arXiv:2602.10665v1 [math.FA] 11 Feb 2026

交叉多胞体的 Banach–Mazur距离下界改进

Omer Friedland

Abstract. 设 Γ 为一个条目相互独立且服从标准高斯分布的 $n \times m$ 矩阵，并令 $G_m = \Gamma(B_1^m)$为相应的高斯 Gluskin 多面体（等价地，它是 ℓ_1^m的一个随机 n维商空间）。在 $m = n^3$ 的范围内，我们证明，以至少 $1 - 2/n$的概率，

$$d_{\mathrm{BM}}(G_m, B_1^n) \geq cn^{4/7}(\log n)^{-C},$$

其中 B_1^n =凸包$\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$ 是交叉多胞体。这改进了该高斯模型此前已知的最佳指数$5/9$ （相差对数因子）；特别地，同一 下界也适用于 $\sup_K d_{\mathrm{BM}}(K,\ B_1^n)$。

主要的新方法是对“许多小系数”这一范围作出与条件化相容的处理。经过适当的高斯商空间后，我们应用 Maurey 型稀疏化来降低相关熵（实质上将支撑大小从 k 缩减至 $k/\log(n\rho)$），代价是引入欧几里得加厚。我们利用一个在欧几里得加厚下保持稳定的高斯测度界来控制这种扩张。在互补的“少数小系数”范围内，我们给出一种简化的论证，避免了早期工作中的整体倾斜步骤。结合这些方法，我们重新平衡熵与小球估计，从而得到指数 $4/7$。

Contents

1. 引言 2. 预备知识 3. 少量 U 生成向量（小 U 区间）4. 大量 U 生成向量（大 U 区间）5. 完成证明与优化 附录 A. 标准辅助结果 附录 B. 小 U 区间的一致抑制 附录 C. 参数约束的验证 参考文献

1
4
10
18
22
26
29
31
33

1. Introduction

Banach–Mazur距离用于量化两个 $\mathbb{R}^n$ 中关于原点中心对称的凸体在线性同构意义下相差多远（允许有界畸变）。我们回顾其定义。

定义 1.1（Banach–Mazur距离）。设 $K, L \subset \mathbb{R}^n$ 为关于原点中心对称的凸体。它们的 Banach–Mazur距离为

$$d_{\mathrm{BM}}(K, L) := \inf\Big\{\rho \geq 1 : \exists T \in GL(n) \text{ such that } T(K) \subset L \subset \rho T(K)\Big\}.$$

渐近凸几何中的一个经典基准问题是估计

$$\sup_K d_{\mathrm{BM}}(K, B_1^n),$$

其中 B_1^n 是交叉多胞体。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 46B07；次要分类号 52A23、52B11。*Key words and phrases.* Banach–Mazur距离、交叉多胞体、Gluskin 多胞体、随机多胞体、Maurey 稀疏化、对增厚稳定的高斯界。

Giannopoulos 的一般上界 [6] 断言

$$\sup_K d_{\mathrm{BM}}(K, B_1^n) \le C n^{5/6}.$$

这改进了 Bourgain–Szarek [1] 和 Szarek–Talagrand [9]此前的估计；另请参见 Youssef [12]关于改进常数的结果。这些问题与受限可逆性 [2]和比例 Dvoretzky–Rogers 分解 [4]密切相关；例如，参见 [1, 9, 6, 12, 3, 8, 5]。

另一方面，Szarek [10] 证明了下界

$$\sup_K d_{\mathrm{BM}}(K, B_1^n) \ge c\sqrt{n}\log n$$

其中 $c > 0$是一个普适常数。他的证明引入了一种经实践证明极为稳健的视角：通过 Gluskin 型随机多面体 [7] 以及一个 ε–网离散化来展示极端行为，并辅以针对高斯矩阵的强有力概率论工具。

固定 $n \ge 3$，并令 $m := n^3$。设 $g_1, \dots, g_m$为 $N(0, \mathrm{Id}_n)$ 分布的独立向量，取值于 $\mathbb{R}^n$，并记 $\Gamma = [g_1 \cdots g_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$。我们考虑对称随机多胞体

$$G_m := \operatorname{conv}\{\pm g_1, \dots, \pm g_m\} = \Gamma(B_1^m) \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

我们称其为高斯 *Gluskin* 多面体。

在 Szarek 的框架基础上，Tikhomirov [11] 证明，在高斯 Gluskin 模型中，$m = n^3$满足

$$d_{\mathrm{BM}}(G_m, B_1^n) \ge c n^{5/9} (\log n)^{-C}$$

以正概率成立，其中 c，$C > 0$为通用常数。

我们将指数改进为 $4/7$ （相差对数因子），并证明该界以至少 $1 - 2/n$ 的概率成立。

定理 1.2. 存在通用常数 $c, C > 0$，使得对所有充分大的整数 n，令$m = n^3$ 和 G_m 由(1.1)定义，则有

$$\mathbb{P}\Big\{ d_{\mathrm{BM}}(G_m, B_1^n) \ge c n^{4/7} (\log n)^{-C} \Big\} \ge 1 - \frac{2}{n}.$$

推论 **推论 1.3**。存在通用常数 c、$C > 0$，使得对所有充分大的 n ，

$$\sup_K d_{\mathrm{BM}}(K, B_1^n) \ge c n^{4/7} (\log n)^{-C}.$$

证明。由定理 1.2 可知，所述下界以正概率对 $K = G_m$ 成立，因此 G_m 的某个实现满足该下界。□

这在进一步定量缩小阶为 $n^{5/6}$的上界与现有下界之间的差距方面迈出了一步。

新方法。我们的证明沿用了 Szarek 和 Tikhomirov 的离散化与条件化／幂化方案。改进的指数 $4/7$源于对这样一种情形的新处理：许多系数都低于阈值 $1/s$。在条件化并转至高斯商空间后，我们通过 Maurey 型稀疏化降低相关熵，代价是进行欧几里得加厚；随后利用增厚稳定高斯测度界加以控制。与之互补的情形（低于 $1/s$的系数很少）则可用更简洁的论证处理。

许多 U-生成向量（大-U）：与条件化相容的熵缩减。在对已揭示列 $\Gamma_{S(A)}$进行条件化后，我们会转而考虑（再通过适当的 k维商空间后）大量交叉多胞体的并集；这些交叉多胞体由对 k 个“小系数”生成向量的选取方式索引（最终则由大小约为 $\binom{n}{k}^2$ 的混合选取方式索引，再进行商空间化）。若直接使用并集界，现有的单个多胞体高斯测度界不足以抵消这一熵（这反映在 [11]中的指数 $5/9$ 上）。

我们主要的新贡献是在条件化之后并在商空间中进行熵约简。Maurey 型稀疏化将 k 生成向量替换为一个大小为

$$t(k) \asymp \frac{k}{\log(n\rho)},$$

的子集，因此并集界只需遍历 $\binom{n}{t\ k\ ()}$ 种选择，而非 $\binom{n}{k}$种，代价是半径为$r_0 \asymp L/\sqrt{t(k)}$的欧几里得加厚。该加厚由加厚的绝对凸包的高斯测度界控制，其依赖关系通过 $R+\eta\sqrt{d}$体现，与 Maurey步骤产生的尺度相匹配。 –

少量 U个生成向量（小型U）：抑制与块尾格拉姆–施密特。当 k较小时，每个相关多胞体都至少包含 $n-k$ 个稀疏（系数较大）的生成向量。无需采用 [11] 中对所有排列进行全局"倾斜"的步骤，我们便能得到所需的一致高斯测度界。为此，我们结合了 (i) 一个随机压缩（取平均）引理，以及 (ii) 一个对被压缩块一致成立的块尾格拉姆–施密特距离估计。再结合一个确定性格拉姆–施密特/体积界，即可证明每个相关多胞体的高斯测度都呈指数级小。

证明概要。固定 $\rho \geq 1$，并考虑 (2.1) 中定义的班纳赫–马祖尔事件 $\mathcal{E}_\rho$。为证明定理 1.2，我们证明对于

$$\rho \asymp n^{4/7}(\log n)^{-C} \quad (m = n^3)$$

有 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_\rho) \leq 2/n$。论证沿用 Szarek–Tikhomirov 的全局框架（离散化以及条件化/幂化），并在大-U 情形下引入新的方法。

1) 离散化与幂化：归结为一致的高斯测度界。在 $\mathcal{E}_\rho$ 上，可以通过系数矩阵 A，利用 $G_m = \Gamma(B_1^m)$表示见证交叉多胞体；该矩阵的列具有 ℓ_1有界、n稀疏的性质，因此 $G_m \subset \rho\Gamma A(B_1^n)$。我们将 A 在 ℓ_1 中离散化为有限网 $\mathcal{A}_\varepsilon$，使得对于 $\varepsilon \simeq (\rho n^2)^{-1}$，有 $\log|\mathcal{A}_\varepsilon| \lesssim n^2 \log(n\rho)$。对每个 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$，我们揭示 $\Gamma_{S(A)}$，并将其余高斯列视为新样本。Tikhomirov幂化恒等式给出

$$\mathbb{P}\big(G_m \subset 2\rho\Gamma A(B_1^n) \mid \mathcal{F}_A\big) \leq \gamma_n\big(\mathcal{K}_A(\rho;\Gamma_{S(A)})\big)^{N(A)}.$$

因此，只需构造一个高概率事件，使得对所有$A \in \mathcal{A}_\varepsilon$，$\gamma_n(\mathcal{K}_A) \leq 1/2$ 同时成立。

2) 桥接与系数拆分：归结为混合并集。在 $1/s$处对系数进行阈值处理，可将每一列分解为一个稀疏的"K"部分和一个 ℓ_2-小的"U"部分。桥接引理将 $\mathcal{K}_A$ 归结为由 n 个向量生成的混合交叉多胞体的并集，其中恰有 k 个向量来自 U部分：

$$\gamma_n(\mathcal{K}_A) \lesssim \sum_{k=0}^{n} p_k(A;\Gamma_{S(A)}).$$

我们选择一个截断值 $\tilde{s} \geq 1$，并分别处理 $k \leq \tilde{s}$ 和 $k > \tilde{s}$。

3）小U 规模情形（$k \leq \tilde{s}$）：抑制与块尾格拉姆–施密特。在此情形下，每个多胞体都包含许多 K 个生成向量。在一个全局事件上，我们将随机压缩与块尾格拉姆–施密特距离估计以及确定性格拉姆–施密特/体积界结合起来，从而得到 γ_n（一个多胞体）$\leq \exp(-cr)$。对 $\binom{n}{k}^2$ 种选择应用并集界，可推出 $\sum_{k\leq\tilde{s}} p_k \leq 1/4$（除对数因子外）

$$\rho \lesssim \frac{n}{\sqrt{\tilde{s}}}.$$

4）大U 规模情形（$k > \tilde{s}$）：*Maurey* 稀疏化与增厚稳定界。在一个全局事件上 $\mathcal{E}^{(U)}$，我们一致地有 $\|u_i\|_2 \leq L$。投影掉所选 K 个生成向量的张成空间后，我们在维数k中工作。Maurey 型稀疏化将 k 个生成向量减少为

$$t(k) \asymp \frac{k}{\log(n\rho)},$$

代价是进行半径为 $r_0 \asymp L/\sqrt{t(k)}$ 的欧几里得加厚。增厚稳定高斯测度界（引理 4.1）控制增厚多面体的高斯测度，并在多项式约束下给出 $\sum_{k>\tilde{s}} p_k \leq 1/4$（相差对数因子）

$$\rho \lesssim \frac{\tilde{s}^3}{n^2}.$$

5) 优化。平衡这两个约束可得 $\tilde{s} \asymp n^{6/7}$，进而得到 $\rho \asymp n^{4/7}$（略去对数因子），由此推出 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_\rho) \leq 2/n$，并完成证明。

参数指南（一览）。

证明中使用了若干辅助参数。下面说明它们的作用和典型尺度（忽略绝对常数和对数级松弛；精确取值见引理 5.1 和 (5.2)）。$\Lambda = \log(n\rho)$：大-U 情形下的对数/熵尺度（见 (4.2)）。$\tilde{s}$： k 个 U-生成向量的数量截断值：$k \le \tilde{s}$（小-U）与 $k > \tilde{s}$（大-U）；优化后为 $\tilde{s} \asymp n^{6/7}\Lambda^{2/7}$（见 (5.6)）。$r$： 小-$U$ 情形下的抑制块大小；取为 $r \asymp \tilde{s}\Lambda$（见 (5.2)）。$s$： 在 $1/s$ 处进行 K/U 系数划分的阈值参数；取为 $s \asymp \tilde{s}^2/(n\Lambda)$（见 (5.2)）。$L$： 事件 $\mathcal{E}^{(U)}$ 上 $\|u_i\|_2$ 的一致上界：$L = C_0\sqrt{\frac{n}{s}}\Lambda \asymp \frac{n\Lambda}{\tilde{s}}$（见 (2.22)）。$t(k)$： k 维商空间中的 Maurey 稀疏化规模：$t(k) = \lceil k/\Lambda \rceil$（见 (4.2)）。$r_0$： Maurey 产生的欧几里得加厚半径：$r_0 = L/\sqrt{t(k)}$（见 (4.2)）。$\varepsilon$： 系数网的离散化网格间距：$\varepsilon = (\rho n^2)^{-1}$（见引理 2.2 及下文）。

论文结构。第 2.1 节进行离散化，并将问题化归为稀疏系数矩阵的有限网。第 2.4 节回顾 [11] 的条件化/幂化框架。第 2.5 节介绍 K/U 分解，并将问题化归为混合交叉多胞体的并集。第 3 节通过随机压缩和分块尾部 Gram–Schmidt 界处理小 U 情形，并在附录 B 中证明一致抑制事件。第 4 节通过 Maurey 稀疏化和加厚稳定估计，发展新的大 U 论证。最后，第 5 节优化参数并完成证明。

在全文中， c、 C、 c'、 C'、.....表示正的绝对常数，其取值可能随推导步骤而变化。

2. Preliminaries

2.1. 离散化：稀疏系数矩阵的有限网。若干标准辅助结果（初等 ℓ_1 几何、高斯集中/尾界，以及 ℓ_1-稀疏性的线性规划原理）将在附录 A 中给出。这里仅记录后文会用到的记号。

对于 $k \in \mathbb{N}$ 和 $x \in \mathbb{R}^k$，我们记 $\mathrm{supp}(x) := \{i \in [k] : x_i \neq 0\}$。

我们考虑 Banach–Mazur 事件

$$\mathcal{E}_\rho := \Big\{ d_{\mathrm{BM}}(G_m, B_1^n) \le \rho \Big\}. \tag{2.1}$$

对于 $m,\ n \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$，定义 $\mathcal{A}_{m,\ n}$ 为满足以下条件的矩阵集合 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$： 对每一列 $A^{(i)}$，

$$\|A^{(i)}\|_1 \le 1 \quad \text{and} \quad |\mathrm{supp}(A^{(i)})| \le n.$$

定义离散化子类

$$\mathcal{A}_{m,n}(\varepsilon) := \{A \in \mathcal{A}_{m,n} : A_{jk} \in \varepsilon\mathbb{Z}, \forall j,k\}.$$

2.2. **从 Banach–Mazur 到稀疏系数矩阵**。

引理 2.1 (关于 $\mathcal{E}_\rho$ 上的稀疏系数表示)。 假设 $\mathcal{E}_\rho$ 成立。那么存在 $A \in \mathcal{A}_{m,\ n}$ 使得

$$G_m \subset \rho\Gamma A(B_1^n). \tag{2.2}$$

证明。 根据 $\mathcal{E}_\rho$ 的定义，存在 $T \in GL(n)$，使得

$$T(G_m) \subset B_1^n \subset \rho T(G_m).$$

应用 T^{-1} 可得

$$G_m \subset T^{-1}(B_1^n) \subset \rho G_m.$$

Set

$$P := \rho^{-1}T^{-1}(B_1^n).$$

那么 P 是一个原点对称交叉多胞体，并且满足 $P \subset G_m \subset \rho P$。

写作 $P =$ 凸包$\{\pm p_1, \dots, \pm p_n\}$，其中 p_1、.....、$p_n \in \mathbb{R}^n$ 是它的顶点。由于 $P \subset G_m = \Gamma(B_1^m)$，每个 p_i 都属于 $\Gamma(B_1^m)$。对 $M = \Gamma$ 和 $y = p_i$ 应用引理 A.7：存在 $a_i \in \mathbb{R}^m$，使得

$$\Gamma a_i = p_i, \quad \|a_i\|_1 \le 1, \quad |\mathrm{supp}(a_i)| \le \mathrm{rank}(\Gamma) \le n.$$

令 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为以 a_1、.....、a_n 为列的矩阵。于是 $A \in \mathcal{A}_{m,\ n}$。

此外，

$$\Gamma A(B_1^n) = \Gamma\Big(\mathrm{conv}\{\pm a_1, \dots, \pm a_n\}\Big) = \mathrm{conv}\{\pm \Gamma a_1, \dots, \pm \Gamma a_n\} = \mathrm{conv}\{\pm p_1, \dots, \pm p_n\} = P.$$

因此 $G_m \subset \rho P = \rho \Gamma A(B_1^n)$，从而证明了 (2.2)。 □

2.3. **系数矩阵的离散化**。

引理 2.2 （离散化网与约化）。 假设 $n \geq 2$， $n \leq m \leq n^{10}$，且 $0 < \varepsilon \leq 1$ 满足$\varepsilon \rho n^2 \leq 1$.

(2.3)

定义有限集 $\mathcal{A}_\varepsilon := \mathcal{A}_{m,\,n}(\varepsilon)$。则下列结论成立：

（i） 每个 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$ 满足 $\|A^{(i)}\|_1 \leq 1$ 且 $|\mathrm{supp}(A^{(i)})| \leq n$ 对所有 $i \in [n]$成立，并且其元素属于 $\varepsilon\mathbb{Z}$。

（ii） 有如下界

$$|\mathcal{A}_\varepsilon| \leq \Big(\frac{Cm}{n\varepsilon}\Big)^{n^2} \tag{2.4}$$

对某个普适常数 $C > 0$。特别地，当 $m = n^3$ 且 $\varepsilon = 1/(\rho n^2)$ 时，

$$\log |\mathcal{A}_\varepsilon| \leq Cn^2 \log(n\rho). \tag{2.5}$$

(iii) 事件包含

$$\mathcal{E}_\rho \subset \Big\{\exists A \in \mathcal{A}_\varepsilon : \quad G_m \subset 2\rho \Gamma A(B_1^n)\Big\}.$$

特别地，

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_\rho) \leq \mathbb{P}\Big(\exists A \in \mathcal{A}_\varepsilon : \quad G_m \subset 2\rho \Gamma A(B_1^n)\Big). \tag{2.6}$$

证明。 定义 $\mathcal{A}_\varepsilon := \mathcal{A}_{m,\,n}(\varepsilon)$。由于每个元素都属于 $\varepsilon\mathbb{Z} \cap [-1, 1]$，且每一列的支撑大小为 $\leq n$，因此该集合是有限的。(i) 项由定义立即得出。

步骤 *1*：化归为一个（未离散化的）系数矩阵。引理 2.1 表明 $\mathcal{E}_\rho$ 蕴含事件

$$\mathcal{E}_\rho^{\mathrm{coeff}} := \Big\{\exists A \in \mathcal{A}_{m,n} : G_m \subset \rho \Gamma A(B_1^n)\Big\},$$

因此

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_\rho) \leq \mathbb{P}(\mathcal{E}_\rho^{\mathrm{coeff}}). \tag{2.7}$$

步骤 *2*：离散化与吸收。定义 $q_\varepsilon : \ \mathbb{R} \to \varepsilon\mathbb{Z}$ 为

$$q_\varepsilon(t) := \varepsilon \,\mathrm{sgn}(t) \Big\lfloor \frac{|t|}{\varepsilon} \Big\rfloor, \quad \text{with } \mathrm{sgn}(0) := 0,$$

并且对于 $a \in \mathbb{R}^m$，通过 $(Q_\varepsilon(a))_j := q_\varepsilon(a_j)$ 定义 $Q_\varepsilon(a) \in (\varepsilon\mathbb{Z})^m$。于是 $|q_\varepsilon(a_j)| \leq |a_j|$ 且 $|a_j - q_\varepsilon(a_j)| < \varepsilon$。

如果 $\|a\|_1 \leq 1$ 且 $|\mathrm{supp}(a)| \leq n$，那么

$$\|Q_\varepsilon(a)\|_1 \leq 1, \quad |\,\mathrm{supp}(Q_\varepsilon(a))| \leq n, \quad \|a - Q_\varepsilon(a)\|_1 \leq n\varepsilon.$$

~ ~对于 $A \in \mathcal{A}_{m,\,n}$ 按列定义 $\widetilde{A} := Q_\varepsilon(A)$。于是 $\widetilde{A} \in \mathcal{A}_{m,\,n}(\varepsilon)$，并且对于所有 $x \in B_1^n$，

$$\|(A - \widetilde{A})x\|_1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|A^{(i)} - \widetilde{A}^{(i)}\|_1 \leq (n\varepsilon) \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n\varepsilon.$$

因此

$$A(B_1^n) \subset \widetilde{A}(B_1^n) + n\varepsilon B_1^m.$$

应用 Γ 并利用 $G_m = \Gamma(B_1^m)$ 得到

$$\Gamma A(B_1^n) \subset \Gamma \widetilde{A}(B_1^n) + n\varepsilon G_m.$$

假设 $\mathcal{E}_\rho^{\mathrm{coeff}}$成立，并固定满足 $G_m \subset \rho \Gamma A(B_1^n)$ 的 A。令 $\widetilde{A} := Q_\varepsilon(A) \in \mathcal{A}_\varepsilon$。那么

$$G_m \subset \rho \Gamma \widetilde{A}(B_1^n) + (\rho n\varepsilon) G_m.$$

令 $\delta := \rho n\varepsilon$。由 (2.3) 和 $n \geq 2$,

$$\delta = \rho n\varepsilon \leq \frac{\rho n^2 \varepsilon}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}.$$

由于 G_m 和 $\rho\Gamma A(B_1^n)$ 是关于原点中心对称的凸体，且 $\delta < 1$，又由于 $K \subset L + \delta K$ 与$0 \leq \delta < 1$ 蕴含 $K \subset (1-\delta)^{-1}L$（应用 K 的闵可夫斯基泛函），将其应用于 $K := G_m$ 和$\sim L := \rho\Gamma A(B_1^n)$ 可得

$$G_m \subset \frac{1}{1-\delta}\rho\Gamma\widetilde{A}(B_1^n).$$

由于 $\delta \leq 1/2$，有 $(1-\delta)^{-1} \leq 2$，因此

$$G_m \subset 2\rho\Gamma\widetilde{A}(B_1^n).$$

因此， $\mathcal{E}_\rho^{\mathrm{coeff}}$蕴含 $\{\exists A \in \mathcal{A}_\varepsilon : G_m \subset 2\rho\Gamma A(B_1^n)\}$，结合 (2.7) 即得条目 (iii)。

第 3 步：基数界。 固定一列。由于 $m \geq n$，满足$|J| \leq n$ 的可能支撑集 $J \subset [m]$ 的数量等于

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{m}{r}.$$

我们声称存在一个普适常数 $C > 0$，使得

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{m}{r} \leq \Big(\frac{Cm}{n}\Big)^n. \tag{2.8}$$

事实上，分两种情况讨论。

若 $m \geq 2n$，则 $n \leq m/2$，且当 $0 \leq r \leq n$ 时，二项式系数递增，因此

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{m}{r} \leq (n+1)\binom{m}{n}.$$

由引理 A.3， $\binom{m}{n} \leq (em/n)^n$，且由于当 $n \geq 1$ 时 $n+1 \leq 2^n$，我们得到

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{m}{r} \leq (n+1)\Big(\frac{em}{n}\Big)^n \leq \Big(\frac{2em}{n}\Big)^n.$$

若 $n \leq m < 2n$，则显然有 $\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r} \leq 2^m \leq 2^{2n} = 4^n$，又由于 $m/n \geq 1$，因此得到

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{m}{r} \leq 4^n \leq \Big(\frac{4m}{n}\Big)^n.$$

综合这两种情况，可得 (2.8)，其中通用常数 C 为 $C > 0$ （例如 $C = 6$）。

对于一个固定的支撑集 J，满足 $|J| = r \leq n$，每个受支撑坐标都属于 $\varepsilon\mathbb{Z} \cap [-1, 1]$，因此至多有 C/ε 种选择。所以，对于该固定的 J，至多有 $(C/\varepsilon)^r \leq (C/\varepsilon)^n$ 种可能性。因此，可能的列数至多为 $(Cm/(n\varepsilon))^n$。由于有 n 列，

$$|\mathcal{A}_\varepsilon| \leq \Big(\frac{Cm}{n\varepsilon}\Big)^{n^2},$$

这就是（2.4）。当 $m = n^3$ 和 $\varepsilon^{-1} = \rho n^2$ 时，可得对数界（2.5）。 □

备注 2.3。 离散化步骤直接在 ℓ_1 中完成：舍入映射关于绝对值单调，因此保留了 ℓ_1 约束；由此产生的扰动仅利用包含关系$G_m = \Gamma(B_1^m)$即可吸收。特别是，引理 2.2(iii) 中的约化是确定性的事件包含，无需借助单独的几何事件（例如针对 G_m的内半径下界）来吸收离散化误差；请与 [11, §2]中的离散化步骤比较。

2.4. 暴露指标与幂化约化。 条件化/幂化约化实质上采用了 Tikhomirov 的引理 3.1 框架 [11, §3]。

令 $\Gamma = [g_1 \cdots g_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 如上。对于 $J \subset [m]$，记 $\Gamma_J \in \mathbb{R}^{n\times|J|}$ 为由列 $(g_j)_{j\in J}$ 组成的子矩阵；对于确定性的 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，记 $A_J \in \mathbb{R}^{|J|\times n}$ 为将 A 限制在指标集 J 中的行上所得的矩阵。

对于 $A \in \mathcal{A}_{m,\,n}$ 定义暴露指标集

$$S(A) := \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{supp}(A^{(i)}) \subset [m].$$

由于每一列的支撑集大小至多为 n，

$$|S(A)| \le n^2. \tag{2.9}$$

注意，根据 $S(A)$ 的定义，A 在 $S(A)$ 之外的所有行均为零。因此，对于 Γ 的每一种实现，

$$\Gamma A = \Gamma_{S(A)} A_{S(A)}. \tag{2.10}$$

对于 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$，定义暴露的 σ-域

$$\mathcal{F}_A := \sigma(g_j : j \in S(A)).$$

在给定 $\mathcal{F}_A$ 的条件下，列 $\{g_j\colon\ j \notin S(A)\}$ 服从独立同分布的 $N(0, \mathrm{Id}_n)$，且与 $\mathcal{F}_A$ 独立。

固定 $\rho \ge 1$。对于 $A \in \mathcal{A}_{m,n}$ 以及暴露矩阵 $\Gamma_{S(A)}$ 的一个实现 ω，定义（暴露的、确定性的）目标集

$$\mathcal{K}_A(\rho;\omega) := 2\rho\Gamma_{S(A)}(\omega)A_{S(A)}(B_1^n) \subset \mathbb{R}^n. \tag{2.11}$$

引理 2.4 (幂化). 固定 $\rho \ge 1$ 和 $A \in \mathcal{A}_{m,n}$。令 $\omega = \Gamma_{S(A)}$ 为暴露部分。若

$$G_m = \Gamma(B_1^m) \subset 2\rho\Gamma A(B_1^n), \tag{2.12}$$

那么每一列 g_j 满足 $g_j \in \mathcal{K}_A(\rho;\omega)$。

此外，写作 $N(A) := m - |S(A)|$，有如下精确恒等式

$$\mathbb{P}\big((2.12)\big|\mathcal{F}_A\big) = \mathbf{1}_{\{\forall j\in S(A):\, g_j\in\mathcal{K}_A(\rho;\omega)\}}\gamma_n\big(\mathcal{K}_A(\rho;\omega)\big)^{N(A)}, \tag{2.13}$$

其中，γ_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的标准高斯测度。特别地，

$$\mathbb{P}\big((2.12)\big|\mathcal{F}_A\big) \le \gamma_n\big(\mathcal{K}_A(\rho;\omega)\big)^{N(A)}. \tag{2.14}$$

证明。由对称性和凸性，(2.12) 成立当且仅当对所有 $j \in [m]$ 都有 $g_j \in 2\rho\Gamma A(B_1^n)$。由于 $S(A)$ 包含 A 的每一列的支撑集，利用 (2.10)，我们有 $\Gamma A = \Gamma_{S(A)}A_{S(A)}$，因此右侧等于 $\mathcal{K}_A(\rho;\omega)$，从而证明了第一个断言。

以 $\mathcal{F}_A$ 为条件。则 $\mathcal{K}_A(\rho;\omega)$ 是确定的，已揭示列 $(g_j)_{j\in S(A)}$ 是固定的，而新列 $(g_j)_{j\notin S(A)}$ 是独立同分布的 $N(0,\ \mathrm{Id}_n)$，并且与 $\mathcal{F}_A$ 独立。因此，(2.12) 成立当且仅当：(i) 所有已揭示列都属于 $\mathcal{K}_A(\rho;\,\omega)$；以及 (ii) 所有 $N(A)$ 个新列都属于其中。这就得到 (2.13)。不等式 (2.14) 立即成立。□

2.5. K/U 分解与交叉多胞体的并。 我们采用与 [11, §3] 中相同的系数向量稀疏/短（“双类型”）分解。

固定一个整数参数 $s \in [1, n]$，并定义阈值 $1/s$。对于 $a \in \mathbb{R}^m$，定义其 K 部分和 U 部分如下：

$$a_j^{(K)} := a_j\mathbf{1}_{\{|a_j|\ge 1/s\}}, \quad a_j^{(U)} := a_j\mathbf{1}_{\{|a_j|<1/s\}}, \quad a = a^{(K)} + a^{(U)}.$$

对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，按列定义 $A^{(K)}$，$A^{(U)}$，并令

$$F_1(A) := A^{(K)}, \quad F_2(A) := A^{(U)}, \quad F(A) := [F_1(A)F_2(A)] \in \mathbb{R}^{m\times 2n}.$$

如果 $\|a\|_1 \le 1$，那么 $|\mathrm{supp}(a^{(K)})| \le s$，因为 $a^{(K)}$ 的每个非零元素的幅度都是 $\ge 1/s$。此外，如果 $\|a\|_1 \le 1$，那么

$$\|a^{(U)}\|_2^2 \le \|a^{(U)}\|_\infty \cdot \|a^{(U)}\|_1 \le \frac{1}{s}\cdot 1 = \frac{1}{s}. \tag{2.15}$$

由于 $S(A)$ 包含 A的每一列的支撑集，因此 A 中位于 $S(A)$ 之外的所有行均为零；对于 $F_1(A)$ $F_2(A)$ $F(A)$, 情况也相同。因此，对于每个 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$ 以及 Γ的每个实现,

$$\Gamma F(A) = \Gamma_{S(A)} F_{S(A)}(A), \tag{2.16}$$

其中， $F_{S(A)}(A) \in \mathbb{R}^{|S(A)|\times 2n}$ 表示将 $F(A)$ 限制在 $S(A)$ 中各行上。

固定 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$ 和一个暴露实现 $\omega = \Gamma_{S(A)}$。定义向量

$$v_i = v_i(A;\omega) := \Gamma_{S(A)}(\omega) F_{1,S(A)}(A) e_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in [n],$$
$$u_i = u_i(A;\omega) := \Gamma_{S(A)}(\omega) F_{2,S(A)}(A) e_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in [n].$$

将这些 $2n$向量编号为

$$w_i := v_i \quad (1 \le i \le n), \quad w_{n+i} := u_i \quad (1 \le i \le n).$$

对于满足 $|I| = n$ 的 $I \subset [2n]$ ，定义相应的对称交叉多胞体

$$\mathcal{P}_I(A;\omega) := \operatorname{conv}\big(\{\pm w_i(A;\omega) : i \in I\}\big). \tag{2.17}$$

定义全集及其 k-子并集:

$$\mathcal{P}(A;\omega) := \bigcup_{I\subset[2n],|I|=n} \mathcal{P}_I(A;\omega), \quad \mathcal{P}^{(k)}(A;\omega) := \bigcup_{\substack{I\subset[2n],|I|=n\\ |I\cap(n+[n])|=k}} \mathcal{P}_I(A;\omega), \tag{2.18}$$

使得 $\mathcal{P}(A;\omega) = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{P}^{(k)}(A;\ \omega)$。

引理 2.5 (桥接引理)。 对于每个 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$ 和每个暴露实现 ω,

$$\mathcal{K}_A(\rho;\omega) \subset 4\rho\mathcal{P}(A;\omega). \tag{2.19}$$

因此,

$$\gamma_n\big(\mathcal{K}_A(\rho;\omega)\big) \le p(A;\omega), \quad p(A;\omega) := \gamma_n\big(4\rho\mathcal{P}(A;\omega)\big), \tag{2.20}$$

并且对于 $p_k(A;\ \omega) :=\gamma_n\big(4\rho\mathcal{P}^{(k)}(A;\ \omega)\big)$,

$$p(A;\omega) \le \sum_{k=0}^n p_k(A;\omega). \tag{2.21}$$

证明。 固定 A和 ω。根据定义,

$$\mathcal{K}_A(\rho;\omega) = 2\rho\Gamma_{S(A)}(\omega) A_{S(A)}(B_1^n).$$

令 $x \in A_{S(A)}(B_1^n)$。那么 $x = A_{S(A)}\xi$ 对某个 $\xi \in B_1^n$ 成立，并且

$$x = A^{(K)}_{S(A)}\xi + A^{(U)}_{S(A)}\xi = F_{1,S(A)}(A)\xi + F_{2,S(A)}(A)\xi \in F_{S(A)}(A)\big(B_1^n \times B_1^n\big).$$

由于 $\|(\xi,\ \eta)\|_1 = \|\xi\|_1 + \|\eta\|_1$，有 $B_1^n \times B_1^n \subset 2B_1^{2n}$，因此

$$A_{S(A)}(B_1^n) \subset 2F_{S(A)}(A)(B_1^{2n}).$$

应用 $\Gamma_{S(A)}(\omega)$ 并乘以 2ρ ，得到

$$\mathcal{K}_A(\rho;\omega) \subset 4\rho\Gamma_{S(A)}(\omega) F_{S(A)}(A)(B_1^{2n}).$$

Set

$$W := \Gamma_{S(A)}(\omega) F_{S(A)}(A) \in \mathbb{R}^{n\times 2n}.$$

Th因为右侧等于 $4\rho W(B_1^{2n})$，且 W 的列恰好是 $\{w_i\}_{i=1}^{2n}$。

令 $d :=$ 的秩为 $W \le n$。将推论 A.8 应用于 $M = W$ （其中 $N = 2n$），得到

$$W(B_1^{2n}) \subset \bigcup_{J\subset[2n],|J|\le d,\operatorname{rank}(W_J)=|J|} \operatorname{conv}\{\pm We_j : j \in J\}.$$

固定这样一个集合 J。任选 $I \subset [2n]$ ，使得 $J \subset I$ 且 $|I| = n$ （这是可能的，因为 $|J| \le d \le n$）。根据绝对凸包的单调性,

$$\operatorname{conv}\{\pm We_j : j \in J\} \subset \operatorname{conv}\{\pm We_i : i \in I\} = \mathcal{P}_I(A;\omega).$$

因此 $W(B_1^{2n}) \subset \mathcal{P}(A;\,\omega)$，从而

$$\mathcal{K}_A(\rho;\omega) \subset 4\rho W(B_1^{2n}) \subset 4\rho\mathcal{P}(A;\omega),$$

这就是 (2.19)。取高斯测度并利用 (2.21)，即可得到其余结论。 □

注 2.6. 我们不逐点应用 Carath´eodory，而是对 $W(B_1^{2n})$ 使用考虑秩的 ℓ_1-分解，一步得到集合包含关系 (2.19)；参见 [11, §3]。

2.6. **向量的全局范数控制事件 U-向量。** 在本文余下部分，我们固定 $m = n^3$ 和 $\varepsilon^{-1} = \rho n^2$（如引理 2.2 中所述）。

U部分的系数向量满足欧几里得界 (2.15)。我们将可能的U系数类离散化，并对 $\|\Gamma u\|_2$ 进行一致控制。

定义 2.7 （ U的离散系数类）. 令 $\mathcal{U}_\varepsilon$ 为满足以下条件的所有向量 $u \in (\varepsilon\mathbb{Z})^m$ 的集合

$$|\operatorname{supp}(u)| \le n, \quad \|u\|_2^2 \le \frac{1}{s}.$$

引理 2.8 （的基数 $\mathcal{U}_\varepsilon$）. 假设 $m = n^3$ 和 $\varepsilon^{-1} = \rho n^2$ 满足 $\rho \ge 1$。那么

$$\log|\mathcal{U}_\varepsilon| \le Cn\log(n\rho)$$

其中 $C > 0$ 为普适常数。

证明。 由于 $s \ge 1$，任何 $u \in \mathcal{U}_\varepsilon$ 都满足 $\|u\|_\infty \le \|u\|_2 \le 1/\sqrt{s} \le 1$，因此 u的每个坐标都属于$\varepsilon\mathbb{Z}\cap[-1,1]$。忽略这一粗略坐标界之外的其余 ℓ_2限制，会使我们对 $|\mathcal{U}_\varepsilon|$ 计数过多。对于每个 $1 \le r \le n$，大小为 r 的支撑集数量为 $\binom{m}{r} \le (em/r)^r \le (em)^r$。给定一个固定的、大小为 r的支撑集，每个非零坐标都必须属于 $\varepsilon\mathbb{Z}\cap[-1,1]$，因此至多有 C/ε 种取值。所以，支撑大小为 r 的向量数量至多为 $(Cm/\varepsilon)^r$。对 $0 \le r \le n$ 求和可得

$$|\mathcal{U}_\varepsilon| \le \sum_{r=0}^{n} (Cm/\varepsilon)^r \le (n+1)(Cm/\varepsilon)^n \le (Cm/\varepsilon)^n,$$

将因子 $n+1$ 并入 C^n。因此

$$\log|\mathcal{U}_\varepsilon| \le n\log(Cm/\varepsilon) \le Cn\log(n\rho),$$

因为 $m = n^3$ 和 $\varepsilon^{-1} = \rho n^2$。 □

定义 2.9 （全局 U-范数事件）。 令

$$L := C_0\sqrt{\frac{n}{s}\log(n\rho)} \tag{2.22}$$

其中 $C_0 > 0$是充分大的普适常数。定义全局事件

$$\mathcal{E}^{(U)} := \Big\{\max_{u\in\mathcal{U}_\varepsilon} \|\Gamma u\|_2 \le L\Big\}.$$

引理 2.10 （的概率 $\mathcal{E}^{(U)}$）。 存在一个通用常数 $c > 0$，使得

$$\mathbb{P}\big((\mathcal{E}^{(U)})^c\big) \le \exp\big(-cn\log(n\rho)\big).$$

证明。 固定 $u \in \mathcal{U}_\varepsilon$。若 $u = 0$，则 $\Gamma u = 0$，因此 $\mathbb{P}(\|\Gamma u\|_2 > L) = 0$。假设 $u \ne 0$。则 $\Gamma u \sim N(0, \|u\|_2^2\mathrm{Id}_n)$，即 $\Gamma u \overset{d}{=} \|u\|_2 G$对 $G \sim N(0,\mathrm{Id}_n)$成立；又因为 $\|u\|_2 \le 1/\sqrt{s}$，我们有

$$\mathbb{P}(\|\Gamma u\|_2 > L) = \mathbb{P}\big(\|G\|_2 > L/\|u\|_2\big), \quad G \sim N(0,\mathrm{Id}_n).$$

由于 $L/\|u\|_2 \ge C_0\sqrt{n\log(n\rho)}$，引理 A.5 得出：当 C_0足够大时，$\mathbb{P}(\|\Gamma u\|_2 > L) \le \exp(-c_1 n\log(n\rho))$。我们还记录粗略计数界

$$|\mathcal{U}_\varepsilon| \le \sum_{r=0}^{n} \binom{m}{r}\Big(\frac{C}{\varepsilon}\Big)^r \le (n+1)\Big(\frac{Cm}{\varepsilon}\Big)^n \le \Big(\frac{Cm}{\varepsilon}\Big)^n, \tag{2.23}$$

其中我们使用了 $\binom{m}{r} \le m^r$，并将因子 $n+1$ 吸收到 C^n 中。

根据并集界和 (2.23),

$$\mathbb{P}\big((\mathcal{E}^{(U)})^c\big) \le |\mathcal{U}_\varepsilon| \exp(-c_1 n \log(n\rho)) \le \exp\Big(n \log\Big(\frac{Cm}{\varepsilon}\Big) - c_1 n \log(n\rho)\Big).$$

由于 $m = n^3$ 和 $\varepsilon^{-1} = \rho n^2$，我们有 $\log(Cm/\varepsilon) \le C \log(n\rho)$，因此调整常数后，右侧为 $\le \exp\big(-cn\log(n\rho)\big)$。
□

在 $\mathcal{E}^{(U)}$ 上，对于每个 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$ 及其诱导的暴露实现 $\omega = \Gamma_{S(A)}$,

$$\|u_i(A;\omega)\|_2 \le L, \quad i \in [n]. \tag{2.24}$$

事实上， $F_2(A)e_i$ 的支撑集包含于 $\mathrm{supp}(A^{(i)})$（因此支撑大小为 $\le n$），并由 (2.15) 满足 $\|F_2(A)e_i\|_2^2 \le 1/s$，所以 $F_2(A)e_i \in \mathcal{U}_\varepsilon$；接着 (2.16) 给出 $u_i(A;\omega) = \Gamma F_2(A)e_i$，结论由$\mathcal{E}^{(U)}$的定义得出。

3. Few U-generators (small-U regime)

I本节中，我们控制子并集 $\mathcal{P}^{(k)}(A;\omega)$ 在 $k \le \tilde{s}$ 时的贡献，即 .

$$p_k(A;\omega) = \gamma_n\big(4\rho \mathcal{P}^{(k)}(A;\omega)\big), \quad 0 \le k \le \tilde{s}.$$

与 [11], 相比，我们避免了对“所有排列都倾斜”进行统一化处理，而是采用两个要素：
(1) 对 K 生成向量进行随机压缩（取平均），将满维交叉多胞体的高斯测度缩减至某些抑制后的交叉多胞体的平均高斯测度（引理 3.2）；(2) 对高斯像的 Gram–Schmidt 距离给出尾部分块界，该界对“尾部分块” J 的所有选取均一致（引理 3.3 和附录 B）。

结合 Gram–Schmidt/体积估计（引理 3.1），可得每个相关多胞体的 $\exp(-cr)$ 界，从而对 $k \le \tilde{s}$ 的 $\binom{n}{k}^2$ 种选取应用并集界。

回顾第 2.5 小节中的记号。对于 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$ 和一个暴露实现 $\omega = \Gamma_{S(A)}$，我们有向量 $v_i(A;\omega)$ $u_i(A;\omega) \in \mathbb{R}^n$ 以及交叉多胞体

$$\mathcal{P}_I(A;\omega) = \mathrm{conv}\big(\{\pm w_i(A;\omega) : i \in I\}\big), \quad I \subset [2n], |I| = n,$$

其中，对于 $i \le n$， $w_i = v_i$；对于 $i \le n$， $w_{n+i} = u_i$。对于 $k \in \{0,1,\dots,n\}$，我们回顾

$$\mathcal{P}^{(k)}(A;\omega) = \bigcup_{\substack{I \subset [2n], |I|=n \\ |I \cap (n+[n])| = k}} \mathcal{P}_I(A;\omega), \quad p_k(A;\omega) := \gamma_n\big(4\rho \mathcal{P}^{(k)}(A;\omega)\big).$$

3.1. 格拉姆–施密特体积界。

引理 3.1 （由 d 较小的格拉姆–施密特对角元得到较小的高斯测度）. 设 $n \ge 1$ 并设 x_1、……、 $x_n \in \mathbb{R}^n$。令

$$P := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \dots, \pm x_n\} \subset \mathbb{R}^n.$$

固定整数 $1 \le d \le n$ 和数值 $h > 0$。假设 x_1、……、 x_n 线性无关，且按此顺序，

$$\mathrm{dist}\big(x_{n-d+i}, \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_{n-d+i-1}\}\big) \le h \quad \textit{for all } i = 1, \dots, d.$$

Then

$$\gamma_n(P) \le \Big(\frac{Ch}{d}\Big)^d$$

对某个通用常数 $C > 0$成立。（若 x_1、……、 x_n 线性相关，则 $\gamma_n(P) = 0$。）

证明。论证是标准的；为完整起见，我们将其列出。

如果 $x_1, \dots, x_n$ 线性相关，则 P包含于 $\mathbb{R}^n$的一个真子空间中，因此 $\gamma_n(P) = 0$。对$(x_i)_{i=1}^n$应用格拉姆–施密特过程。这将产生一个标准正交基$(e_1, \dots, e_n)$以及唯一的上三角系数阵列$(a_{ji})_{1 \le j \le i \le n}$，使得

$$x_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ji} e_j, \quad a_{ii} = \mathrm{dist}\big(x_i, \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}\}\big).$$

设 $H :=$ 张成空间$\{e_{n-d+1}, \dots, e_n\}$，因此$\dim(H) = d$，并设 π_H为到 H上的正交投影。则$\pi_H x_i = 0$ 对 $i \le n-d$ 成立，因此

$$\pi_H P = \operatorname{conv}\{\pm \pi_H x_{n-d+1}, \dots, \pm \pi_H x_n\} \subset H.$$

令 $G \sim N(0, \mathrm{Id}_n)$。由于 $\{G \in P\} \subset \{\pi_H G \in \pi_H P\}$和 $\pi_H G$是 H中的标准高斯向量，我们得到

$$\gamma_n(P) = \mathbb{P}\{G \in P\} \le \mathbb{P}\{\pi_H G \in \pi_H P\} = \gamma_H(\pi_H P).$$

通过等距映射将 $H \simeq \mathbb{R}^d$等同起来，因此右侧等于 $\gamma_d(\pi_H P)$。

在 H的基 $(e_{n-d+1}, \dots, e_n)$ 下，列为 $\pi_H x_{n-d+1}, \dots, \pi_H x_n$ 的 $d \times d$矩阵 Y是上三角矩阵，其对角元为

$$\operatorname{diag}(Y) = (a_{n-d+1,n-d+1}, \dots, a_{n,n}),$$

因此，根据对最后 d个格拉姆–施密特对角元的假设，$|\det Y| \le h^d$。

我们有 $\pi_H P = Y(B_1^d)$，因此

$$\operatorname{vol}_d(\pi_H P) = |\det Y| \operatorname{vol}_d(B_1^d) = |\det Y| \frac{2^d}{d!} \le \frac{2^d}{d!} h^d.$$

利用 $\mathbb{R}^d$ 上的高斯密度逐点不超过 $(2\pi)^{-d/2}$ 这一事实，我们有

$$\gamma_d(\pi_H P) \le (2\pi)^{-d/2} \operatorname{vol}_d(\pi_H P) \le (2\pi)^{-d/2} \frac{2^d}{d!} h^d.$$

最后，$d! \ge (d/e)^d$，因此 $\frac{2^d}{d}! \le (2e/d)^d$。将无关紧要的因子 $(2\pi)^{-d/2}$ 吸收到常数中，得到

$$\gamma_n(P) \le \gamma_d(\pi_H P) \le \Big(\frac{Ch}{d}\Big)^d.$$

□

3.2. 对 K生成向量的随机压缩。 下一个引理是一个简单的平均化工具：它通过对压缩多胞体的高斯测度取平均，来界定一个交叉多胞体的高斯测度；这些压缩多胞体是将随机选取的 K 个生成向量按因子 r/p 缩小后得到的。

引理 3.2（随机压缩）。设 $n \ge 1$，且设 $1 \le p \le n$、$q := n - p$。设 y_1、……、y_p、z_1、……、$z_q \in \mathbb{R}^n$线性无关，并令

$$P := \operatorname{conv}\{\pm y_1, \dots, \pm y_p, \pm z_1, \dots, \pm z_q\} \subset \mathbb{R}^n.$$

固定一个整数 $1 \le r \le p$。对于每个满足 $|J| = r$ 的 $J \subset [p]$，定义压缩多胞体

$$P_J := \operatorname{conv}\Big(\{\pm y_i : i \in [p] \setminus J\} \cup \{\pm \frac{r}{p} y_i : i \in J\} \cup \{\pm z_1, \dots, \pm z_q\}\Big).$$

那么，对每个 $t > 0$,

$$\gamma_n(tP) \le \frac{2}{\binom{p}{r}} \sum_{J \subset [p], |J| = r} \gamma_n\big(4tP_J\big). \tag{3.1}$$

证明。令 $X := [y_1 \cdots y_p z_1 \cdots z_q] \in \mathbb{R}^{n \times n}$。由线性无关性可知，$X$可逆，且

$$P = X(B_1^n), \quad tP = X(tB_1^n).$$

令 $G \sim N(0, \mathrm{Id}_n)$，并定义 $a := X^{-1} G \in \mathbb{R}^n$。于是

$$\{G \in tP\} = \{\|a\|_1 \le t\}.$$

将 $a = (a^{(K)}, a^{(U)})$ 写成 $a^{(K)} \in \mathbb{R}^p$ 前 p 个坐标和 $a^{(U)} \in \mathbb{R}^q$ 后 q 个坐标。

固定 $t > 0$ 并假设 $\|a\|_1 \le t$。令 J 在 $[p]$ 的基数为 r的子集中均匀随机选取，且与 G独立。设 $S_J := \sum_{i \in J} |a_i^{(K)}|$。由 J的对称性，

$$\mathbb{E}_J S_J = \frac{r}{p} \sum_{i=1}^{p} |a_i^{(K)}| \le \frac{r}{p} \|a\|_1 \le \frac{rt}{p}.$$

由马尔可夫不等式,

$$\mathbb{P}_J\Big(S_J > \frac{2rt}{p}\Big) \le \frac{1}{2}, \quad \text{hence} \quad \mathbb{P}_J\Big(S_J \le \frac{2rt}{p}\Big) \ge \frac{1}{2}.$$

取一个子集 J，满足 $S_J \le \frac{2rt}{p}$，并定义新的系数向量 $a' \in \mathbb{R}^n$：

$$a'_i := \begin{cases} \frac{a_i}{4}, & 1 \le i \le p, i \notin J, \\ \frac{p}{4r} a_i, & 1 \le i \le p, i \in J, \\ \frac{a_i}{4}, & p+1 \le i \le n. \end{cases}$$

Then

$$\begin{aligned} \|a'\|_1 &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{1 \le i \le p \\ i \notin J}} |a_i| + \frac{p}{4r} \sum_{i \in J} |a_i| + \frac{1}{4} \sum_{i=p+1}^{n} |a_i| \\ &= \frac{1}{4}\Big(\|a\|_1 - S_J\Big) + \frac{p}{4r} S_J \le \frac{1}{4}\|a\|_1 + \Big(\frac{p}{4r} - \frac{1}{4}\Big)\frac{2rt}{p}. \end{aligned}$$

利用 $\|a\|_1 \le t$ 并化简,

$$\|a'\|_1 \le \frac{t}{4} + \frac{p-r}{2p} t = \Big(\frac{3}{4} - \frac{r}{2p}\Big) t < t.$$

接下来，定义矩阵 $X_J \in \mathbb{R}^{n \times n}$：它由 X 得到，方法是将每一列 y_i 替换为 $(r/p)y_i$（其中 $i \in J$），并保持其余各列不变。根据构造,

$$Xa = 4X_J a'.$$

因此,

$$G = Xa = 4X_J a' \in 4X_J(tB_1^n) = 4tX_J(B_1^n) = 4tP_J.$$

我们已经证明：在事件 $\{G \in tP\}$ 发生时，给定 J，以至少 $1/2$ 的条件概率有 $G \in 4tP_J$。等价地,

$$\mathbf{1}_{\{G \in tP\}} \le 2\mathbb{E}_J \mathbf{1}_{\{G \in 4tP_J\}}.$$

对 G 取期望并应用 Fubini 定理，可得 (3.1)。 □

3.3. 高斯像的块尾距离。 我们记录控制高斯像中 Gram–Schmidt 距离的概率论结果，适用于单一分块顺序。这是[11],中到张成空间的距离论证的一个简化变体，专门针对一种固定的分块重排（先按递增顺序列出 $[p] \setminus J$，再按递增顺序列出 J），并附有自包含的证明。

引理 3.3 (块尾距离界)。 存在通用常数 C、$c > 0$，使得以下性质成立。假设 $n \ge C$、$n/2 \le p \le n$、$1 \le r \le p/2$ 和 $\tau \ge C$。固定一个确定性的满秩 $m \times p$ 矩阵 B，其秩为 p，且每一列的欧几里得范数不超过一。令

$$H_i := \Gamma B e_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in [p],$$

也就是说， H_i 是 B 的第 i 列的高斯像。固定一个满足 $|J| = r$ 的子集 $J \subset [p]$，并令 σ_J 为 $[p]$ 的排列，先按递增顺序列出 $[p] \setminus J$，再按递增顺序列出 J。定义有序族 $H'_i := H_{\sigma_J(i)}$ 并且，对于 $i \ge 2$，其张成空间为

$$E_{i-1} := \operatorname{span}\{H'_1, \dots, H'_{i-1}\}.$$

Set

$$N := n - p + r \quad (\ge r).$$

令 $\mathcal{E}_{B,\,J}$ 表示这样一个事件：在最后 r 个指标中，至少有 $r/2$ 个满足

$$\operatorname{dist}(H'_i, E_{i-1}) \le \tau\sqrt{N}.$$

Then

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_{B,J}) \ge 1 - \exp(-c\tau^2 N r). \tag{3.2}$$

此外，写作 $\mathcal{J}_{p,\,r} := \{J \subset [p] : \ |J| = r\}$，

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{J\in\mathcal{J}_{p,r}} \mathcal{E}_{B,J}\Big) \geq 1 - \binom{p}{r}\exp(-c\tau^2 N r). \tag{3.3}$$

证明。固定 B 和 J。令 P_J 为对应于 σ_J 的置换矩阵，并设 $B' := BP_J$。那么$B'e_i = Be_{\sigma_J(i)}$，因此有序族 $(H'_1, \dots, H'_p)$ 等于

$$H'_i = \Gamma B' e_i, \quad i \in [p].$$

由于 B' 满足与 B 相同的假设（满秩 p 且列范数为 ≤ 1），只需对 B' 和恒等置换证明该引理；我们将在下文证明。为简便起见，用 H_i 代替 H'_i，用 B代替 B'。按照这一约定，“尾部分块”是指标集 $\{p-r+1, \dots, p\}$。

步骤 *1*：化归为独立同分布高斯列。取约化 QR 分解 $B = QR$，其中 $Q \in \mathbb{R}^{m\times p}$具有正交归一列， $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ 为对角线元素严格为正的上三角矩阵。令

$$X := \Gamma Q \in \mathbb{R}^{n\times p}, \quad x_i := Xe_i \in \mathbb{R}^n \quad (i \in [p]).$$

我们断言， X的条目独立同分布，服从 $N(0,\ 1)$，因此 $x_1, \dots, x_p$是相互独立的 $N(0,\ \mathrm{Id}_n)$ 向量。事实上，令 $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ 表示 Γ的各行。由于 Γ 具有独立同分布的标准高斯条目，行向量 $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$ 相互独立，且每个都服从 $\gamma^{(\ell)} \sim N(0,\ \mathrm{Id}_m)$。 X的第 ℓ行是 $\gamma^{(\ell)}Q \in \mathbb{R}^p$。作为高斯向量的线性变换， $\gamma^{(\ell)}Q$ 是均值为 0、协方差为

$$\mathbb{E}[(\gamma^{(\ell)}Q)^\top(\gamma^{(\ell)}Q)] = Q^\top \mathbb{E}[(\gamma^{(\ell)})^\top\gamma^{(\ell)}]Q = Q^\top \mathrm{Id}_m Q = Q^\top Q = \mathrm{Id}_p.$$

因此 $\gamma^{(\ell)}Q \sim N(0,\ \mathrm{Id}_p)$；由于它服从协方差为 Id_p 的多元高斯分布，其各坐标相互独立，且服从 $N(0,\ 1)$。由于各行 $\gamma^{(\ell)}$ 相互独立， X的各行也相互独立，因此 X的所有元素均为独立同分布的 $N(0,\ 1)$。特别地，各列 x_1，……， x_p相互独立，且每列都服从 $x_i \sim N(0,\ \mathrm{Id}_n)$。

最后，由于 $B = QR$，

$$H := \Gamma B = \Gamma(QR) = (\Gamma Q)R = XR, \quad \text{so} \quad H_i = \sum_{j\leq i} R_{ji}x_j \quad (i \in [p]).$$

步骤 *2*：到张成空间的距离。对于 $i \geq 2$，令 F_{i-1}:= 张成空间$\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$。由于 R是对角线元素严格为正的上三角矩阵，主子块 $R_{[i-1]\times[i-1]}$可逆。此外， H_1，……， H_{i-1}是 x_1，……， x_{i-1}经过可逆坐标变换后得到的线性组合，因此

$$\operatorname{span}\{H_1, \dots, H_{i-1}\} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}\} = F_{i-1}.$$

将 $H_i = \sum_{j<i} R_{ji}x_j + R_{ii}x_i$ 写成 $\sum_{j<i} R_{ji}x_j \in F_{i-1}$ 的形式，得到

$$\operatorname{dist}(H_i, F_{i-1}) = R_{ii}\|\pi_{F_{i-1}^\perp} x_i\|_2.$$

此外，根据关于列范数的假设， $|R_{ii}| \leq \|Re_i\|_2 = \|QRe_i\|_2 = \|Be_i\|_2 \leq 1$，因此

$$\operatorname{dist}(H_i, F_{i-1}) \leq \|\pi_{F_{i-1}^\perp} x_i\|_2. \tag{3.4}$$

第 *3* 步：单个尾指标的条件尾界。固定 $i \in \{p-r+1, \dots, p\}$，并令 d_i:= $\dim(F_{i-1}^\perp)$。由于 $i-1 \leq p-1 \leq n-1$，且 $(x_1$、…、$x_{i-1})$ 的联合分布在 $(\mathbb{R}^n)^{i-1}$ 上绝对连续，

$$\mathbb{P}\big(\dim \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}\} < i-1\big) = 0,$$

因此 $\dim(F_{i-1})$ 几乎处处 $= i-1$，从而

$$d_i = \dim(F_{i-1}^\perp) = n - (i-1) = n - i + 1.$$

由于 $i \geq p-r+1$，我们有

$$d_i = n - i + 1 \leq n - (p-r+1) + 1 = n - p + r =: N.$$

对 $\sigma(x_1$，…， $x_{i-1})$ 进行条件化。则在此条件下， F_{i-1}是确定的，并且根据步骤 1， x_i与 $\sigma(x_1$，…， $x_{i-1})$ 相互独立，且服从 $N(0,\ \mathrm{Id}_n)$ 分布。因此，正交投影 $\pi_{F_{i-1}^\perp} x_i$ 是

子空间 $F_{i-1}^{\perp}$ 中的中心高斯向量，其协方差等于该子空间上的恒等算子。通过等距映射识别 $F_{i-1}^{\perp} \simeq \mathbb{R}^{d_i}$，可得

$$\|\pi_{F_{i-1}^{\perp}} x_i\|_2 \overset{d}{=} \|G_{d_i}\|_2, \quad G_{d_i} \sim N(0, \mathrm{Id}_{d_i}).$$

设 $G_N = (G_{d_i}, G')$，其中 $G' \sim N(0, \mathrm{Id}_{N-d_i})$ 与 G_{d_i} 独立。那么 $\|G_N\|_2 \geq \|G_{d_i}\|_2$ 几乎处处成立，因此对所有 $\tau \geq 0$,

$$\mathbb{P}\big(\|G_{d_i}\|_2 > \tau\sqrt{N}\big) \leq \mathbb{P}\big(\|G_N\|_2 > \tau\sqrt{N}\big).$$

在维数 N 下应用引理 A.5（第一个界），取 $t := (\tau - 1)\sqrt{N} \geq 0$，得到

$$\mathbb{P}\big(\|G_N\|_2 > \tau\sqrt{N}\big) = \mathbb{P}\big(\|G_N\|_2 > \sqrt{N} + t\big) \leq \exp\big(-c(\tau-1)^2 N\big).$$

由于陈述中假设 $\tau \geq C$，且必要时可以增大 C，我们可以假设 $\tau \geq 2$；此时 $(\tau-1)^2 \geq \tau^2/4$，因此

$$\mathbb{P}\big(\|G_N\|_2 > \tau\sqrt{N}\big) \leq \exp(-c_0 \tau^2 N), \quad c_0 := c/4.$$

结合 (3.4) 可得，几乎处处,

$$\mathbb{P}\Big(\mathrm{dist}(H_i, F_{i-1}) > \tau\sqrt{N} \;\Big|\; \sigma(x_1, \ldots, x_{i-1})\Big) \leq p_0 := \exp(-c_0\tau^2 N). \tag{3.5}$$

步骤 *4*：至多一半的尾部指标是坏的。对每个 $i \in \{p-r+1, \ldots, p\}$ 定义“坏”事件

$$A_i := \{\mathrm{dist}(H_i, F_{i-1}) > \tau\sqrt{N}\}.$$

Let $t := \lceil r/2 \rceil$。那么 $\mathcal{E}_{B,J}^c$ 意味着 $\{p-r+1, \ldots, p\}$ 中至少有 t 个指标是坏的，即 .

$$\mathcal{E}_{B,J}^c \subset \bigcup_{\substack{I \subset \{p-r+1,\ldots,p\} \\ |I|=t}} \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Fix 一个大小为 t 的子集 $I = \{i_1 < \cdots < i_t\}$。迭代 (3.5) 并利用塔式性质可得 es

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{\ell=1}^{t} A_{i_\ell}\Big) \leq p_0^t.$$

对所有 $\binom{r}{t}$ 种 I 取并集界，得到

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_{B,J}^c) \leq \binom{r}{t} p_0^t.$$

利用 $\binom{r}{t} \leq 2^r$ 和 $t \geq r/2$，可得

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_{B,J}^c) \leq 2^r \exp\Big(-c_0\tau^2 N t\Big) \leq \exp\Big(r\log 2 - \frac{c_0}{2}\tau^2 N r\Big).$$

在陈述中选取足够大的通用常数 C，使得 $\tau \geq C$ 蕴含 $\frac{c_0}{2}\tau^2 \geq 2\log 2$，从而得到 —

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_{B,J}^c) \leq \exp(-c\tau^2 N r)$$

对一个普适的 $c > 0$，从而证明 (3.2)。最后，对所有 $J \in \mathcal{J}_{p,r}$ 使用 $|\mathcal{J}_{p,r}| = \binom{p}{r}$ 的并集界即可得到 (3.3)。□

3.4. 抑制意味着指数小的高斯测度。我们将前述引理归纳为一个确定性推论。

引理 3.4 (抑制 $\Rightarrow$ 指数小的高斯测度**)**。 存在通用常数 c_{suppr}、 $c_{\mathrm{decay}}>0$ ， 使得以下结论成立。设 $n \geq 1$ ， 且 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是由 p K 个向量和 q 个额外向量生成的满维交叉多胞体，

$$P=\operatorname{conv}\{\pm y_1, \ldots, \pm y_p, \pm z_1, \ldots, \pm z_q\}, \quad p+q=n,$$

其中 y_1、…、 y_p、 z_1、…、 z_q 线性无关，并进一步假设 $p \geq n/2$ （等价地， $q \leq n/2$）。固定整数 $8 \leq r \leq p$ ， 并假设对于每个满足 $|J|=r$ 的 $J \subset[p]$ ， 按照分块顺序排列（ $[p] \setminus J$ 中的指标在前， J 中的指标在后）， 最后 r 个 *Gram–Schmidt* 距离中至少有 $r/2$ 个满足

$$\operatorname{dist}\big(y_{\sigma_J(i)}, \operatorname{span}\{y_{\sigma_J(j)}: j<i\}\big) \leq C_\star \sqrt{r}.$$

那么，对于每个满足以下条件的 $\rho \geq 1$

$$4 \rho C_\star \sqrt{r} \leq c_{\mathrm{suppr}} n, \tag{3.6}$$

有

$$\gamma_n(4 \rho P) \leq 2 \exp(-c_{\mathrm{decay}} r).$$

证明。 固定 $J \subset[p]$、 $|J|=r$，并按照引理 3.2 定义压缩多胞体 P_J。由引理 3.2（取$t=4\rho$），

$$\gamma_n(4 \rho P) \leq \frac{2}{\binom{p}{r}} \sum_{|J|=r} \gamma_n(16 \rho P_J). \tag{3.7}$$

因此，只需证明该结论对所有 J 都一致成立，

$$\gamma_n(16 \rho P_J) \leq \exp(-c_{\mathrm{decay}} r). \tag{3.8}$$

固定这样的一个 J。考虑 P_J 的 $n=p+q$ 生成向量按如下顺序排列：先列出 q 向量$z_1, \ldots, z_q$（顺序任意），然后按分块顺序列出 p 向量 $y_1, \ldots, y_p$ σ_J（因此最后 r y 个向量对应于 J）。对于任意 $i \in[p]$, 在这个完整列表中，$y_{\sigma_J(i)}$ 的前驱张成空间包含 $\operatorname{span}\{y_{\sigma_J(j)}: j<i\}$，因此

$$\operatorname{dist}\big(y_{\sigma_J(i)}, \operatorname{span}(\text{ preceding full list})\big) \leq \operatorname{dist}\big(y_{\sigma_J(i)}, \operatorname{span}\{y_{\sigma_J(j)}: j<i\}\big).$$

因此，假设的仅针对 y 的格拉姆–施密特距离界，也意味着在这个完整生成向量列表中，相应的格拉姆–施密特距离满足相同的界（左端可能更小）。

根据假设，按分块顺序排列的最后 r K 个生成向量中，至少有 $r/2$ 个满足格拉姆–施密特距离界 $\leq C_\star \sqrt{r}$。在 P_J 中，索引为 J 的生成向量按因子 r/p 重新缩放，因此相应的格拉姆–施密特距离也按相同因子重新缩放。因此，按相同的分块顺序， P_J 的最后 r 个生成向量中至少有 $r/2$ 个的格拉姆–施密特距离不超过

$$\frac{r}{p} C_\star \sqrt{r}.$$

选取 $d:=\lfloor r/4 \rfloor$。由于 $r/2 \geq d$，我们可以重新排列 P_J 的 n 个生成向量（这不会改变 P_J），使完整列表中最后的 d 个生成向量选自这些“良好”的被抑制 K–向量（即选自$\{(r/p) y_i: i \in J\}$ ， 它们满足上述距离界），同时将所有其他生成向量（特别是所有$z_1, \ldots, z_q$）排在它们之前。将一个向量移到更靠后的位置，只会扩大其前驱向量的张成空间，因此只会减小其格拉姆–施密特距离；所以在这个新顺序中，最后的 d 个格拉姆–施密特距离仍然不超过 $\frac{r}{p} C_\star \sqrt{r}$。

按 16ρ 缩放会使所有格拉姆–施密特距离乘以 16ρ，因此由引理 3.1 可得

$$\gamma_n(16 \rho P_J) \leq \Big(\frac{C \cdot 16 \rho \cdot \frac{r}{p} C_\star \sqrt{r}}{d}\Big)^d, \tag{3.9}$$

其中通用常数 C 来自引理 3.1。

我们估计该比值。由于 $d = \lfloor r/4 \rfloor$，对于 $r \geq 8$，有 $d \geq r/8$。此外，根据假设，$p \geq n/2$。因此，对于 $r \geq 8$,

$$\frac{16\rho \cdot \frac{r}{p} C_\star \sqrt{r}}{d} \leq 16\rho \cdot \frac{r}{p} C_\star \sqrt{r} \cdot \frac{8}{r} = 128\rho \frac{C_\star \sqrt{r}}{p} \leq 256\rho \frac{C_\star \sqrt{r}}{n}.$$

选择 $c_{\mathrm{suppr}} > 0$，使得 (3.6) 蕴含

$$C \cdot 256\rho \frac{C_\star \sqrt{r}}{n} \leq \frac{1}{2}.$$

于是 (3.9) 给出

$$\gamma_n(16\rho P_J) \leq 2^{-d} \leq \exp\Big(-\frac{\log 2}{8} r\Big).$$

因此，(3.8) 对 c_{decay} 成立：$= \log 2 - 8$（如有必要，可通过常数对较小的 r 进行调整）。代入 (3.7) 得到 $\gamma_n(4\rho P) \leq 2e^{-c_{\mathrm{decay}} r}$。□

3.5. **关于 K-生成向量的全局抑制事件**。我们定义一个事件，以确保对 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$一致地成立：由至多 $\tilde{s}$ U 个 K向量生成的每个交叉多胞体都满足引理 3.4 的假设。证明采用计数与并集界论证，但（不同于 [11]）只涉及块 置换（由子集 J决定），并使用引理 3.3。完整证明见附录 B。

定义 3.5（抑制事件（全局））。固定整数 $1 \leq \tilde{s} \leq n/2$ 和 $1 \leq r \leq n$，令 $C_\star > 0$为充分大的绝对常数。对于 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$，定义 $\mathcal{E}_A^{(K)}(r, \tilde{s})$ 为以下事件：对每个$k \in \{0, 1, \ldots, \tilde{s}\}$ 以及每个满足 $|I_1| = n - k$的子集 $I_1 \subset [n]$，若向量 $\{v_i(A; \Gamma_{S(A)}) : i \in I_1\}$线性无关，则对每个满足 $|J| = r$的 $J \subset I_1$，记 $\sigma_{I_1,\, J}$ 为对 I_1 重新排序所得的序列，其中先按递增顺序列出 $I_1 \setminus J$，再按递增顺序列出 J，则有

$$\Big|\Big\{\ell \in \{n-k-r+1, \ldots, n-k\} : \mathrm{dist}\big(v_{\sigma_{I_1,J}(\ell)}, \mathrm{span}\{v_{\sigma_{I_1,J}(t)} : t < \ell\}\big) \leq C_\star \sqrt{r}\Big\}\Big| \geq \frac{r}{2}.$$

定义全局事件

$$\mathcal{E}^{(K)}(r, \tilde{s}) := \bigcap_{A \in \mathcal{A}_\varepsilon} \mathcal{E}_A^{(K)}(r, \tilde{s}).$$

引理 3.6. 存在一个普适常数 $C > 0$，使得以下结论成立。假设 $m = n^3, \varepsilon^{-1} = \rho n^2$, n 充分大，$1 \leq s \leq n$，且参数 $s, \tilde{s}, r$ 满足

$$4\tilde{s} \leq r \leq \frac{n - \tilde{s}}{2}, \quad \tilde{s} \geq \log^2 n, \quad \frac{\tilde{s}^2}{ns} \geq C \log(n\rho). \tag{3.10}$$

Then

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{E}^{(K)}(r, \tilde{s})\big) \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

证明。见附录 B。 □

3.6. **小U 范围：并集测度界**。回忆引理 3.4 中的通用常数 $c_{\mathrm{suppr}}, c_{\mathrm{decay}} > 0$，以及定义 3.5 中的绝对常数 $C_\star > 0$。

命题 3.7 (小U范围：并集测度界)。假设 $1 \leq \tilde{s} \leq n/2$ 和 $8 \leq r \leq n - \tilde{s}$，假设 $\mathcal{E}^{(K)}(r, \tilde{s})$ 成立，并假设缩放条件 (3.6) 满足。则对于每个 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$、每个暴露实现 ω 以及每个 $k \in \{0, 1, \ldots, \tilde{s}\}$,

$$p_k(A; \omega) = \gamma_n\big(4\rho \mathcal{P}^{(k)}(A; \omega)\big) \leq 2\binom{n}{k}^2 \exp(-c_{\mathrm{decay}} r),$$

其中 c_{decay} 来自引理 *3.4*。

因此，

$$\sum_{k=0}^{\tilde{s}} p_k(A; \omega) \leq 2(\tilde{s}+1) \exp(-c_{\mathrm{decay}} r) \binom{n}{\tilde{s}}^2 \leq 2(\tilde{s}+1) \exp(-c_{\mathrm{decay}} r) \Big(\frac{en}{\tilde{s}}\Big)^{2\tilde{s}}.$$

特别是，如果

$$c_{\mathrm{decay}} r \ge 4\tilde{s}\log\Big(\frac{en}{\tilde{s}}\Big) + \log 16, \tag{3.11}$$

那么 $\sum_{k=0}^{\tilde{s}} p_k(A;\,\omega) \le \frac{1}{4}$。

证明。取 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$、一个暴露实现 ω，以及 $k \in \{0,1,\dots,\tilde{s}\}$。令

$$\mathcal{I}_k := \Big\{ I \subset [2n] : |I| = n,\ \big|I \cap (n + [n])\big| = k \Big\}.$$

根据定义，

$$\mathcal{P}^{(k)}(A;\omega) = \bigcup_{I \in \mathcal{I}_k} \mathcal{P}_I(A;\omega), \quad p_k(A;\omega) = \gamma_n\Big(4\rho \mathcal{P}^{(k)}(A;\omega)\Big).$$

由测度的并集界，

$$p_k(A;\omega) = \gamma_n\Big(\bigcup_{I \in \mathcal{I}_k} 4\rho\mathcal{P}_I(A;\omega)\Big) \le \sum_{I \in \mathcal{I}_k} \gamma_n\big(4\rho\mathcal{P}_I(A;\omega)\big). \tag{3.12}$$

我们先计算 $|\mathcal{I}_k|$。任意 $I \in \mathcal{I}_k$ 都能唯一地写成

$$I = I_1 \cup (n + I_2), \quad I_1 \subset [n],\ |I_1| = n-k, \quad I_2 \subset [n],\ |I_2| = k,$$

因此 $|\mathcal{I}_k| = \binom{n}{n-k}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2$。

现在固定 $I \in \mathcal{I}_k$，并按上文写作 $I = I_1 \cup (n + I_2)$。回顾一下，

$$\mathcal{P}_I(A;\omega) = \mathrm{conv}\Big(\{\pm v_i(A;\omega) : i \in I_1\} \ \cup\ \{\pm u_j(A;\omega) : j \in I_2\}\Big) \subset \mathbb{R}^n.$$

如果 $\mathcal{P}_I(A;\,\omega)$ 不是满维的，那么它包含于 $\mathbb{R}^n$ 的某个真仿射子空间中，因此 $\gamma_n(4\rho\mathcal{P}_I(A;\,\omega)) = 0$。

以下假设 $\mathcal{P}_I(A;\,\omega)$ 是满维的。于是其线性张成等于 $\mathbb{R}^n$，并且由于它恰好由 n 个向量 $\{w_\ell(A;\omega) : \ell \in I\}$ 生成（见 (2.17)），族 $\{w_\ell : \ell \in I\}$ 张成 $\mathbb{R}^n$。由于$|I| = n$，可知 $\{w_\ell : \ell \in I\}$ 线性无关。特别地，子族 $\{v_i : i \in I_1\} \subset \{w_\ell : \ell \in I\}$ 线性无关。

令 $p := |I_1| = n - k$，并令 $q := |I_2| = k$，于是 $p + q = n$。由于 $k \le \tilde{s} \le n/2$，我们有 $p = n - k \ge n/2$。此外，命题的假设给出 $8 \le r \le n - \tilde{s} \le n - k = p$，因此 $r \in [8, p]$。

取 $I_1 = \{i_1 < \cdots < i_p\}$ 和 $I_2 = \{j_1 < \cdots < j_q\}$ 为递增枚举，并定义

$$y_a := v_{i_a}(A;\omega) \quad (a = 1,\dots,p), \quad z_b := u_{j_b}(A;\omega) \quad (b = 1,\dots,q).$$

则 $\mathcal{P}_I(A;\,\omega) = $凸包$\{\pm y_1,\dots,\pm y_p, \pm z_1,\dots,\pm z_q\}$。

我们验证引理 3.4 的格拉姆–施密特假设对 K-向量 $y_1, \dots, y_p$ 成立。任取满足 $|J| = r$ 的子集 $J \subset [p]$，并令 $J' := \{i_a : a \in J\} \subset I_1$。令 σ_J 为 $[p]$ 的排列，先按递增顺序列出 $[p] \setminus J$，再按递增顺序列出 J。在保序对应 $a \leftrightarrow i_a$ 下，排列后的列表 $(y_{\sigma_J(1)}, \dots, y_{\sigma_J(p)})$ 与列表 $(v_{\sigma_{I_1,J'}(1)}, \dots, v_{\sigma_{I_1,J'}(p)})$ 相同，其中 $\sigma_{I_1,J'}$ 如定义 3.5 所述。由于 $\mathcal{E}^{(K)}(r,\tilde{s})$ 成立，且 $\{v_i : i \in I_1\}$ 线性无关，定义 3.5 意味着，在此分块顺序下，y 族最后的 r 个格拉姆–施密特距离中至少有 $r/2$ 个为 $\le C_\star\sqrt{r}$。因此，对于交叉多胞体 $\mathcal{P}_I(A;\,\omega)$，若其 K- 向量为 $(y_a)_{a=1}^p$，附加向量为 $(z_b)_{b=1}^q$，则满足引理 3.4 的假设。

最后，命题陈述中假设了缩放条件 (3.6)，因此由引理 3.4 可得

$$\gamma_n\big(4\rho\mathcal{P}_I(A;\omega)\big) \le 2\exp(-c_{\mathrm{decay}} r).$$

这个界在非满维情形下也（显然）成立，因为此时左侧为 0.

代入 (3.12) 并利用 $|\mathcal{I}_k| = \binom{n}{k}^2$ 可得

$$p_k(A;\omega) \le 2\binom{n}{k}^2 \exp(-c_{\mathrm{decay}} r),$$

这就是第一个展示的不等式。

对 $k \le \tilde{s}$ 求和，并对 $k \le \tilde{s}$ 使用 $\binom{n}{k} \le \binom{n}{\tilde{s}}$，得到

$$\sum_{k=0}^{\tilde{s}} p_k(A;\omega) \le 2e^{-c_{\mathrm{decay}} r} \sum_{k=0}^{\tilde{s}} \binom{n}{k}^2 \le 2(\tilde{s}+1)e^{-c_{\mathrm{decay}} r} \binom{n}{\tilde{s}}^2 \le 2(\tilde{s}+1)e^{-c_{\mathrm{decay}} r} \Big(\frac{en}{\tilde{s}}\Big)^{2\tilde{s}}.$$

最后，若 (3.11) 成立，则

$$2(\tilde{s}+1)e^{-c_{\mathrm{decay}} r} \Big(\frac{en}{\tilde{s}}\Big)^{2\tilde{s}} \le 2(\tilde{s}+1) \cdot \frac{1}{16} \Big(\frac{en}{\tilde{s}}\Big)^{-4\tilde{s}} \Big(\frac{en}{\tilde{s}}\Big)^{2\tilde{s}} \le \frac{1}{4},$$

证明完毕。 □

注 3.8（小-U 区域的多项式消息）。忽略对数项，熵项为 $\binom{n}{k}^2 \approx \exp(\Theta(k \log n))$，而引理 3.4 给出 $\gamma_n(4\rho\mathcal{P}_I) \lesssim e^{-cr}$。因此，我们需要 $r \gtrsim \tilde{s}$（忽略对数项），且缩放条件 (3.6) 为 $\rho\sqrt{r} \lesssim n$，即

$$\rho \lesssim \frac{n}{\sqrt{\tilde{s}}} \quad \text{(up to logarithmic factors).}$$

4. Many U-generators (large-U regime)

4.1. 对加厚稳定的高斯小测度界。 我们整理一个关于加厚的绝对凸包的通用高斯测度估计。为避免与参数 r 混淆，我们用 $\eta \ge 0$ 表示加厚半径。

引理 4.1（对欧几里得加厚稳定的高斯测度界）。设 $d, \ell \in \mathbb{N}$ 并设

$$P = \mathrm{conv}\{\pm x_1, \dots, \pm x_\ell\} \subset \mathbb{R}^d, \quad R := \max_{i \le \ell} \|x_i\|_2.$$

那么对于任意的 $\rho \ge 1$ 和 $\eta \ge 0$,

$$\gamma_d\big(\rho(P + \eta B_2^d)\big) \le \binom{\ell+d}{d} \Big(\frac{C\rho(R + \eta\sqrt{d})}{d}\Big)^d. \tag{4.1}$$

证明。令 $X = [x_1 \ \cdots \ x_\ell] \in \mathbb{R}^{d \times \ell}$，使得 $P = X(B_1^\ell)$。由于 $B_2^d \subset \sqrt{d} B_1^d$，我们有

$$P + \eta B_2^d \subset P + \sqrt{d}\eta B_1^d.$$

定义矩阵

$$M := \big[X \ \ \sqrt{d}\eta \mathrm{Id}_d\big] \in \mathbb{R}^{d \times (\ell+d)}.$$

那么，利用 $P = X(B_1^\ell)$,

$$M(B_1^\ell \times B_1^d) = \{Xu + \sqrt{d}\eta v : \ \|u\|_1 \le 1, \ \|v\|_1 \le 1\} = P + \sqrt{d}\eta B_1^d.$$

此外，若 $(u, \ v) \in B_1^\ell \times B_1^d$，则 $\|(u, \ v)\|_1 = \|u\|_1 + \|v\|_1 \le 2$，因此 $(u, \ v) \in 2B_1^{\ell+d}$ 因此 e

$$B_1^\ell \times B_1^d \subset 2B_1^{\ell+d} \quad \Longrightarrow \quad M(B_1^\ell \times B_1^d) \subset 2M(B_1^{\ell+d}).$$

结合上述包含关系可得

$$\rho(P + \eta B_2^d) \subset \rho\big(P + \sqrt{d}\eta B_1^d\big) = \rho M(B_1^\ell \times B_1^d) \subset 2\rho M(B_1^{\ell+d}).$$

因此

$$\rho(P + \eta B_2^d) \subset 2\rho M(B_1^{\ell+d}).$$

若 $\mathrm{rank}(M) < d$，则 $M(B_1^{\ell+d})$ 包含于 $\mathbb{R}^d$ 的某个真子空间中，因此其高斯测度为 0，且 (4.1) 显然成立。假设 $\mathrm{rank}(M) = d$。

将推论 A.8 应用于 M（其中 $N = \ell + d$）。由此可得

$$M(B_1^{\ell+d}) \subset \bigcup_{J \subset [\ell+d], |J| \le d, \mathrm{rank}(M_J) = |J|} \mathrm{conv}\{\pm Me_j : j \in J\}.$$

固定这样一个集合 J。任取满足 $J \subset I$ 和 $|I| = d$ 的 $I \subset [\ell + d]$。由单调性,

$$\mathrm{conv}\{\pm Me_j : j \in J\} \subset \mathrm{conv}\{\pm Me_i : i \in I\}.$$

因此，

$$M(B_1^{\ell+d}) \subset \bigcup_{I\subset[\ell+d],|I|=d} \operatorname{conv}\{\pm Me_i : i\in I\}.$$

取高 斯测度，利用并集界，并回顾 $\rho(P+\eta B_2^d) \subset 2\rho M(B_1^{\ell+d})$，我们得 t

$$\gamma_d\big(\rho(P+\eta B_2^d)\big) \le \gamma_d\big(2\rho M(B_1^{\ell+d})\big) \le \sum_{I\subset[\ell+d],|I|=d} \gamma_d\Big(2\rho\operatorname{conv}\{\pm Me_i : i\in I\}\Big).$$

每个集合凸包$\{\pm Me_i :\ i\in I\}$ 是一个由范数至多 t

$$\max\Big\{\max_{i\le\ell}\|x_i\|_2, \max_{j\le d}\|\sqrt{d}\eta e_j\|_2\Big\} = \max\{R,\sqrt{d}\eta\} \le R+\eta\sqrt{d}.$$

应用引理 A.10（将因子 2 吸收进 C）可得，对 I一致地，

$$\gamma_d\Big(2\rho\operatorname{conv}\{\pm Me_i : i\in I\}\Big) \le \Big(\frac{C\rho(R+\eta\sqrt{d})}{d}\Big)^d.$$

共有 $\binom{\ell+d}{d}$ 种对 I 的选取，因此求和即得 (4.1)。 □

4.2. **Maurey 稀疏化与并集包含**。 在本节中，若 H 是一个希尔伯特空间，其范数 $\|\cdot\|_2$ 由内积诱导，则记作

$$B_2^H := \{h\in H : \|h\|_2 \le 1\}.$$

我们使用以下 Maurey 型稀疏化引理（例如参见 [13,Expos´e 5]）。

引理 4.2 （希尔伯特空间中的 Maurey 引理）。 设 $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个希尔伯特空间，并设 $x_1,\dots,x_N\in H$满足 $\|x_i\|_2\le L$。令 $t\in\mathbb{N}$，并设 $r_0 := L/\sqrt{t}$。那么，对每个 $y\in$凸包$\{\pm x_1,\dots,\pm x_N\}$，都存在一个子集 $S\subset[N]$，使得 $|S|\le t$，并且

$$\operatorname{dist}\big(y,\operatorname{conv}\{\pm x_i : i\in S\}\big) \le r_0.$$

证明。 若 $y=0$，任取一个指标 $i_0\in[N]$，并令 $S=\{i_0\}$。由于 $0\in$凸包$\{\pm x_{i_0}\}$，我们有 dist(y，凸包$\{\pm x_i :$ $i\in S\}$) $=0\le r_0$。因此，不妨设 $y\ne 0$。固定一个表示式 $y=\sum_{i=1}^N a_i x_i$，满足 $\sum_{i=1}^N|a_i|\le 1$（根据绝对凸包的定义，这是可行的）。令 σ_i :=sgn(a_i)（其中 sgn(0) := 0），并定义一个取值于 H 的随机向量 ξ，使得

$$\mathbb{P}(\xi=\sigma_i x_i)=|a_i| \quad (i\in[N]), \quad \mathbb{P}(\xi=0)=1-\sum_{i=1}^N|a_i|.$$

那么 $\mathbb{E}\xi=\sum_i a_i x_i = y$ 和 $\|\xi\|_2\le L$ 几乎处处成立。

设 $\xi_1,\dots,\xi_t$为 ξ的独立同分布副本，并令

$$Z := \frac{1}{t}\sum_{\ell=1}^t \xi_\ell.$$

令 $S\subset[N]$ 为满足以下条件的指标集合 i ：至少存在一个 ℓ使得 $\xi_\ell\in\{\pm x_i\}$ ；则 $|S|\le t$。此外，$Z\in$凸包$\{\pm x_i :\ i\in S\}$，因为 Z 是由 $\{\pm x_i\}\cup\{0\}$中的 t 个带符号原子取平均得到的。

由于 H 是希尔伯特空间，

$$\mathbb{E}\|Z-y\|_2^2 = \mathbb{E}\Big\|\frac{1}{t}\sum_{\ell=1}^t(\xi_\ell-\mathbb{E}\xi)\Big\|_2^2 = \frac{1}{t}\mathbb{E}\|\xi-\mathbb{E}\xi\|_2^2 \le \frac{1}{t}\mathbb{E}\|\xi\|_2^2 \le \frac{L^2}{t}.$$

因此 $\mathbb{E}\|Z-y\|_2 \le \sqrt{\mathbb{E}\|Z-y\|_2^2} \le L/\sqrt{t} = r_0$。故存在一个结果使得 $\|Z-y\|_2\le r_0$。对于该结果， $Z\in$凸包$\{\pm x_i :\ i\in S\}$，其中 $|S|\le t$，因此 dist(y,凸包$\{\pm x_i :\ i\in S\}$) $\le r_0$。 □

引理 4.3 (Maurey 之后的并集包含)。 设 H 为希尔伯特空间，且 $\{x_i\}_{i=1}^n\subset H$ 满足 $\|x_i\|_2\le L$。固定整数 $1\le t\le k\le n$，并令 $r_0 := L/\sqrt{t}$。对每个 $I\subset[n]$，定义 $Q_I := $凸包$\{\pm x_i :\ i\in I\}$。则

$$\bigcup_{I\subset[n],|I|=k} Q_I \subset \bigcup_{S\subset[n],|S|=t} \big(Q_S + r_0 B_2^H\big).$$

证明。固定 $I \subset [n]$，满足 $|I| = k$ 和 $y \in Q_I$。将引理 4.2 应用于族 $\{x_i : i \in I\}$，得到 $S \subset I$，满足 $|S| \le t$，且 $\mathrm{dist}(y, Q_S) \le r_0$。若 $|S| < t$，则将 S 扩大为某个 $S' \subset I$，使得 $|S'| = t$；由单调性 $Q_S \subset Q_{S'}$，因此仍有 $\mathrm{dist}(y, Q_{S'}) \le r_0$。于是 $y \in Q_{S'} + r_0 B_2^H$，其中 $|S'| = t$，如所述。□

4.3. 并集界。 本节中，我们控制

$$p_k(A;\omega) = \gamma_n\big(4\rho \mathcal{P}^{(k)}(A;\omega)\big) \quad (k \text{ large}),$$

在定义 2.9 中的全局事件 $\mathcal{E}^{(U)}$ 下。论证包括：

(1) 对选定的 K 生成向量的张成空间取商；(2) 在商空间中应用 Maurey 型稀疏化，并重新选择

$$t = t(k) \asymp \frac{k}{\log(n\rho)};$$

(3) 使用加厚稳定估计（引理 4.1）界定所得欧几里得加厚的高斯测度。

4.4. 商空间记账。 对于任意欧几里得子空间 $H \subset \mathbb{R}^n$，我们记

$$B_2^H := \{h \in H : \|h\|_2 \le 1\}, \quad \gamma_H := \mathcal{L}(\pi_H G) \quad \text{for } G \sim N(0, \mathrm{Id}_n),$$

其中 π_H 表示到 H上的正交投影。

引理 4.4 (子空间内的维数约化)。 设 $H \subset \mathbb{R}^n$ 是一个线性子空间，且 维数$(H) \ge k$，并设 $Q \subset H$ 可测。假设 维数 (张成空间 (Q)) $\le k$。那么存在一个 k 维子空间 $\sim H \subset H$，满足 张成空间 $(Q) \subset H$，使得对所有 $\eta \ge 0$,

$$\gamma_H\big(Q + \eta B_2^H\big) \le \gamma_{\widetilde{H}}\big(Q + \eta B_2^{\widetilde{H}}\big).$$

特别 地，通过等距映射 Φ 来识别 $\widetilde{H} \simeq \mathbb{R}^k$，右侧等于 $\gamma_k\big(\Phi(Q) + \eta B_2^k\big)$。

证明。令 $E :=$ 张成空间$(Q) \subset H$，则维数$(E) \le k$。由于维数$(H) \ge k$，我们可以选取一个 k 维子空间 $\sim H \subset H$，满足 $E \subset H$。

令 $\widetilde{H}$，我们有 $\sim \to \widetilde{H}$ 是希尔伯特空间 H 中的正交投影。由于 $Q \subset E \subset \sim$ 有 $\pi_{\widetilde{H}}(Q) = Q$。此外 $\pi_{\widetilde{H}}(B_2^H) = B_2^H$：事实上，投影不会增大范数，因此 $\pi_{\widetilde{H}}(B_2^H) \subset B_2^H$；反过来，若 $z \in B_2^H$，则 $z \in H$，其中 $\|z\|_2 \le 1$ 且 $\pi_{\widetilde{H}}(z) = z$。

因此，对每个 $\eta \ge 0$,

$$\pi_{\widetilde{H}}\big(Q + \eta B_2^H\big) = \pi_{\widetilde{H}}(Q) + \eta \pi_{\widetilde{H}}(B_2^H) = Q + \eta B_2^{\widetilde{H}}.$$

设 Z 是 H 中的标准高斯向量（即服从分布 γ_H）。那么 $\pi_{\widetilde{H}} Z$ 是 $\sim H$ 中的标准高斯向量（即服从分布 $\gamma_{\widetilde{H}}$），并且

$$\{Z \in Q + \eta B_2^H\} \subset \{\pi_{\widetilde{H}} Z \in \pi_{\widetilde{H}}(Q + \eta B_2^H)\} = \{\pi_{\widetilde{H}} Z \in Q + \eta B_2^{\widetilde{H}}\}.$$

取概率可得

$$\gamma_H(Q + \eta B_2^H) \le \gamma_{\widetilde{H}}(Q + \eta B_2^{\widetilde{H}}),$$

如所声称。最后，通过应用等距映射 Φ: $\widetilde{H} \to \mathbb{R}^k$，即可得到与 γ_k 的对应关系。 □

4.5. 大尺度情形下 p_k 的并集界。 固定 $k \in \{0, 1, \dots, n\}$。任何满足 $|I| = n$ 且$|I \cap (n + [n])| = k$ 的 $I \subset [2n]$ 都可以唯一地写成

$$I = I_1 \cup (n + I_2), \quad I_1 \subset [n], |I_1| = n - k, \quad I_2 \subset [n], |I_2| = k.$$

我们记作 $\mathcal{P}_{I_1,\ I_2}(A;\omega) := \mathcal{P}_{I_1 \cup (n+I_2)}(A;\omega)$。

命题 4.5 (大-U 范围：并集测度界)。 假设 $\mathcal{E}^{(U)}$ 成立。固定 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$ 以及由此诱导的暴露面 $\omega = \Gamma_{S(A)}$。令 $k \in \{1, \dots, n\}$ 并设

$$\Lambda := \log(n\rho), \quad t = t(k) := \left\lceil \frac{k}{\Lambda} \right\rceil, \quad r_0 := \frac{L}{\sqrt{t}}, \tag{4.2}$$

其中 L如(2.22)所示。则

$$p_k(A;\omega) := \gamma_n\Big(4\rho\mathcal{P}^{(k)}(A;\omega)\Big)$$

满足

$$p_k(A;\omega) \le \binom{n}{k}\binom{n}{t}\binom{t+k}{k}\Big(\frac{C\rho(L+\sqrt{k}r_0)}{k}\Big)^k, \tag{4.3}$$

对于某个普适常数 $C>0$。

Mo此外，由于 $t \ge k/\Lambda$，有 $\sqrt{k}r_0^{-} \le L\sqrt{\Lambda};^{-}$因此（对于 $n\ge 3$ 和 $\rho \ge 1$，使得 $\Lambda \ge 1$）

$$L+\sqrt{k}r_0 \le CL\sqrt{\log(n\rho)}.$$

因此，利用 $\binom{n}{k} \le (en/k)^k$ 并吸收常数，

$$p_k(A;\omega) \le \binom{n}{t}\binom{t+k}{k}\Big(\frac{C\rho Ln\sqrt{\log(n\rho)}}{k^2}\Big)^k. \tag{4.4}$$

证明。取定 $I_1 \subset [n]$，满足 $|I_1| = n-k$，并定义

$$V := \operatorname{span}\{v_i : i \in I_1\} \subset \mathbb{R}^n, \quad H := V^{\perp}.$$

于是 $\dim(H) \ge k$，因为 $\dim(V) \le n-k$。

对每个 $i\in[n]$ 集合 $\tilde{u}_i := \pi_H(u_i) \in H$ 以及 $J\subset[n]$，定义

$$Q_J := \operatorname{conv}\{\pm\tilde{u}_i : i\in J\} \subset H.$$

Sin对所有 $i\in I_1$，有 $\pi_H(v_i)=0$，引理 A.12 表明，对每个满足 $|I_2|=k$ 的 $I_2\subset[n]$，

$$\pi_H\big(\mathcal{P}_{I_1,I_2}(A;\omega)\big) = \operatorname{conv}\Big(\{\pm\pi_H(v_i): i\in I_1\}\cup\{\pm\pi_H(u_i): i\in I_2\}\Big) = \operatorname{conv}\{\pm\tilde{u}_i : i\in I_2\} = Q_{I_2}.$$

因此，由引理 A.11，

$$\gamma_n\Big(4\rho\bigcup_{|I_2|=k}\mathcal{P}_{I_1,I_2}(A;\omega)\Big) \le \gamma_H\Big(4\rho\bigcup_{|I_2|=k}Q_{I_2}\Big). \tag{4.5}$$

在 $\mathcal{E}^{(U)}$ 上，(2.24) 给出对所有 i 都有 $\|u_i\|_2\le L$，因此 $\|\tilde{u}_i\|_2\le L$。在希尔伯特空间 H 中应用引理 4.3，参数取为 $(k,\ t)$，得到

$$\bigcup_{|I_2|=k}Q_{I_2} \subset \bigcup_{|S|=t}\big(Q_S + r_0B_2^H\big), \quad r_0 = \frac{L}{\sqrt{t}}.$$

取高斯测度并使用并集界，得到

$$\gamma_H\Big(4\rho\bigcup_{|I_2|=k}Q_{I_2}\Big) \le \binom{n}{t}\max_{|S|=t}\gamma_H\big(4\rho(Q_S+r_0B_2^H)\big). \tag{4.6}$$

$^{\sim}$固定满足 $|S|=t$ 的 $S\subset[n]$。则 $\dim(\operatorname{span}(Q_S)) \le t \le k$。选取一个包含 $\operatorname{span}(Q_S)$ 的 k 维子空间 $H\subset H$，并应用引理 4.4：

$$\gamma_H\big(4\rho(Q_S+r_0B_2^H)\big) \le \gamma_{\widetilde{H}}\big(4\rho(Q_S+r_0B_2^{\widetilde{H}})\big).$$

通过等距映射识别 $\widetilde{H}\simeq\mathbb{R}^k$。在维数为 k、$\ell=t$ 且加厚半径为 $\eta=r_0$ 的条件下应用引理 4.1。由于 Q_S 的所有生成向量的欧几里得范数均不超过 L，我们得到

$$\gamma_{\widetilde{H}}\big(4\rho(Q_S+r_0B_2^{\widetilde{H}})\big) \le \binom{t+k}{k}\Big(\frac{C\rho(L+\sqrt{k}r_0)}{k}\Big)^k,$$

将因子 4 吸收到普适常数 C 中。

将此代入 (4.6)，再代入 (4.5)。对于固定的 I_1，我们得到

$$\gamma_n\Big(4\rho\bigcup_{|I_2|=k}\mathcal{P}_{I_1,I_2}(A;\omega)\Big) \le \binom{n}{t}\binom{t+k}{k}\Big(\frac{C\rho(L+\sqrt{k}r_0)}{k}\Big)^k.$$

最后，对所有满足 $|I_1| = n-k$ 的 $I_1 \subset [n]$ 取并集（共有 $\binom{n}{k}$ 种选择），并应用并集界：

$$p_k(A;\omega) = \gamma_n\Big(4\rho\mathcal{P}^{(k)}(A;\omega)\Big) \le \binom{n}{k}\binom{n}{t}\binom{t+k}{k}\Big(\frac{C\rho(L+\sqrt{k}r_0)}{k}\Big)^k,$$

即为 (4.3)。

对于 (4.4)，首先注意到 $t = \lceil k/\Lambda \rceil$ 推出 $t \ge k/\Lambda$，因此 $k/t \le \Lambda$。于是

$$\sqrt{k}r_0 = \sqrt{k}\frac{L}{\sqrt{t}} = L\sqrt{\frac{k}{t}} \le L\sqrt{\Lambda}.$$

假设 $n \ge 3$ 和 $\rho \ge 1$，得到 $\Lambda = \log(n\rho) \ge \log 3 > 1$，因此 $1+\sqrt{\Lambda} \le 2\sqrt{\Lambda}$ 并且

$$L + \sqrt{k}r_0 \le L(1+\sqrt{\Lambda}) \le 2L\sqrt{\Lambda} = 2L\sqrt{\log(n\rho)}.$$

此外 $\binom{n}{k} \le (en/k)^k$。因此

$$\binom{n}{k}\Big(\frac{C\rho(L+\sqrt{k}r_0)}{k}\Big)^k \le \Big(\frac{en}{k}\cdot\frac{C\rho\cdot 2L\sqrt{\log(n\rho)}}{k}\Big)^k = \Big(\frac{C\rho Ln\sqrt{\log(n\rho)}}{k^2}\Big)^k,$$

调整 C后，将其代入 (4.3) 即得 (4.4)。 □

引理 4.6 ($\binom{n}{t\ k\ ()}$)（熵界）。假设 $n \ge 3$, $\rho \ge 1$，并令 $\Lambda := \log(n\rho) \ge 1$。令 k 满足$\Lambda \le k \le n$ 并定义

$$t(k) := \left\lceil \frac{k}{\Lambda} \right\rceil.$$

Then

$$\binom{n}{t(k)} \le \exp(C_1 k)$$

对于某个通用常数 $C_1 > 0$。

证明。令 $t := t(k)$。由于 $k \ge \Lambda$，我们有 $k/\Lambda \ge 1$，因此

$$t = \left\lceil \frac{k}{\Lambda} \right\rceil \le \frac{k}{\Lambda} + 1 \le \frac{2k}{\Lambda}.$$

利用平凡界 $\binom{n}{t} \le (en/t)^t \le (en)^t$，得到

$$\binom{n}{t} \le \exp\big(t\log(en)\big).$$

接下来，由于 $\rho \ge 1$，我们有 $\log n \le \log(n\rho) = \Lambda$，因此

$$\log(en) = \log n + 1 \le \Lambda + 1 \le 2\Lambda,$$

因为 $\Lambda \ge 1$。因此

$$t\log(en) \le \frac{2k}{\Lambda}\cdot 2\Lambda = 4k,$$

于是 $\binom{n}{t} \le e^{4k}$。取 $C_1 = 4$ 即可得到所需结论。 □

5. Completion of the proof and optimization

5.1. **参数选择与 $4/7$ 指数**。取 $C \ge 1$ 和 $c_0 \in (0,1]$。定义

$$\rho = \rho(n) := c_0 n^{4/7}(\log n)^{-C}.$$

注意，存在 $n_0 = n_0(C,\ c_0)$，使得对所有 $n \ge n_0$，都有 $\rho \ge 1$，并且

$$\log n \le \log(n\rho) \le 2\log n. \tag{5.1}$$

引理 5.1 (参数约束的验证**)**。固定约束中出现的绝对常数：

- $c_{\text{支撑}}$ $c_{\text{衰减}} > 0$ 来自引理 *3.4*；
- $C_\star > 0$ 来自定义 *3.5*；
- 引理 *3.6* 中的绝对常数 $C_{\text{EK}} > 0$ （用于 (3.10)）；

• 命题 *4.5* 中的绝对常数 $C_{\mathrm{U}} > 0$ （即 (4.4) 中的通用常数 C，因此也适用于 (5.7)）；
• 常数 $C_0 > 0$ （在 L 中，见(2.22)）和 $C_1 > 0$ （见引理 *4.6*）。任选 $C \geq 2$ 和任意 $c_0 \in (0, 1],$，并按上述方式定义 ρ。令

$$\Lambda := \log(n\rho).$$

Let

$$\tilde{s} := \left\lceil n^{6/7}\Lambda^{2/7} \right\rceil, \quad r := \left\lceil C_2 \tilde{s}\Lambda \right\rceil, \quad s := \left\lfloor \frac{\tilde{s}^2}{C_3 n\Lambda} \right\rfloor, \tag{5.2}$$

其中，C_2、$C_3 > 0$ 是按如下方式选取的绝对常数：

$$C_3 \geq C_{\mathrm{EK}}, \quad C_2 \geq \max\Big\{4, \frac{16}{c_{\mathrm{decay}}}\Big\}.$$

那么存在 n_1 和 $c_0^* \in (0, 1]$ （仅依赖于所列绝对常数），使得若 $c_0 \leq c_0^*$且 $n \geq n_1$，所有参数约束 (3.10)、(3.11)、(3.6)和 (5.7) 均成立，且另外

$$\tilde{s} \geq \Lambda. \tag{5.3}$$

证明。见附录 C □

设 Λ :=log($n\rho$)。在标准选择下

$$r \asymp \tilde{s}\Lambda \quad \text{and} \quad s \asymp \frac{\tilde{s}^2}{n\Lambda},$$

两种情形分别给出以下主导（多项式）约束：

(A) 小U （缩放）。缩放条件 (3.6) 在相差绝对常数因子的意义下变为，

$$\rho \lesssim \frac{n}{\sqrt{r}} \asymp \frac{n}{\sqrt{\tilde{s}\Lambda}}. \tag{5.4}$$

（*B*）大U （*Maurey* 与增厚尾部）。大-U 尾部条件 (5.7) 与选择 $s \asymp \tilde{s}^2/(n\Lambda)$ 一起意味着

$$L \asymp \sqrt{\frac{n}{s}\Lambda} \asymp \frac{n\Lambda}{\tilde{s}},$$

因此，(5.7) 等价于（同样相差绝对常数因子），

$$\rho \lesssim \frac{\tilde{s}^3}{n^2\Lambda^{3/2}}. \tag{5.5}$$

平衡。令 (5.4) 和 (5.5) 的右端相等，得到

$$\frac{n}{\sqrt{\tilde{s}\Lambda}} \asymp \frac{\tilde{s}^3}{n^2\Lambda^{3/2}} \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{s}^{7/2} \asymp n^3\Lambda.$$

因此，平衡后的选择为

$$\tilde{s} \asymp (n^3\Lambda)^{2/7} = n^{6/7}\Lambda^{2/7}. \tag{5.6}$$

将 (5.6) 代入 (5.4) 得到

$$\rho \asymp \frac{n}{\sqrt{\tilde{s}\Lambda}} = \frac{n}{\sqrt{n^{6/7}\Lambda^{2/7} \cdot \Lambda}} = n^{4/7}\Lambda^{-9/14}.$$

最后，由 (5.1) 可得 $\Lambda = \log(n\rho) \asymp \log n$ （对多项式 ρ 而言），因此均衡尺度可写为

$$\tilde{s} \asymp n^{6/7}(\log n)^{2/7}, \quad \rho \asymp n^{4/7}(\log n)^{-9/14},$$

相差通用常数以及额外的（无伤大雅的）对数级松弛。

备注 5.2（对数项的核算）。本节中的启发式优化表明，更具体的尺度为 $\rho \asymp n^{4/7}\Lambda^{-9/14}$，其中有 $\Lambda = \log(n\rho)$。在定理 1.2 中，我们允许任意的 $(\log n)^{-C}$ 损失，以避免在多个嵌套并集界中（尤其是在离散化网和一致倾斜事件中）以及在诸如 $\tilde{s} \geq \log^2 n$ 这样的辅助约束中，逐一追踪显式的对数指数。更系统地追踪这些对数项，应能在最终表述中得到 $\log n$ 的明确幂次，但需要付出额外核算的代价。

5.2. **定理 T 的证明** **理 1.2.** 我们还将使用以下大-U 尺度条件（参见引理 5.1）：

$$\frac{C_{\mathrm{U}}\rho L n\sqrt{\Lambda}}{\tilde{s}^2} \le \frac{1}{4e^{2C_1+1}}, \tag{5.7}$$

其中 $\Lambda := \log(n\rho)$， L 如 (2.22) 中所述， C_1 是引理 4.6 中的常数， $C_{\mathrm{U}} > 0$ 是 (4.4) 中隐含的绝对常数。

定理 *1.2* 的证明。 固定引理 3.4 和 A.10、引理 3.6、命题 4.5 以及引理 4.6 中的绝对常数，并选取 $C \ge 2$ 和 $c_0 \in (0,1]$。令

$$m := n^3, \quad \rho := c_0 n^{4/7}(\log n)^{-C}, \quad \Lambda := \log(n\rho), \quad \varepsilon := \frac{1}{\rho n^2}.$$

由 (5.1)，当 $n \ge n_0(C, c_0)$ 时，有 $\rho \ge 1$，且 $\log n \le \Lambda \le 2\log n$。

按 (5.2) 选取参数 $(\tilde{s}, r, s)$。由引理 5.1，若 $c_0 \le c_0^*$ 且 $n \ge n_1$，则约束 (3.10)、(3.11)、(3.6) 和 (5.7) 均成立，此外还有 $\tilde{s} \ge \Lambda$。

令 $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A}_{m,\,n}(\varepsilon)$ 为引理 2.2 中的离散化网。回忆一下， $\varepsilon\rho n^2 = 1$，因此假设 (2.3) 得到满足。由引理 2.2 和 (2.6)，

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_\rho) \le \mathbb{P}\Big(\exists A \in \mathcal{A}_\varepsilon : \quad G_m \subset 2\rho\Gamma A(B_1^n)\Big). \tag{5.8}$$

定义“良好”事件

$$\mathcal{G} := \mathcal{E}^{(U)} \cap \mathcal{E}^{(K)}(r, \tilde{s}).$$

由引理 2.10 和引理 3.6，

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}^c) \le \exp\big(-cn\log(n\rho)\big) + \frac{1}{n}. \tag{5.9}$$

步骤 *1*：关于 $\gamma_n(\mathcal{K}_A)$ 在 $\mathcal{G}$ 上的一致上界。 固定 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$，并令 $\omega = \Gamma_{S(A)}$ 为暴露实现。回忆 (2.11) 中的 $\mathcal{K}_A(\rho;\omega)$。由引理 2.5，

$$\gamma_n\big(\mathcal{K}_A(\rho;\omega)\big) \le p(A;\omega) \le \sum_{k=0}^{n} p_k(A;\omega), \quad p_k(A;\omega) := \gamma_n\big(4\rho\mathcal{P}^{(k)}(A;\omega)\big).$$

在事件 $\mathcal{E}^{(K)}(r,\ \tilde{s})$ 上，命题 3.7 和约束 (3.6)–(3.11) 得出

$$\sum_{k=0}^{\tilde{s}} p_k(A;\omega) \le \frac{1}{4}. \tag{5.10}$$

在事件 $\mathcal{E}^{(U)}$ 上，命题 4.5 给出了对每个 $k \in \{1,\dots,n\}$ 都成立的界 (4.4)。固定 $k \in \{\tilde{s}+1,\dots,n\}$。由于 $\tilde{s} \ge \Lambda$，我们有 $k \ge \Lambda$，且引理 4.6 适用，从而得到

$$\binom{n}{t(k)} \le \exp(C_1 k), \quad t(k) = \Big\lceil \frac{k}{\Lambda} \Big\rceil \le k.$$

此外，由于 $t(k) = \lceil k/\Lambda \rceil \le k$，我们有

$$\binom{t(k)+k}{k} \le 2^{t(k)+k} \le 2^{2k} = 4^k = e^{k\log 4} \le e^{2k}.$$

因此，由 (4.4) 和引理 4.6 可得

$$p_k(A;\omega) \le \binom{n}{t(k)}\binom{t(k)+k}{k}\Big(\frac{C_{\mathrm{U}}\rho L n\sqrt{\Lambda}}{k^2}\Big)^k \le e^{C_1 k}\cdot e^{2k}\Big(\frac{C_{\mathrm{U}}\rho L n\sqrt{\Lambda}}{k^2}\Big)^k = e^{(C_1+2)k}\Big(\frac{C_{\mathrm{U}}\rho L n\sqrt{\Lambda}}{k^2}\Big)^k.$$

由于 $k \ge \tilde{s}+1$，我们有 $k^2 \ge \tilde{s}^2$，因此

$$p_k(A;\omega) \le e^{(C_1+2)k}\Big(\frac{C_{\mathrm{U}}\rho L n\sqrt{\Lambda}}{\tilde{s}^2}\Big)^k.$$

利用 (5.7)，我们得到

$$\frac{C_{\mathrm{U}}\rho L n\sqrt{\Lambda}}{\tilde{s}^2} \le \frac{1}{4e^{2C_1+1}},$$

因此

$$p_k(A;\omega) \le \Big(\frac{e^{C_1+2}}{4e^{2C_1+1}}\Big)^k = \Big(\frac{e^{1-C_1}}{4}\Big)^k \le \Big(\frac{1}{4}\Big)^k \quad \text{since } C_1 \ge 1.$$

利用 (5.7) 和 $C_1 \ge 1$，我们得到 $p_k(A;\omega) \le (1/4)^k$，因此

$$\sum_{k=\tilde{s}+1}^{n} p_k(A;\omega) \le \sum_{k=\tilde{s}+1}^{\infty} \Big(\frac{1}{4}\Big)^k \le \frac{1}{4}. \tag{5.11}$$

结合 (5.10) 和 (5.11) 可得

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(A;\omega) = \sum_{k=0}^{\tilde{s}} p_k(A;\omega) + \sum_{k=\tilde{s}+1}^{n} p_k(A;\omega) \le \frac{1}{2},$$

因此

$$\gamma_n\big(\mathcal{K}_A(\rho;\omega)\big) \le \frac{1}{2}.$$

在事件 $\mathcal{G}$ 上，对所有 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$ 都一致成立。

Step 2：幂化优于离散化网。对每个 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$ 定义暴露事件

$$\mathcal{G}_A := \Big\{\gamma_n\big(\mathcal{K}_A(\rho;\Gamma_{S(A)})\big) \le \frac{1}{2}\Big\}.$$

由于 $\mathcal{K}_A(\rho;\Gamma_{S(A)})$ 仅依赖于 $\Gamma_{S(A)}$，事件 $\mathcal{G}_A$ 是 $\mathcal{F}_A$-可测的。此外，步骤 1 表明，在$\mathcal{G}$ 上有 $\mathcal{G} \subset \bigcap_{A\in\mathcal{A}_\varepsilon} \mathcal{G}_A$。

固定 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$。由引理 2.4 和 (2.14)，

$$\mathbb{P}\Big(G_m \subset 2\rho\Gamma A(B_1^n)\Big|\mathcal{F}_A\Big) \le \gamma_n\big(\mathcal{K}_A(\rho;\Gamma_{S(A)})\big)^{N(A)}.$$

因此，

$$\mathbb{P}\Big(\big\{G_m \subset 2\rho\Gamma A(B_1^n)\big\} \cap \mathcal{G}_A\Big) = \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\mathcal{G}_A}\mathbb{P}\big(G_m \subset 2\rho\Gamma A(B_1^n) \mid \mathcal{F}_A\big)\Big] \le \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\mathcal{G}_A}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{N(A)}\Big] \le 2^{-N(A)}.$$

由于 $|S(A)| \le n^2$ 由 (2.9) 和 $m = n^3$ 可得，因此有 $N(A) = m - |S(A)| \ge n^3 - n^2$，故

$$\mathbb{P}\Big(\big\{G_m \subset 2\rho\Gamma A(B_1^n)\big\} \cap \mathcal{G}_A\Big) \le 2^{-(n^3-n^2)}.$$

对 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$ 取并集界可得

$$\mathbb{P}\Big(\exists A \in \mathcal{A}_\varepsilon : G_m \subset 2\rho\Gamma A(B_1^n) \text{ and } \mathcal{G}\Big) \le \mathbb{P}\Big(\exists A \in \mathcal{A}_\varepsilon : G_m \subset 2\rho\Gamma A(B_1^n) \text{ and } \mathcal{G}_A\Big) \le |\mathcal{A}_\varepsilon| 2^{-(n^3-n^2)}. \tag{5.12}$$

由 (2.5)，$\log|\mathcal{A}_\varepsilon| \le Cn^2\log(n\rho) = o(n^3)$，因此对所有充分大的 n，(5.12) 右端至多为 $\exp(-c'n^3)$。

第 3 步：得出结论。结合 (5.8)、(5.12) 和 (5.9)，对所有充分大的 n，有

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_\rho) \le \mathbb{P}(\mathcal{G}^c) + \mathbb{P}\Big(\exists A \in \mathcal{A}_\varepsilon : G_m \subset 2\rho\Gamma A(B_1^n) \text{ and } \mathcal{G}\Big) \le \frac{1}{n} + \exp\big(-cn\log(n\rho)\big) + \exp(-c'n^3) \le \frac{2}{n}.$$

由于 $\mathcal{E}_\rho = \{d_{\mathrm{BM}}(G_m, B_1^n) \le \rho\}$ 由 (2.1)，我们得到

$$\mathbb{P}\Big\{d_{\mathrm{BM}}(G_m, B_1^n) \ge \rho\Big\} \ge 1 - \frac{2}{n}.$$

回顾 $\rho = c_0 n^{4/7}(\log n)^{-C}$，即可用 $c := c_0$ 证明该定理（必要时可将 c_0 绝对常数倍减小，并将C 绝对常数倍增大）。□

Appendix A. Standard auxiliary results

A.1. 初等凸性与组合学。

引理 A.1（交叉多胞体作为线性像及 B_1^d的体积）。 设 $d \in \mathbb{N}$ 并设 y_1，……， $y_d \in \mathbb{R}^d$。设 $Y = [y_1 \cdots y_d] \in \mathbb{R}^{d\times d}$。则

$$\operatorname{conv}\{\pm y_1, \ldots, \pm y_d\} = Y(B_1^d).$$

此外，

$$\operatorname{vol}_d(B_1^d) = \frac{2^d}{d!}.$$

证明。 对于第一个断言，回忆

$$\operatorname{conv}\{\pm y_1, \ldots, \pm y_d\} = \Big\{\sum_{i=1}^d a_i y_i : \sum_{i=1}^d |a_i| \le 1\Big\}.$$

由于 $Ya = \sum_{i=1}^d a_i y_i$， 右侧等于 $\{Ya : \ \|a\|_1 \le 1\} = Y(B_1^d)$。

对于体积公式，注意 $B_1^d =$凸包$\{\pm e_1, \ldots, \pm e_d\}$，其中 (e_i) 是标准基。对于每个符号向量 $\sigma \in \{\pm 1\}^d$，定义单纯形

$$\Delta_\sigma := \operatorname{conv}\{0, \sigma_1 e_1, \ldots, \sigma_d e_d\}.$$

于是 $B_1^d = \bigcup_{\sigma\in\{\pm1\}^d} \Delta_\sigma$，并且这些单形的内部两两不相交。每个 Δ_σ 的体积均为 $1/d!$（其边向量构成一个幺模矩阵），因此

$$\operatorname{vol}_d(B_1^d) = 2^d \cdot \frac{1}{d!}.$$

□

引理 A.2（吸收一个小的闵可夫斯基项）。设 K、$L \subset \mathbb{R}^n$ 为关于原点中心对称的凸体，且 $\delta \in [0, 1)$。若

$$K \subset L + \delta K,$$

then

$$K \subset \frac{1}{1-\delta} L, \qquad \textit{equivalently} \quad (1-\delta)K \subset L.$$

证明。对于非空紧致凸集 $S \subset \mathbb{R}^n$，定义其支撑函数

$$h_S(u) := \sup_{x\in S} \langle u, x\rangle, \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

于是对所有 $\lambda \ge 0$，都有 $h_{S+T} = h_S + h_T$和 $h_{\lambda S} = \lambda h_S$。包含关系 $K \subset L + \delta K$ 蕴含

$$h_K \le h_{L+\delta K} = h_L + \delta h_K,$$

因此 $(1-\delta)h_K \le h_L$，即 $h_K \le \frac{1}{1-\delta} h_L = h_{\frac{1}{1-\delta}L}$。最后，对于紧致凸的 S，T，有 $S \subset T$当且仅当 $h_S \le h_T$（由哈恩–巴拿赫分离定理）。因此 $K \subset \frac{1}{1-\delta} L$。□

引理 A.3. 对于整数 $1 \le r \le n$,

$$\binom{n}{r} \le \Big(\frac{en}{r}\Big)^r.$$

证明。 根据 $r! \ \ge (r/e)^r$,

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} \le \frac{n^r}{(r/e)^r} = \Big(\frac{en}{r}\Big)^r.$$

□

A.2. **高斯集中与尾部。**

引理 A.4（利普希茨映射的高斯集中）。 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 关于$\|\cdot\|_2$是 1-利普希茨的，并设 $G\sim N(0,\mathrm{Id}_n)$。那么对任意 $t\ge 0$,

$$\mathbb{P}\{f(G)\ge \mathbb{E}f(G)+t\}\le \exp(-t^2/2).$$

证明。 这是高斯等周不等式（Borell 不等式）的标准推论。参见例如 [15, Chapter 2]或 [14]。□

引理 A.5（高斯范数尾部）。 存在通用常数 $c,C>0$，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$、所有$t\ge 0$以及 $G\sim N(0,\mathrm{Id}_n)$,

$$\mathbb{P}\{\|G\|_2\ge \sqrt{n}+t\}\le \exp(-ct^2),\quad \mathbb{P}\{\|G\|_2\ge C\sqrt{n+t}\}\le \exp(-ct).$$

证明。

第一个不等式。 函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x)=\|x\|_2$ 是 1-Lipschitz 的，因此由引理 A.4，对所有 $t\ge 0$,

$$\mathbb{P}\{f(G)\ge \mathbb{E}f(G)+t\}\le \exp(-t^2/2).$$

此外，由柯西–施瓦茨不等式， $\mathbb{E}\|G\|_2\le \sqrt{\mathbb{E}\|G\|_2^2}=\sqrt{n}$。因此,

$$\mathbb{P}\{\|G\|_2\ge \sqrt{n}+t\}\le \mathbb{P}\{\|G\|_2\ge \mathbb{E}\|G\|_2+t\}\le \exp(-t^2/2),$$

这给出了第一个不等式。

第二 个不等式。 令 $X:=\|G\|_2^2$ 使得 $X\sim\chi^2_n$。我们使用标准的上尾估计 :

断言 A.6（卡方分布上尾）。 对所有 $t\ge 0$,

$$\mathbb{P}\{X-n\ge 2\sqrt{nt}+2t\}\le \exp(-t).$$

断言 *A.6* 的证明。 设 $X=\sum_{i=1}^n Z_i^2$，其中 $Z_i\sim N$ 是 $(0,1)$ 上的独立同分布变量。对于 $\lambda\in\in(0,1/2)$,

$$\mathbb{E}e^{\lambda Z_1^2}=(1-2\lambda)^{-1/2},\quad\Rightarrow\quad \mathbb{E}e^{\lambda X}=(1-2\lambda)^{-n/2}.$$

因此

$$\log\mathbb{E}e^{\lambda(X-n)}=-\frac{n}{2}\log(1-2\lambda)-\lambda n.$$

利用 $-\log(1-u)\le u+\frac{u^2}{2(1-u)}$，对于 $u\in(0,1)$ 并代入 $u=2\lambda$，得到

$$\log\mathbb{E}e^{\lambda(X-n)}\le \frac{n\lambda^2}{1-2\lambda},\quad 0<\lambda<\frac{1}{2}.$$

由 Chernoff界，对于任意 $y\ge 0$,

$$\mathbb{P}\{X-n\ge y\}\le \exp\Big(-\lambda y+\frac{n\lambda^2}{1-2\lambda}\Big),\quad 0<\lambda<\frac{1}{2}.$$

固定 $t\ge 0$ 并设 $y:=2\sqrt{nt}+2t$。令 $\alpha:=\sqrt{t/n}$，并选取 $\lambda:=\frac{\alpha}{1+2\alpha}\in(0,1/2)$。于是 $1-2\lambda=\frac{1}{1+2\alpha}$，$\frac{n\lambda^2}{1-2\lambda}=\frac{t}{1+2\alpha}$，且

$$\lambda y=\frac{\alpha}{1+2\alpha}\cdot 2n\alpha(1+\alpha)=\frac{2t(1+\alpha)}{1+2\alpha}.$$

因此 $-\lambda y+\frac{n\lambda^2}{1-2\lambda}=-t$，断言得证。 □

注意，对所有 $t\ge 0$,

$$(\sqrt{n}+\sqrt{2t})^2-n=2t+2\sqrt{2nt}\ge 2t+2\sqrt{nt}.$$

因此 $\{\|G\|_2\ge\sqrt{n}+\sqrt{2t}\}\subset\{X-n\ge 2\sqrt{nt}+2t\}$，由该断言可得,

$$\mathbb{P}\{\|G\|_2\ge\sqrt{n}+\sqrt{2t}\}\le e^{-t}.$$

最后，$\sqrt{n}+\sqrt{2t}\le\sqrt{2}\sqrt{n+t}$ 由于 $(\sqrt{n}+\sqrt{2t})^2\le 4(n+t)$，因此

$$\mathbb{P}\{\|G\|_2\ge 2\sqrt{n+t}\}\le e^{-t}.$$

吸收常数后即可得到所述的第二个不等式。 □

A.3. ℓ_1**通过线性规划实现稀疏性**。下一个引理是一个标准的线性规划事实：可以选择一个ℓ_1-最小化解，使其具有稀疏性，且其支撑集对应的列线性无关。为完整起见，我们给出完整证明。

引理 A.7. 令 $M \in \mathbb{R}^{p\times N}$并设 $d := \text{秩}(M)$。固定 $y \in M(B_1^N)$并定义

$$\tau := \min\{\|x\|_1 : Mx = y\}.$$

于是 $\tau \le 1$，并且存在一个最小化解 $x^\star \in \mathbb{R}^N$ 使得

$$Mx^\star = y, \quad \|x^\star\|_1 = \tau, \quad |\operatorname{supp}(x^\star)| \le d,$$

此外，列 $\{Me_i : \ i \in \operatorname{supp}(x^\star)\}$ 线性无关，即

$$\operatorname{rank}(M_{\operatorname{supp}(x^\star)}) = |\operatorname{supp}(x^\star)|.$$

证明。由于 $y \in M(B_1^N)$，存在 $x^{(0)}$满足 $Mx^{(0)} = y$且 $\|x^{(0)}\|_1 \le 1$，因此 $\tau \le 1$。考虑多面体

$$\mathcal{P} := \{z \in \mathbb{R}^{2N} : Az = y, z \ge 0\}, \quad A := [M - M] \in \mathbb{R}^{p\times 2N}.$$

将 $x = u - v$写作 $u, v \ge 0$和 $z = (u, v)$。于是 $Az = y$且 $\mathbf{1}^\top z = \|u\|_1 + \|v\|_1$。可行集 $\mathcal{P}$非空，因为 $x^{(0)}$ 是可行的。此外，目标函数 $\mathbf{1}^\top z$ 在 $\mathcal{P}$上可取到最小值：事实上，次水平集$\{z \in \mathcal{P} : \ \mathbf{1}^\top z \le \mathbf{1}^\top z^{(0)}\}$ 是闭集，且有界，因为 $z \ge 0$ 和 $\sum_i z_i \le \mathbf{1}^\top z^{(0)}$ 推出对所有 i都有 $0 \le z_i \le \mathbf{1}^\top z^{(0)}$。因此该次水平集是紧致的，最小值可以取到。

令 $\mathcal{F} := \{z \in \mathcal{P} : \mathbf{1}^\top z = \tau\}$ 为非空的最小化解面，并固定一个极点 $z^\star \in \mathcal{F}$。记作$z^\star = (u^\star, \ v^\star)$，并令 $x^\star := u^\star - v^\star$。于是 $Mx^\star = y$且 $\mathbf{1}^\top z^\star = \tau$。

没有抵消。若 $u_i^\star > 0$且 $v_i^\star > 0$对某个 i成立，令 $t := \min\{u_i^\star, v_i^\star\} > 0$，并定义 $u' := u^\star - te_i, v' := v^\star - te_i$, $z' := (u', \ v')$。则 $z' \ge 0$, $Az' = Az^\star = y$，且 $\mathbf{1}^\top z' = \mathbf{1}^\top z^\star - 2t < \tau$，这与最小化解的极小性矛盾。因此，对所有 i, $u_i^\star v_i^\star = 0$，故

$$\|x^\star\|_1 = \|u^\star\|_1 + \|v^\star\|_1 = \mathbf{1}^\top z^\star = \tau.$$

支撑大小与无关性。设 $J := \operatorname{supp}(z^\star) = \{k : \ z_k^\star > 0\} \subset [2N]$。我们声称，$A$ 中由 J 索引的列线性无关。事实上，若它们线性相关，则存在一个支撑集包含于 J 且满足 $Ah = 0$的 $0 \ne h \in \mathbb{R}^{2N}$。取

$$0 < \eta < \min_{k\in J, h_k\ne 0} \frac{z_k^\star}{|h_k|}.$$

于是 $z^\star \pm \eta h \ge 0$ 和 $A(z^\star \pm \eta h) = Az^\star = y$，因此 $z^\star \pm \eta h \in \mathcal{P}$ 互不相同，且

$$z^\star = \frac{1}{2}(z^\star + \eta h) + \frac{1}{2}(z^\star - \eta h),$$

这与极值性矛盾。因此 A_J 具有满列秩，故

$$|J| \le \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(M) = d.$$

根据无抵消性质，对于每个 $i \in [N]$, i 和 $N + i$ 中至多一个属于 J。令 $I := \operatorname{supp}(x^\star) \subset [N]$。那么 $|I| = |J|$，并且列的多重集 $\{Ae_k : \ k \in J\}$ 等于 $\{\pm Me_i : \ i \in I\}$。将列乘以 -1 不会影响线性无关性，因此 $\operatorname{rank}(M_I) = |I|$。最后 $|I| = |J| \le d$。□

推论 A.8。设 $M \in \mathbb{R}^{p\times N}$ 的秩为 $d := \text{秩}(M)$。那么

$$M(B_1^N) \subset \bigcup_{I\subset[N], |I|\le d, \operatorname{rank}(M_I)=|I|} \operatorname{conv}\{\pm Me_i : i \in I\}.$$

证明。固定 $y \in M(B_1^N)$。根据引理 A.7，存在 $x^\star$，使得 $Mx^\star = y$、$\|x^\star\|_1 \le 1$，且 $I := \operatorname{supp}(x^\star)$ 满足 $|I| \le d$，并且 $\operatorname{rank}(M_I) = |I|$。写作 $y = \sum_{i\in I} x_i^\star Me_i$，其中 $\sum_{i\in I} |x_i^\star| = \|x^\star\|_1 \le 1$；因此 $y \in \operatorname{conv}\{\pm Me_i : \ i \in I\}$。□

A.4. **基本高斯体积界**。

引理 A.9 （通过体积得到高斯测度）。 对于任意可测的 $S \subset \mathbb{R}^d$,

$$\gamma_d(S) \le (2\pi)^{-d/2}\mathrm{vol}_d(S).$$

证明。 $\mathbb{R}^d$ 上的高斯密度满足 $(2\pi)^{-d/2}e^{-\|x\|_2^2/2} \le (2\pi)^{-d/2}$ ，对所有 x均成立。在 S 上积分即可得到结论。□

引理 A.10 （交叉多胞体的测度）。 设 $y_1, \dots, y_d \in \mathbb{R}^d$ 并令 $R := \max_{i\le d}\|y_i\|_2$。则对所有$\rho \ge 1$,

$$\gamma_d\Big(\rho\,\mathrm{conv}\{\pm y_1, \dots, \pm y_d\}\Big) \le \Big(\frac{C\rho R}{d}\Big)^d.$$

证明。 令 $Y = [y_1 \cdots y_d] \in \mathbb{R}^{d\times d}$。则 $\mathrm{conv}\{\pm y_i\} = Y(B_1^d)$，因此

$$\mathrm{vol}_d\big(\rho Y(B_1^d)\big) = \rho^d |\det Y| \mathrm{vol}_d(B_1^d).$$

根据Hadamard不等式， $|\det Y| \le \prod_{i=1}^d \|y_i\|_2 \le R^d$。此外， $\mathrm{vol}_d(B_1^d) = 2^d/d! \le (2e/d)^d$。应用引理A.9可得

$$\gamma_d\big(\rho Y(B_1^d)\big) \le (2\pi)^{-d/2}\rho^d R^d \frac{2^d}{d!} \le \Big(\frac{C\rho R}{d}\Big)^d,$$

取绝对值后 orbing 常数。（若 $\det Y = 0$ ，则左端为 0，该不等式是平凡的 l.） □

A.5. **投影事实**。

引理 A.11 （投影单调性）。 设 $H \subset \mathbb{R}^n$ 为线性子空间， π_H 为正交投影。则对每个可测集 $S \subset \mathbb{R}^n$,

$$\gamma_n(S) \le \gamma_H(\pi_H S).$$

证明。 设 $G \sim N(0,\ \mathrm{Id}_n)$。则由定义， $\pi_H G$服从分布 γ_H。此外， $\{G \in S\} \subset \{\pi_H G \in \pi_H S\}$。取概率得

$$\gamma_n(S) = \mathbb{P}\{G \in S\} \le \mathbb{P}\{\pi_H G \in \pi_H S\} = \gamma_H(\pi_H S).$$

□

引理 A.12 （绝对凸包的投影）。 设 H 为希尔伯特空间， $\pi:\ H \to H$ 为线性映射，且a_1，……， $a_N \in H$。则

$$\pi\left(\mathrm{conv}\{\pm a_1, \dots, \pm a_N\}\right) = \mathrm{conv}\{\pm\pi(a_1), \dots, \pm\pi(a_N)\}.$$

证明。 回顾标准表示

$$\mathrm{conv}\{\pm a_1, \dots, \pm a_N\} = \Big\{\sum_{i=1}^N \alpha_i a_i : \sum_{i=1}^N |\alpha_i| \le 1\Big\}.$$

应用线性映射 π 并利用线性性可得

$$\pi\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \pi(a_i),$$

并且满足关于（α_i）的相同 ℓ_1 约束。因此，其像恰好为

$$\Big\{\sum_{i=1}^N \alpha_i \pi(a_i) : \sum_{i=1}^N |\alpha_i| \le 1\Big\} = \mathrm{conv}\{\pm\pi(a_1), \dots, \pm\pi(a_N)\}.$$

□

Appendix B. Uniform suppression for the small-U regime

本附录包含小 U 区间中的概率一致化步骤，即引理 3.6 的证明。该论证采用计数与并集界方案，但比 [11] 的“所有置换”一致倾斜步骤更简单：它只使用引理 3.3 中的块尾估计，并对固定基数的子集取并集 J 。

B.1. 枚举可能的 K–系数子矩阵。 固定 $p \in \{n-\tilde{s},\dots,n\}$。令 $\mathcal{T}_p$ 为所有可能出现的 $m \times p$ 矩阵 B 的集合，其中每个矩阵都是从 $F_1(A)$ 中选取 p 列所构成的子矩阵，且适用于某个 $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$。

每个这样的列 $b \in \mathbb{R}^m$ 都满足

$$\|b\|_1 \le 1, \quad b \in (\varepsilon\mathbb{Z})^m, \quad |\operatorname{supp}(b)| \le s.$$

事实上，b 是 A 中一列的 K 部分，因此 $b \in (\varepsilon\mathbb{Z})^m$ 且 $\|b\|_1 \le 1$；此外，若 $b_j \neq 0$，则根据 K 部分的定义，$|b_j| \ge 1/s$，所以 $|\operatorname{supp}(b)| \le s$。特别地，$\|b\|_2 \le \|b\|_1 \le 1$。

我们断言，这样的列至多有 $\binom{Cm}{s\varepsilon}^s$ 个。为此，先选取一个大小为 ~~r~~ $\le s$ 的支撑集 $J \subset [m]$；可选的个数为

$$\sum_{r=0}^{s} \binom{m}{r} \le \Big(\frac{Cm}{s}\Big)^s,$$

对于固定的支撑集，每个受支撑坐标都属于 $\varepsilon\mathbb{Z} \cap [-1,1]$，因此至多有 C/ε 种可能，所以这些取值至多有 $(C/\varepsilon)^s$ 种选择。相乘即得所述结论。

因此，由于 B 有 p 列，

$$|\mathcal{T}_p| \le \Big(\frac{Cm}{s\varepsilon}\Big)^{sp}. \tag{B.1}$$

B.2. **引理 3.6 的证明。**

引理 3.6 的证明。 固定定义 3.5 中的绝对常数 $C_\star$。选择 $\tau_0 \ge 1$，使得 $\tau_0\sqrt{5/4} \le C_\star$，并且 τ_0 对于引理 3.3（其常数为 C）足够大。只需一次性将 $C_\star$ 取足够大，即可作出这样的选择。

固定 $p \in \{n-\tilde{s},\dots,n\}$ 和 $B \in \mathcal{T}_p$，使得 $\operatorname{rank}(B) = p$。对于每个满足 $|J| = r$ 的 $J \subset [p]$，应用引理 3.3，并取 $\tau = \tau_0$。由 $N = n - p + r$，我们有 $N \ge r$，并且根据 (3.10)，还有 $N \le (n-(n-\tilde{s})) + r = \tilde{s} + r \le \frac{5}{4}r$。因此，引理 3.3 的结论意味着：在事件 $\mathcal{E}_{B,J}$ 上，最后 r 个 Gram–Schmidt 距离中至少有 $r/2$ 个满足 $\le \tau_0\sqrt{N} \le \tau_0\sqrt{5r/4} \le C_\star\sqrt{r}$。于是 $\bigcap_{J:\,|J|=r} \mathcal{E}_{B,J}$ 恰好推出了针对该 B 以及所有 J 所需的 $C_\star\sqrt{r}$ 界。

由 (3.3) 和 $\binom{p}{r} \le \binom{n}{r}$，

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{J\subset[p],|J|=r} \mathcal{E}_{B,J}\Big) \ge 1 - \binom{n}{r}\exp\big(-c\tau_0^2 N r\big) \ge 1 - \binom{n}{r}\exp(-c'\tau_0^2 r^2).$$

利用 $\binom{n}{r} \le (en/r)^r \le n^r$ 并吸收常数，

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{J\subset[p],|J|=r} \mathcal{E}_{B,J}\Big) \ge 1 - \exp\big(r\log n - c''r^2\big).$$

对所有 $B \in \mathcal{T}_p$ 和 $p \in \{n-\tilde{s},\dots,n\}$ 应用并集界。利用 (B.1)、$m = n^3$ 和 $\varepsilon^{-1} = \rho n^2$，对于 $s \ge 1$，我们有

$$\log\Big(\frac{Cm}{s\varepsilon}\Big) = \log\Big(\frac{Cn^3}{s}\cdot\rho n^2\Big) \le C_0\log(n\rho)$$

调整 C_0 后。因此，对于 $p \le n$，

$$\log|\mathcal{T}_p| \le sp\log\Big(\frac{Cm}{s\varepsilon}\Big) \le C_0 sn\log(n\rho).$$

因此，总失败概率有如下上界：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((\mathcal{E}^{(K)}(r,\tilde{s}))^c\big) &\le \sum_{p=n-\tilde{s}}^{n} |\mathcal{T}_p|\exp\big(r\log n - c''r^2\big)\\ &\le (\tilde{s}+1)\exp\Big(C_0 sn\log(n\rho) + r\log n - c''r^2\Big).\end{aligned}$$

我们使用参数约束 (3.10)。条件 $\tilde{s}^2/(ns) \ge C\log(n\rho)$ 意味着

$$sn\log(n\rho) \le \frac{1}{C}\tilde{s}^2.$$

由于 $r \geq 4\tilde{s}$，我们有 $\tilde{s}^2 \leq r^2/16$。此外，$\tilde{s} \geq \log^2 n$ 意味着 $r \geq 4\log^2 n$，从而由于 $n \to \infty$ 有 $r \log n = o(r^2)$。选取 (3.10) 中的绝对常数 C 足够大，且 n 足够大，我们得到

$$C_0 sn \log(n\rho) + r \log n - c'' r^2 \leq -c_1 r^2,$$

对某个 $c_1 > 0$ 成立。因此

$$\mathbb{P}\big((\mathcal{E}^{(K)}(r,\tilde{s}))^c\big) \leq (\tilde{s}+1)e^{-c_1 r^2} \leq \frac{1}{n}$$

对所有充分大的 n 都成立，从而证明了引理 3.6。 □

Appendix C. Verification of the parameter constraints

引理 *5.1* 的证明。取自 (5.1) 的 $n \geq n_0$。则 $\rho \geq 1$，并且

$$\log n \leq \Lambda \leq 2 \log n. \tag{C.1}$$

上取整与下取整的初步界。由 (5.2) 和 n 足够大，可得

$$n^{6/7}\Lambda^{2/7} \leq \tilde{s} \leq 2n^{6/7}\Lambda^{2/7}. \tag{C.2}$$

此外，对所有充分大的 n，$r \geq C_2 \tilde{s}\Lambda$ 且 $r \leq C_2\tilde{s}\Lambda + 1 \leq 2C_2\tilde{s}\Lambda$（因为 $\tilde{s}\Lambda \to \infty$）。

Let

$$A := \frac{\tilde{s}^2}{C_3 n \Lambda}.$$

利用 (C.2)，我们有

$$A \geq \frac{(n^{6/7}\Lambda^{2/7})^2}{C_3 n\Lambda} = \frac{n^{12/7}\Lambda^{4/7}}{C_3 n\Lambda} = \frac{1}{C_3} n^{5/7}\Lambda^{-3/7} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

因此，当 $n \geq n_2$ 足够大时，$A \geq 2$，于是

$$\frac{A}{2} \leq s = \lfloor A \rfloor \leq A, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\tilde{s}^2}{2C_3 n\Lambda} \leq s \leq \frac{\tilde{s}^2}{C_3 n\Lambda}. \tag{C.3}$$

特别地，$s \leq$ n 对所有充分大的 n 都成立。事实上，利用 (C.2) 中的上界 $\tilde{s} \leq 2n^{6/7}\Lambda^{2/7}$ ，

$$s \leq \frac{\tilde{s}^2}{C_3 n\Lambda} \leq \frac{4n^{12/7}\Lambda^{4/7}}{C_3 n\Lambda} = \frac{4}{C_3} n^{5/7}\Lambda^{-3/7} \leq n$$

for 所有充分大的 n（等价地，$n^{2/7}\Lambda^{3/7} \to \infty$）。因此，$s \in [1, n]$，这正是第2节所要求的。5.

1) 检查 (3.10)。首先，$r \geq C_2\tilde{s}\Lambda \geq 4\tilde{s}$，因为 $C_2 \geq 4$ 且 $\Lambda \geq 1$。接下来，利用 $r \leq 2C_2\tilde{s}\Lambda$ 和 (C.2)，

$$\frac{r}{n} \leq \frac{2C_2\tilde{s}\Lambda}{n} \leq \frac{4C_2 n^{6/7}\Lambda^{2/7}\Lambda}{n} = 4C_2 n^{-1/7}\Lambda^{9/7} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

因此，当 $n \geq n_3$ 足够大时，我们有 $r \leq n/4$。由于对于足够大的 n，$\tilde{s} \leq n/2$（因为 $\tilde{s}/n \to 0$），我们得到 $r \leq (n - \tilde{s})/2$，对 $n \geq n_3$ 成立。

此外，对于所有 $n \geq n_4$，$\tilde{s} \geq n^{6/7} \geq (\log n)^2$。最后，根据 (C.3) 中关于 s 的上界，

$$\frac{\tilde{s}^2}{ns} \geq C_3\Lambda \geq C_{\mathrm{EK}}\Lambda = C_{\mathrm{EK}} \log(n\rho),$$

因为 $C_3 \geq C_{\mathrm{EK}}$。因此，当 n 足够大时，(3.10) 对所有情形都成立。

2) 验证 (3.11)。 我们要求

$$c_{\mathrm{decay}} r \geq 4\tilde{s}\log\left(\frac{en}{\tilde{s}}\right) + \log 16.$$

由于 $r \geq C_2\tilde{s}\Lambda$ 和 $\Lambda \geq \log n$，我们有

$$c_{\mathrm{decay}} r \geq c_{\mathrm{decay}} C_2 \tilde{s}\log n.$$

此外， $\tilde{s} \geq n^{6/7}$ 意味着 $n/\tilde{s} \leq n^{1/7}$，因此

$$\log\left(\frac{en}{\tilde{s}}\right) \leq \log(en^{1/7}) \leq 2\log n$$

对于所有充分大的 n，因此，

$$4\tilde{s}\log\left(\frac{en}{\tilde{s}}\right) \leq 8\tilde{s}\log n,$$

当 n 充分大时，加法项 $\log 16$ 可由（例如） $\tilde{s}$控制。因此，只需满足 $c_{\mathrm{decay}} C_2 \geq 16$，而这由 $C_2 \geq 16/c_{\mathrm{decay}}$保证。

3) 检查 (3.6)。 我们需要 $4\rho C_\star\sqrt{r} \leq c_{\mathrm{suppr}} n$。 利用 $r \leq 2C_2\tilde{s}\Lambda$ 和 (C.2)，

$$\sqrt{r} \leq \sqrt{2C_2}\sqrt{\tilde{s}\Lambda} \leq \sqrt{2C_2}\sqrt{2n^{6/7}\Lambda^{2/7}\cdot\Lambda} = 2\sqrt{C_2}n^{3/7}\Lambda^{9/14}.$$

因此

$$4\rho C_\star\sqrt{r} \leq 8C_\star\sqrt{C_2}\rho n^{3/7}\Lambda^{9/14}.$$

由 $\rho = c_0 n^{4/7}(\log n)^{-C}$ 和 $\Lambda \leq 2\log n$，

$$4\rho C_\star\sqrt{r} \leq 8C_\star\sqrt{C_2}c_0 n\Lambda^{9/14}(\log n)^{-C} \leq C' c_0 n(\log n)^{9/14-C}.$$

由于 $C \geq 2$，对于所有 $n \geq 3$，都有 $(\log n)^{9/14-C} \leq 1$。因此，只需选择 $c_0^* > 0$ 使得 $C' c_0^* \leq c_{\mathrm{suppr}}$。于是，对于 $c_0 \leq c_0^*$，(3.6) 对所有 $n \geq 3$均成立。

4) 检查 (5.7)。 由 (2.22) 可知 $L = \overline{C}_0\sqrt{\frac{n}{s}}\Lambda$。根据 (C.3) 中关于 s 的下界，

$$\frac{n}{s} \leq \frac{2C_3 n^2\Lambda}{\tilde{s}^2},$$

因此

$$L \leq C_0\sqrt{\frac{2C_3 n^2\Lambda^2}{\tilde{s}^2}} = C_0\sqrt{2C_3}\frac{n\Lambda}{\tilde{s}}. \tag{C.4}$$

因此，(5.7) 左侧满足

$$\frac{C_{\mathrm{U}}\rho L n\sqrt{\Lambda}}{\tilde{s}^2} \leq C_{\mathrm{U}}\rho\cdot\left(C_0\sqrt{2C_3}\frac{n\Lambda}{\tilde{s}}\right)\cdot\frac{n\sqrt{\Lambda}}{\tilde{s}^2} = C''\rho\frac{n^2\Lambda^{3/2}}{\tilde{s}^3},$$

其中 $C'' := C_{\mathrm{U}}C_0\sqrt{2C_3}$。 利用 $\tilde{s} \geq n^{6/7}\Lambda^{2/7}$ 可得 $\tilde{s}^3 \geq n^{18/7}\Lambda^{6/7}$，因此

$$\frac{C_{\mathrm{U}}\rho L n\sqrt{\Lambda}}{\tilde{s}^2} \leq C''\rho\frac{n^{14/7}\Lambda^{3/2}}{n^{18/7}\Lambda^{6/7}} = C''\rho n^{-4/7}\Lambda^{9/14}.$$

代入 $\rho = c_0 n^{4/7}(\log n)^{-C}$ 并使用 $\Lambda \leq 2\log n$，得到

$$\frac{C_{\mathrm{U}}\rho L n\sqrt{\Lambda}}{\tilde{s}^2} \leq C'' c_0\Lambda^{9/14}(\log n)^{-C} \leq C''' c_0(\log n)^{9/14-C}.$$

由于 $C \geq 2$，对于所有 $n \geq 3$，我们有 $(\log n)^{9/14-C} \leq 1$。因此，只需再将 c_0^* 选得足够小，使得

$$C''' c_0^* \leq \frac{1}{4e^{2C_1+1}}.$$

那么 (5.7) 对所有 $n \geq 3$ 都成立。

5) 检查 $\tilde{s} \geq \Lambda$。根据 (C.2)，$\tilde{s} \geq n^{6/7}\Lambda^{2/7}$。由于 $\Lambda \leq 2\log n$ 且 $n^{6/7}/\log n \to \infty$，存在 n_5，使得 $n^{6/7} \geq 2\log n$ 对所有 $n \geq n_5$ 都成立。于是对于 $n \geq n_5$,

$$\tilde{s} \geq n^{6/7}\Lambda^{2/7} \geq n^{6/7} \geq 2\log n \geq \Lambda,$$

即为（5.3）。

取 $n_1 := \max\{n_0, n_2, n_3, n_4, n_5, 3\}$ 即完成证明。 □

References

[1] J. Bourgain 和 S. J. Szarek，《关于立方体的Banach–Mazur距离与Dvoretzky–Rogers因子分解》，*Israel J.* ( )，第2期，169– 。[2] J. *Math.* **62** 1988 180 Bourgain 和 L. Tzafriri，《“大型”子矩阵的可逆性及其在Banach空间几何与调和分析中的应用》，*Israel J. Math.* **57** (1987)，137–224。[3] K. R. Davidson 和 S. J. Szarek，《局部算子理论、随机矩阵与Banach空间》，载于 *Handbook of the Geometry of Banach Spaces* 2001， 317 366 ，第I卷，North-Holland，阿姆斯特丹，第–页。[4] A. Dvoretzky 和 C. A. Rogers，《赋范线性空间中的绝对收敛与无条件收敛》，*Proc. Natl. Acad. Sci.* ( )，–。[5] O. Friedland 和 *USA* **36** 1950 192 197 P. Youssef，《矩阵逼近与凸体》，*Int. Math. Res. Not. IMRN* (2019 8, 2519 2537)，第–期。[6] A. Giannopoulos，《关于立方体的Banach–Mazur距离的注记》，载于 *Geometric Aspects of Functional Analysis (1992– 1994)* ，Oper. Theory Adv. Appl.，第Birkhauser卷，巴塞尔，第–页。[7] E. D. Gluskin，《Minkowski紧致集的直径约为 n 1981 1, 》，*Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **15** ( )，第–期；英文译本：*Funct. Anal. Appl.* **15** 1981 1, 57 58 ()，第–期。[8] A. Naor 和 P. Youssef，《重新审视受限可逆性》，载于 *A Journey Through Discrete Mathematics. A Tribute to Jiří Matoušek* 2017， 657 691 ，（M. Loebl、J. Ne˘set˘ril 和 R. Thomas 编），Springer，Cham，第–页。[9] S. J. Szarek 和 M. Talagrand，《Sauer–Shelah引理的同构版本与立方体的Banach–Mazur距离》，载于 *Geom. Aspects of Funct. Anal. (1987–88)*，Lecture Notes in Math.，第1376卷，Springer，柏林，1989年，第105–112页。[10] S. J. Szarek，《与 ℓ_∞^n 距离较大的空间与随机矩阵》，*Amer. J. Math.* **112** (1990)，第6期，899–942。[11] K. Tikhomirov，《关于到交叉多胞体的Banach–Mazur距离》，*Adv. Math.* **345** (2019)，598–617。[12] P. Youssef，《受限可逆性与立方体的Banach–Mazur距离》，*Mathematika* **60** (2014)，第2期，237–260。[13] G. Pisier，《关于B. Maurey一项未发表结果的评述》，*Séminaire d'Analyse Fonctionnelle* (Maurey–Schwartz)，1980–1981，报告第5号，1–12。[14] M. Ledoux 和 M. Talagrand，*Probability in Banach Spaces: Isoperimetry and Processes*，Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)，第23卷，Springer-Verlag，柏林，1991年。[15] M. Ledoux，*The Concentration of Measure Phenomenon*，Mathematical Surveys and Monographs，第89卷，AMS，2001年。

Institut de Mathématiques de Jussieu, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
Email address: omer.friedland@imj-prg.fr