to H$ 到 $G \to H$ 的每个同态 σ 都会诱导相应李代数 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 的一个同态 $\mathrm{d}\sigma$。反过来，每个李代数 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 的同态 $\mathrm{d}\sigma$ 都会诱导相应连通李群 G 和 H 之间的一个局部同态 σ，也就是说，一个从 U 到 H 的映射，其中 U 是 G 中单位元的一个邻域，并且当所有项都有定义时，满足 $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ 以及 $\sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1}$。然而，除非 G 是单连通的，否则 σ 未必能扩展为定义在整个 G 上的同态。

连通李群 G 有一个连通单连通覆盖群 $G^{\tilde{}}$，它是一个与 G具有相同李代数的李群，并且拓扑覆盖映射 π: $G^{\tilde{}} \to G$是一个同态。每个同态 σ: $G \to H$都会导出一个同态 $\tilde{\sigma}$: $G^{\tilde{}} \to H^{\tilde{}}$。

定义 2.6. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数。$\mathfrak{g}$ 的一个（李）子代数是 $\mathfrak{g}$的一个线性子空间 $\mathfrak{h}$，满足对所有 $X, Y \in \mathfrak{h}$，均有 $[X,Y] \in \mathfrak{h}$。$\mathfrak{g}$的一个理想是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数 $\mathfrak{h}$，满足对所有 $X \in \mathfrak{g}$和 $Y \in \mathfrak{h}$，均有$[X,Y] \in \mathfrak{h}$。$\mathfrak{g}$ 的换位子代数 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是包含所有换位子 $[X,Y]$的最小子代数，其中 $X, Y \in \mathfrak{g}$。$\mathfrak{g}$的中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是由所有满足对任意 $Y \in \mathfrak{g}$均有 $[X,Y] = 0$ 的 $X \in \mathfrak{g}$ 构成的线性子空间。李代数 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$的直和，记作 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$，是配备李括号的向量空间 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$

$$[(X,Y),(X',Y')] = ([X,X'],[Y,Y']) \qquad \forall X, X' \in \mathfrak{g} \quad \forall Y, Y' \in \mathfrak{h}.$$

李理论的主要目标之一，是解释李群 G的连通子群与其李代数 $\mathfrak{g}$的子代数之间的对应关系。一般而言，这种对应是一一对应的，但这些子群不一定是闭的。

定义 2.7。设 $\mathfrak{g}$ 为一个李代数，并在 $\mathfrak{g}$ 上定义双线性型 B 为

$$B(X,Y) = \operatorname{trace}(\operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(Y)) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g};$$

B 称为 $\mathfrak{g}$的嘉当–基灵形式。

$T_e(G)$上的一个内积，即在 $\mathfrak{g}$上的一个内积，通过左平移在 G 上诱导出一个左不变黎曼度量。自然地，我们可以利用这个内积在余切丛 $T^*(G)$上定义一个标准正交基，进而在 G上确定一个左不变体积形式，由此得到一个 Haar 测度。同样，我们也可以利用它在 $\mathfrak{g}$上确定一个平移不变测度。

3. The Brascamp–Lieb constant on locally compact groups

现在我们考虑局部紧群上的布拉斯坎普–利布不等式。回顾一下，$\boldsymbol{\sigma}$表示一个从 G到 $\boldsymbol{G} := G_1 \times \cdots \times G_J$的同态（$\sigma_1$，……，$\sigma_J$）。

引理 3.1. 设 $(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是一个 *Brascamp–Lieb* 数据组，且 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限。那么 $\boldsymbol{\sigma}$: $G \to \boldsymbol{G}$ 是真映射，并且 σ_j 是开映射或 $p_j = \infty$。当 $p_j = \infty$时，我们可以用 G 到商群 $G/\ker(\sigma_j)$的典范投影替换 σ_j，使得σ_j 成为开映射，同时不改变 *Brascamp–Lieb* 常数。

证明。该结论已对局部紧阿贝尔群在 [5] 中证明；其中的论证并不依赖交换性，因此也适用于我们这里更一般的情形。□

鉴于这一结果，我们不妨并且将假定下文中所有 σ_j 都是开的。

推论 3.2. 设$(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是一个 *Brascamp–Lieb* 数据。若 $\bigcap_j \ker(\sigma_j)$ 是 G的非紧子群，则 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 为无穷。

由命题 2.4，若 $\sigma\colon G \to H$ 是一个同态，且 N 是 G的闭正规子群，则 σ 诱导同态 $\sigma|_N\colon N \to \sigma(N)^-$ 与 $\dot\sigma\colon G/N \to H/\sigma(N)^-$。

定理 3.3. 设$(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是局部紧群的 *Brascamp–Lieb* 数据，N 是 G的闭正规子群，且每个 $\sigma_j(N)$ 在 G_j中是闭的。于是，当 G、N与 G/N的哈尔测度，以及每个 G_j、$\sigma_j(N)$与 $G/\sigma_j(N)$的哈尔测度被规范化，使得定理 *2.1* 的商积分公式成立时，

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) \le \mathbf{BL}(N, \boldsymbol{\sigma}|_N, \boldsymbol{p})\, \mathbf{BL}(G/N, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p}). \tag{3.1}$$

证明。如果 (3.1) 的右侧为无穷大，则无需证明。若其为有限值，则两个因子都有限，这意味着 $\boldsymbol{\sigma}|_N$ 和 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 都是真映射，因此 $\boldsymbol{\sigma}$ 也是真映射。

取 $f_j \in C_c(G_j)$。根据商积分公式，

$$\begin{aligned}
&\int_G \prod_j f_j(\sigma_j(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{G/N} \int_N \prod_j f_j(\sigma_j(xy))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\dot{x} \\
&\le \mathbf{BL}(N, \boldsymbol{\sigma}|_N, \boldsymbol{p}) \int_{G/N} \prod_j \biggl(\int_{\sigma_j(N)} |f_j(\sigma_j(x) y_j)|^{p_j}\,\mathrm{d}y_j \biggr)^{1/p_j} \mathrm{d}\dot{x} \\
&\le \mathbf{BL}(N, \boldsymbol{\sigma}|_N, \boldsymbol{p})\, \mathbf{BL}(G/N, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p}) \prod_j \biggl(\int_{G_j/\sigma_j(N)} \int_{\sigma_j(N)} |f_j(x_j y_j)|^{p_j}\,\mathrm{d}y_j\ \mathrm{d}\dot{x}_j \biggr)^{1/p_j} \\
&= \mathbf{BL}(N, \boldsymbol{\sigma}|_N, \boldsymbol{p})\, \mathbf{BL}(G/N, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p}) \prod_j \biggl(\int_{G_j} |f_j(x_j)|^{p_j}\,\mathrm{d}x_j \biggr)^{1/p_j},
\end{aligned}$$

这就证明了 (3.1)。在第三行，我们对 $\sigma_j(N)$ 上的同态 $\sigma_j|_N$ 和输入 $y_j \mapsto f_j(\sigma_j(x) y_j)$ 应用了布拉斯坎普–利布不等式；在第四行，我们对同态 $\dot\sigma_j$ 和输入应用了布拉斯坎普–利布不等式

$$\dot{x}_j \mapsto \biggl(\int_{\sigma_j(H)} |f_j(x_j y_j)|^{p_j}\,\mathrm{d}y_j \biggr)^{1/p_j}$$

在 $G_j/\sigma_j(N)$ 上；最后一行则用到了商积分公式。□

推论 3.4。设 $(G^1, \boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{p})$ 和 $(G^2, \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{p})$ 是局部紧群的 *Brascamp–Lieb* 数据。那么，当 $G^1 \times G^1$ 的 *Haar* 测度以及每个 $G_j^1 \times G_j^2$ 的 *Haar* 测度均为相关因子的 *Haar* 测度的乘积时，

$$\mathbf{BL}(G^1 \times G^2, \boldsymbol{\sigma}^1 \otimes \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{p}) = \mathbf{BL}(G^1, \boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{p})\, \mathbf{BL}(G^2, \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{p}). \tag{3.2}$$

证明。前一个定理意味着

$$\mathbf{BL}(G^1 \times G^2, \boldsymbol{\sigma}^1 \otimes \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{p}) \le \mathbf{BL}(G^1, \boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{p})\, \mathbf{BL}(G^2, \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{p}).$$

反向不等式可通过对两个因子的近极值函数的张量积进行测试得出。□

接下来，我们考虑限制到开子群以及对紧子群取商。接下来的两个引理在 [5] 中针对局部紧阿贝尔群得到了证明；这些论证并不依赖交换性，因此也适用于我们更一般的情形。

引理 3.5. 设$(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是一个布拉斯坎普–利布数据组， G_0 是 G的开子群，且 H_j 是 G_j 的开子群，使得对每个 j都有 $\sigma_j(G_0) \subseteq H_j$ 。那么，诱导映射 $\sigma_j^\circ\colon G_0 \to H_j$（定义为 $\sigma_j|_{G_0}$ ，其陪域为 H_j）是同态。此外，当 G_0 和 H_j 赋予标准的开子群 *Haar* 测度时，

$$\mathbf{BL}(G_0, \boldsymbol{\sigma}^\circ, \boldsymbol{p}) \leq \mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}).$$

当 $G_0 = G$时，这些不等式取等号。

引理 3.6. 设$(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是一个布拉斯坎普–利布数据组，且 N 是 G 的紧正规子群，使得每个 $\sigma_j(N)$ 都是 G_j的紧正规子群。那么，诱导商映射 $\dot{\sigma}_j\colon G/N \to G_j/\sigma_j(N)$ 是同态，并且若 $\boldsymbol{\sigma}$ 是真映射，则 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 也是真映射。此外，当 G/N 和 $G_j/\sigma_j(N)$ 上的 *Haar* 测度采用标准紧商标准化时，

$$\mathbf{BL}(G/N, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p}) \leq \mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}).$$

若对于所有 j， $N \subseteq \ker(\sigma_j)$ ，则等号成立。

借助这两个引理，我们可以将求布拉斯坎普–利布常数的问题，化归为求典范数据对应的常数；下面给出其定义。

定义 3.7。 典范布拉斯坎普–利布数据是指一个布拉斯坎普–利布数据组 $(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$，其中 G 是乘积群 $\boldsymbol{G} := G_1 \times \cdots \times G_J$的一个闭子群，并且每个 σ_j 都是从 $\boldsymbol{G}$到 G_j的典范投影在 G上的限制。

引理 *3.8*。设 $(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是一个布拉斯坎普–利布数据组，且 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限，并设 $N = \ker(\boldsymbol{\sigma})$ 且 $G_j^\circ = \sigma_j(G)$。那么 N 是紧的，并且每个 G_j° 在 G_j中都是开子群。同态 σ_j 诱导出同态 $\tilde{\sigma}_j\colon G/N \to G_j^\circ$，其定义为$\tilde{\sigma}_j(xN) = \sigma_j(x)$，且 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(G)$ 是 $\boldsymbol{G}^\circ$的一个闭子群。此外， $\tilde{\sigma}_j$ 是从 $\boldsymbol{G}^\circ := G_1^\circ \times \cdots \times G_J^\circ$到 G_j°的典范投影 π_j在G/N上的限制。最后，

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) = \mathbf{BL}(G/N, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p}).$$

证明。 根据命题 2.4， $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 是真映射，因此 $\boldsymbol{\sigma}(G)$在 $\boldsymbol{G}$ 中是闭集，而 $\boldsymbol{\sigma}$ 是从 G 到 $\boldsymbol{\sigma}(G)$的同胚同构，其中赋予相对拓扑。因此，我们可以将G与 $\boldsymbol{\sigma}(G)$等同，并且得到一个典范数据组。

常数相等由引理 3.5 和 3.6 得出。 □

现在我们指出典范Brascamp–Lieb数据的一些简化之处。

首先，今后我们可以并且将假设 $J > 1$。事实上，若 $J = 1$，则同态 σ_1 是一个同构，而同构在缩放因子意义下保持Haar测度。因此， $J = 1$ 的情形是平凡的。

接下来，我们考虑一个或多个 p_j 等于 ∞ 或 1 的可能性。

命题 3.9。 设 $1 \leq k \leq J$ 且 $p_k = \infty$。记 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ 分别为同态 $\sigma_1, \ldots, \sigma_J$ 中省略 σ_k 后的集合，以及指标 $p_1, \ldots, p_J$ 中省略p_k后的集合。则

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) = \mathbf{BL}(G, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{p}}).$$

证明。 这些不等式

$$\mathbf{BL}(G, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{p}}) \leq \mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$$

很容易。等号成立依赖于在 $S(G_k)$ 中存在序列 (u_n)，它们在紧集上一致收敛到 1，且满足 $\|u_n\|_{L^\infty(G_k)} \leq 1$。 □

命题 3.10。假设 $1 \le k \le J$ 和 $p_k = 1$。记$\ker(\sigma_k)$ 为 N，将陪域为 $\sigma_j(N)$ 且省略 $\sigma_k|_N$ 的限制同态 $\sigma_1|_N$、……、$\sigma_J|_N$ 的集合记为 $\boldsymbol{\rho}$，将省略 p_k 的指标 p_1、……、p_J 的集合记为 $\boldsymbol{q}$。那么，当且仅当对于除 k 以外的所有 j，$\sigma_j(N)$ 在 G_j 中是开集，且$\mathbf{BL}(N, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{q})$ 有限时，$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 才有限。

此外，若 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限，G、N 和 G/N 上的 *Haar* 测度满足商积分公式 (2.1)，G_j、$\sigma_j(N)$ 和 $G_j/\sigma_j(N)$ 上的 *Haar* 测度在 $j \ne k$ 时具有标准开正规化，并且 G_k 上的 *Haar* 测度是 G/N 上的 *Haar* 测度的推前，则

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) = \mathbf{BL}(N, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{q}).$$

证明。在整个证明中，我们假设商积分公式 (2.1) 对G、N 和 G/N成立。

假设 $C \coloneqq \mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限。取 $z \in G$，并令 f_k 为 $C_c(G_k)$ 中在 $\sigma_k(z)$ 处的 δ分布的一个逼近；对于 $j \ne k$，取 $f_j \in C_c(G_k)$。由于 $\boldsymbol{\sigma}$ 是真映射，$\bigcap_j \sigma_j^{-1}(\operatorname{supp}(f_j))$ 是 G 的一个紧子集。于是 (2.1) 表明

$$\begin{aligned} \int_G \prod_j f_j(\sigma_j(x))\,\mathrm{d}x &= \int_{G/N} f_k(\sigma_k(x)) \int_N \prod_{j\ne k} f_j(\sigma_j(xy))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\dot{x} \\ &\to \int_N \prod_{j\ne k} f_j(\sigma_j(z)\rho_j(y))\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{3.3}$$

由此

$$\left| \int_N \prod_{j\ne k} f_j(\sigma_j(z)\rho_j(y))\,\mathrm{d}y \right| \le C \prod_{j\ne k} \|f_j\|_{L^{p_j}(G_j)} \tag{3.4}$$

对所有 $f_j \in C_c(G_j)$ 都成立。这对所有 $z \in G$ 都成立，特别是在 $z = e$ 时也成立，因此

$$\left| \int_N \prod_{j\ne k} f_j(\rho_j(y))\,\mathrm{d}y \right| \le C \prod_{j\ne k} \|f_j\|_{L^{p_j}(G_j)} \qquad \forall f_j \in C_c(G_j). \tag{3.5}$$

令 U 为 N 中的相对紧开集，并且对于除 k 之外的 j，选取在相对紧集 $\sigma_j(U)$ 上取值为 1 的 f_j。于是，(3.5) 的左端以下界 $|U|$ 为界。若对于某个除 k 之外的 j，$\sigma_j(U)$ 是 G_j 中的零测集，那么我们就可以选取 $f_j \in C_c(G_j)$，使其在 $\sigma_j(U)$ 上等于 1，同时具有任意小的 $L^{p_j}(G_j)$ 范数，从而与 (3.5) 矛盾。因此，没有任何 $\sigma_j(U)$ 是零测集，所以根据引理 2.2，每个 $\sigma_j(N)$ 都是 G_j 的开子群。我们对 G_j、$\sigma_j(N)$ 和 $G_j/\sigma_j(N)$ 的 Haar 测度采用标准的开归一化，并考虑支集包含于 $\sigma_j(N)$ 中的 f_j。由此可得

$$\left| \int_N \prod_{j\ne k} f_j(\rho_j(y))\,\mathrm{d}y \right| \le C \prod_{j\ne k} \|f_j\|_{L^{p_j}(\sigma_j(N))} \qquad \forall f_j \in C_c(\sigma_j(N)),$$

因此 $\mathbf{BL}(N, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{q}) \le C = \mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$。

反过来，假设对于除 k 之外的所有 j，$\sigma_j(N)$ 在 G_j 中是开集，并且 Haar 测度按上述方式归一化。另假设 $C \coloneqq \mathbf{BL}(N, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{q})$ 有限。根据定义，(3.5) 成立，因此由 Haar 测度的平移不变性，(3.4) 成立

测度，且

$$\begin{aligned}\left|\int_G \prod_j f_j(\sigma_j(x))\,\mathrm{d}x\right| &\le \int_{G/N} |f_k(\sigma_k(x))| \left|\int_N \prod_{j\neq k} f_j(\sigma_j(xy))\,\mathrm{d}y\right| \mathrm{d}\dot{x} \\ &\le C\,\|f_k\|_{L^1(G_k)} \prod_{j\neq k} \left\|f_j(\sigma_j(x)\cdot)|_{\sigma_j(N)}\right\|_{L^{p_j}(\sigma_j(N))} \\ &\le C\,\|f_k\|_{L^1(G_k)} \prod_{j\neq k} \|f_j\|_{L^{p_j}(G_j)}\,,\end{aligned}$$

因此 $\mathbf{BL}(G,\ \boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{p}) \le C = \mathbf{BL}(N,\ \boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{q})$。 □

最后，我们引入局部Brascamp–Lieb常数，以及 $\boldsymbol{\sigma}$ 的导数的 Brascamp–Lieb 常数。

定义3.11。 设 $(G,\ \boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{p})$ 是局部紧群的典范 Brascamp–Lieb 数据，并取 $\boldsymbol{U}$ 为 $U_1\times\cdots\times U_J$，其中每个 U_j 都是 G_j 中单位元的一个相对紧邻域。定义 $\mathbf{BL}(G,\ \boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{p};\ \boldsymbol{U})$ 为相应的Brascamp–Lieb不等式 (1.1) 在附加支撑约束 $\operatorname{supp}(f_j) \subseteq U_j$ （对每个 j）下的最佳常数，并定义 局部*Brascamp–Lieb*常数 $\mathbf{BL}^{\mathrm{loc}}(G,\ \boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{p})$ 为常数 $\mathbf{BL}(G,\ \boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{p};\ \boldsymbol{U})$ 在所有相对紧乘积开集 $\boldsymbol{U}$ 上的下确界。

显然，若 $\boldsymbol{U}\subseteq\boldsymbol{V}$，则 $\mathbf{BL}(G,\ \boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{p};\ \boldsymbol{U}) \le \mathbf{BL}(G,\ \boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{p};\ \boldsymbol{V})$。因此，下确界对应于集合 $\boldsymbol{U}$ 向 $\{e\}$ 缩小的极限，也就是说，我们考虑的是按反向包含关系排序的 $\boldsymbol{G}$ 的开子集网上的极限。

命题 3.12。 设 $(G、\ \boldsymbol{\sigma}、\ \boldsymbol{p})$ 是一个典范 *Brascamp–Lieb* 数据，其中G 是一个局部紧幺模群。则

$$\mathbf{BL}(G,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}) \ge \mathbf{BL}^{\mathrm{loc}}(G,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}).$$

证明。 这显然成立。 □

如果 $(G,\ \boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{p})$ 是李群的 Brascamp–Lieb 数据，那么 $(\mathfrak{g},\ \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{p})$ 是阿贝尔群的 Brascamp–Lieb 数据，相关讨论见 [3]。特别地，我们的定义赋予 $\mathbf{BL}^{\mathrm{loc}}(\mathfrak{g},\ \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{p})$ 以明确的意义。

定理3.13。 设 G是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，并假设 G 及所有 G_j 上的 *Haar* 测度，以及 $\mathfrak{g}$ 及所有 $\mathfrak{g}_j$ 上的勒贝格测度均已归一化，使得指数映射 $\exp_G$ 和$\exp^{G_j}$ 的 *Radon–Nikodym* 导数在0处取值为1。若$(G、\ \boldsymbol{\sigma}、\ \boldsymbol{p})$ 是一个典范 *Brascamp–Lieb* 数据，则

$$\mathbf{BL}^{\mathrm{loc}}(G,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}) = \mathbf{BL}^{\mathrm{loc}}(\mathfrak{g},\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}).$$

证明。 我们首先证明

$$\mathbf{BL}^{\mathrm{loc}}(\mathfrak{g},\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}) \le \mathbf{BL}^{\mathrm{loc}}(G,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}).$$

取 U_j 中 0 的小邻域和 V_j 中 e 的小邻域，使得 $\exp^{G_j}\colon U_j\to V_j$ 是一个微分同胚。$\exp^{G_j}$ 的 Radon–Nikodym 导数记为 J_{G_j}，它在 $\mathfrak{g}_j$ 上连续，且在 0 处取值为 1。对于所有满足 $\operatorname{supp}(f_j)\subseteq U_j$ 的函数 $f_j\in C_c(\mathfrak{g}_j)$，˜定义 $f\in C_c(G)$ 如下：

$$\tilde{f}_j(x) := \begin{cases} f_j(\log_{G_j}(x)) & \text{if } x\in V_j \\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{3.6}$$

˜显然，所有满足 $\mathrm{supp}(g_j) \subseteq V_j$ 的函数 $g_j \in C_c(G_j)$，都可表示为某个满足 $\mathrm{supp}(f_j) \subseteq U_j$ 的 $f_j \in C_c(\mathfrak{g}_j)$ 所对应的 f_j。我们断言：

$$\|\tilde{f}\|_{L^p(G_j)} \le \sup_{X\in U} J_{G_j}(X)^{1/p_j} \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathfrak{g}_j)}. \tag{3.7}$$

当 $p=\infty$ 时显然成立，而当 $1 \le p < \infty$ 时，则有

$$\|\tilde{f}\|^p_{L^p(G_j)} = \int_{G_j} \left| f(\log_{G_j}(x)) \right|^p \,\mathrm{d}x = \int_{\mathfrak{g}_j} |f(X)|^p \, J_{G_j}(X) \,\mathrm{d}X,$$

通过变量替换即可得出。我们的断言 (3.7) 得证。

没有 loss of generality，假设 that the Baker–Campbell–Dynkin–Hausdorff 输入 f_j 是非负的 i 维。现在，$\boldsymbol{V} := V_1 \times \cdots \times V_J$ 是 $\boldsymbol{G}$ 中 e 的一个小邻域，因此 $V := \boldsymbol{V} \cap G$ 是 G 中 e 的一个小邻域；同样，$\boldsymbol{U}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中 e 的一个小邻域，因此 $U := \boldsymbol{U} \cap \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中 e 的一个小邻域。如果 U_j 足够小，那么 V_j 就很小，因此 V 很小，进而 U 也很小，所以 $\exp_G$ 在 U 上的限制是一个微分同胚，我们可以写成

$$\int_{\mathfrak{g}} \prod_j f_j\left(\mathrm{d}\sigma_j(X)\right) \mathrm{d}X \le \sup_{X\in U} J_{\mathfrak{g}}(X)^{-1} \int_{\mathfrak{g}} \prod_j f_j\left(\mathrm{d}\sigma_j(X)\right) J_{\mathfrak{g}}(X) \,\mathrm{d}X.$$

此外，指数映射分别是从 U_j 到 V_j 以及从 U 到 V的微分同胚，并且 $\exp \circ \mathrm{d}\sigma_j = \sigma_j \circ \exp_G$，因此

$$\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{g}} \prod_j f_j\left(\mathrm{d}\sigma_j(X)\right) J_{\mathfrak{g}}(X) \,\mathrm{d}X &= \int_G \prod_j f_j\left(\mathrm{d}\sigma_j\left(\log_G(x)\right)\right) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_G \prod_j f_j(\log_{G_j}\left(\sigma_j(x)\right)) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_G \prod_j \tilde{f}_j(\sigma_j(x)) \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

根据$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p};\ \boldsymbol{V})$ 的定义，

$$\begin{aligned}
\int_G \prod_j \tilde{f}_j(\sigma_j(x)) \,\mathrm{d}x &\le \mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}; \boldsymbol{V}) \prod_j \left\| \tilde{f}_j \right\|_{L^{p_j}(G_j)} \\
&= \mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p} : \boldsymbol{V}) \prod_j \sup_{X\in U} J_{G_j}(X)^{1/p_j} \prod_j \left\| \tilde{f}_j \right\|_{L^{p_j}(G_j)}.
\end{aligned}$$

综合以上结果，可得

$$\mathbf{BL}(\mathfrak{g}, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}; \boldsymbol{U}) \le \sup_{X\in U} J_{\mathfrak{g}}(X)^{-1} \prod_j \sup_{X\in U} J_{G_j}(X)^{1/p_j} \, \mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p} : \boldsymbol{V}).$$

令 $\boldsymbol{U}$和 $\boldsymbol{V}$趋于零，取极限可得$\mathbf{BL}^{\mathrm{loc}}(\mathfrak{g}, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) \le \mathbf{BL}^{\mathrm{loc}}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$。反向不等式的证明类似。□

4. Examples involving homogeneous Lie groups

我们先回顾齐性群的一些基本概念。这里介绍的许多内容都可以在经典专著 [16] 的第1章中找到。

设 G 是一个连通、单连通的幂零李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。那么指数映射 $\exp: \mathfrak{g} \to G$ 是一个全局微分同胚，其逆映射为 $\log$。这使我们可以将 G 与 $\mathfrak{g}$ 等同，并赋予其群运算 $(x, y) \mapsto x \diamond y$。此外，该群运算是一个多项式映射，而 $\mathfrak{g}$ 上通常的勒贝格测度是 G 的左不变和右不变 Haar 测度。

定义 4.1。 李代数上的膨胀矩阵是一个李代数同态$\Lambda\colon\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$（即，$\Lambda$ 是线性的，且对所有 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 都有 $\Lambda[X,Y]=[\Lambda X,Y]+[X,\Lambda Y]$），并且可对角化且具有正特征值。

给定 $\mathfrak{g}$ 上的膨胀矩阵 Λ，我们固定 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{X_1,\dots,X_n\}$，由 Λ 的特征向量构成，使得 X_i 的特征值为 d_i，且 d_i 随 i 增大。令 $\delta_t:=\exp(\Lambda\log t)$，对所有 $t>0$ 均成立；那么每个 δ_t 都是李代数自同构（也就是说，δ_t 是线性的，且对所有 $X,\ Y\in\mathfrak{g}$ 都成立），并且对所有 $s,\ t>0$ 均有 $\delta_{st}=\delta_s\circ\delta_t$。此外，对所有 i 均有 $\delta_t X_j=t^{d_j}X_j$。我们称 $(\delta_t)_{t>0}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的膨胀族。

齐性群是一个连通、单连通的李群 G，其李代数$\mathfrak{g}$ 配备有一个膨胀族 $(\delta_t)_{t>0}$。群 G 是幂零的，映射 $\exp\circ\delta_t\circ\log\colon\ G\to G$ 是群自同构，称为 G 的膨胀，记作 δ_t。齐性群 G 的齐次维数是下列量

$$Q:=\operatorname{trace}(\Lambda)=\sum_i d_j,$$

其中，d_i 是膨胀矩阵 Λ的正特征值，按重数列出。在齐次李群 G 上的齐次范数是一个连续映射 $||\cdot||_G\colon\ G\to[0,\infty)$，它在 $G\setminus\{0\}$ 上为 C^∞，并满足：

(1) 对所有 $x\in G$ 和 $t>0$，$\|x^{-1}\|_G=\|x\|_G$ 且 $\|\delta_t x\|_G=\|x\|_G$；
(2) $\|x\|_G=0$ 当且仅当 $x=0$。

齐次李群 G 上的 Haar 测度具有如下缩放性质

$$t^{-Q}\int_G f\circ\delta_{t^{-1}}(x)\,\mathrm{d}x=\int_G f(x)\,\mathrm{d}x$$

对所有 $f\in L^1(G)$ 以及所有 $t>0$均成立。

容易看出，齐次李群至少存在一个齐次范数，我们在 G上固定一个这样的范数 $\|\cdot\|_G$。于是存在一个常数 $C_G\geq 1$ 使得

$$\|xy\|_G\leq C_G\big(\|x\|_G+\|y\|_G\big)\qquad\forall x,y\in G. \tag{4.1}$$

现在我们关注齐性群上布拉斯坎普–利布常数的行为。在这里，自然的做法是将注意力限制在同态 $\sigma_j\colon\ G\to G_j$ 上，这些同态使 G和 G_j上的膨胀相互交织，即

$$\sigma_j(\delta_t^G(x))=\delta_t^{G_j}(\sigma_j(x))\qquad\forall x\in G\quad\forall t>0. \tag{4.2}$$

在典范情形中，这相当于要求 $\delta_t^{G_1}\otimes\cdots\otimes\delta_t^{G_J}$ 的膨胀保持子群 G，并且在 G 上与 G 的膨胀 δ_t^G 一致（这里的记号应该不难理解）。类似于 [3] 中所用的缩放论证表明，如果 $\mathbf{BL}(G,\ \boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{p})$ 有限，那么

$$Q=\sum_j\frac{1}{p_j}Q_j. \tag{4.3}$$

我们用“齐性群的布拉斯坎普–利布数据组”这一说法，指 G 和所有 G_j 都是齐性群且 (4.2) 成立的数据组。

下一个结果同样以缩放论证为基础。

定理 4.2。 设 $(G,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p})$ 是齐次群的典范 *Brascamp–Lieb* 数据组。记 Q 和 Q_j 分别为 G 和 G_j 的齐次维数。若缩放条件(4.3) 成立，则 $\mathbf{BL}^{\mathrm{loc}}(G,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p})=\mathbf{BL}(G,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p})$。

证明。令 $\boldsymbol{U}$ 为 $\boldsymbol{G}$ 中 e 的一个乘积邻域，即 $\boldsymbol{U} = U_1 \times \cdots \times U_J$，其中每个 U_j 都是 G_j 中 e 的相对紧邻域。根据定义和命题 3.12，只需证明 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}; \boldsymbol{U}) \geq \mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$。现在

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) = \sup_{f_j \in L^{p_j}(G_j) \setminus \{0\}} \frac{\left| \int_G \prod_j f_j(\sigma_j(x)) \, \mathrm{d}x \right|}{\prod_j \|f_j\|_{L^{p_j}(G_j)}}.$$

稠密性论证表明，只需在上确界中考虑 $C_c(G_j)$ 输入 f_j。固定这些输入 f_j；于是存在 $\lambda < 1$，使得对每个 j，$\delta_\lambda(\mathrm{supp}(f_j)) \subseteq U_j$。令 τ_j 为 G_j 上的压缩自同构 δ_λ，并考虑输入 $f_j \circ \tau_j$。于是

$$\frac{\left| \int_G \prod_j f_j(\tau_j(\sigma_j(x))) \, \mathrm{d}x \right|}{\prod_j \|f_j \circ \tau_j\|_{L^{p_j}(G_j)}} = \frac{\lambda^Q \left| \int_G \prod_j f_j(\tau_j(\sigma_j(x))) \, \mathrm{d}x \right|}{\lambda^{\sum Q_j/p_j} \prod_j \|f_j\|_{L^{p_j}(G_j)}} = \frac{\left| \int_G \prod_j f_j(\sigma_j(x)) \, \mathrm{d}x \right|}{\prod_j \|f_j\|_{L^{p_j}(G_j)}}.$$

因此

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}; \boldsymbol{U}) \geq \mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}),$$

证明完成。 □

推论 4.3. 设 $(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是齐次群上的典范 *Brascamp–Lieb* 数据。记 Q 和 Q_j 分别为 G 和 G_j 的齐次维数。若缩放条件 (4.3) 成立，则 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) = \mathbf{BL}(\mathfrak{g}, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$。

证明。这可由将定理 3.13 和 4.2 应用于 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 和 $\mathbf{BL}(\mathfrak{g}, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 得出（使用李代数的膨胀 δ_t，而非标量乘法）。□

我们以如下观察结束本节：除了多线性 H¨older 不等式之外，不存在其他布拉斯坎普–利布不等式，其中群 G 是海森堡群或类似海森堡群的群；其含义我们很快就会解释。

定义 4.4。设 $n \in \mathbb{N}$。海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 定义为以 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ 为底层空间、配备如下群运算的群：

$$(z, t) \diamond (z', t') := \left(z + z', t + t' + \tfrac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z} \cdot z') \right).$$

$\mathbb{H}^n$ 的中心 $Z(\mathbb{H}^n)$ 是子群 $\{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}$。

引理 4.5。设 N 是海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 的正规子群。那么，要么是 $N \subseteq (0, \mathbb{R})$，要么是 $N \supseteq (0, \mathbb{R})$。

证明。若 $(z, t) \in N$，则对于所有 $(z', t') \in \mathbb{H}^n$，有 $(z, t)^{-1} \diamond (z', t')^{-1} \diamond (z, t) \diamond (z', t') \in N$。直接计算可得

$$(z, t)^{-1} \diamond (z', t')^{-1} \diamond (z, t) \diamond (z', t') = (0, \operatorname{Im}(\bar{z} \cdot z')).$$

若 $N \not\subseteq (0, \mathbb{R})$，则存在 $(z, t) \in N$ 使得 $z \neq 0$；在此情形下，交换子 $(z, t)^{-1} \diamond (z', t')^{-1} \diamond (z, t) \diamond (z', t')$ 随着 (z', t') 在 $\mathbb{H}^n$ 中变化而遍历 $(0, \mathbb{R})$，且 $N \supseteq (0, \mathbb{R})$。否则 $N \subseteq (0, \mathbb{R})$，如所需。□

若齐性群 G 具有一个与 $\mathbb{R}$ 同构的正规子群 N，且满足以下性质：G 的每个正规子群要么包含于 N，要么包含 N，则称其为类Heisenberg群。当 $n \geq 3$ 时，$n \times n$ 上三角幂零矩阵群是类Heisenberg群。

在给出下一个定理之前，我们回顾 Kronecker 逼近定理的一个简单变体（参见例如 [8, 19]）。

定理 4.6. 给定有限多个实数 α_1、$\cdots$、α_J 以及任意小的 $\varepsilon > 0$，存在一个序列 $\{t_m\}_m$，使得当 $m \to \infty$ 时 $t_m \to \infty$；并且对所有 m 和 j，存在一个整数 $k_{j,\,m}$，使得

$$|t_m - \alpha_j k_{j,m}| < \varepsilon \qquad \forall 1 \leq j \leq J \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

命题 4.7. 其中 G 为类 *Heisenberg* 群的布拉斯坎普–利布不等式只有多线性 *H¨older* 不等式。

证明。 子群 N 同构于 $\mathbb{R}$。我们用$(0,t)$表示 N 中对应于 $t\in\mathbb{R}$的元素。于是， N 的闭子群都形如$(0,\mathbb{Z}\alpha)$，其中某个$(0,\alpha)\in N$。

我们可以假设每个 σ_j： $G\to G_j$ 是 G 到群 G_j上的满射开同态。 σ 的核是 G的闭正规子群，并且 G 是类Heisenberg群，因此ker σ_j或者是 $\{e\}$，或者形如$(0,\alpha_j\mathbb{Z})$，或者包含$(0,\mathbb{R})$。必要时对 σ_j重新编号，我们可以并且将假设当 $j=1$，.....， I时ker $\sigma_j=\{e\}$。若不存在这样的 σ_j，则可跳过 $I=0$ 以及接下来的两段。

对于 $j\le I$，群 G_j 同构于 G。现在， G 上的 Haar 测度的推前是 G_j上的 Haar 测度的正倍数，因此 $f_j\in L^{p_j}(G_j)$ 当且仅当$f_j\circ\sigma_j\in L^{p_j}(G)$，并且存在一个常数 C_j 使得 $\|f_j\circ\sigma_j\|_{L^{p_j}(G)}=C_j\|f_j\|_{L^{p_j}(G_j)}$。由 H¨older 不等式， $\prod_{j\le I}f_j\circ\sigma_j\in L^p(G)$，其中 $1/p=1/p_1+\cdots+1/p_I$，且 $L^p(G)$中的每个函数都以这种方式得到。根据假设， $\prod_j f_j\circ\sigma_j$ 可积，因此 $p\ge 1$。所以，由 H¨older 不等式的逆命题，Brascamp–Lieb 不等式

$$\int_G\prod_j f_j\circ\sigma_j(x)\,\mathrm{d}x\le C\prod_j\|f_j\|_{L^{p_j}(G_j}$$

成立当且仅当

$$\left(\int_G\Big|\prod_{j>I}f_j\circ\sigma_j(x)\Big|^{p'}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p'}\le C'\prod_{j\ge I}\|f_j\|_{L^{p_j}(G_j},$$

对于某个（可能不同的）常数 C'，而这又等价于不等式

$$\int_G\left|\prod_{j>I}f_j\circ\sigma_j(x)\right|\mathrm{d}x\le C'\prod_{j>I}\left(\int_{G_j}|f_j(x)|^{p_j/p'}\,\mathrm{d}x\right)^{p'/p_j}$$

对所有 $f\in L^{p_j/p}(G_j)$ 都成立；也就是说，数据组 $(G,\ \boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{q})$ 满足一个 Brascamp–Lieb 不等式，其中 $(\rho_1,\ \ldots,\ \rho_{J'})$ 是同态 $(\sigma_{I+1},\ \ldots,\ \sigma_J)$ 的集合，而 $(q_1,\ \ldots,\ q_{J'})$ 是指标 $(p_{I+1}/p',\ \ldots,\ p_J/p')$ 的集合。（某些 $p_j/p'<1$ 可能出现，但这无关紧要。）

若 $J=I$，则我们得到一个多线性 H¨older 不等式。

否则 $J>I$，且存在同态 σ_{I+1}、. . .、 σ_J，它们的核均非平凡；并且对每个 $j>I$，都存在 $\alpha_j\in\mathbb{R}^+$，使得 $(0,\ \alpha_j\mathbb{Z})\subseteq\ker\sigma_j$。我们在海森堡群中取一个非空的相对紧开集 U，并选择非负函数 $f_j\in L^{p_j/p'}(G_j)$，使得对所有 $y\in(0,\ [-\epsilon,\epsilon])$，都有 $f_j(y)=1$。

根据定理 4.6，存在一个由 $(0,\ t_m)$ 中元素组成的无穷序列 $(0,\ \mathbb{R})$，使得 $t_m\to\infty$ 当 $m\to\infty$ 时成立，并且对于所有 m 和 j，存在 $k_{j,\,m}\in\mathbb{Z}$ 使得 $|t'_m|<\epsilon$，其中 $t'_m=t_m-\alpha_j k_{j,\,m}$。如有必要，取其子序列后，不妨设

集合 $(0,\ t_n)^{-1}\diamond U$ 两两不交。由于对于所有整数 k，$(0,\ \alpha_j k)\in \ker(\sigma_j)$，

$$\begin{aligned}\int_G \prod_j f_j\circ\sigma_j(x)\,\mathrm{d}x &\geq \sum_m \int_{(0,t_m)^{-1}\diamond U} \prod_j f_j\circ\sigma_j(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_m \int_U \prod_j f_j\circ\sigma_j((0,t_m)\diamond x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_m \int_U \prod_j f_j\circ\sigma_j((0,t'_m)\diamond x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_m \int_U 1\,\mathrm{d}x\\ &= \infty.\end{aligned}$$

这表明在这种情况下，无法成立任何 Brascamp–Lieb 不等式。

因此，不可能存在任何核不为 $\{e\}$ 的 σ_j，而唯一可能的 Brascamp–Lieb 不等式是多线性 H¨older 不等式。□

海森堡群上的卷积杨不等式是涉及海森堡群的一个众所周知的 Brascamp–Lieb 不等式示例，但要表述这一点，需要用到海森堡群的直积；更多信息请参见例1.4。

注 4.8。 </style}海森堡群上的 Loomis–Whitney不等式已在[17]中建立；然而，该文中的海森堡投影并非同态。

5. The Brascamp–Lieb constant on compact Lie groups

We 本节首先回顾紧李群的结构理论 .

定义 5.1。 李代数 $\mathfrak{g}$ 若是某个紧李群的李代数，则称为紧<style>。李代数 $\mathfrak{g}$ 若非阿贝尔，且除 $\{0\}$ 和自身外没有其他理想，则称为单李代数 <style>；若存在单李理想 $\mathfrak{s}_i$ 使得 $\mathfrak{g}=\sum_{i\in I}\mathfrak{s}_i$，则称其为半单<style>。

紧李代数是其半单交换子代数 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 与其中心 $\mathfrak{z}$的直和（$\mathfrak{g}$）。

若紧半单李代数 $\mathfrak{g}$ 是单李代数 $\mathfrak{s}_i$的直和，则 $-B$（即 Killing 型的负值）是 $\mathfrak{g}$ 上的内积；相对于该内积，子代数 $\mathfrak{s}_i$彼此正交，并且 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{s}_i$ 上的限制是 $\mathfrak{s}_i$的 Killing 型。

设 G 是一个紧李群。Killing 型的负值是 $\mathfrak{g}'$上的内积。由于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'\oplus\mathfrak{z}$（$\mathfrak{g}$），我们可以在 $\mathfrak{z}$（$\mathfrak{g}$）上任取一个内积，从而在 $\mathfrak{g}$ 上得到一个内积，使得 $\mathfrak{g}'$ 与 $\mathfrak{z}$（$\mathfrak{g}$）正交。相应的左不变黎曼度量在 G 上也右不变。此外，若 $\mathfrak{g}'$ 是单李子代数 $\mathfrak{s}_i$的直和，则该内积会在 G' 及 G'的连通正规子群上诱导出相容的左不变和右不变黎曼度量。

定义 5.2. 设 G 是一个李群。 G 的换位子群 G' 是 G中由下列集合生成的闭正规子群

$$\{xyx^{-1}y^{-1}:x,y\in G\}.$$

对于一般的李群， G' 未必是闭的，但以下结论成立。

命题 5.3。 设 G 是一个紧致连通李群。那么， G 的交换子子群 G' 是 G 的闭连通正规子群，其李代数 $\mathfrak{g}'$ 等于 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$。对于包含在 $\mathfrak{g}'$ 中的每个单理想 $\mathfrak{s}_i$， G' 都有一个闭连通正规子群 S_i，其李代数为 $\mathfrak{s}_i$。

设 G 是一个紧李群，G_e 是 G 中包含单位元的连通分支。那么，G_e 是 G 的开、闭正规子群，且商群 G/G_e 是有限离散群。

下面进一步介绍紧致连通李群的结构（见 [22, 定理 5.22]）。

定理 5.4。设 G 为紧致连通李群，G' 为其换位子群，$Z(G)_e$ 为其中心 $Z(G)$的连通分支。那么 $G = G'Z(G)_e$、$Z(G') = G' \cap Z(G)$ 是有限阿贝尔群，$Z(G)_e$ 是环面，并且

$$G \simeq [G' \times Z(G)_e]/F,$$

其中 F是群 $G' \cap Z(G)_e$，嵌入在 $G' \times Z(G)_e$ 中，作为 $\{(f, f^{-1}) : \quad f \in F \quad \}$.

引理 5.5。设 $\sigma\colon G \to H$ 是从紧致连通李群 G 到李群 H的同态。那么 $\sigma(G') \subseteq H'$。此外，若 σ 是满射，则$\sigma(Z(G)_e) \subseteq Z(\sigma(G))_e$。

证明。注意，$\sigma(G)$ 是紧致的，因此是 H 的闭子群，并且是连通的。首先，G' 由交换子 $xyx^{-1}y^{-1}$ 和

$$\sigma(xyx^{-1}y^{-1}) = \sigma(x)\sigma(y)\sigma(x)^{-1}\sigma(y)^{-1},$$

因此 $\sigma(G') \subseteq (\sigma(G))' \subseteq H'$。此外，若 σ 是满射，且 $x \in Z(G)$ 和 $y \in G$，那么

$$\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(xy) = \sigma(yx) = \sigma(y)\sigma(x),$$

这表明 $\sigma(x) \in Z(H)$。 □

引理 5.6。在紧李代数中，理想的理想仍是理想。因此，在紧致连通李群中，正规子群的正规子群是整个群的正规子群。

证明。设 $\mathfrak{g} = \sum_{i\in I} \mathfrak{s}_i \oplus \mathfrak{z}$，其中每个 $\mathfrak{s}_i$都是 $\mathfrak{g}$ 的单李子代数，且 $\mathfrak{z}$是 $\mathfrak{g}$的中心。若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的理想，则必有 $\mathfrak{h} = \sum_{i\in I'} \mathfrak{s}_i \oplus \mathfrak{z}'$，其中 $I' \subset I$和$\mathfrak{z}' \subseteq \mathfrak{z}$。$\mathfrak{h}$ 的理想 $\mathfrak{j}$ 必然具有 $\sum_{i\in I''} \mathfrak{s}_i \oplus \mathfrak{z}''$ 的形式，其中 $I'' \subseteq I$ 和 $\mathfrak{z}'' \subseteq \mathfrak{z}'$，因此它也是 $\mathfrak{g}$ 中的理想。

从代数到群的过渡是直接的。 □

利用紧李群的结构理论，我们可以将 Brascamp–Lieb 常数 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限性的问题，归约为 Brascamp–Lieb 常数 $\mathbf{BL}(G_c, \boldsymbol{\sigma}|_{G_c}, \boldsymbol{p})$ 有限性的问题。我们还可以根据子空间的维数，给出 Brascamp–Lieb 常数 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限性的充要判据；这一判据与 Bennett 和 Jeong [6] 的判据非常相似。

现在，为方便读者起见，我们再次陈述定理 B。

定理 B。设 $(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是紧李群的典范 *Brascamp–Lieb* 数据。令 ϕ_j表示将 σ_j限制到 G_e、且陪域为 $(G_j)_e$所得的映射。那么，当且仅当 $\mathbf{BL}(G_e, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{p})$ 有限时，$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 才是有限的。

证明。由引理 3.5，若 G_e 的 Haar 测度是 G 的 Haar 测度在 G_e 上的限制，则

$$\mathbf{BL}(G_e, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{p}) \le \mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}),$$

而由引理 3.6，若 G、G_e 与 G/G_e 的哈尔测度以及 G_j、$(G_j)_e$ 与 $G_j/(G_j)_e$ 的哈尔测度对所有 j 均规范化为 1，则

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) \le \mathbf{BL}(G_e, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{p})\, \mathbf{BL}(G/G_e, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p}), \tag{5.1}$$

其中 $\dot\sigma_j$ 是 G/G_e 到 $G_j/(G_j)_e$的诱导同态。现在 G/G_e 以及所有$G_j/\sigma_j(G_e)$都是有限群，因此$\mathbf{BL}(G/G_e, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p})$是有限的。

我们注意到，引理 3.5 与引理 3.6 的要求互不相容，但从布拉斯坎普–利布常数的有限性这一角度看，哈尔测度的正规化无关紧要。□

对于涉及紧群的布拉斯坎普–利布数据，还有更多内容可谈。照例，我们考虑典范数据。

在紧群上，G, $L^q(G) \subseteq L^p(G)$，当 $1 \le p \le q \le \infty$ 时。因此，如果 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限，且对于所有 j 都有 $q_j \ge p_j$，那么 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})$ 也有限。布拉斯坎普–利布常数有限性的任何充要条件都必须体现这一事实。正如我们将看到的，Bennett 和 Jeong 为紧致阿贝尔李群找到的有限性条件 (1.5) 的自然推广，就是余维条件

$$\sum_j \frac{1}{p_j} \left(\dim(\sigma_j(G)) - \dim(\sigma_j(N)) \right) \le \dim(G) - \dim(N) \qquad \forall N \in \mathfrak{N}(G), \tag{5.2}$$

其中 $\mathfrak{N}(G)$是 G的所有闭连通正规子群的集合，包括 $\{e\}$，但不包括其本身 G（因为相应的条件是平凡的），并且

$$\sum_j \frac{1}{p_j} \left(\dim(\mathrm{d}\sigma_j(\mathfrak{g})) - \dim(\mathrm{d}\sigma_j(\mathfrak{n})) \right) \le \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{n}) \qquad \forall \mathfrak{n} \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}), \tag{5.3}$$

其中，$\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的所有理想的集合，包括 $\{0\}$，但不包括其自身 $\mathfrak{g}$（因为相应的条件是平凡的）。条件 (5.3) 蕴含条件 (5.2)，因为闭正规子群的李代数是一个理想，但反之则不显然。由下文的定理 5.7 和 5.9 可知，事实上 (5.2) 蕴含条件 (5.3)。

当 N 是子群 $\{e\}$ 时，条件 (5.2) 蕴含

$$\sum_j \frac{1}{p_j} \dim(\sigma_j(G)) \le \dim(G).$$

然而，我们讨论的是典范数据，因此 G 是 $G_1 \times \cdots \times G_J$ 的一个闭子群，并且

$$\dim(G) \le \sum_j \dim(\sigma_j(G)).$$

由此可知，如果 (5.2) 中所有余维不等式都严格成立，我们可以减小一个或多个 p_j，同时保持条件 $1 \le p_j \le \infty$，直到所有 p_j 都等于 1，或者至少有一个不等式取等号。当所有 p_j 都等于 1 时，G 等于乘积群 $G_1 \times \cdots \times G_J$，而布拉斯坎普–利布不等式可由以下事实推出：$G$ 的 Haar 测度等于 G_j 的 Haar 测度的乘积。因此，考虑至少有一个不等式 (5.2) 取等号时的布拉斯坎普–利布不等式，不失一般性。

定理 5.7。设 $(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是由紧李群构成的典范 *Brascamp–Lieb* 数据。若 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限，则余维条件 (5.3) 成立。

证明。根据定理 B，我们不妨假设 G 及所有 G_j 都是连通的。

由于 G 是李群，我们可以在其上赋予一个黎曼度量；所有这类度量都是等价的。我们在 G_j 上赋予商度量。

取黎曼球 $B_j(e_j, r)$ 的示性函数，其中心为 e_j，半径为 r，位于 G_j 中，作为 Brascamp–Lieb 不等式中的测试函数 f_j：

$$\int_G \prod_j (f_j \circ \sigma_j)(x) \, \mathrm{d}x \le C \prod_j \left(\int_{G_j} |f_j(x_j)|^{p_j} \, \mathrm{d}x_j \right)^{1/p_j}. \tag{5.4}$$

若 γ 是 G 中长度为 r 的曲线，则其在每个 G_j 上的投影长度至多为r，因此对于所有 $x \in B(e_G,\ r)$，$\sigma_j(x) \in B_j(e_j,\ r)$。所以，不等式左侧至少为 $|B(e_G,\ r)|$，当 r 足够小时，其表现为 $r^{\dim(G)}$ 的正倍数。类似地，右侧表现为 $\prod_j r^{\dim(G_j)/p_j}$ 的正倍数。

若该不等式成立，则对所有足够小的 r，

$$r^{\dim(G)} \lesssim r^{\sum_j \dim(G_j)/p_j},$$

因此

$$\sum_j \frac{1}{p_j} \dim(G_j) \le \dim(G).$$

设 N 是 G的正规解析子群，取 $\mathfrak{n}$中一个较大的相对紧开球 $\mathfrak{b}$，并令 N中的相对紧开集 $B=\exp(\mathfrak{b})$。那么，G中开集 $B(e_G,r)B$ 的 Haar 测度 $|B(e_G,r)B|_G$，当 $r \to 0$时其渐近行为如 $r^{\dim(\mathfrak{g})-\dim(\mathfrak{n})}$；而 G_j中开集 $\sigma_j(B(e_G,r))\sigma_j(B)$的 Haar 测度$|\sigma_j(B(e_G,r)B)|_{G_j}$，当 $r \to 0$时其渐近行为如 $r^{\dim(\mathrm{d}\sigma_j(\mathfrak{g}))-\dim(\mathrm{d}\sigma_j(\mathfrak{n}))}$。

令 f_j 为 $\sigma_j(B(e_G,\ r)B)$的示性函数。若 $x \in B(e_G,\ r)B$，则$f_j(\sigma_j(x)) = 1$，因此

$$\begin{aligned} r^{\dim(\mathfrak{g})-\dim(\mathfrak{n})} &\lesssim |B(e_G,r)B|_G \\ &\lesssim \int_G \prod_j (f_j \circ \sigma_j)(x)\,\mathrm{d}x \\ &\lesssim \prod_j \Big(\int_{G_j} |f_j(x_j)|^{p_j}\ \mathrm{d}x_j \Big)^{1/p_j} \\ &\lesssim \prod_j r^{(\dim(\mathrm{d}\sigma_j(\mathfrak{g}))-\dim(\mathrm{d}\sigma_j(\mathfrak{n})))/p_j}, \end{aligned}$$

由此

$$\sum_j \frac{1}{p_j}(\dim(\mathrm{d}\sigma_j(\mathfrak{g})) - \dim(\mathrm{d}\sigma_j(\mathfrak{n}))) \le \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{n}),$$

这就得到了 (5.2)。 □

这个定理为下一个定义提供了依据。

定义 5.8。 定义布拉斯坎普–利布多面体 $\boldsymbol{P}$为所有满足以下不等式的 $(1/p_1,\ \ldots\ldots,\ 1/p_J)$ in $\mathbb{R}^J$ 的集合

$$\begin{gathered} \sum_j \frac{1}{p_j}\left(\dim(\sigma_j(G)) - \dim(\sigma_j(N))\right) \le \dim(G) - \dim(N) \\ 0 \le \frac{1}{p_j} \le 1, \end{gathered} \tag{5.5}$$

where N 是 G 的一个闭连通正规子群，且不同于 G 和 $1 \le j \le J$.

尽管需要考虑的 G 的闭连通正规子群 N 可能有无穷多个，但 (5.5) 中出现的所有维数都是介于 0 和 d之间的整数，因此 $\boldsymbol{P}$ 由有限个不等式定义，故根据魏尔–明可夫斯基定理，它是其有限个极点的凸包。

我们首先考察该常数的有限性。

定理 5.9. 设$(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是紧李群的典范 *Brascamp–Lieb* 数据组。若余维条件(5.2) 成立，则$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限。若 G 是连通的，且 G 与 G_j 的 *Haar* 测度均归一化为1，则

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) = 1.$$

证明。 根据定理 B，不失一般性，我们可以假设 G 及所有 G_j 都是连通的。我们可以且将假设 G、 G_e 和 G/G_e 的 Haar 测度都归一化为 1。只需证明 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) \leq 1$, 因为对常数函数进行检验可知 $\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) \geq 1$,

我们将对 G的维数 d 进行归纳；对于固定的 d，再对所考虑的同态数目 J 进行归纳。当 $d = 0$ 或 $J = 1$时，结论显然成立，因此在下文中我们假设 $d > 0$ 且 $J > 1$ 。

我们假设，对于维数小于 d的所有连通紧李群，以及当同态数目至多为 $J - 1$时维数为 d 的所有群，该定理均已得到证明。

由多线性 Riesz–Thorin 定理，只需证明对于多面体 $\boldsymbol{P}$ 的任意极点 $(1/p_1, \ldots\ldots, 1/p_J)$, Brascamp–Lieb 常数至多为 1。在 $\boldsymbol{P}$ 的每个极点处，(5.5) 中至少有两个不等式取等号。

我们分两种情况讨论。首先，假设对于某个闭连通正规子群 N ，其中 $0 < \dim N < \dim G$，某个余维不等式取等号。我们将 N 和 G/N 上的 Haar 测度规范化为概率测度。

一方面，由引理 5.6， N 的闭连通正规子群恰好是 G 的闭正规子群 N_1 ，且它们是 N 的子群。此外，对于 N 的这样一个子群 N_1 ，

$$\sum_j \frac{1}{p_j} \left(\dim(\sigma_j(G)) - \dim(\sigma_j(N_1))\right) \leq \dim(G) - \dim(N_1)$$

由 (5.2)，并且

$$\sum_j \frac{1}{p_j} \left(\dim(\sigma_j(G)) - \dim(\sigma_j(N))\right) = \dim(G) - \dim(N)$$

由假设可得，因此

$$\sum_j \frac{1}{p_j} \left(\dim(\sigma_j(N)) - \dim(\sigma_j(N_1))\right) \leq \dim(N) - \dim(N_1).$$

因此，以 N 代替 G、以 $\boldsymbol{\sigma}|_N$ 代替 $\boldsymbol{\sigma}$ 时，余维条件成立，故根据归纳假设，$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}|_N, \boldsymbol{p}) \leq 1$。

另一方面， G/N 的闭连通正规子群恰好是子群 N_1/N，其中 N_1是包含 N的 G 的闭连通正规子群。此外， σ_j 从 G/N 到 $\sigma_j(G)/\sigma_j(N)$诱导出一个同态 $\dot{\sigma}_j$ 。类似的论证表明，对于这样的 N_1,

$$\sum_j \frac{1}{p_j} \left(\dim(\dot{\sigma}_j(G/N)) - \dim(\dot{\sigma}_j(N_1/N))\right) \leq \dim(G/N) - \dim(N_1/N),$$

并且以 G/N 替代 G 、以 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 替代 $\boldsymbol{\sigma}$时，余维条件仍成立。因此，由归纳假设，$\mathbf{BL}(G/N, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p}) \leq 1$ 。

由于

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) \leq \mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}|_N, \boldsymbol{p})\, \mathbf{BL}(G/N, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p}),$$

由此可得，$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) \leq 1$ 在这种情形下成立。

现在假设，对任意满足 $0 < \dim(N) < \dim(G)$ 的 N，余维不等式都不取等号。在这种情形下，由于我们所处理的是 $\boldsymbol{P}$ 的一个极点，且至少有两条定义不等式成立，故必定至少存在一个 j，使得$1/p_j = 0$ 或 $1/p_j = 1$。在这种情形下，借助命题 3.9 或命题 3.10，我们可以将同态的个数减少 1，并再次运用归纳假设。这就证明了该定理。□

注意，定理 5.7 和定理 5.9 结合起来可以证明定理 C，现回顾如下。

定理 C。 设$(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是紧李群的典范数据。若余维条件(1.6) 成立，则$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限；反之，若$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限，则余维条件(1.5) 成立。若 G 连通， G和 G_j 的 *Haar* 测度均归一化为1，且$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限，那么

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) = 1.$$

现在我们更详细地研究这个常数，并进一步运用更多结构。

引理 5.10。 设$(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 和$(G^\sim, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p})$ 是紧致连通李群的 *Brascamp–Lieb* 数据， $\pi\colon G^\sim \to G$和 $\pi_j\colon G_j{}^\sim \to G_j$是具有有限核的满同态，并且 $\sigma_j \circ \pi = \pi_j \circ \tilde{\sigma}_j$。那么$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限，当且仅当$\mathbf{BL}(G^\sim, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p})$ 有限。

证明。取 U_j 中单位元的邻域 $G_j{}^\sim$。如果 U_j 足够小，那么覆盖映射 π_j 限制在 U_j 上时是局部同构，而 π 限制在 $G^\sim$ 的适当子集 U 上时是局部同构，并且 $\tilde{\sigma}_j(U) \subseteq U_j$。由此可知，$\mathrm{BL}(G^\sim, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p}\colon \boldsymbol{U})$有限，当且仅当$\mathrm{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}\colon \boldsymbol{\pi U})$有限。由于每个群都是紧的，有限个 U_j 的平移即可覆盖 $G_j{}^\sim$，因此$\mathrm{BL}(G^\sim, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p})$有限，当且仅当$\mathrm{BL}(G^\sim, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p}\colon \boldsymbol{U})$有限。同理，$\mathrm{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$有限，当且仅当$\mathrm{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}\colon \boldsymbol{U})$有限。□

设 $G^\sim$ 是紧致连通李群 G的有限覆盖群。则存在从 $G^\sim$ 到 G的投影 π，且每个同态 $\sigma_j\colon G \to G_j$ 都会导出一个同态 $\tilde{\sigma}_j\colon G^\sim \to G_j$，其定义为 $\tilde{\sigma}_j = \sigma_j \circ \pi$。

推论5.11. 采用上述覆盖群记号，并将 G和 $G^\sim$ 的 *Haar* 测度都归一化为1。设$(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是紧致连通李群的 *Brascamp–Lieb* 数据，则

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) = \mathbf{BL}(G^\sim, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{p}).$$

证明。 前一个结果表明，一个常数有限当且仅当另一个常数有限。将所有 Haar 测度归一化后，这些常数要么为 1，要么为 ∞。□

回顾一下，每个紧致连通李群都是其半单换位子群 G'与中心的连通分支 $Z(G)_e$的乘积 $G'Z(G)_e$；前者是半单的，后者是环面，而 $G' \cap Z(G)_e$ 是有限群。若 $\sigma_j\colon G \to G_j$ 是满射开映射，则由引理 5.5 可得 $\sigma_j(G') = (\sigma_j(G))'$ 以及 $\sigma_j(Z(G)_e = Z(\sigma_j(G))_e$。我们用$\phi_j$ 表示 σ_j 在 G' 上的限制，其陪域为$(\sigma_j(G))'$；用 ψ_j 表示 σ_j在 $Z(G)_e$ 上的限制，其陪域为 $Z(G_j)_e$。

定理D。 假设$(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 是一个紧李群的典范 *Brascamp–Lieb* 数据。那么$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$ 有限，当且仅当$\mathbf{BL}(G', \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{p})$ 和$\mathbf{BL}(Z(G)_e, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{p})$ 均有限。

证明。 根据定理 5.4， G 有一个有限覆盖群 $G^\sim$，其形式为 $G' \times Z(G)_e$，并且我们可以将 G 与 $G^\sim/N$等同，其中 N 是 $G^\sim$的一个有限正规子群。我们提升

同态 $\sigma_j\colon\ G \to G_j$，通过与从 $G^\sim$ 到 G的商映射复合，得到同态 $\tilde\sigma_j\colon\ G^\sim \to G_j$。我们将 $G^\sim$ 和 G 的 Haar 测度归一化为 1，并应用推论5.11。于是

$$\mathbf{BL}(G^\sim, \tilde{\boldsymbol\sigma}, \boldsymbol p) = \mathbf{BL}(G, \boldsymbol\sigma, \boldsymbol p).$$

我们回顾一下，同态 $\tilde\sigma_j$ 将 G' 映射到 $(G_j)'$，并将 $Z(G)_e$ 映射到 $Z(G_j)_e$；因此，$\tilde\sigma_j$ 可以视为 $\phi_j \otimes \psi_j$。一方面，若 $\mathbf{BL}(G', \boldsymbol\phi, \boldsymbol p)$ 和 $\mathbf{BL}(Z(G)_e, \boldsymbol\psi, \boldsymbol p)$ 有限，则由推论 3.4 可知 $\mathbf{BL}(G^\sim, \tilde{\boldsymbol\sigma}, \boldsymbol p)$ 有限。

另一方面，若 $\mathbf{BL}(G^\sim, \tilde{\boldsymbol\sigma}, \boldsymbol p)$ 有限，则在 $G' \times Z(G)_e$ 上取形如 $f_j \otimes 1$ 的输入进行检验，可知 $\mathbf{BL}(G', \boldsymbol\phi, \boldsymbol p)$ 有限；而在 $G' \times Z(G)_e$ 上取形如 $1 \otimes f_j$ 的输入进行检验，可知 $\mathbf{BL}(G', \boldsymbol\psi, \boldsymbol p)$ 有限。□

现在，b 通过考察该不等式的极值函数，我们计算出常数 t.

定理E。 设 $(G, \boldsymbol\sigma, \boldsymbol p)$ 是紧李群的典范 *Brascamp–Lieb* 数据。若 $BL(G, \boldsymbol\sigma, \boldsymbol p)$ 是有限的，则

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol\sigma, \boldsymbol p) = \max_{H \in \mathcal{O}(G)} \frac{|H|_G}{|\sigma_j(H)|_{G_j}^{1/p_j}}. \tag{5.6}$$

证明。(5.6) 的左右两端以相同方式依赖于 G及所有G_j 的 Haar 测度，因此不妨且必须假设 G、G_c 和 G/G_c 以及所有 G_j、$(G_j)_c$ 和 $(G_j)_c$ 的 Haar 测度均已归一化为 1。现在由 (5.1) 以及 Christ [11], 将其推广到有限非阿贝尔群的估计（见 Bennett和 Jeong [6],）

$$\mathbf{BL}(G, \boldsymbol\sigma, \boldsymbol p) \le \max_{H \in \mathcal{O}(G)} \frac{|H|_G}{\prod_j |\sigma_j(H)|_{G_j}^{1/p_j}}.$$

Let f_j 是 G_j的非平凡开子群 H_j 的示性函数；则

$$H^* := \bigcap_j \sigma_j^{-1}(H_j)$$

是 G 的开子群，$\int_G \prod_j (f_j \circ \sigma_j)(x)\,\mathrm{d}x = |H^*|_G$，且 $\prod_j \|f_j\|_{L^{p_j}(G_j)} = \prod_j |H_j|^{1/p_j}$。因此

$$\frac{|H^*|_G}{\prod_j |H_j|^{1/p_j}} \le \mathbf{BL}(G, \boldsymbol\sigma, \boldsymbol p).$$

我们取 H_j 为 $\sigma_j(H)$，其中 H 是 G 的一个开子群，使得 (5.6) 右端达到最大值。根据集合论，$H \subseteq H^*$，因此 $|H|_G \le |H^*|_G$。于是

$$\frac{|H^*|_G}{\prod_j |H_j|^{1/p_j}} \le \mathbf{BL}(G, \boldsymbol\sigma, \boldsymbol p) \le \frac{|H|_G}{\prod_j |H_j|^{1/p_j}} \le \frac{|H^*|_G}{\prod_j |H_j|^{1/p_j}}.$$

现在可得 $H = H^*$，函数 f_j 是 Brascamp–Lieb 不等式的极值函数，并且 (5.6) 成立。□

最后这个定理的证明表明，为了求出 (5.6) 的右端，只需考虑 G 的子群 H，这些子群满足条件 $H = \bigcap_j \sigma_j^{-1}(\sigma_j(H))$。

References

[1] F. Barthe. ‘关于 Brascamp–Lieb 不等式的一种逆形式’. *Invent. Math.* **134** (1998), 355–361.[2] J. Bennett, N. Bez, S. Buschenhenke, M. Cowling, and T. Flock. ‘关于非线性 Brascamp–Lieb 不等式’. *Duke Math. J.* **169** (2020), 3291–3338.[3] J. Bennett, A. Carbery, M. Christ, and T. Tao. ‘布拉斯坎普–利布不等式：有限性、结构与极值函数’. *Geom. Funct. Anal.* **17** (2008), 1343–1415.

[4] J. Bennett, A. Carbery, M. Christ, and T. Tao. ‘H¨older–布拉斯坎普–利布多线性不等式的有限界’. 《数学研究快报》17 (2010), 647–666.[5]J. Bennett and M. Cowling. ‘局部紧阿贝尔群上的 Brascamp–Lieb 不等式’. ArXiv:2412.11514. 2024年.[6] J. Bennett and E. Jeong. ‘Brascamp–Lieb 不等式中的傅里叶对偶性’. 《剑桥哲学会数学学报》173 (2022年), 387–409.[7] J. M. Bennett and N. Bez. ‘调和分析中的高阶横截性’. 载于《调和分析与非线性偏微分方程》，RIMS Kˆokyˆuroku Bessatsu，第 B88 卷（京都数学科学研究所（RIMS），京都，2021年），75–103.[8] H. Bohr. ‘再论克罗内克定理’. 《伦敦数学学会杂志》9 (1934年), 5–6.[9] H. Brascamp and E. H.Lieb.‘杨不等式中的最佳常数、其逆命题及其向三个以上函数的推广’. Adv. Math. 20 (1976年), 151–173.[10] E. A. Carlen, E. H. Lieb, and M. Loss. ‘ $\mathbb{S}^n$ 上的杨不等式的尖锐类比及相关熵不等式’. 《几何分析杂志》14 (2004年), 487–520.[11] M. Christ. ‘离散阿贝尔群上 H¨older–Brascamp–Lieb 不等式的最优常数’. ArXiv:1307.8442v1. 2013年.[12] M. Christ, J. Demmel, N. Knight, T. Scanlon, and K. Yelick. ‘无挠离散阿贝尔群上 H¨older– Brascamp–Lieb 型多线性不等式’. 《逻辑分析杂志》16 (2024年), 35页.[13] M. G. Cowling, K. H. Hofmann, and S. A. Morris. ‘局部紧群的开映射’. 《群论杂志》27 (2024年), 1143–1149.[14] M. G. Cowling, A. Martini, D. M¨uller, and J. Parcet. ‘李群上的豪斯多夫–杨不等式’. 《数学年刊》375 (2019年), 93–131.[15] A. Deitmar and S. Echterhoff. 《调和分析原理》. Universitext丛书（施普林格，纽约，2009年）.[16] G. B. Folland and E. M. Stein. 《齐性群上的哈代空间》. 《数学札记》丛书第28号（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1982年）.[17] K. S. F¨assler and A. Pinamonti. ‘海森堡群上的卢米斯–惠特尼不等式’. 《数学杂志》301 (2022年), 1983–2010.[18]A. Garg, L. Gurvits, R. Oliveira, and A. Wigderson. ‘通过算子缩放研究布拉斯坎普–利布不等式的算法与优化方面’. Geom. Funct. Anal. 28 (2018年), 100–145.[19] G. H. Hardy and E. M. Wright. 《数论导论》（牛津，克拉伦登出版社，1954年）. 第三版.[20]A. W. Knapp. 《超越入门的李群》，《数学进展》丛书第140卷（Birkh¨auser，波士顿，2002年），第二版.[21] E. H. Lieb. ‘高斯核只有高斯极大化函数’. Invent. Math. 102 (1990年), 179–208.[22] M. R. Sepanski. 《紧李群》，《数学研究生教材》丛书第235卷（施普林格，纽约，2007年）.[23] E. Siebert. ‘局部紧群上的压缩自同构’. 《数学杂志》191 (1986年), 73–90.[24] V. S. Varadarajan. 《李群、李代数及其表示》，第102卷（施普林格出版社，纽约，1984年）.[25] R. Zhang. ‘Brascamp–Lieb 不等式及其对傅里叶分析的影响’. 载于 R. L. Frank, A. Laptev, M. Lewin, and R. Seiringer 编，《埃利奥特·利布的物理学与数学：九十周年纪念》，第二卷（EMS出版社，柏林，2022年），585–628。

School of Mathematics and Statistics, University of New South Wales, Sydney NSW 2052, Australia
电子邮件地址：m.cowling@unsw.edu.au

School of Mathematical and Physical Sciences, Macquarie University, NSW 2109, Aus-tralia.电子邮件地址：ji.li@mq.edu.au

Department of Mathematics, National Taiwan University, Taiwan.电子邮件地址：d10221001@ntu.edu.tw