arXiv:2602.10669v1 [math.RA] 11 Feb 2026

拟三角对偶前泊松双代数及其与泊松双代数的联系

BO HOU 和 RU LI

摘要。本文引入拟三角对偶前泊松双代数和可因子化对偶前泊松双代数的概念。可因子化对偶前泊松双代数会导出其底层对偶前泊松代数的一个因子分解，而任意对偶前泊松双代数的双都是可因子化的。我们引入二次罗塔–贝克斯特对偶前泊松代数的概念，并证明可因子化对偶前泊松双代数与非零权的二次罗塔–贝克斯特泊松代数之间存在一一对应关系。此外，我们给出一种利用有限维泊松双代数构造无限维对偶前泊松双代数的方法。我们证明，泊松双代数与一个二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数的张量积上存在完备对偶前泊松双代数结构；若原泊松双代数是余边界的（分别为拟三角的、三角的），则该完备对偶前泊松双代数结构也是余边界的（分别为拟三角的、三角的）。我们还研究了由此导出的可因子化有限维对偶前泊松双代数。

目录

1. 引言 1 2. 对偶前泊松代数及其表示 3 3. 拟三角 DPP 双代数与经典杨-巴克斯特方程 6 4. 从泊松双代数构造无限维DPP双代数 11 参考文献 22

1. 引言

本文进一步研究对偶前泊松代数的双代数理论。我们在对偶前泊松双代数的框架下建立拟三角理论与可因子化理论，综合了拟三角 perm 双代数和拟三角莱布尼茨双代数的概念。此外，我们还提出了一种利用泊松双代数构造无限维对偶前泊松双代数的方法。

泊松代数既是李代数，也是交换结合代数，二者以某种方式相容。泊松代数是数学多个领域及数学物理中的基本结构，包括泊松几何、代数几何、经典力学与量子力学、量子群和量子化理论 [34, 36, 11, 29, 2, 16, 17]。前泊松代数的概念最早由 Aguiar 引入 [1], ，它在同一向量空间上结合了 Zinbiel 代数和前李代数，并满足某些相容条件。众所周知，泊松代数上的 Rota-Baxter 算子可以生成一个前泊松代数。前泊松代数的运算子是 Koszul 的 [9], ，并且是泊松代数运算子的双后继 [6]。

对偶前泊松代数（DPP代数）的概念最早由 Aguiar 在 [1], 中给出，并在 [33]中作为前泊松代数在代数运算子意义下的 Koszul 对偶被引入。一个 DPP 代数包含一个置换代数和一个莱布尼茨代数，并满足某些相容条件，这是 Loday [25]所引入的一种特殊 DPP 代数。每个泊松代数都可视为一种特殊的 DPP 代数。存在一种 DPP 代数的自然构造

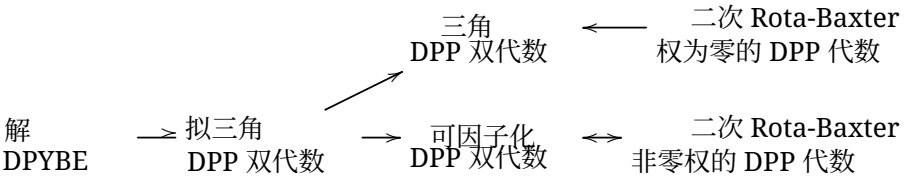
2020年 数学主题分类。 17A30,17B38,17B62, 17B63.关键词和短语。 对偶前 Poisson 双代数，泊松双代数，泊松杨-巴克斯特方程，对偶前泊松杨-巴克斯特方程， O-算子。

由配备平均算子的泊松代数 [1]。DPP 代数歌剧是 Poisson 代数歌剧的复制子 [28]。最近，Lu 证明了 DPP 代数歌剧是 Koszul 的，并表明 DPP代数是 perm 代数的二结合形式变形的半经典极限 [26]。

在给定的代数结构上，双代数结构由余乘法以及乘法与余乘法之间的一些相容条件构成。李双代数是双代数的一个著名例子 [10], ，它可以视为泊松-李群的线性化。近年来，各种代数结构的双代数理论得到了广泛发展，例如左对称双代数 [3], 、反对称无穷小双代数 [4], 、诺维科夫双代数 [13], 、perm 双代数 [15, 20], 、泊松双代数 [27], 等。预泊松双代数在 [35] 中得到研究，而对偶前泊松双代数（DPP 双代数）则在 [26]中被引入。本文进一步研究 DPP 代数的双代数理论，尤其是拟三角、三角和可因子化 DPP 双代数。

在李双代数理论中，拟三角李双代数，尤其是三角李双代数，在数学物理中发挥着重要作用 [31, 5, 30]。可因子化李双代数是拟三角李双代数的一个特殊子类，它将经典r矩阵与某些因子分解问题联系起来，并在可积系统中有着广泛应用 [10, 19]。近年来，拟三角双代数结构，尤其是可因子化双代数结构，受到了广泛关注。可因子化李双代数 [19], 可因子化反对称无穷小双代数[32], 可分解 Leibniz 双代数 [7], 可因子化诺维科夫双代数 [8], 可因子化perm双代数 [21] 以及可因子化泊松双代数 [22, 12] 都得到了进一步研究。

本文首先为二阶张量引入一个不变条件，并在 DPP 代数中定义（经典）对偶前泊松杨-巴克斯特方程（DPYBE），据此成功定义了拟三角 DPP 双代数和可因子化 DPP 双代数。可因子化 DPP 双代数会诱导底层对偶预泊松代数的一个因子分解，而任意 DPP 双代数的双自然带有可因子化 DPP 双代数结构。此外，我们引入了权的二次 Rota–Baxter DPP 代数的概念，证明零权的二次 Rota–Baxter DPP 代数会诱导一个三角 DPP 双代数，并建立了非零权的二次 Rota-Baxter DPP 代数与可因子化 DPP 双代数之间的一一对应。我们将这些结果总结在以下图示中：



注意到，DPP 代数的运算子是二次二元的，因此同构于 perm 代数歌剧与 Poisson 代数歌剧的 Manin 白乘积 [28, 33]。我们将这一结论提升到双代数层面，并给出无限维 DPP双代数的一种构造。更确切地说，我们引入一类无限维DPP双代数，即完备 DPP 双代数。我们证明，在张量积 Poisson 双代数与一个二次 $\mathbb{Z}$-分次的 perm 代数上存在完备 DPP双代数结构。此外，通过讨论诱导 DPP 代数中 DPYBE 的解与原 Poisson 代数中 PoiYBE 的解之间的关系，我们可以得出结论：该构造保留了双代数的许多性质，例如余边界（分别为拟三角、三角）结构。

定理（定理 *4.16* 和 *4.20*）设 $(P, \cdot, [-,-], \Delta, \delta)$ 是一个有限维泊松双代数，且 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \circ_B, \omega)$ 是一个二次 $\mathbb{Z}$- 分次的 *perm* 代数。则在 $P \otimes B$ 上的张量积上存在完备 *DPP* 双代数结构，记为 $(P \otimes B, \circ, *, \nu, \vartheta)$。

特别地，如果$(P, \cdot, [-,-], \Delta, \delta)$ 是余边界（分别为拟三角、三角）的，那么完备 *DPP* 双代数$(P\otimes B, \circ, *, \nu, \vartheta)$ 也是余边界（分别为拟三角、三角）的。

此外，如果二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数 $(B=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i,\circ_B,\omega)$ 只是一个有限维二次置换代数，那么如果 $(P,\cdot,[-,-],\Delta,\delta)$ 是可因子化的，我们也可以得到 DPP 双代数 $(P\otimes B,\circ,*,\nu,\vartheta)$ 是可因子化的。在这种情况下，我们可以从泊松双代数 $(P,\cdot,[-,-])$ 上的一个 $\mathcal{O}$-算子导出诱导 DPP 代数 $(P\otimes B,\circ,*)$ 上的一个 $\mathcal{O}$-算子。

本文结构安排如下。在第2节，我们回顾 DPP 代数及其表示的概念，并说明泊松代数与置换代数的张量积上存在一种 DPP 代数结构。在第3节，我们回顾 DPP 代数中的 DPYBE 概念，并引入拟三角 DPP 双代数、三角 DPP 双代数和可因子化 DPP 双代数的概念。DPYBE 的每个对称解都会导出一个三角 DPP 双代数。任意 DPP 双代数的双都是可因子化的（见命题3.5）。此外，我们引入二次 Rota–Baxter DPP 代数的概念，并在定理3.8中建立非零权的二次 Rota–Baxter DPP 代数与可因子化 DPP 双代数之间的一一对应。在第4节，我们在定理4.16中证明，有限维泊松双代数与二次 $\mathbb{Z}$分次置换代数的张量积可以自然地赋予一个完备 DPP 双代数结构。命题 $\mathbb{Z}$中，我们根据原 Poisson 代数中 PoiYBE 的解，构造了诱导4.19分次 DPP 代数中 DPYBE 的一些特殊完备解。因此，在定理4.20中，我们证明，若原泊松双代数是余边界的（分别为拟三角、三角），则诱导的完备 DPP 双代数也是余边界的（分别为拟三角、三角）。特别地，当诱导的 DPP 双代数是有限维时，我们还讨论双代数的可因子化性以及 $\mathcal{O}$-算子。

本文中，我们固定 $\Bbbk$ 为一个特征为零的域。除非另有说明，所有向量空间和代数均定义在 $\Bbbk$ 上，且均为有限维；所有张量积也均定义在 $\Bbbk$上。我们用 id 表示恒等映射。对于任意有限维 $\Bbbk$-向量空间V，我们用V^* 表示其对偶空间。

2. 对偶前泊松代数及其表示

本节回顾对偶前泊松代数及其表示的概念。回顾一下，一个（左）**莱布尼茨代数** $(A,*)$ 是一个向量空间A，配备一个双线性映射 $*:A\otimes A\to A$，并满足以下莱布尼茨恒等式:

$$a_1*(a_2*a_3)=(a_1*a_2)*a_3+a_2*(a_1*a_3),$$

对任意$a_1,a_2,a_3\in A$成立。一个**置换代数** 是一个二元组$(A,\circ)$，其中A 是一个向量空间，且 $\circ:A\otimes A\to A$是一个双线性算子，使得对任意$a_1,a_2,a_3\in A$,

$$a_1\circ(a_2\circ a_3)=(a_1\circ a_2)\circ a_3=(a_2\circ a_1)\circ a_3,$$

在置换代数（$A,\circ$) 中，我们还有 $a_1\diamond(a_2\diamond a_3)=a_2\diamond(a_1\diamond a_3)$。

定义 *2.1*（[1]）。对偶前泊松代数（*DPP* 代数）*(A, ∘, ∗)* 是一个向量空间 A，连同两个双线性映射 $\circ,*:A\otimes A\to A$，使得 *(A, ∘)* 是置换代数，*(A, ∗)* 是莱布尼茨代数，并且对所有 $a_1,a_2,a_3\in A$，以下等式成立，

$$(a_1\circ a_2)*a_3=a_1\circ(a_2*a_3)+a_2\circ(a_1*a_3),$$
$$(a_1*a_2)\circ a_3=a_1*(a_2\circ a_3)-a_2\circ(a_1*a_3)=-(a_2*a_1)\circ a_3.$$

在 DPP 代数 $(A,\circ,*)$ 中，我们还有 $(a_1\circ a_2)*a_3=(a_2\circ a_1)*a_3$ 以及 $a_1*(a_2\circ a_3)-a_2\circ(a_1*a_3)=a_1\circ(a_2*a_3)-a_2*(a_1\circ a_3)$，对任意 $a_1,a_2,a_3\in A$ 均成立。设 $(A,\circ,*)$ 和 $(A',\circ',*')$ 是两个 DPP 代数。若线性映射 $f:A\to A'$ 满足对任意 $a_1,a_2\in A$，$f(a_1\circ a_2)=f(a_1)\circ' f(a_2)$ 且 $f(a_1*a_2)=f(a_1)*' f(a_2)$，则称 f 为 DPP 代数的同态。

例 2.2. 设 A 是一个二维向量空间，其基为 $\{e_1,e_2\}$ a。我们定义乘法 $\circ$ 和 $*$，使得 $e_2*e_2=e_1=e_2\circ e_2$。那么 $(A,\circ,*)$ 是一个二维 *DPP* 代数。

接下来，我们考虑 DPP 代数的表示。回顾一下，置换代数 $(A, \circ)$ 的**表示** $(V, \mathfrak{l}, \mathfrak{r})$是一个向量空间$V$，配有两个线性映射 $\mathfrak{l}, \mathfrak{r} : A \to \mathfrak{gl}(V)$，满足

$$\mathfrak{l}(a_1 \circ a_2) = \mathfrak{l}(a_1)\mathfrak{l}(a_2) = \mathfrak{l}(a_2)\mathfrak{l}(a_1),$$
$$\mathfrak{r}(a_1 \circ a_2) = \mathfrak{r}(a_2)\mathfrak{r}(a_1) = \mathfrak{r}(a_2)\mathfrak{l}(a_1) = \mathfrak{l}(a_1)\mathfrak{r}(a_2),$$

~对任意 $a_1, a_2 \in A$。设 $(A, *)$ 是一个莱布尼茨代数，V是一个向量空间，且 $\mathfrak{l}$、~$\mathfrak{r} : A \to \mathfrak{gl}(V)$ 是两个~线性映射。若对任意 $a_1, a_2 \in A$，则称 $(V, \mathfrak{l}, \tilde{\mathfrak{r}})$ 是 $(A, *)$ 的一个**表示**，

$$\tilde{\mathfrak{l}}(a_1 * a_2) = \tilde{\mathfrak{l}}(a_1)\tilde{\mathfrak{l}}(a_2) - \tilde{\mathfrak{l}}(a_2)\tilde{\mathfrak{l}}(a_1),$$
$$\tilde{\mathfrak{r}}(a_1)\tilde{\mathfrak{r}}(a_2) = \tilde{\mathfrak{r}}(a_1 * a_2) + \tilde{\mathfrak{l}}(a_2)\tilde{\mathfrak{r}}(a_1) = -\tilde{\mathfrak{r}}(a_1)\tilde{\mathfrak{l}}(a_2).$$

~定义*2.3*。设 $(A, \circ, *)$ 是一个 *DPP* 代数，V 是一个向量空间，且 l、r、l、~$r : A \to gl(V)$ 是四个~线性映射。若 (V, l, r) 是 $(A, \circ)$ 的一个表示，$(V, l, \tilde{r})$ 是 $(A, *)$ 的一个表示，并且对任意 $a_1, a_2 \in A$，

$$\tilde{\mathfrak{l}}(a_1 \circ a_2) = \mathfrak{l}(a_1)\tilde{\mathfrak{l}}(a_2) + \mathfrak{l}(a_2)\tilde{\mathfrak{l}}(a_1),$$
$$\tilde{\mathfrak{r}}(a_2)\mathfrak{l}(a_1) = \mathfrak{l}(a_1)\tilde{\mathfrak{r}}(a_2) + \mathfrak{r}(a_1 * a_2) = \tilde{\mathfrak{r}}(a_2)\mathfrak{r}(a_1),$$
$$\mathfrak{l}(a_1 * a_2) = \tilde{\mathfrak{l}}(a_1)\mathfrak{l}(a_2) - \mathfrak{l}(a_2)\tilde{\mathfrak{l}}(a_1) = -\mathfrak{l}(a_2 * a_1),$$
$$\mathfrak{r}(a_2)\tilde{\mathfrak{r}}(a_1) = \tilde{\mathfrak{r}}(a_1 \circ a_2) - \mathfrak{l}(a_1)\tilde{\mathfrak{r}}(a_2) = -\mathfrak{r}(a_2)\tilde{\mathfrak{l}}(a_1) = \mathfrak{r}(a_1 * a_2) - \tilde{\mathfrak{l}}(a_1)\mathfrak{r}(a_2),$$

~则$(V, \mathfrak{l}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}, \tilde{\mathfrak{r}})$ 称为**DPP 代数**$(A, \circ, *)$**的一个表示。**

对于 DPP 代数的表示，我们有如下等价刻画。

~**命题2.4.** 设$(A, \circ, *)$ 是一个 *DPP* 代数，V 是一个向量空间，且$\mathfrak{l}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}, \tilde{\mathfrak{r}} : A \to \mathfrak{gl}(V)$ 是四个线性映射。定义双线性映射 $\tilde{\circ}, \tilde{*} : (A \oplus V) \otimes (A \oplus V) \to A \oplus V$，使得

$$(a_1, v_1)\tilde{\circ}(a_2, v_2) := (a_1 \circ a_2,\ \mathfrak{l}(a_1)(v_2) + \mathfrak{r}(a_2)(v_1)), \tag{2.1}$$
$$(a_1, v_1)\tilde{*}(a_2, v_2) := (a_1 * a_2,\ \tilde{\mathfrak{l}}(a_1)(v_2) + \tilde{\mathfrak{r}}(a_2)(v_1)), \tag{2.2}$$

~对任意 $a_1, a_2 \in A$ 和 $v_1, v_2 \in V$。则 $(V, l, r, l, \tilde{r})$ 是 $(A, \circ, *)$ 的一个表示，当且仅当 $(A \oplus V, \tilde{\circ}, \tilde{*})$ 是一个 *DPP* 代数。我们将此 *DPP* 代数记为 $A \ltimes V$，并称其为 $(A, \circ, *)$ 关于表示 $(V, l, r, l, \tilde{r})$ 的半直积~。

证明。 这可以直接验证。 □

~ ~设 $(V, \mathfrak{l}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}, \tilde{\mathfrak{r}})$ 和 $(V', \mathfrak{l}', \mathfrak{r}', \mathfrak{l}', \tilde{\mathfrak{r}}')$ 是 DPP 代数 $(A, \circ, *)$ 的两个表示。若线性映射 $f : V \to V'$ 满足对任意 $a \in A$,~$v \in V$ 以及 $\beta \in \{\mathfrak{l}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}, \tilde{\mathfrak{r}}\}$，都有 $f(\beta(a)(v)) = \beta'(a)(f(v))$，则称 f 为表示的态射。若表示的态射 f 是~双射，则称其为同构。定义左乘映射 $l_A, l_A : A \to gl(A)$ 和右乘~映射 $r_A, \tilde{r}_A : A \to gl(A)$，使得 $l_A(a_1)(a_2) = a_1 \circ a_2$, $l_A(a_1)(a_2) = a_1 * a_2$, $r_A(a_1)(a_2) = a_2 \circ a_1$ 以及~$\tilde{r}_A(a_1)(a_2) = a_2 * a_1$，对所有 $a_1, a_2 \in A$ 均成立。于是 $(A, l_A, r_A, l_A, \tilde{r}_A)$ 是 $(A, \circ, *)$ 的一个表示，称为 $(A, \circ, *)$ 的正则表示。

设 V、W 是两个有限维 $\Bbbk$ 向量空间。我们用 $\langle --\rangle$ 表示空间 V 与 V^* 之间的自然配对，即 $\langle \xi, v\rangle := \xi(v) \in \Bbbk$，其中任意 $v \in V$ 和 $\xi \in V^*$ 均成立。对于线性映射 $f : V \to W$，我们定义映射 $f^* : W^* \to V^*$，使得 $\langle f^*(\xi), v\rangle = \langle \xi, f(v)\rangle$，其中任意 $v \in V$ 和 $\xi \in W^*$ 均成立。~设 $(A, \circ, *)$ 是一个有限维 DPP 代数。对于每个 $\beta \in \{l_A、r_A、l_A, \tilde{r}_A\}$，我们定义线性映射 $\beta^* : A \to gl(A^*)$，其定义如下：

$$\langle \beta^*(a_1)(\xi), a_2\rangle = -\langle \xi, \beta(a_1)(a_2)\rangle,$$

~ ~对任意 $a_1, a_2 \in A$ 以及 $\xi \in A^*$ 均成立。对于 DPP 代数 $(A, \circ, *)$，可以验证 $(A^*, \mathbf{l}_A^*, \mathbf{l}_A^* - \mathbf{r}_A^*, \mathbf{l}_A^*, -\mathbf{l}_A^* - \tilde{\mathbf{r}}_A^*)$ 是 $(A, \circ, *)$ 的一个表示，称为 $(A, \circ, *)$ 的**余正则表示**。

设 $\omega(-, -)$ 是 DPP 代数 $(A, \circ, *)$ 上的双线性型。回顾一下，

- 若对任意$a_2 \in A$，$\omega(a_1, a_2) = 0$，则称 $\omega(-, -)$为**非退化**，且$a_1 = 0$;

- 若对任意 $a_1, a_2 \in A$, $\omega(a_1, a_2) = -\omega(a_2, a_1)$，则称 $\omega(-,-)$为斜对称；- 若对任意 $a_1,a_2,a_3 \in A$, $\omega(a_1 \circ a_2, a_3) = \omega(a_1, a_2 \circ a_3 - a_3 \circ a_2)$ 且 $\omega(a_1 * a_2, a_3) = \omega(a_1, a_2 * a_3 + a_3 * a_2)$，则称 $\omega(-,-)$为不变。

若 DPP 代数 $(A, \circ, *)$ 配有非退化斜对称不变双线性型 $\omega(-,-)$，则称其为二次DPP代数，记为 $(A, \circ, *, \omega)$。容易看出，如果 $(A, \circ, *, \omega)$ 是二次的，那么对于任意 $a_1, a_2, a_3 \in A$，都有 $\omega(a_1 \circ a_2, a_3) = \omega(a_2, a_1 \circ a_3)$ 且 $\omega(a_1 * a_2, a_3) = -\omega(a_2, a_1 * a_3)$。此外，可以验证，$(A, l_A, r_A, l_A, \tilde{r}_A)$ 与 $(A^*, -l_A^*, r_A^* - l_A^*, l_A^*, -l_A^* - \tilde{r}_A^*)$ 作为 DPP 代数 $(A, \circ, *)$ 的表示同构，当且仅当 $(A, \circ, *)$ 上存在非退化斜对称不变双线性型。

DPP 代数与泊松代数之间有着密切的关系。我们首先给出泊松代数的定义。回顾一下，交换结合代数 $(A, \cdot)$ 是一个向量空间 A，配有一个双线性映射 $\cdot : A \otimes A \to A$，使得 $a_1a_2 = a_2a_1$ 且 $a_1(a_2a_3) = (a_1a_2)a_3$，对任意 $a_1, a_2, a_3 \in A$ 均成立；为简便起见，记 $a_1a_2 := a_1 \cdot a_2$。李代数 $(g, [-,-])$ 是一个向量空间 g，配有一个反对称双线性括号 $[-,-] : g \otimes g \to g$，使得 $[g_1, [g_2, g_3]] + [g_2, [g_3, g_1]] + [g_3, [g_1, g_2]] = 0$，对任意 $g_1, g_2, g_3 \in g$ 均成立。

定义 2.5。 泊松代数 是一个三元组 $(P, \cdot, [-,-])$，其中 $(P, \cdot)$ 是交换结合代数，且 $(P, [-,-])$ 是李代数，并满足莱布尼茨法则：

$$[p_1, p_2p_3] = [p_1, p_2]p_3 + p_2[p_1, p_3],$$

对任意 $p_1, p_2, p_3 \in P$。

与其他类型的双代数一样，泊松代数可以看作一种特殊的 DPP 代数。设 $(P, \cdot, [-,-])$ 是一个泊松代数。若线性映射 $\alpha : P \to P$ 满足：对任意 $p_1, p_2 \in P$,

$$[\alpha(p_1), \alpha(p_2)] = \alpha([\alpha(p_1), p_2]),$$
$$\alpha(p_1)\alpha(p_2) = \alpha(\alpha(p_1)p_2) = \alpha(p_1\alpha(p_2)).$$

若 $\alpha : P \to P$ 是泊松代数 $(P, \cdot, [-,-])$ 上的平均算子，则有 $[\alpha(p_1), \alpha(p_2)] = \alpha([\alpha(p_1), p_2]) = \alpha([p1, \alpha(p_2)])$。文献 [1]，中的作者证明了，带有平均算子的泊松代数可导出一个 DPP 代数。

命题 2.6 ([1])。 设$(P, \cdot, [-,-])$ 是一个泊松代数，且 $\alpha : P \to P$ 是一个平均算子。定义双线性映射 $\circ, * : P \otimes P \to P$ 如下：

$$p_1 \circ p_2 := \alpha(p_1)p_2 \qquad and \qquad p_1 * p_2 := [\alpha(p_1), p_2],$$

对任意 $p_1, p_2 \in P$。则$(P, \circ, *)$ 是一个 *DPP* 代数。

此外，泊松代数与置换代数的张量积也可以构造出一个 DPP 代数。

命题 2.7 ([26])。 设$(P, \cdot, [-,-])$ 是一个泊松代数，且$(B, \circ_B)$ 是一个置换代数。定义双线性映射 $\circ, * : (P \otimes B) \otimes (P \otimes B) \to P \otimes B$ 如下：

$$(p_1, b_1) \circ (p_2, b_2) := (p_1p_2) \otimes (b_1 \circ_B b_2),$$
$$(p_1, b_1) * (p_2, b_2) := [p_1, p_2] \otimes (b_1 \circ_B b_2),$$

对任意 $p_1, p_2 \in P$ 和 $b_1, b_2 \in B$。则$(P \otimes B, \circ, *)$ 是一个 *DPP* 代数。

证明。 首先，不难看出，$(P \otimes B, \circ)$ 是一个置换代数，而 $(P \otimes B, *)$ 是一个莱布尼茨代数。第二，对于任意 $p_1, p_2, p_3 \in P$ 和 $b_1, b_2, b_3 \in B$，有

$$\begin{aligned}((p_1, b_1) * (p_2, b_2)) \circ (p_3, b_3) &= ([p_1, p_2]p_3) \otimes ((b_1 \circ_B b_2) \circ_B b_3) \\ &= -([p_2, p_1]p_3) \otimes ((b_2 \circ_B b_1) \circ_B b_3) \\ &= -((p_2, b_2) * (p_1, b_1)) \circ (p_3, b_3).\end{aligned}$$

类似地，我们还有 $(p_1, b_1)*((p_2, b_2)\circ(p_3,b_3)) = ((p_1,b_1)*(p_2,b_2))\circ(p_3,b_3)+(p_2,b_2)\circ((p_1, b_1)*(p_3, b_3))$ 以及 $((p_1, b_1)\circ(p_2, b_2))*(p_3, b_3) = (p_1,b_1)\circ((p_2,b_2)*(p_3,b_3))+(p_2,b_2)\circ((p_1,b_1)*(p_3, b_3))$。因此，$(P \otimes B, \circ, *)$ 是一个 DPP 代数。□

本文不仅研究了与经典杨-巴克斯特方程解相关的一些特殊 DPP 双代数，还将上述泊松代数与 DPP 代数之间的关系提升到了双代数层面。

3. 拟三角DPP 双代数与经典杨-巴克斯特方程

近年来，Lu 给出了 DPP 代数的双代数理论 [26]。本文通过引入拟三角 DPP 双代数、三角 DPP 双代数和可分解泊松双余代数的概念，进一步研究了 DPP 代数中与经典杨-巴克斯特方程解相关的一些特殊 DPP 双代数。首先，我们回顾对偶前泊松余代数的定义。一个 **perm 余代数** (A, ν) 是一个向量空间 A，配有一个线性映射 $\nu: A \to A \otimes A$，满足

$$(\nu \otimes \mathrm{id})\nu = (\mathrm{id} \otimes \nu)\nu = (\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \nu)\nu.$$

可以验证，(A, ν) 是置换余代数，当且仅当 (A^*, ν^*) 是置换代数。**莱布尼茨余代数**是一个二元组 (A, ϑ)，其中B 是一个向量空间，且 $\vartheta: B \to B \otimes B$ 是满足以下条件的线性映射

$$(\vartheta \otimes \mathrm{id})\vartheta = (\mathrm{id} \otimes \vartheta)\vartheta + (\mathrm{id} \otimes \tau)(\vartheta \otimes \mathrm{id})\vartheta.$$

定义 3.1。对偶前泊松余代数（*DPP* 余代数）是一个三元组(A, ν, ϑ)，其中(A, ν) 是置换余代数，(A, ϑ) 是莱布尼茨余代数，并且满足以下相容条件：

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \otimes \nu)\vartheta &= (\vartheta \otimes \mathrm{id})\nu + (\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \vartheta)\nu,\\
(\nu \otimes \mathrm{id})\vartheta &= (\mathrm{id} \otimes \vartheta)\nu + (\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \vartheta)\nu,\\
(\vartheta \otimes \mathrm{id})\nu &= -(\tau \otimes \mathrm{id})(\vartheta \otimes \mathrm{id})\nu.
\end{aligned}$$

通过直接计算可以证明，(A, ν, ϑ) 是 DPP 余代数，当且仅当 $(A^*, \nu^*, \vartheta^*)$ 是 DPP 代数。现在给出 DPP 双代数的定义。回顾一下，置换双代数是一个三元组 $(A, \circ, \nu)$，其中 $(A, \circ)$ 是置换代数，(A, ν) 是置换余代数，且对任意$a_1, a_2 \in A$，

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}_A(a_1) \otimes \mathrm{id})\nu(a_2) &= \tau((\mathbf{r}_A(a_2) \otimes \mathrm{id})\nu(a_1)),\\
\nu(a_1 \circ a_2) &= ((\mathbf{l}_A - \mathbf{r}_A)(a_1) \otimes \mathrm{id})\nu(a_2) + (\mathrm{id} \otimes \mathbf{r}_A(a_2))\nu(a_1),\\
\nu(a_1 \circ a_2) &= (\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_A(a_1))\nu(a_2) + ((\mathbf{l}_A - \mathbf{r}_A)(a_2) \otimes \mathrm{id})(\nu(a_1) - \tau(\nu(a_1)).
\end{aligned}$$

一个**Leibniz 双代数** 是一个三元组 $(A, *, \vartheta)$，其中 $(A, *)$ 是一个莱布尼茨代数，(A, ϑ) 是一个莱布尼茨余代数，并且满足以下方程：

$$\begin{aligned}
\tau((\tilde{\mathbf{r}}_A(a_2) \otimes \mathrm{id})(\vartheta(a_1))) &= (\tilde{\mathbf{r}}_A(a_1) \otimes \mathrm{id})(\vartheta(a_2)),\\
\vartheta(a_1 * a_2) &= (\mathrm{id} \otimes \tilde{\mathbf{r}}_A(a_2) - (\tilde{\mathbf{l}}_A + \tilde{\mathbf{r}}_A)(a_2) \otimes \mathrm{id})((\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} + \tau)(\vartheta(a_1)))\\
&\quad + (\mathrm{id} \otimes \tilde{\mathbf{l}}_A(a_1) + \tilde{\mathbf{l}}_A(a_1) \otimes \mathrm{id})(\vartheta(a_2)),
\end{aligned}$$

对任意a_1,$a_2 \in A$。

定义 3.2 ([26])。一个**对偶前 Poisson 双代数（DPP 双代数）**是一个五元组$(A, \circ, *, \nu, \vartheta)$，其中$(A, \circ, *)$ 是一个 *DPP* 代数，(A, ν, ϑ) 是一个 *DPP* 余代数，$(A, \circ, \nu)$ 是一个置换双代数，$(A, *, \vartheta)$是一个 *Leibniz* 双代数，并且满足以下相容条件：

$$\nu(a_1 * a_2) = (\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_A(a_1) + \mathbf{l}_A(a_1) \otimes \mathrm{id})(\nu(a_2)) + ((\mathbf{l}_A - \mathbf{r}_A)(a_2) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \mathbf{r}_A(a_2))((\vartheta + \tau(\vartheta))(a_1)), \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta(a_1 \circ a_2) &= (\mathrm{id} \otimes \mathbf{l}_A(a_1))(\vartheta(a_2)) + (\mathrm{id} \otimes \mathbf{r}_A(a_2))(\vartheta(a_1)) - ((\tilde{\mathbf{l}}_A + \tilde{\mathbf{r}}_A)(a_1) \otimes \mathrm{id})(\nu(a_2))\\
&\quad - ((\tilde{\mathbf{l}}_A + \tilde{\mathbf{r}}_A)(a_2) \otimes \mathrm{id})((\nu - \tau(\nu))(a_1)),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \tilde{\mathbf{r}}_A(a_1))(\tau(\nu(a_2))) = -(\mathbf{r}_A(a_2) \otimes \mathrm{id})(\vartheta(a_1)), \tag{3.3}$$

(3.4) $$\nu(a_1 *a_2) = (\mathrm{id}\otimes \mathbf{l}_A(a_1) - \mathbf{l}_A(a_1)\otimes \mathrm{id})(\vartheta(a_2)) + (\mathrm{id}\otimes \tilde{}\mathbf{r}_A(a_2) - (\mathbf{l}_A + \tilde{}\mathbf{r}_A)(a_2)\otimes \mathrm{id})((\nu-\tau(\nu))(a_1)),$$

(3.5) $$(\vartheta+\tau(\vartheta))(a_1\circ a_2) = (\mathrm{id}\otimes \mathbf{l}_A(a_1))((\vartheta+\tau(\vartheta))(a_2)) + (\mathrm{id}\otimes \mathbf{l}_A(a_2))((\vartheta+\tau(\vartheta))(a_1)) - (\tilde{\mathbf{l}}_A(a_1)\otimes\mathrm{id})((\nu-\tau(\nu))(a_2)) - (\tilde{\mathbf{l}}_A(a_2)\otimes\mathrm{id})((\nu-\tau(\nu))(a_1)),$$

(3.6) $$\vartheta(a_1\circ a_2) = (\mathbf{l}_A(a_1)\otimes\mathrm{id})(\vartheta(a_2)) - (\mathrm{id}\otimes\tilde{\mathbf{r}}_A(a_2))((\nu-\tau(\nu))(a_1)) + (\mathrm{id}\otimes\tilde{\mathbf{l}}_A(a_1))(\nu(a_2)) + ((\mathbf{l}_A - \mathbf{r}_A)(a_2)\otimes\mathrm{id})((\vartheta+\tau(\vartheta))(a_1)),$$

(3.7) $$\nu(a_1 * a_2 + a_2 * a_1) = (\mathrm{id}\otimes(\tilde{\mathbf{l}}_A + \tilde{\mathbf{r}}_A)(a_1))(\nu(a_2)) + ((\tilde{\mathbf{l}}_A + \tilde{\mathbf{r}}_A)(a_1)\otimes\mathrm{id})(\tau(\nu(a_2))) + (\mathrm{id}\otimes(\mathbf{l}_A - \mathbf{r}_A)(a_2))(\vartheta(a_1)) + ((\mathbf{l}_A - \mathbf{r}_A)(a_2)\otimes\mathrm{id})(\tau(\vartheta(a_1))).$$

在 [26], Lu 引入了 DPP 代数的匹配对和 Manin 三元组的概念，并阐释了 DPP 代数的匹配对、DPP 代数的 Manin 三元组与 DPP 双代数之间的等价关系。本文主要研究一些特殊的 DPP 双代数。设 $(A, *)$ 是一个莱布尼茨代数。我们定义一个线性映射 $F: A \to \mathfrak{gl}(A\otimes A)$，定义如下

$$F(a) := (\tilde{\mathbf{l}}_A + \tilde{\mathbf{r}}_A)(a)\otimes\mathrm{id}) - \mathrm{id}\otimes\tilde{\mathbf{r}}_A(a).$$

元素 $r \in A\otimes A$ 称为 **Leibniz 不变**，如果 $F(a)(r) = 0$ 对所有 $a \in A$成立。若存在元素 $r \in A\otimes A$ 使得 $(A, *, \vartheta_r)$ 是一个 Leibniz 双代数，其中 $\vartheta_r: A \to A\otimes A$ 由下式给出

(3.8) $$\vartheta_r(a) = F(a)(r),$$

对任意 $a \in A$，则 $(A, *, \vartheta_r)$ 称为与 r 相伴的 **余边 Leibniz 双代数**。设 $(A, *)$ 为莱布尼茨代数，且 $r = \sum_i x_i\otimes y_i \in A\otimes A$。方程

$$\mathbf{L}_r = r_{12} * r_{13} + r_{12} * r_{23} - r_{23} * r_{12} + r_{23} * r_{13} = 0$$

称为莱布尼茨代数 $(A, *)$ 中的（经典）莱布尼茨杨–巴克斯特方程 (LYBE)，其中 $r_{12} * r_{13} = \sum_{i,j}(x_i * x_j)\otimes y_i\otimes y_j$，$r_{12} * r_{23} = \sum_{i,j} x_i\otimes(y_i * x_j)\otimes y_j$，$r_{23} * r_{12} = \sum_{i,j} x_j\otimes(x_i * y_i)\otimes y_i$以及 $r_{23} * r_{13} = \sum_{i,j} x_j\otimes x_i\otimes(y_i * y_j)$。设 $(A, \circ)$ 为置换代数，且 $r = \sum_i x_i\otimes y_i \in A\otimes A$。则

$$\mathbf{P}_r := r_{12}\circ r_{23} - r_{13}\circ r_{23} + r_{12}\circ r_{13} - r_{13}\circ r_{12} = 0$$

称为 $(A, \circ)$ 中的（经典）置换 Yang-Baxter 方程 (PYBE)，其中 $r_{12}\circ r_{23} := \sum_{i,j} x_i\otimes(y_i\circ x_j)\otimes y_j$, $r_{13}\circ r_{23} := \sum_{i,j} x_i\otimes x_j\otimes(y_i\circ y_j)$, $r_{12}\circ r_{13} := \sum_{i,j}(x_i\circ x_j)\otimes y_i\otimes y_j$, $r_{13}\circ r_{12} := \sum_{i,j}(x_i\circ x_j)\otimes y_j\otimes y_i$。若元素 $r \in A\otimes A$ 满足以下条件，则称其为 perm不变:

$$G(a) := (\mathrm{id}\otimes\mathbf{r}_A(a) + (\mathbf{r}_A - \mathbf{l}_A)(a)\otimes\mathrm{id})(r) = 0$$

对任意$a \in A$。若存在元素 $r \in A\otimes A$，使得 $(A, \circ, \nu_r)$ 是一个置换双代数，其中 re

(3.9) $$\nu_r(a) = G(a)(r),$$

对任意 $a \in A$，则称置换双代数 $(A, \circ, \nu_r)$ 为与r相关的**上边缘perm双代数**。

设 $(A, \circ, *)$ 是一个 DPP 代数。方程 $\mathbf{P}_r = \mathbf{L}_r = 0$ 在 $(A, \circ, *)$ 中称为（经典）**对偶前泊松杨–巴克斯特方程**（DPYBE）。元素 $r \in A\otimes A$ 称为**DP不变**，如果$F(a)(r) = G(a)(r) = 0$；如果$r = \tau(r)$（分别为$r = -\tau(r)$），则称其为**对称**（分别为**斜对称**）。

命题 3.3 ([26])。设 $(A, \circ, *)$ 是一个 *DPP* 代数，$r \in A\otimes A$，ϑ_r，ν_r：$A \to A\otimes A$ 分别由方程 (3.8) 和 (3.9)给出。

(i) 若 r 是 $(A, \circ, *)$ 中 *DPYBE* 的一个解，且 $r - \tau(r)$ 是 *DP*不变的，则 $(A, \circ, *, \nu_r, \vartheta_r)$ 是一个 *DPP* 双代数，称为与 r 关联的拟三角 *DPP* 双代数。*(ii)* 若 r 是 $(A, \circ, *)$ 中 *DPYBE* 的一个对称解，则 $(A, \circ, *, \nu_r, \vartheta_r)$ 是一个 *DPP* 双代数，称为与 r 关联的三角 *DPP* 双代数。

设 $(A, \circ, *)$ 是一个 DPP 代数。对于任意 $r \in A\otimes A$，我们定义一个线性映射 $r^\sharp: A^* \to A$ 如下:

$$\langle r^\sharp(\xi_1), \xi_2\rangle = \langle \xi_1\otimes\xi_2, r\rangle,$$

对于任意 $\xi_1, \xi_2 \in A^*$，并记 $\mathcal{I} = r^\sharp - \tau(r)^\sharp: A^* \to A$。

定义 3.4. 设 $(A, \circ, *)$ 是一个 *DPP* 代数，$r \in A \otimes A$，且$(A, \circ, *, \nu_r, \vartheta_r)$ 是与 r 相关的拟三角 *DPP* 双代数。如果 $\mathcal{I} = r^\sharp - \tau(r)^\sharp : A^* \to A$ 是向量空间的一个同构，则称 $(A, \circ, *, \nu_r, \vartheta_r)$ 为可因子化 *DPP* 双代数。

根据 [21] 中给出的可分解置换双代数定义和 [7], 中给出的可因子化 Leibniz 双代数定义，容易看出，拟三角 DPP 双代数 $(A, \circ, *, \nu, \vartheta)$ 是可因子化的，当且仅当作为置换双代数的 $(A, \circ, \nu)$ 是可因子化的，或者作为 Leibniz 双代数的 $(A, *, \vartheta)$ 是可因子化的。可因子化 DPP 双代数大量存在，而且我们可以从任意 DPP 双代数构造出一个可因子化 DPP 双代数。设 $(A, \circ, *, \nu, \vartheta)$ 是一个 DPP 双代数，$\tilde{r} \in A \otimes A^* \subset (A \oplus A^*) \otimes (A \oplus A^*)$ 对应于恒等映射 $\mathrm{id} : A \to A$。也就是说，$\tilde{r} = \sum^n i_{=1} e_i \otimes f_i$，其中 $\{e_1, e2, \cdots, e_n\}$ 是 A 的一组基，而 $\{f_1, f2, \cdots, f_n\}$ 是其在 A^* 中的对偶基。将 (ν, ϑ) 在 A^* 上的对偶 DPP代数结构记为 $(\circ', *')$。设 $\nu_{\tilde{r}}, \vartheta_{\tilde{r}} : A \oplus A^* \to (A \oplus A^*) \otimes (A \oplus A^*)$ 是分别由方程 (3.9) 和 (3.8) 定义的线性映射。于是我们得到一个可分解置换双代数 $(A \oplus A^*, \tilde{\circ}, \nu_{\tilde{r}})$，其中

$$(a_1, \xi_1)\tilde{\circ}(a_2, \xi_2) = \big(a_1 \circ a_2 + \mathbf{l}^*_{A^*}(\xi_1)(a_2) + \mathbf{r}^*_{A^*}(\xi_2)(a_1),\ \xi_1 \circ' \xi_2 + \mathbf{l}^*_A(a_1)(\xi_2) + \mathbf{r}^*_A(a_2)(\xi_1)\big),$$

对于任意 $a_1, a_2 \in A$ 和 $\xi_1, \xi_2 \in A^*$ (见 [21, 定理 3.6]) ，以及一个可因子化莱布尼茨双代数（$A \oplus A^*$, $\tilde{*}$, $\vartheta_{\tilde{r}}$），其中

$$(a_1, \xi_1)\tilde{*}(a_2, \xi_2) = \big(a_1 * a_2 + \tilde{\mathbf{l}}^*_{A^*}(\xi_1)(a_2) + \tilde{\mathbf{r}}^*_{A^*}(\xi_2)(a_1),\ \xi_1 *' \xi_2 + \tilde{\mathbf{l}}^*_A(a_1)(\xi_2) + \tilde{\mathbf{r}}^*_A(a_2)(\xi_1)\big),$$

对于任意 $a_1, a_2 \in A$ 和 $\xi_1, \xi_2 \in A^*$ (见 [7, 定理 3.6])。

命题 3.5. 设$(A, \circ, *, \nu, \vartheta)$ 是一个 *DPP* 双代数，采用上述记号，则$(A \oplus A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*}, \nu_{\tilde{r}}, \vartheta_{\tilde{r}})$ 是一个可因子化 *DPP* 双代数。

证明。我们首先证明 $(A \oplus A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*}, \nu_{\tilde{r}}, \vartheta_{\tilde{r}})$ 是一个 DPP 双代数。事实上，根据 [3, 定理 2.36], ，我们得到 $\tilde{r}$ 是 $(A \oplus A^*, \tilde{\circ})$ 中 $P_r = 0$ 的一个解；根据 [32, 定理 3.3], $\tilde{r} - \tau(\tilde{r})$ 是 perm不变的。此外，$\tilde{r}$ 是 $(A \oplus A^*, \tilde{*})$ 中 $L_r = 0$ 的一个解，且 $\tilde{r} - \tau(\tilde{r})$ 是莱布尼茨不变的（见 [8, 命题 2.10]）。因此，$\tilde{r}$ 是 $(A \oplus A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*})$ 中 DPYBE 的一个解，且 $\tilde{r} - \tau(\tilde{r})$ 是 DP不变的。这意味着 $(A \oplus A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*}, \nu_{\tilde{r}}, \vartheta_{\tilde{r}})$ 是一个拟三角 DPP 双代数。最后，由于 $(A \oplus A^*, \tilde{\circ}, \nu_{\tilde{r}})$ 是一个可分解置换双代数，我们得到 $\mathcal{I}$ 是一个线性同构。因此，$(A \oplus A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*}, \nu_{\tilde{r}}, \vartheta_{\tilde{r}})$ 是一个可因子化 DPP 双代数。□

在 [21] （分别地，在 [7]）中，作者已经证明，可因子化置换双代数（分别地，可分解 Leibniz 双代数）与二次 Rota-Baxter 置换代数（分别地，二次 Rota–Baxter Leibniz 代数）之间存在紧密联系。设 $(A, \circ, *)$ 是一个 DPP 代数。回顾一下，线性映射 $R : A \to A$ 称为 $(A, \circ, *)$ 上的 **权为** λ 的 Rota-Baxter 算子，如果

$$R(a_1) \circ R(a_2) = R(R(a_1) \circ a_2 + a_1 \circ R(a_2) + \lambda a_1 \circ a_2),$$
$$R(a_1) * R(a_2) = R(R(a_1) * a_2 + a_1 * R(a_2) + \lambda a_1 * a_2),$$

对任意 $a_1, a_2 \in A$ 均成立。权为 λ 的 **Rota-Baxter DPP 代数** $(A, \circ, *, R)$ 是指配备了权为 λ 的 Rota-Baxter 算子 R 的 DPP 代数 $(A, \circ, *)$。对于任意权为 λ 的 Rota-Baxter DPP 代数 $(A, \circ, *, R)$，我们可以得到一个新的 DPP 代数 $(A, \circ_R, *_R)$，称为 $(A, \circ, *, R)$ 的 **后继 DPP 代数**，其中 $\circ_R, *_R : A \otimes A \to A$ 分别定义为

$$a_1 \circ_R a_2 = R(a_1) \circ a_2 + a_1 \circ R(a_2) + \lambda a_1 \circ a_2,$$
$$a_1 *_R a_2 = R(a_1) * a_2 + a_1 * R(a_2) + \lambda a_1 * a_2,$$

对任意$a_1, a_2 \in A$。此外，R 是从 $(A, \circ_R, *_R)$ 到 $(A, \circ, *)$ 的 DPP 代数同态。我们为二次 DPP 代数赋予满足相容条件的 Rota-Baxter 算子，并引入二次 Rota–Baxter DPP 代数的概念。

定义 3.6。五元组（$A, \circ, *, \omega, R$）称为权为 λ 的二次 *Rota–Baxter DPP* 代数，若（$A, \circ, *, \omega$）是二次*DPP*代数，（$A, \circ, *, R$）是权为 λ 的 *Rota-Baxter DPP* 代数，并满足以下相容条件：对任意 $a_1, a_2 \in A$，

$$\omega(a_1, R(a_2)) + \omega(R(a_1), a_2) + \lambda\omega(a_1, a_2) = 0. \tag{3.10}$$

设 (A, $\circ, *$) 是一个 DPP 代数。容易看出，(A, $\circ, *, \omega$, R) 是权为 λ 的二次 Rota–Baxter DPP 代数，当且仅当 (A, $\circ, \omega$, R) 是权为 λ 的二次 Rota-Baxter perm 代数，且 (A, $*, \omega$, R) 是权为 λ 的二次 Rota–Baxter Leibniz 代数。关于二次 Rota-Baxter perm 代数和二次 Rota-Baxter Leibniz 代数的详情，见 [7] 和 [21]。接下来，我们展示二次 Rota-Baxter DPP 代数与拟三角泊松双二代数之间存在密切关系。为方便起见，我们先介绍一些关于双线性型的基本事实。设 A 是一个带有非退化双线性型 $\omega(-,-)$ 的向量空间。线性同构 $J_\omega : A^* \to A$ 定义如下

$$\langle J_\omega^{-1}(a_1),\ a_2\rangle = \omega(a_1, a_2),$$

对于任意$a_1, a_2 \in A$，这称为由**线性同构** $\omega(-,-)$诱导。进一步，将$r_\omega \in A \otimes A$ 记作

$$\langle r_\omega,\ \xi_1 \otimes \xi_2\rangle = \langle J_\omega(\xi_1),\ \xi_2\rangle,$$

对于任意 $\xi_1, \xi_2 \in A^*$，这称为J_ω的二阶张量形式。设$(A, \circ, *)$是一个DPP代数，且 $\omega(-,-)$是A上的非退化双线性型。那么$(A, \circ, \omega)$是二次 perm 代数，当且仅当上述定义的$r_\omega \in A \otimes A$是斜对称且 perm不变 [21], ；而$(A, *, \omega)$是二次 Leibniz 代数，当且仅当r_ω 是斜对称且 Leibniz 不变 [7]。因此，$(A, \circ, *, \omega)$是二次DPP代数，当且仅当r_ω 是斜对称且 DP不变。

首先，我们考察三角 DPP 双代数与权为 0 的二次 Rota–Baxter DPP 代数之间的关系。设 $(A, \circ, *, \omega, R)$ 是一个权为 0 的二次 Rota–Baxter DPP 代数。定义 $r_\omega \in A \otimes A$，使得 $\langle r_\omega, \xi_1 \otimes \xi_2\rangle = \langle R(J_\omega(\xi_1)),\ \xi_2\rangle$ 对任意 $\xi_1, \xi_2 \in A^*$ 均成立。根据 [21, 命题 5.5],，可得 r_ω 是 $\mathbf{L}_r = 0$ 的对称解；根据 [7, 推论 4.18], ，可得 r_ω 是 $\mathbf{P}_r = 0$ 的对称解。在这种情况下，r_ω 是 $(A, \circ, *)$ 中 DPYBE 的对称解。因此，我们有

命题 3.7. 设 $(A, \circ, *, \omega, R)$ 是一个权为 *0* 的二次 *Rota–Baxter DPP* 代数，且 $J_\omega : A^* \to A$ 是由 $\omega(-,-)$ 诱导的线性同构。那么 $(A, \circ, *, \nu_{r_\omega}, \vartheta_{r_\omega})$ 是一个三角 *DPP* 双代数，其中 $r_\omega \in A \otimes A$ 由 $\langle r_\omega, \xi_1 \otimes \xi_2\rangle = \langle R(J_\omega(\xi_1)),\ \xi_2\rangle$ 给出，对任意 $\xi_1, \xi_2 \in A^*$ 均成立。

第二，我们证明可因子化 Poisson 双二代数与非零权的二次 Rota–Baxter DPP代数之间存在一一对应。

定理 3.8. 设 $(A, \circ, *, \nu_r, \vartheta_r)$ 为具有 $\mathcal{I} = r^\sharp - \tau(r)^\sharp$ 的可因子化 *DPP* 代数。则 $(A, \circ, *, \omega_{\mathcal{I}}, R)$是权为 λ 的二次 *Rota–Baxter DPP* 代数，其中线性映射 $R : A \to A$ 与双线性型 $\omega_{\mathcal{I}}(-,-)$ 分别定义为

$$R := \lambda\tau(r)^\sharp\mathcal{I}^{-1} \qquad and \qquad \omega_{\mathcal{I}}(a_1, a_2) := \langle \mathcal{I}^{-1}(a_1),\ a_2\rangle,$$

对任意 $a_1, a_2 \in A$。

反之，对任意权为 λ 的二次 *Rota–Baxter DPP* 代数 $(A, \circ, *, \omega, R)$ 以及由 $\omega(-,-)$ 诱导的线性同构 $J_\omega : A^* \to A$。若 $\lambda \neq 0$，我们定义

$$r^\sharp := \tfrac{1}{\lambda}(R + \lambda \mathrm{id})J_\omega : \quad A^* \longrightarrow A,$$

并通过 $\langle r^\sharp(\xi)、\ \eta\rangle = \langle r、\ \xi \otimes \eta\rangle$定义 $r \in A \otimes A$。于是，r 是 $(A, \circ, *)$ 中杨–巴克斯特方程的一个解，并诱导出一个可因子化 *DPP* 代数 $(A, \circ, *, \nu_r, \vartheta_r)$，其中 ν_r 和 ϑ_r 分别由公式 *(3.9)* 和 *(3.8)* 定义。

证明。如果 $(A, \circ, *, \nu_r, \vartheta_r)$ 是一个可因子化 DPP 双代数，则根据 [21, 定理 5.8], 可得，$(A, \circ, \omega_I, R)$ 是一个权为 λ 的二次 Rota-Baxter perm 代数；根据 [7, 定理 4.22], 可得，$(A, *, \omega_I, R)$ 是一个权为 λ 的二次 Rota-Baxter Leibniz 代数。因此，$(A, \circ, *, \omega_I, R)$ 是一个权为 λ 的二次 Rota-Baxter DPP 代数。

反之，若 $(A, \circ, *, \omega, R)$ 是权为 $\lambda, \lambda \neq 0$ 的二次 Rota–Baxter DPP 代数，则由[21, 命题 4.13], 可得，r 是 $(A, \circ)$ 中 PYBE 的一个解，并诱导出一个可分解置换双代数 $(A, \circ, \nu_r)$；由 [7, 命题 4.12], 可得，r 是 $(A, *)$ 中 LYBE 的一个解，并诱导出一个可因子化 Leibniz 双代数 $(A, \cdot, \Delta_r)$。因此，r 是 $(A, \circ, *)$ 中 DPYBE 的一个解，而 $(A, \circ, *, \nu_r, \vartheta_r)$ 是一个可因子化 DPP 双代数。□

设 $(A, \circ, *, R)$ 是权为 λ 的 Rota-Baxter DPP 代数。考虑 $(A, \circ, *)$ 的余正则表示 $(A^*, \mathrm{l}_A^*, \mathrm{l}_A^* - \mathrm{r}_A^*, \mathrm{l}_A^*, -\mathrm{l}_A^* - \tilde{\mathrm{r}}_A^*)$。可得 $(A \ltimes A^*, \tilde{\circ}, \mathcal{B}, R \oplus R^*)$ 是权为 λ [21] 的二次 Rota-Baxter perm 代数，而 $(A \ltimes A^*, \tilde{*}, \mathcal{B}, R \oplus \hat{R}^*)$ 是权为 λ [7] 的二次 Rota-Baxter Leibniz 代数，其中 $\tilde{\circ}$ 和 $\tilde{*}$ 分别由 (2.1) 和 (2.2) 给出，双线性型 $\mathcal{B}(-,-)$ 由 $\mathcal{B}((a1, \xi_1), (a2, \xi_2)) = \langle a1, \xi_2\rangle - \langle a2, \xi_1\rangle$ 给出，其中任意 $a_1, a_2 \in A$，$\xi_1, \xi_2 \in A^*$，且 $\hat{R} := -\lambda \mathrm{id} - R$。因此，可得一个二次 Rota-Baxter DPP 代数 $(A \ltimes A^*, \cdot_{\ltimes}, \diamond_{\ltimes}, \mathcal{B}, R \oplus \hat{R}^*)$。作为定理 3.8 的直接应用，我们可以通过半直积构造可因子化 NP 双代数。

推论 *3.9.* 设 *$(A, \circ, *, \omega, R)$* 是权为 $\lambda, \lambda \neq 0$,*$\{e_1, e2, \cdots$* 的二次 *Rota–Baxter DPP* 代数，*$e_n\}$ b* 是 *A* 的一组基，*$\{f_1, f2, \cdots, f_n\}$* 是 *A^** 中的对偶基。那么 *$(A \ltimes A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*}, \nu_r, \vartheta_r)$* 是一个可因子化 *DPP* 双代数，其中 ν_r 和 ϑ_r 由式 *(3.9)* 和 *(3.8)* 定义，

$$r = \frac{1}{\lambda} \sum_i \Big(f_i \otimes (\lambda \mathrm{id} + R)(e_i) + R(e_i) \otimes f_i \Big).$$

证明. 由于 $(A, \circ, *, \omega, R)$ 是权为 λ 的二次 Rota–Baxter DPP 代数，我们得到一个权为 λ 的二次 Rota–Baxter DPP 代数 $(A \ltimes A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*}, \mathcal{B}, R \oplus R^*)$。对任意 $a \in A$ 和 $\xi \in A^*$，注意到 $J_{\mathcal{B}}^{-1} : A \ltimes A^* \longrightarrow (A \ltimes A^*)^*$, $(a, \xi) \mapsto (-\xi, a)$，可得线性映射 $r^\sharp := \frac{1}{\lambda}(R \oplus \hat{R}^* + \lambda \mathrm{id}) J_{\mathcal{B}} : (A \ltimes A^*)^* \to A \ltimes A^*$, $\hat{R} = -\lambda \mathrm{id} - R$。也就是说，对任意 $a \in A$ 和 $\xi \in A^*$,

$$r^\sharp(\xi, a) = \frac{1}{\lambda}(R \oplus \hat{R}^* + \lambda \mathrm{id}) J_{\mathcal{B}}(\xi, a) = \frac{1}{\lambda}(R(a) + \lambda a, \ -\hat{R}^*(\xi) - \lambda \xi).$$

因此，对于任意 $1 \leq i, j \leq n$，有

$$\langle r, \ e_i \otimes f_j \rangle = \langle r^\sharp(e_i), \ f_j \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle R(e_i) + \lambda e_i, \ f_j \rangle,$$
$$\langle r, \ f_j \otimes e_i \rangle = \langle r^\sharp(f_j), \ e_i \rangle = -\frac{1}{\lambda} \langle \hat{R}^*(f_j) + \lambda f_j, \ e_i \rangle = -\frac{1}{\lambda} \langle f_j, \ \hat{R}(e_i) + \lambda e_i \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle f_j, \ R(e_i) \rangle.$$

也就是说，若定义 $r \in (A \ltimes A^*) \otimes (A \ltimes A^*)$，使得 $\langle r^\sharp(\xi_1, a_1), (\xi_2, a_2)\rangle = \langle r, (\xi_1, a_1) \otimes (\xi_2, a_2)\rangle$，则 $r = \frac{1}{\lambda} \sum_i (f_i \otimes (\lambda \mathrm{id} + R)(e_i) + R(e_i) \otimes f_i)$。因此，由定理 3.8 可得，$(A \ltimes A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*}, \nu_r, \vartheta_r)$ 是一个可因子化 DPP 代数。□

特别地，有

推论 3.10. 设 $(A, \circ, *)$ 是一个 *DPP* 代数，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 A 的一组基，$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$是其在 A^* 中的对偶基。记 $\tilde{r} = \sum_i e_i \otimes f_i$。则 $(A \ltimes A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*}, \nu_{\tilde{r}}, \vartheta_{\tilde{r}})$ 是一个可因子化 *DPP* 双代数。

证明。由于 $\mathrm{id} : A \to A$ 是泊松二元代数 $(A, \circ, *)$ 上权为 -1 的 Rota-Baxter 算子，我们得到一个权为 -1 的二次 Rota–Baxter DPP 代数 $(A \ltimes A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*}, \mathcal{B}, R \oplus 0)$。注意到推论 3.9 中的元素 $r \in (A \ltimes A^*) \otimes (A \ltimes A^*)$ 就是 $\tilde{r}$，因此我们得到一个可因子化 DPP 双代数 $(A \ltimes A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*}, \nu_{\tilde{r}}, \vartheta_{\tilde{r}})$。□

例 *3.11.* 设 *$(A = \mathbb{k}\{e_1, e_2\}, \circ, *)$* 是例 *2.2* 中讨论的二维 *DPP* 代数，即 $e_2 \circ e_2 = e_1 = e_2 * e_2$。设 $\{f_1, f_2\}$ 是 $\{e_1, e_2\}$ 在 A^* 中的对偶基。那么半直积

DPP 代数 $(A \ltimes A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*})$ 由 $A \ltimes A^* = \mathbb{k}\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$ 给出，

$$e_2 \tilde{\circ} e_2 = e_2, \qquad e_2 \tilde{\circ} f_2 = -f_2 = f_2 \tilde{\circ} e_2,$$
$$e_2 \tilde{*} e_2 = e_2, \qquad e_2 \tilde{*} f_2 = -f_2 = f_2 \tilde{*} e_2.$$

然后可以验证，$\tilde{r} = e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$ 是DPYBE 在$(A \ltimes A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*})$中的一个解，且诱导的余乘法为

$$\nu_{\tilde{r}}(e_2) = -2e_2 \otimes f_2, \qquad \nu_{\tilde{r}}(f_2) = f_2 \otimes f_2 = \vartheta_{\tilde{r}}(f_2), \qquad \vartheta_{\tilde{r}}(e_2) = e_2 \otimes f_2.$$

因此，我们得到一个 *DPP* 双代数 $(A \ltimes A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*}, \nu_{\tilde{r}}, \vartheta_{\tilde{r}})$。我们将 $(A \ltimes A^*)^*$ 中的 $\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$ 的对偶基记为 $\{e_1^*, e_2^*, f_1^*, f_2^*\}$。注意，线性映射 $\tilde{r}^\sharp, \tau(\tilde{r})^\sharp : (A \ltimes A^*)^* \to A \ltimes A^*$ 由下式给出

$$\tilde{r}^\sharp(e_1^*) = f_1, \qquad \tilde{r}^\sharp(e_2^*) = f_2, \qquad \tau(\tilde{r})^\sharp(f_1^*) = -e_1, \qquad \tau(\tilde{r})^\sharp(f_2^*) = -e_2,$$

我们得到 $\mathcal{I} = \tilde{r}^\sharp - \tau(\tilde{r})^\sharp$ 由下式给出

$$\mathcal{I}(e_1^*) = f_1, \qquad \mathcal{I}(e_2^*) = f_2, \qquad \mathcal{I}(f_1^*) = e_1, \qquad \mathcal{I}(f_2^*) = e_2.$$

显然，$\mathcal{I}$ 是一个线性同构。因此，$(A \ltimes A^*, \tilde{\circ}, \tilde{*}, \nu_{\tilde{r}}, \vartheta_{\tilde{r}})$ 是一个可因子化 *DPP* 双代数。

4. 由泊松双代数得到的无限维DPP双代数

本节回顾二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数的概念，即配备了不变双线性型的 $\mathbb{Z}$-分次置换代数。我们证明，有限维泊松双代数与二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数的张量积可以自然地赋予完备DPP双代数结构。此外，通过讨论诱导的无限维DPP代数中 DPYBE 的完备解与原泊松代数中 PoiYBE 的解之间的关系，我们得到：若原泊松双代数是余边界的（分别为拟三角的、三角的），则诱导的无限维DPP双代数也是余边界的（分别为拟三角的、三角的）。首先，我们通过与 $\mathbb{Z}$-分次置换代数作张量积，从泊松（余）代数构造 DPP（余）代数。

定义4.1. *A* **$\mathbb{Z}$-分次 DPP 代数**（分别地，**$\mathbb{Z}$-分次置换代数**）是一个 *DPP* 代数$(A, \circ, *)$（分别地，是一个置换代数$(B, \circ)$），并带有线性分解 $A = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$（分别地，$B = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} B_i$），使得每个 A_i（分别地，B_i）都是有限维的，$A_i \circ A_j \subseteq A_{i+j}$且 $A_i * A_j \subseteq A_{i+j}$（分别地，$B_i \circ B_j \subseteq B_{i+j}$）对所有 $i, j \in \mathbb{Z}$均成立。

例 4.2 ([20])。设 $B = \{f_1\partial_1 + f_2\partial_2 \mid f_1, f_2 \in \mathbb{k}[x_1^{\pm}, x_2^{\pm}]\}$ 并定义一个二元运算 $\circ : B \otimes B \to B$ 乘以

$$(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \partial_s) \circ (x_1^{j_1} x_2^{j_2} \partial_t) := \delta_{s,1} x_1^{i_1+j_1+1} x_2^{i_2+j_2} \partial_t + \delta_{s,2} x_1^{i_1+j_1} x_2^{i_2+j_2+1} \partial_t,$$

对任意 $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$ 以及 $s, t \in \{1, 2\}$。则$(B, \circ)$是一个 $\mathbb{Z}$-分次置换代数，其线性分解为 $B = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} B_i$，其中

$$B_i = \Big\{ \sum_{k=1}^{2} f_k \partial_k \mid f_k \text{ is a homogeneous polynomial with } \deg(f_k) = i - 1,\ k = 1, 2 \Big\}$$

对所有 $i \in \mathbb{Z}$。

根据命题 2.7，我们得到以下命题。

命题 4.3. 设（P，$\cdot$，$[-,-]$）是一个有限维泊松代数，且（$B = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} B_i$，$\circ_B$）是一个 $\mathbb{Z}$分次的置换代数。在 $P \otimes B$ 上定义二元运算如下

$$(p_1, b_1) \circ (p_2, b_2) := (p_1 p_2) \otimes (b_1 \circ_B b_2),$$
$$(p_1, b_1) * (p_2, b_2) := [p_1, p_2] \otimes (b_1 \circ_B b_2),$$

对任意 $p_1, p_2 \in P$ 和 $b_1, b_2 \in B$ 均成立。则（$P \otimes B$, $\circ$, $*$）是一个 $\mathbb{Z}$分次的 *DPP* 代数，称为由（P, $\cdot$, $[-,-]$）**和**（B, $\circ_B$）诱导的 $\mathbb{Z}$ **分次 DPP 代数。**

证明。 根据命题 2.7，$(P \otimes A, \circ, *)$ 是一个 DPP 代数。由于 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \circ_B)$ 是 $\mathbb{Z}$-分次的，$(P \otimes B, \circ, *)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次 DPP 代数。 □

回顾一下，余交换余结合余代数是一个向量空间 A，配有一个线性映射$\Delta : A \to A \otimes A$，使得 $\tau\Delta = \Delta$ 且 $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$。李余代数是一个向量空间 g，配有一个线性映射 $\delta : g \to g \otimes g$，使得 $\tau\delta = -\delta$ 且 $(\mathrm{id} \otimes \delta)\delta - (\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \delta)\delta = (\delta \otimes \mathrm{id})\delta$。若 (P, Δ) 是余交换余结合余代数，(P, δ) 是李余代数，且 $(\mathrm{id} \otimes \Delta)\delta = (\delta \otimes \mathrm{id})\Delta + (\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \delta)\Delta$，则称 (P, Δ, δ) 为泊松余代数。为进行泊松余代数仿射化，我们需要扩展余乘法 ν, ϑ 的陪域，以允许无穷和。设 $U = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} U_i$ 和 $V = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ 为 $\mathbb{Z}$-分次向量空间。我们称 U 和 V 的完备张量积为向量空间

$$U \hat{\otimes} V := \prod_{i,j\in\mathbb{Z}} U_i \otimes V_j.$$

若 U 和 V 是有限维的，则 $U \hat{\otimes} V$ 就是通常的张量积 $U \otimes V$。一般而言，$U \hat{\otimes} V$ 中的元素是一个无限形式和 $\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} X_{ij}$，其中 $X_{ij} \in U_i \otimes V_j$。因此，$X_{ij} = \sum_\alpha u_{i,\alpha} \otimes v_{j,\alpha}$是纯张量 $u_{i,\alpha} \otimes v_{j,\alpha} \in U_i \otimes V_j$的形式，其中 α 属于有限指标集。由此，$U \hat{\otimes} V$ 的一般项是一个可能无限的和 $\sum_{i,j,\alpha} u_{i\alpha} \otimes v_{j\alpha}$，其中 $i, j \in \mathbb{Z}$，且 α属于有限指标集（该集合可能依赖于 i, j）。使用这些记号，对于线性映射 $f : U \to U'$ 和 $g : V \to V'$，定义

$$f \hat{\otimes} g : U \hat{\otimes} V \to U' \hat{\otimes} V', \qquad \sum_{i,j,\alpha} u_{i,\alpha} \otimes v_{j,\alpha} \mapsto \sum_{i,j,\alpha} f(u_{i,\alpha}) \otimes g(v_{j,\alpha}).$$

此外，扭转映射 τ有其完备化 $\hat{\tau} : V \hat{\otimes} V \to V \hat{\otimes} V$，$\sum_{i,j,\alpha} u_{i,\alpha} \otimes v_{j,\alpha} \mapsto \sum_{i,j,\alpha} v_{j,\alpha} \otimes u_{i,\alpha}$。此外，我们将（完备的）余乘法定义为线性映射 $\vartheta : V \to V \hat{\otimes} V$，$\vartheta(v) = \sum_{i,j,\alpha} v1_{i,\alpha} \otimes v2_{j,\alpha}$。于是有定义良好的映射

$$(\vartheta \hat{\otimes} \mathrm{id})\vartheta(v) = (\vartheta \hat{\otimes} \mathrm{id})\Big(\sum_{i,j,\alpha} v_{1,i,\alpha} \otimes v_{2,j,\alpha}\Big) := \sum_{i,j,\alpha} \vartheta(v_{1,i,\alpha}) \otimes v_{2,j,\alpha} \in V \hat{\otimes} V \hat{\otimes} V.$$

定义4.4. (*i*) 一个**完备置换余代数**（分别地，**完备 Leibniz 余代数**）是一个偶(B, ν)（分别地，(A, ϑ)），其中 $B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i$（分别地，$A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$）是一个 $\mathbb{Z}$分次向量空间，而 $\nu : B \to B \hat{\otimes} B$（分别地，$\vartheta : A \to A \hat{\otimes} A$）是满足以下条件的线性映射

$$(\nu \hat{\otimes} \mathrm{id})\nu = (\mathrm{id} \hat{\otimes} \nu)\nu = (\tau \hat{\otimes} \mathrm{id})(\nu \hat{\otimes} \mathrm{id})\nu.$$

$$(resp.\ \ (\vartheta \hat{\otimes} \mathrm{id})\vartheta = (\mathrm{id} \hat{\otimes} \vartheta)\vartheta + (\mathrm{id} \hat{\otimes} \hat{\tau})(\vartheta \hat{\otimes} \mathrm{id})\vartheta.)$$

(*ii*) 一个**完备泊松余双代数**是一个三元组(A, ν, ϑ)，其中 $A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ 是一个 $\mathbb{Z}$分次向量空间，而 ν, $\vartheta : A \to A \hat{\otimes} A$ 是满足以下条件的线性映射

$$(\mathrm{id} \hat{\otimes} \nu)\vartheta = (\vartheta \hat{\otimes} \mathrm{id})\nu + (\hat{\tau} \hat{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \hat{\otimes} \vartheta)\nu,$$

$$(\nu \hat{\otimes} \mathrm{id})\vartheta = (\mathrm{id} \hat{\otimes} \vartheta)\nu + (\hat{\tau} \hat{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \hat{\otimes} \vartheta)\nu,$$

$$(\vartheta \hat{\otimes} \mathrm{id})\nu = -(\hat{\tau} \hat{\otimes} \mathrm{id})(\vartheta \hat{\otimes} \mathrm{id})\nu.$$

例4.5 ([20])。 考虑 $\mathbb{Z}$-分次向量空间 $B = \{f_1\partial_1 + f_2\partial_2 \mid f_1, f_2 \in \Bbbk[x_1^{\pm}, x_2^{\pm}]\} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i$，如例*4.2*中所给。定义线性映射 $\nu : B \to B \hat{\otimes} B$:

$$\nu(x_1^m x_2^n \partial_1) = \sum_{i_1,i_2\in\mathbb{Z}} \Big(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \partial_1 \otimes x_1^{m-i_1} x_2^{n-i_2+1} \partial_1 - x_1^{i_1} x_2^{i_2} \partial_2 \otimes x_1^{m-i_1+1} x_2^{n-i_2} \partial_1\Big),$$

$$\nu(x_1^m x_2^n \partial_2) = \sum_{i_1,i_2\in\mathbb{Z}} \Big(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \partial_1 \otimes x_1^{m-i_1} x_2^{n-i_2+1} \partial_2 - x_1^{i_1} x_2^{i_2} \partial_2 \otimes x_1^{m-i_1+1} x_2^{n-i_2} \partial_2\Big),$$

对任意 $m, n \in \mathbb{Z}$。那么，$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \nu)$ 是一个完备置换余代数。

现在，我们考虑泊松余代数的命题4.3的对偶版本。

命题 4.6. 设$(P,\ \Delta,\ \delta)$是一个有限维泊松余代数，且$(B\ =\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i,\ \nu_B)$是一个完备置换余代数。定义两个线性映射 $\nu,\ \vartheta: P\otimes B\to(P\otimes B)\hat{\otimes}(P\otimes B)$ 如下：

$$\nu(p\otimes b)=\Delta(p)\bullet\nu_B(b)=\sum_{(p)}\sum_{i,j,\alpha}(p_{(1)}\otimes b_{1,i,\alpha})\otimes(p_{(2)}\otimes b_{2,j,\alpha}),$$

$$\vartheta(p\otimes b)=\delta(p)\bullet\nu_B(b))=\sum_{[p]}\sum_{i,j,\alpha}(p_{[1]}\otimes b_{1,i,\alpha})\otimes(p_{[2]}\otimes b_{2,j,\alpha}),$$

对于任意 $p\ \in P$ 和 $b\ \in B$，其中 $\Delta(p)=\sum_{(p)}p_{(1)}\otimes p_{(2)},\ \delta(p)=\sum_{[p]}p_{[1]}\otimes p_{[2]}$ 采用 *Sweedler* 记号，且 $\nu_B(b)=\sum_{i,j,\alpha}b1_{,i,\alpha}\otimes b2_{,j,\alpha}$。则 $(P\otimes B,\ \nu,\vartheta)$ 是一个完备泊松余双代数。

证明。对任意 $\sum_l p'_l\otimes p''_l\otimes p'''_l\in P\otimes P\otimes P$ 以及 $\sum_{i,\ j,\ k,\ \alpha}b'_{i,\ \alpha}\otimes b''_{j,\ \alpha}\otimes b'''_{k,\ \alpha}\in B\hat{\otimes}B\hat{\otimes}B$，记作

$$\Big(\sum_l p'_l\otimes p''_l\otimes p'''_l\Big)\bullet\Big(\sum_{i,j,k,\alpha}b'_{i,\alpha}\otimes b''_{j,\alpha}\otimes b'''_{k,\alpha}\Big)=\sum_l\sum_{i,j,k,\alpha}(p'_l\otimes b'_{i,\alpha})\otimes(p''_l\otimes b''_{j,\alpha})\otimes(p'''_l\otimes b'''_{k,\alpha}).$$

那么，使用上述记号，由于 (B,ν_B) 是完备置换余代数，且 $(P,\ \Delta,\delta)$ 是泊松余代数，对任意 $p\otimes b\ \in P\otimes B$，有

$$\begin{aligned}(\nu\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu(p\otimes b))&=((\Delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(p)))\bullet((\nu_B\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu_B(b)))\\&=((\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Delta(p)))\bullet((\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu_B)(\nu_B(b)))=(\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)(\nu(p\otimes b)).\end{aligned}$$

类似地，有 $(\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)\nu=(\tau\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu\hat{\otimes}\mathrm{id})\nu$。因此，$(P\otimes B,\ \nu)$ 是完备置换余代数。由 [15, 命题3。2], 可得 $(P\otimes B,\ \vartheta)$ 是完备莱布尼茨余代数。此外，对任意$p\otimes b\ \in P\otimes B$，注意到

$$\begin{aligned}&(\vartheta\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu(p\otimes b))+(\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})((\vartheta\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu(p\otimes b)))\\&=((\delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(p)))\bullet((\nu_B\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu_B(b)))+((\tau\otimes\mathrm{id})(\delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(p)))\bullet((\tau\hat{\otimes}\mathrm{id})((\nu_B\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu_B(b))))\\&=((\delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(p))-(\delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(p)))\bullet((\nu_B\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu_B(b)))\\&=0,\end{aligned}$$

因为 $(B,\ \nu_B)$ 是完备置换余代数，而 $(P,\ \delta)$ 是李余代数。也就是说，$(\vartheta\hat{\otimes}\mathrm{id})\nu=-(\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})(\vartheta\hat{\otimes}\mathrm{id})\nu$。类似地，$(\mathrm{id}\hat{\otimes}\nu)\vartheta=(\vartheta\hat{\otimes}\mathrm{id})\nu+(\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\hat{\otimes}\vartheta)\nu$，以及 $(\nu\hat{\otimes}\mathrm{id})\vartheta=(\mathrm{id}\hat{\otimes}\vartheta)\nu+(\hat{\tau}\hat{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\hat{\otimes}\vartheta)\nu$。因此，$(P\otimes B,\ \nu,\vartheta)$ 是完备泊松余双代数。□

接下来，我们考虑泊松双代数与 $\mathbb{Z}$-分次置换代数的张量积上的 DPP 双代数结构。

定义 4.7。 设 $\omega(-,-)$ 是 $\mathbb{Z}$-分次置换代数 $(B\ =\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i,\circ)$上的一个双线性型。

(i) 若 $\omega(-,-)$ 满足 $\omega(b_1\circ b_2,b_3)=\omega(b_1,b_2\circ b_3-b_3\circ b_2)$ 对任意 $b_1,b_2,b_3\in B$ 均成立，则称其为不变的；*(ii)* 若存在某个 $m\ \in\mathbb{Z}$ 使得 $\varpi(B_i,B_j)=0$ 当 $i+j+m\ \neq 0$时成立，则称 $\omega(-,-)$ 为分次的。二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数，记作 $(B\ =\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i,\circ,\omega)$，是一个 $\mathbb{Z}$-分次置换代数，并配备一个斜对称、不变、非退化的分次双线性型。

特别地，若 $B\ =B_0$，是一个二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数$(B\ =\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i,\circ,\omega)$，则它就是一个**二次 perm 代数。**

例 *4.8* ([20])。设 $(B\ =\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i,\circ)$ 是例 *4.2* 中给出的 $\mathbb{Z}$-分次置换代数，其中 $B\ =\{f_1\partial_1+f_2\partial_2\mid f_1,f_2\in\Bbbk[x_1^{\pm},\ x_2^{\pm}]\}=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i$。在 $(B\ =\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i,\circ)$ 上定义一个斜对称双线性型 $\omega(-,-)$，如下所示：

$$\omega(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2,\ x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_1)=-\omega(x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_1,\ x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2)=\delta_{i_1+j_1,0}\delta_{i_2+j_2,0},$$

$$\omega(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1,\ x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_1)=\omega(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2,\ x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_2)=0,$$

对任意 $i_1,i_2,j_1,j_2\in\mathbb{Z}$。那么$(B\ =\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i,\circ,\omega)$ 是一个二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数。此外，$\{x_1^{-i_1}x_2^{-i_2}\partial_2,\ -x_1^{-i_1}x_2^{-i_2}\partial_1\mid i_1,i_2\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\{x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1,x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2\mid i_1,i_2\in\mathbb{Z}\}$ 关于$\varpi(-,-)$的对偶基，由齐次元素构成。

对于二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i, \circ, \omega)$，有 $\omega(b_1\circ b_2, b_3) = \omega(b_2, b_1\circ b_3)$，对任意$b_1$，$b_2, b_3 \in B$均成立。此外，斜对称非退化双线性形式 $\omega(-,-)$诱导出双线性型

$$(\underbrace{B\hat{\otimes}B\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}B}_{n\text{-fold}})\otimes(\underbrace{B\otimes B\otimes\cdots\otimes B}_{n\text{-fold}})\longrightarrow\Bbbk,$$

对所有$n \geq 2$，记作 $\hat{}\omega(-,-)$，定义为

$$\hat{\omega}\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_n,\alpha} x_{1,i_1,\alpha}\otimes\cdots\otimes x_{n,i_n,\alpha},\ y_1\otimes\cdots\otimes y_n\Big) = \sum_{i_1,\cdots,i_n,\alpha}\prod_{j=1}^{n}\omega(x_{j,i_j,\alpha},\ y_j).$$

接着，可以验证 $\hat{}\omega(-,-)$ 是**左非退化**的，即如果

$$\hat{\omega}\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_n,\alpha} x_{1,i_1,\alpha}\otimes\cdots\otimes x_{n,i_n,\alpha},\ y_1\otimes\cdots\otimes y_n\Big) = \hat{\omega}\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_n,\alpha} z_{1,i_1,\alpha}\otimes\cdots\otimes z_{n,i_n,\alpha},\ y_1\otimes\cdots\otimes y_n\Big),$$

对于所有齐次元素$y_1, y_2, \cdots、\ y_n \in B$，则

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n,\alpha} x_{1,i_1,\alpha}\otimes\cdots\otimes x_{n,i_n,\alpha} = \sum_{i_1,\cdots,i_n,\alpha} z_{1,i_1,\alpha}\otimes\cdots\otimes z_{n,i_n,\alpha}.$$

通过直接计算，我们得到

引理 4.9. 设$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i, \circ, \omega)$ 是一个二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数。定义线性映射$\nu_\omega : B \to B\otimes B$，使得$\hat{}\omega(\nu_\omega(b_1), b_2\otimes b_3) = -\omega(b_1, b_2\circ b_3)$，对任意 b_1,b_2,$b_3 \in B$ 均成立。则(B, ν_ω) 是一个完备置换余代数。

例 *4.10*（[20]）。考虑例 *4.8* 中给出的二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数 *$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i, \circ, \omega)$*。那么由此诱导的完备置换余代数 *$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i, \nu_\omega)$* 正是例*4.5*中给出的完备置换余代数 *$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_i, \nu)$*。

回顾一下，**李双代数** 是一个三元组 $(\mathfrak{g}, [-,-], \delta)$，满足 $(\mathfrak{g}, [-,-])$ 是一个李代数，$(\mathfrak{g}, \delta)$ 是一个李余代数，并且满足以下相容条件：

$$\delta([g_1, g_2]) = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_1)\otimes\mathrm{id} + \mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_1))(\delta(g_2)) - (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_2)\otimes\mathrm{id} + \mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_2))(\delta(g_1)),$$

其中，对所有 $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_1)(g_2) = [g_1, g_2]$。无穷小双代数是一个三元组 $(A, \cdot, \Delta)$，其中 $(A, \cdot)$ 是交换结合代数，(A, Δ) 是余交换余结合余代数，并且对任意 a_1,$a_2 \in A$，

$$\Delta(a_1a_2) = (\mathbf{u}_A(a_2)\otimes\mathrm{id})\Delta(a_1) + (\mathrm{id}\otimes\mathbf{u}_A(a_1))\Delta(a_2),$$

其中，对所有$\mathbf{u}_A(a_1)(a_2) = a_1a_2$，$a_1$,$a_2 \in A$。

定义4.11。设$(P, \cdot, [-,-])$ 是一个泊松代数，且(P, Δ, δ) 是一个泊松余代数。若五元组$(P, \cdot, [-,-], \Delta, \delta)$ 满足以下条件，则称其为一个**泊松双代数**：

(i) $(P, \cdot, \Delta)$ 是一个无穷小双代数；(ii) $(P, [-,-], \delta)$ 是一个李双代数；(iii) Δ 与 δ 按如下意义相容：对于任意 p_1,$p_2 \in P$，

$$\Delta([p_1, p_2]) = (\mathrm{ad}_P(p_1)\otimes\mathrm{id} + \mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}_P(p_1))\Delta(p_2) + (\mathbf{u}_P(p_2)\otimes\mathrm{id} - \mathrm{id}\otimes\mathbf{u}_P(p_2))\delta(p_1),$$
$$\begin{aligned}\delta(p_1p_2) = {}& (\mathbf{u}_P(p_1)\otimes\mathrm{id})\delta(p_2) + (\mathbf{u}_P(p_2)\otimes\mathrm{id})\delta(p_1)\\ &+ (\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}_P(p_1))\Delta(p_2) + (\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}_P(p_2))\Delta(p_1).\end{aligned}$$

现在我们需要引入完备 DPP 双代数的概念，它是 DPP 双代数的无限维版本。完备李双代数是在 [13] 中引入的。完备莱布尼茨

双代数是完备李双代数的一种推广 [15]。回顾一下，**完备莱布尼茨双代数**是一个三元组（$A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i, *, \vartheta$），使得（$A, *$）是一个 $\mathbb{Z}$-分次莱布尼茨代数，（A, ϑ）是一个完备莱布尼茨余代数，并且对于任意 $a_1, a_2 \in A$，

$$\hat{\tau}((\tilde{\mathbf{r}}_A(a_2)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\vartheta(a_1))) = (\tilde{\mathbf{r}}_A(a_1)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\vartheta(a_2)),$$
$$\begin{aligned}\vartheta(a_1 * a_2) = {} & (\mathrm{id}\hat{\otimes}\tilde{\mathbf{r}}_A(a_2) - (\tilde{\mathbf{l}}_A + \tilde{\mathbf{r}}_A)(a_2)\hat{\otimes}\mathrm{id})((\mathrm{id}+\hat{\tau})(\vartheta(a_1))) \\ & + (\mathrm{id}\hat{\otimes}\tilde{\mathbf{l}}_A(a_1) + \tilde{\mathbf{l}}_A(a_1)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\vartheta(a_2)).\end{aligned}$$

一个**完备置换双代数** 是一个三元组 $(A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i, \circ, \nu)$，其中 $(A, \circ)$ 是一个 $\mathbb{Z}$ 分次的置换代数，(A, ν) 是一个完备置换余代数，并且对于任意 $a_1, a_2 \in A$，

$$(\mathbf{r}_A(a_1)\hat{\otimes}\mathrm{id})\nu(a_2) = \hat{\tau}((\mathbf{r}_A(a_2)\hat{\otimes}\mathrm{id})\nu(a_1)),$$
$$\nu(a_1 \circ a_2) = ((\mathbf{l}_A - \mathbf{r}_A)(a_1)\hat{\otimes}\mathrm{id})\nu(a_2) + (\mathrm{id}\hat{\otimes}\mathbf{r}_A(a_2))\nu(a_1),$$
$$\nu(a_1 \circ a_2) = (\mathrm{id}\hat{\otimes}\mathbf{l}_A(a_1))\nu(a_2) + ((\mathbf{l}_A - \mathbf{r}_A)(a_2)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu(a_1) - \hat{\tau}(\nu(a_1))).$$

定义4.12。 一个**完备 DPP 双代数** 是一个五元组 $(A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i, \circ, *, \nu, \vartheta)$，其中 $(A, \circ, *)$是一个 $\mathbb{Z}$ 分次的 *DPP* 代数，(A, ν, ϑ) 是一个完备 *DPP* 余代数，$(A, \circ, \nu)$ 是一个完备置换双代数，$(A, *, \vartheta)$ 是一个完备*Leibniz*双代数，并且满足以下相容条件：

$$\nu(a_1 * a_2) = (\mathrm{id}\hat{\otimes}\tilde{\mathbf{l}}_A(a_1) + \tilde{\mathbf{l}}_A(a_1)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu(a_2)) + ((\mathbf{l}_A - \mathbf{r}_A)(a_2)\hat{\otimes}\mathrm{id} - \mathrm{id}\hat{\otimes}\mathbf{r}_A(a_2))((\vartheta + \hat{\tau}(\vartheta))(a_1)), \tag{4.1}$$
$$\begin{aligned}\vartheta(a_1 \circ a_2) = {} & (\mathrm{id}\hat{\otimes}\mathbf{l}_A(a_1))(\vartheta(a_2)) + (\mathrm{id}\hat{\otimes}\mathbf{r}_A(a_2))(\vartheta(a_1)) - ((\tilde{\mathbf{l}}_A + \tilde{\mathbf{r}}_A)(a_1)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\nu(a_2)) \\ & - ((\tilde{\mathbf{l}}_A + \tilde{\mathbf{r}}_A)(a_2)\hat{\otimes}\mathrm{id})((\nu - \hat{\tau}(\nu))(a_1)),\end{aligned} \tag{4.2}$$
$$(\mathrm{id}\hat{\otimes}\tilde{\mathbf{r}}_A(a_1))(\hat{\tau}(\nu(a_2))) = -(\mathbf{r}_A(a_2)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\vartheta(a_1)), \tag{4.3}$$
$$\nu(a_1 * a_2) = (\mathrm{id}\hat{\otimes}\mathbf{l}_A(a_1) - \mathbf{l}_A(a_1)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\vartheta(a_2)) + (\mathrm{id}\hat{\otimes}\tilde{\mathbf{r}}_A(a_2) - (\tilde{\mathbf{l}}_A + \tilde{\mathbf{r}}_A)(a_2)\hat{\otimes}\mathrm{id})((\nu - \hat{\tau}(\nu))(a_1)), \tag{4.4}$$
$$\begin{aligned}(\vartheta + \hat{\tau}(\vartheta))(a_1 \circ a_2) = {} & (\mathrm{id}\hat{\otimes}\mathbf{l}_A(a_1))((\vartheta + \hat{\tau}(\vartheta))(a_2)) + (\mathrm{id}\hat{\otimes}\mathbf{l}_A(a_2))((\vartheta + \hat{\tau}(\vartheta))(a_1)) \\ & - (\tilde{\mathbf{l}}_A(a_1)\hat{\otimes}\mathrm{id})((\nu - \hat{\tau}(\nu))(a_2)) - (\tilde{\mathbf{l}}_A(a_2)\hat{\otimes}\mathrm{id})((\nu - \hat{\tau}(\nu))(a_1)),\end{aligned} \tag{4.5}$$
$$\begin{aligned}\vartheta(a_1 \circ a_2) = {} & (\mathbf{l}_A(a_1)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\vartheta(a_2)) - (\mathrm{id}\hat{\otimes}\tilde{\mathbf{r}}_A(a_2))((\nu - \hat{\tau}(\nu))(a_1)) \\ & + (\mathrm{id}\hat{\otimes}\tilde{\mathbf{l}}_A(a_1))(\nu(a_2)) + ((\mathbf{l}_A - \mathbf{r}_A)(a_2)\hat{\otimes}\mathrm{id})((\vartheta + \hat{\tau}(\vartheta))(a_1)),\end{aligned} \tag{4.6}$$
$$\begin{aligned}\nu(a_1 * a_2 + a_2 * a_1) = {} & (\mathrm{id}\hat{\otimes}(\tilde{\mathbf{l}}_A + \tilde{\mathbf{r}}_A)(a_1))(\nu(a_2)) + ((\tilde{\mathbf{l}}_A + \tilde{\mathbf{r}}_A)(a_1)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\hat{\tau}(\nu(a_2))) \\ & + (\mathrm{id}\hat{\otimes}(\mathbf{l}_A - \mathbf{r}_A)(a_2))(\vartheta(a_1)) + ((\mathbf{l}_A - \mathbf{r}_A)(a_2)\hat{\otimes}\mathrm{id})(\hat{\tau}(\vartheta(a_1))),\end{aligned} \tag{4.7}$$

对于任意 $a_1, a_2 \in A$。

在 [15, 定理 4.12], 中，我们证明了李双代数与二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数的张量积上存在完备 Leibniz双代数结构。

引理 *4.13* ([15])。设 $(g, [-,-], \delta)$ 是有限维李双代数，$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \circ_B, \omega)$ 是二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数，$(g \otimes B, *)$ 是由 $(g, [-,-])$ 通过 $(B, \circ_B)$ 诱导的 $\mathbb{Z}$-分次莱布尼茨代数。定义线性映射 $\vartheta : g \otimes B \to (g \otimes B) \otimes (g \otimes B)$，如下：

$$\vartheta(g \otimes b) = \delta(g) \bullet \nu_\omega(b) := \sum_{(g)} \sum_{i,j,\alpha} (g_{(1)} \otimes b_{1,i,\alpha}) \otimes (g_{(2)} \otimes b_{2,j,\alpha}), \tag{4.8}$$

对于任意 $g \in g$ 和 $b \in B$，其中 $\delta(g) = \sum_{(g)} g_{(1)} \otimes g_{(2)}$ 采用 *Sweedler* 记号表示，而 $\nu_\omega(b) = \sum_{i,j,\alpha} b_{1,i,\alpha} \otimes b_{2,j,\alpha}$。那么 $(g \otimes B, *, \vartheta)$ 是一个完备*Leibniz*双代数，称为由 $(g, [-,-], \delta)$ 通过 $(B, \circ_B, \omega)$ 诱导的完备 *Leibniz* 双代数。

类似地，我们有

引理*4.14*. 设 $(A, \cdot, \Delta)$ 是有限维无穷小双代数，$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \circ_B, \omega)$ 是二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数，且 $(A \otimes B, \circ)$ 是由 $(A, \cdot)$ 通过 $(B, \circ_B)$ 诱导的 $\mathbb{Z}$-分次置换代数。定义线性映射 $\nu : A \otimes B \to (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)$，如下：

$$\nu(a \otimes b) = \Delta(a) \bullet \nu_\omega(b) := \sum_{(a)} \sum_{i,j,\alpha} (a_{(1)} \otimes b_{1,i,\alpha}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{2,j,\alpha}), \tag{4.9}$$

对任意 $a \in A$ 和 $b \in B$，其中 $\Delta(a) = \sum (a)\, a_{(1)} \otimes a^{(2)}$ 采用 *Sweedler* 记号表示，且 $\nu_\omega(b) = \sum i, j, \alpha\, b1, i, \alpha \otimes b2, j, \alpha$。那么 $(A \otimes B, \circ, \nu)$ 是完备置换双代数，称为由 $(A, \cdot, \Delta)$ 通过 $(B, \circ_B, \omega)$ 诱导的完备置换双代数。

注4.15. 众所周知，交换结合代数与李代数（分别为置换代数、莱布尼茨代数等）的张量积也具有李代数（分别为置换代数、莱布尼茨代数等）结构。事实上，无穷小双代数与许多类型的双代数结构的张量积仍保持这种双代数结构。更确切地说，无穷小双代数与二次李代数（分别为置换代数、莱布尼茨代数等）的张量积上存在李双代数（分别为置换双代数、莱布尼茨双代数等）结构。

因此，我们可以得到本节的第一个主要结论。

定理 *4.16.* 设 $(P, \cdot, [-,-], \Delta, \delta)$ 是一个有限维泊松双代数，$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \circ_B, \omega)$ 是一个二次 $\mathbb{Z}$-分次的置换代数，而 $(P \otimes B, \circ, *)$ 是由 $(P, \cdot, [-,-])$ 和 $(B, \circ_B)$ 诱导的 $\mathbb{Z}$-分次 *DPP* 代数。由公式 *(4.9)* 和 *(4.8)* 分别定义两个线性映射 $\nu, \vartheta : P \otimes B \to (P \otimes B) \otimes (P \otimes B)$。那么 $(P \otimes B, \circ, *, \nu, \vartheta)$ 是一个完备 *DPP* 双代数，称为由 $(B, \circ_B, \omega)$ 从 $(P, \cdot, [-,-], \Delta, \delta)$ 诱导的完备 *DPP* 双代数。

证明。根据命题4.3、4.6以及引理4.13、4.14，要证明 $(P \otimes B, \circ, *, \nu, \vartheta)$ 是一个完备的 DPP 双代数，我们只需证明公式 (4.1)-(4.7) 成立。事实上，对于任意 (p_1, b_1)、$(p_2, b_2) \in P \otimes B$，

$$\begin{aligned}
&\nu((p_1,b_1) * (p_2,b_2)) - ((\mathbf{l}_{P\otimes B} - \mathbf{r}_{P\otimes B})(p_2,b_2) \hat{\otimes} \mathrm{id} - \mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{r}_{P\otimes B}(p_2,b_2))((\vartheta + \hat{\tau}(\vartheta))(p_1,b_1)) \\
&\qquad - (\mathrm{id} \hat{\otimes} \tilde{\mathbf{l}}_{P\otimes B}(p_1,b_1) + \tilde{\mathbf{l}}_{P\otimes B}(p_1,b_1) \hat{\otimes} \mathrm{id})(\nu(p_2,b_2)) \\
= {} & \Delta([p_1,p_2]) \bullet \nu_\omega(b_1 \circ_B b_2) + \Big((\mathrm{id} \otimes \mathbf{u}_P(p_2))(\delta(p_1))\Big) \bullet \Big((\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{r}_B(b_2))(\nu_\omega(b_1) - \hat{\tau}(\nu_\omega(b_1)))\Big) \\
& - \Big((\mathbf{u}_P(p_2) \otimes \mathrm{id})(\delta(p_1))\Big) \bullet \Big(((\mathbf{l}_B - \mathbf{r}_B)(b_2) \hat{\otimes} \mathrm{id})(\nu_\omega(b_1) - \hat{\tau}(\nu_\omega(b_1)))\Big) \\
& - \Big((\mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}_P(p_1))(\Delta(p_2))\Big) \bullet \Big((\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{l}_B(b_1))(\nu_\omega(b_2))\Big) \\
& - \Big((\mathrm{ad}_P(p_1) \otimes \mathrm{id})(\Delta(p_2))\Big) \bullet \Big((\mathbf{l}_B(b_1) \hat{\otimes} \mathrm{id})(\nu_\omega(b_2))\Big).
\end{aligned}$$

注意，对于任意e、$f \in B$，

$$\hat{\omega}(\nu_\omega(b_1 \circ_B b_2),\ e \otimes f) = -\omega(b_2,\ b_1 \circ_B (e \circ_B f)) = \hat{\omega}((\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{r}_B(b_2))(\nu_\omega(b_1)),\ e \otimes f).$$

由于 $\hat{\omega}(-,-)$ 是左非退化的，我们得到 $\nu_\omega(b_1 \circ_B b_2) = (\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathrm{r}_B(b_2))(\nu_\omega(b_1))$。类似地，我们还有 $(\mathrm{r}_B(b_2) \hat{\otimes} \mathrm{id})(\nu_\omega(b_1)) = (\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathrm{r}_B(b_2))(\hat{\tau}(\nu_\omega(b_1))) = 0$、$\nu_\omega(b_1 \circ_B b_2) = (\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathrm{l}_B(b_1))(\nu_\omega(b_2)) = (\mathrm{l}_B(b_1) \hat{\otimes} \mathrm{id})(\nu_\omega(b_2)) = (\mathrm{r}_B(b_2) \hat{\otimes} \mathrm{id})((\hat{\tau}(\nu_\omega(b_1))) - (\mathrm{l}_B(b_2) \hat{\otimes} \mathrm{id})((\hat{\tau}(\nu_\omega(b_1))) + (\mathrm{l}_B(b_2) \hat{\otimes} \mathrm{id})(\nu_\omega(b_1))$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\nu((p_1,b_1) * (p_2,b_2)) - ((\mathbf{l}_{P\otimes B} - \mathbf{r}_{P\otimes B})(p_2,b_2) \hat{\otimes} \mathrm{id} - \mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{r}_{P\otimes B}(p_2,b_2))((\vartheta + \hat{\tau}(\vartheta))(p_1,b_1)) \\
&\qquad - (\mathrm{id} \hat{\otimes} \tilde{\mathbf{l}}_{P\otimes B}(p_1,b_1) + \tilde{\mathbf{l}}_{P\otimes B}(p_1,b_1) \hat{\otimes} \mathrm{id})(\nu(p_2,b_2)) \\
= {} & \Big(\Delta([p_1,p_2]) - (\mathrm{ad}_P(p_1) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}_P(p_1))\Delta(p_2) \\
&\qquad + (\mathbf{u}_P(p_2) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \mathbf{u}_P(p_2))\delta(p_1)\Big) \bullet \nu_\omega(b_1 \circ_B b_2) \\
= {} & 0,
\end{aligned}$$

因为（P，$\cdot$，$[-,-]$，Δ，δ）是一个泊松双代数。也就是说，方程（4.1）成立。同样，方程（4.2）-（4.7）也成立。因此，（$P \otimes B$，$\circ$，$*$，ν，ϑ）是一个完备 DPP 双代数。□

回顾一下，若存在元素$r \in P \otimes P$ 使得 $\Delta = \Delta_r$ 且 $\delta = \delta_r$，其中P是泊松双代数（$\cdot, [-,-], \Delta, \delta$），则称其为**余边界**的。

$$\Delta_r(p) = (\mathrm{id} \otimes \mathbf{u}_P(p) - \mathbf{u}_P(p) \otimes \mathrm{id})(r), \tag{4.10}$$

$$\delta_r(p) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}_P(p) + \mathrm{ad}_P(p) \otimes \mathrm{id})(r), \tag{4.11}$$

对任意$p \in P$均成立。设$(P, \cdot, [-,-])$为一个泊松代数。若元素$r = \sum_i x_i \otimes y_i \in P \otimes P$满足$(\mathrm{id} \otimes \mathbf{u}_P(p) - \mathbf{u}_P(p) \otimes \mathrm{id})(r) = 0$且$(\mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}_P(p) + \mathrm{ad}_P(p) \otimes \mathrm{id})(r) = 0$对所有$p \in P$均成立，则称其为**Poi-不变**。这些方程

$$\mathbf{A}_r := r_{12}r_{13} + r_{13}r_{23} - r_{23}r_{12} = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{C}_r := [r_{12}, r_{13}] + [r_{13}, r_{23}] + [r_{12}, r_{23}] = 0$$

称为（经典）泊松杨–巴克斯特方程（PoiYBE），其中$(\mathfrak{g}, [-,-])$，$r_{12}r_{13} = \sum i, j (x_i x_j) \otimes y_i \otimes y_j$, $r_{13}r_{23} = \sum i, j\, x_i \otimes x_j \otimes (y_i y_j)$, $r_{23}r_{12} = \sum i, j\, x_j \otimes (x_i y_j) \otimes y_i$, $[r_{12}, r_{13}] = \sum i, j [x_i, x_j] \otimes y_i \otimes y_j$, $[r_{13}, r_{23}] = \sum i, j\, x_i \otimes x_j \otimes [y_i, y_j]$且$[r_{12}, r_{23}] = \sum i, j\, x_i \otimes [y_i, x_j] \otimes y_j$。容易看出，$\mathbf{A}_r = 0$正是结合代数中的（经典）结合杨-巴克斯特方程，而$\mathbf{C}_r = 0$正是李代数中的经典杨–巴克斯特方程。

命题4.17 ([21])。 设$(P, \cdot, [-,-])$是一个泊松代数，$r \in P \otimes P$, $\Delta_r, \delta_r : P \to P \otimes P$是由公式（(4.10) 和 (4.11) 分别定义的线性映射。

(i) 若 r 是 $(P, \cdot, [-,-])$ 中 *PoiYBE* 的一个斜对称解，则 $(P, \cdot, [-,-], \Delta_r, \delta_r)$ 是一个泊松双代数，称为与 r 相关联的三角泊松双代数。*(ii)* 若 r 是 $(P, \cdot, [-,-])$ 中 *PoiYBE* 的一个解，且 $r + \tau(r)$ 是 *Poi*-不变的，则 $(P, \cdot, [-,-], \Delta_r, \delta_r)$ 是一个泊松双代数，称为与 r 相关联的准三角泊松双代数。*(iii)* 设 $(P, \cdot, [-,-], \Delta_r, \delta_r)$ 是与 $r \in P \otimes P$ 相关联的准三角泊松双代数。若$\mathcal{I} = r^\sharp + \tau(r)^\sharp : P^* \to P$是向量空间的一个同构，则 $(P, \cdot, [-,-], \Delta_r, \delta_r)$ 称为可分解泊松双代数。

设$(A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i, \circ, *)$是一个 $\mathbb{Z}$-分次的 DPP 代数，且$r = \sum i, j, \alpha\, x_{i\alpha} \otimes y_{j\alpha} \in P \hat{\otimes} P$。记$r_{12} \circ r_{23} := \sum i, j, k, l, \alpha, \beta\, x_{i,\alpha} \otimes (y_{j,\alpha} \circ x_{k,\beta}) \otimes y_{l,\beta}$, $r_{12} \circ r_{13} := \sum i, j, k, l, \alpha, \beta (x_{i,\alpha} \circ x_{k,\beta}) \otimes y_{j,\alpha} \otimes y_{l,\beta}$, $r_{13} \circ r_{23} := \sum i, j, k, l, \alpha, \beta\, x_{i,\beta} \otimes x_{k,\alpha} \otimes (y_{j,\alpha} \circ y_{l,\beta})$ $r_{13} \circ r_{12} := \sum i, j, k, l, \alpha, \beta (x_{i,\alpha} \circ x_{k,\beta}) \otimes y_{l,\beta} \otimes y_{j,\alpha}$, $r_{12} * r_{13} := \sum i, j, k, l, \alpha, \beta (x_{i,\alpha} * x_{k,\beta}) \otimes y_{j,\alpha} \otimes y_{l,\beta}$, $r_{12} * r_{23} := \sum i, j, k, l, \alpha, \beta\, x_{i,\alpha} \otimes (y_{j,\alpha} * x_{k,\beta}) \otimes y_{l,\beta}$, $r_{23} * r_{12} := \sum i, j, k, l, \alpha, \beta\, x_{k,\alpha} \otimes (x_{i,\beta} * y_{l,\beta}) \otimes y_{j,\alpha}$以及$r_{23} * r_{13} := \sum i, j, k, l, \alpha, \beta\, x_{k,\alpha} \otimes x_{i,\beta} \otimes (y_{j,\alpha} * y_{l,\beta})$。若$r \in A \hat{\otimes} A$满足$P_r := r_{12} \circ r_{23} - r_{13} \circ r_{23} + r_{12} \circ r_{13} - r_{13} \circ r_{12} = 0$且$L_r = r_{12} * r_{13} - r_{12} * r_{23} - r_{23} * r_{12} + r_{23} * r_{13} = 0$属于$A \hat{\otimes} A \hat{\otimes} A$，则称 r 为 $(A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i, \circ, *)$ 中 DPYBE 的完备解。若$A = A_0$是有限维的，则 $(A, \circ, *)$ 中 DPYBE 的完备解就是 DPP 代数 $(A = A0, \circ, *)$ 中 DPYBE 的解。命题 3.14、定理 3.15] 证明中的相同论证可推广到完备情形。由此得到以下命题。

命题 4.18. 设 $(A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i, \circ, *)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次的 *DPP* 代数，且 $r \in A \hat{\otimes} A$ 是 $(A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i, \circ, *)$ 中 DPYBE 的完备解。定义双线性映射 $\vartheta_r : A \to A \hat{\otimes} A$ 如下

$$\nu_r(a) := (\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{r}_A(a) + (\mathbf{r}_A - \mathbf{l}_A)(a) \hat{\otimes} \mathrm{id})(r), \tag{4.12}$$

$$\vartheta_r(a) := ((\mathbf{l}_A + \mathbf{r}_A)(a) \hat{\otimes} \mathrm{id}) - \mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{r}_A(a))(r), \tag{4.13}$$

对任意 $a \in A$。*(i)* 若 $r - \hat{\tau}(r)$ 是 *Poi*-不变的，则 $(A, \circ, *, \nu_r, \vartheta_r)$ 是一个完备 *Poisson di*-双代数，称为相伴于 r 的**拟三角完备 DPP 双代数**。*(ii)*若 r 是对称的，即 $r = \hat{\tau}(r)$，则 $(A, \circ, *, \nu_r, \vartheta_r)$ 是一个完备 *DPP* 双代数，称为相伴于 r 的**三角完备 DPP 双代数**。

这些拟三角和三角双代数结构与杨–巴克斯特方程的解密切相关。为考察它们之间的关系，我们先考察杨–巴克斯特方程各解之间的关系。现在，我们来考察泊松代数中的 PoiYBE 解与诱导 DPP 代数中的 DPYBE 解之间的关系。设$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \circ_B, \omega)$是一个二次 $\mathbb{Z}$分次置换代数，$\{e_j\}_{j\in\Omega}$是$B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i$的一组由齐次元素组成的基。由于 $\omega(-,-)$是分次的、斜对称且非退化的，我们得到$B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i$的一组齐次对偶基$\{f_j\}_{j\in\Omega}$，称其为关于 $\omega(-,-)$的$\{e_i\}_{i\in\Omega}$的对偶基，其中$\omega(f_i, e_j) = \delta_i j$，$\delta_i j$是克罗内克 δ。

命题 4.19。 设 $(P, \cdot, [-,-])$ 是一个泊松代数，$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \circ_B, \omega)$ 是一个二次 $\mathbb{Z}$ 分次置换代数，并且 $(P \otimes B, \circ, *)$ 是诱导的 $\mathbb{Z}$分次 *DPP* 代数。假设 $r = \sum_i x_i \otimes y_i \in P \otimes P$ 是 PoiYBE 在 $(P, \cdot, [-,-])$ 中的一个解。那么

$$\widehat{r} = \sum_i \sum_{j\in\Omega} (x_i \otimes e_j) \otimes (y_i \otimes f_j) \in (P \otimes B) \hat{\otimes} (P \otimes B) \tag{4.14}$$

是 DPYBE在 $(P \otimes B, \circ, *)$ 中的一个完备解，其中 $\{e_j\}_{j\in\Omega}$ 是 $B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i$的齐次基，且 $\{f_j\}_{j\in\Omega}$ 是 $\{e_j\}_{j\in\Omega}$ 关于 $\omega(-,-)$ 的齐次对偶基。此外，我们有

(*i*) $\frown r$ 是对称的，如果 r 是斜对称的；(*ii*) $\frown r - \hat{\tau}(\frown r)$ 是 *DP*不变的，如果 $r + \tau(r)$ 是 *Poi*-不变的。

证明。若 r 是 $(P, \cdot, [-,-])$ 中 PoiYBE 的一个解，即 $A_r = C_r = 0$，我们需要证明 $P_{\widehat{r}} = L_{\widehat{r}} = 0$。由 [15, 命题 4.16], , 若 $C_r = 0$，则得到 $L_{\widehat{r}} = 0$。这里我们仅证明：若 $A_r = 0$，则 $P_{\widehat{r}} = 0$。事实上，对任意 $p, q \in \Omega$，我们有

$$\begin{aligned}
&\widehat{r}_{12} \circ \widehat{r}_{23} - \widehat{r}_{13} \circ \widehat{r}_{23} + \widehat{r}_{12} \circ \widehat{r}_{13} - \widehat{r}_{13} \circ \widehat{r}_{12} \\
&= \sum_{i,j} \sum_{p,q} \Big((x_i \otimes (y_i x_j) \otimes y_j) \bullet (e_p \otimes (f_p \circ_B e_q) \otimes f_q) - (x_i \otimes x_j \otimes (y_i y_j)) \bullet (e_p \otimes e_q \otimes (f_p \circ_B f_q)) \\
&\quad + ((x_i x_j) \otimes y_i \otimes y_j) \bullet ((e_p \circ_B e_q) \otimes f_p \otimes f_q) - ((x_i x_j) \otimes y_j \otimes y_i) \bullet ((e_p \circ_B e_q) \otimes f_q \otimes f_p) \Big).
\end{aligned}$$

注意，对于给定的e_s、e_u、$e_v \in B$、s、u、$v \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}\Big(\sum_{p,q} e_p \otimes (f_p \circ_B e_q) \otimes f_q,\ \ e_s \otimes e_u \otimes e_v \Big) &= \omega(e_v \diamond e_u - e_u \diamond e_v,\ e_s), \\
\hat{\omega}\Big(\sum_{p,q} e_p \otimes e_q \otimes (f_p \circ_B f_q),\ \ e_s \otimes e_u \otimes e_v \Big) &= \omega(e_v \diamond e_u - e_u \diamond e_v,\ e_s), \\
\hat{\omega}\Big(\sum_{p,q} (e_p \circ_B e_q) \otimes f_p \otimes f_q,\ \ e_s \otimes e_u \otimes e_v \Big) &= \omega(e_u \circ_B e_v,\ e_s), \\
\hat{\omega}\Big(\sum_{p,q} (e_p \circ_B e_q) \otimes f_q \otimes f_p,\ \ e_s \otimes e_u \otimes e_v \Big) &= \omega(e_v \circ_B e_u,\ e_s).
\end{aligned}$$

若我们将 Φ_1、$\Phi_2 \in B \hat{\otimes} B \hat{\otimes} B$ 分别记为$\hat{\varpi}(\Phi_1, e_s \otimes e_u \otimes e_v) = \varpi(e_u \diamond e_v, e_s)$和$\hat{\varpi}(\Phi_2, e_s \otimes e_u \otimes e_v) = \varpi(e_v \diamond e_u, e_s)$，则得到

$$\widehat{r}_{12} * \widehat{r}_{13} - \widehat{r}_{12} * \widehat{r}_{23} - \widehat{r}_{23} * \widehat{r}_{12} + \widehat{r}_{23} * \widehat{r}_{13} = \mathbf{A}_r \bullet \Phi_1 - \mathbf{A}_r \bullet \Phi_2.$$

也就是说，若$\mathbf{A}_r = 0$，则$\mathbf{P}_{\widehat{r}} = 0$。因此，若$r$是$(P, \cdot, [-,-])$中PoiYBE的解，则$\frown r$是$(P \otimes B, \circ, *)$中DPYBE的完备解。

第二，对任意e_s、$e_t \in B$、s、$t \in \Omega$，我们有

$$\hat{\omega}\Big(\sum_{j\in\Omega} e_j \otimes f_j,\ e_s \otimes e_t \Big) = \omega(e_s, e_t) = -\varpi(e_t, e_s) = -\hat{\omega}\Big(\sum_{j\in\Omega} f_j \otimes e_j,\ e_s \otimes e_t \Big).$$

也就是说，$\sum_j e_j \otimes f_j = -\sum_j f_j \otimes e_j$。因此，若$r$是斜对称的，则得到$\frown r$是对称的。

最后，如果 $r + \tau(r)$ 是 Poi-不变的，即 $(\mathrm{id} \otimes u_P(p) - u_P(p) \otimes \mathrm{id})(r + \tau(r)) = 0$ 且 $(\mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}_P(p) + \mathrm{ad}_P(p) \otimes \mathrm{id})(r + \tau(r)) = 0$ 对所有 $p \in P$ 都成立，根据 [15, 命题 4.16], 可得$\frown r - \hat{\tau}(\frown r)$ 是 Leibniz 不变的。此外，对于任意 e_s、$e_t \in B$、s、$t \in \Omega$，注意到

$$\hat{\omega}\Big(\sum_{j\in\Omega} (b \circ_B e_j) \otimes f_j,\ \ e_s \otimes e_t \Big) = \omega(b \circ_B e_t,\ e_s) = -\hat{\omega}\Big(\sum_{j\in\Omega} (b \circ_B f_j) \otimes e_j,\ \ e_s \otimes e_t \Big).$$

我们得到 $\sum_{j\in\Omega} (b \circ_B e_j) \otimes f_j = -\sum_{j\in\Omega} (b \circ_B f_j) \otimes e_j$。类似地，我们还有 $\sum_{j\in\Omega} (e_j \circ_B b) \otimes f_j = -\sum_{j\in\Omega} (f_j \circ_B b) \otimes e_j$，以及 $\sum_{j\in\Omega} e_j \otimes (f_j \circ_B b) = -\sum_{j\in\Omega} f_j \otimes (e_j \circ_B b) = \sum_{j\in\Omega} ((b \circ_B e_j) \otimes f_j - (e_j \circ_B b) \otimes f_j)$。

因此，对于任意$p \in P$和$b \in B$,

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{r}_{P\otimes B}(p\otimes b) + (\mathbf{r}_{P\otimes B} - \mathbf{l}_{P\otimes B})(p\otimes b) \hat{\otimes} \mathrm{id})(\widehat{r} - \hat{\tau}(\widehat{r})) \\
=& \sum_i \sum_{j\in\Omega} \Big((x_i \otimes (y_i p)) \bullet (e_j \otimes (f_j \circ_B b)) - (y_i \otimes (x_i p)) \bullet (f_j \otimes (e_j \circ_B b)) \\
&\qquad + ((x_i p) \otimes y_i) \bullet ((e_j \circ_B b) \otimes f_j) - ((y_i p) \otimes x_i) \bullet ((f_j \circ_B b) \otimes e_j) \\
&\qquad - ((p x_i) \otimes y_i) \bullet ((b \circ_B e_j) \otimes f_j) + ((p y_i) \otimes x_i) \bullet ((b \circ_B f_j) \otimes e_j) \Big) \\
=& \Big((\mathrm{id} \otimes \mathbf{u}_P(p) - \mathbf{u}_P(p) \otimes \mathrm{id})(r + \tau(r)) \Big) \bullet \Big(\sum_{j\in\Omega} (b \circ_B e_j) \otimes f_j - (e_j \circ_B b) \otimes f_j \Big) \\
=& 0.
\end{aligned}$$

因此，我们得到$\widehat{r} - \hat{\tau}(\widehat{r})$是 DP不变。证明完毕。 □

利用命题 4.19 的结论以及拟三角（分别地，三角）DPP 双代数的定义，我们得到如下定理。

定理 *4.20.* 设 $(P, \cdot, [-,-], \Delta, \delta)$ 是一个有限维泊松双代数，$(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \circ_B, \omega)$ 是一个二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数，且 $(P \otimes B, \circ, *, \nu, \vartheta)$ 是由 $(P, \cdot, [-,-], \Delta, \delta)$ 和 $(B, \circ_B, \omega)$ 诱导的完备泊松双拨代数。若 $\Delta = \Delta_r$ 和 $\delta = \delta_r$ 对某个 $r \in A \otimes A$ 成立，则 $\nu = \nu_{\widehat{r}}$ 和 $\vartheta = \vartheta_{\widehat{r}}$，其中 $\widehat{r}$ 由公式 *(4.14)* 给出。

特别地，我们得到：如果$(P \otimes B, \circ, *, \nu, \vartheta)$是余边界（分别为拟三角、三角），那么它就是一个余边界（分别为拟三角、三角）的完备 *DPP* 双代数。

设$r = \sum_i x_i \otimes y_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, $\Delta = \Delta_r$ and $\delta = \delta_r$。对于任意$p \in P$ 和$b \in B$，有证明。

$$\vartheta(p\otimes b) = \sum_i \sum_{l,k,\alpha} \Big((x_i \otimes (p y_i)) \bullet (b_{1,l,\alpha} \otimes b_{2,k,\alpha}) - ((p x_i) \otimes y_i) \bullet (b_{1,l,\alpha} \otimes b_{2,k,\alpha}) \Big),$$

其中 $\Delta_r(p) = (\mathrm{id} \otimes u_P(p) - u_P(p) \otimes \mathrm{id})(r) = \sum i\ (x_i \otimes (p y_i) - (p x_i) \otimes y_i)$ and $\nu_\varpi(b) = \sum l,k,_\alpha b1,_{l,\alpha} \otimes b2,_{k,\alpha}$。另一方面，

$$\begin{aligned}
\nu_{\widehat{r}}(p\otimes b) &= (\mathrm{id} \hat{\otimes} \mathbf{r}_{P\otimes B}(p\otimes b) + (\mathbf{r}_{P\otimes B} - \mathbf{l}_{P\otimes B})(p\otimes b) \hat{\otimes} \mathrm{id}))(\widehat{r}) \\
&= \sum_i \sum_{j\in\Omega} \Big((x_i \otimes (y_i p)) \bullet (e_j \otimes (f_j \circ_B b)) + ((p x_i) \otimes y_i) \bullet ((e_j \circ_B b) \otimes f_j - (b \circ_B e_j) \otimes f_j) \Big),
\end{aligned}$$

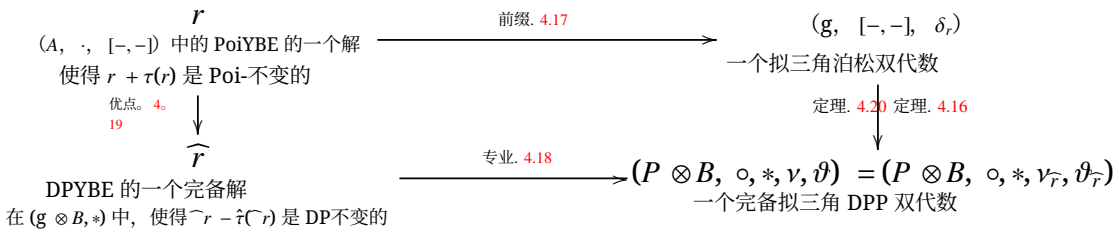
其中 $\widehat{r} = \sum i\ \sum j\in\Omega (x_i \otimes e\ j)\ \otimes (y_i \otimes f\ j)$, $\{e\ j\}j\in\Omega$ 是 $B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i$ 的齐次基，而 $\{f_j\}j\in\Omega$ 是关于 $\omega(-,-)$ 的 $\{e_j\}j\in\Omega$ 的齐次对偶基。

对于两个齐次基元素 e_s、$e_t \in B$、s、$t \in \Omega$，由于

$$\hat{\omega}\Big(\sum_{l,k,\alpha} b_{1,l,\alpha} \otimes b_{2,k,\alpha},\ e_s \otimes e_t \Big) = \omega(b \circ_B e_t - e_t \circ_B b,\ e_s) = \hat{\omega}\Big(\sum_{j\in\Omega} e_j \otimes (f_j \diamond b),\ e_s \otimes e_t \Big),$$

我们得到 $\sum l,k,_\alpha b1,_{l,\alpha} \otimes b2,_{k,\alpha} = \sum j\ e_j \otimes (f\ j\ \circ_B b)$。类似地，我们还有$\sum l,k,_\alpha b1,_{l,\alpha} \otimes b2,_{k,\alpha} = \sum j\ ((b\ \circ_B e\ j) \otimes f\ j\ - (e\ j\ \circ_B b) \otimes f_j)$。因此，我们得到 $\nu_{\widehat{r}}(p \otimes b) = \nu(p \otimes b)$。此外，由 [15,定理 4.17]，我们得到 $\vartheta = \vartheta_{\widehat{r}}$ if $\delta = \delta_r$。也就是说，$(P \otimes B, \circ, *, \nu, \vartheta) = (P \otimes B, \circ, *, \nu_{\widehat{r}}, \vartheta_{\widehat{r}})$ 是完备 DPP 双代数，当且仅当 $\Delta = \Delta_r$ 且 $\delta = \delta_r$，其中某个 $r \in A \otimes A$。因此，如果 $(P, \cdot, [-,-], \Delta, \delta)$ 是余边界的，那么 $(P \otimes B, \circ, *, \nu, \vartheta)$ 是余边界完备 DPP 双代数。最后，由命题 4.19 可得，如果 $(P, \cdot, [-,-], \Delta, \delta)$ 是拟三角（分别为三角）的，那么 $(P \otimes B, \circ, *, \nu, \vartheta)$ 是拟三角（分别为三角）完备 DPP 双代数。□

值得注意的是，该定理还给出了以下交换图：



例 *4.21*。考虑 *3* 维泊松代数 $(P = \mathbb{k}\{e_1, e_2, e_3\}, \cdot, [-,-])$，其非零乘积为 $e_1e_1 = e_2$ *and* $[e_1, e_3] = e_3$。令 $r = e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2$。容易看出，$r$ 是 $(P, \cdot, [-,-])$ 中 *PoiYBE* 的一个斜对称解。因此我们得到一个三角泊松双代数 $(P, \cdot, [-,-], \Delta_r, \delta_r)$，其中 $\Delta_r = 0$, $\delta_r(e_1) = e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2$ *and* $\delta_r(e_2) = \delta_r(e_3) = 0$。考虑例 *4.8* 中给出的二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数 $(B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \circ_B, \omega)$。于是，根据定理 *4.16*，我们得到一个 *DPP* 双代数 $(P \otimes B, \circ, *, \nu, \vartheta)$，其中

$$
\begin{aligned}
&(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_s e_1)\circ(x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_t e_1) = \delta_{s,1}x_1^{i_1+j_1+1}x_2^{i_2+j_2}\partial_t e_1 + \delta_{s,2}x_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2+1}\partial_t e_1,\\
&(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_s e_1)*(x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_t e_3) = \delta_{s,1}x_1^{i_1+j_1+1}x_2^{i_2+j_2}\partial_t e_3 + \delta_{s,2}x_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2+1}\partial_t e_3,\\
&(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_s e_3)*(x_1^{j_1}x_2^{j_2}\partial_t e_1) = -\delta_{s,1}x_1^{i_1+j_1+1}x_2^{i_2+j_2}\partial_t e_3 - \delta_{s,2}x_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2+1}\partial_t e_3,\\
&\vartheta(x_1^m x_2^n\partial_1 e_1) = \sum_{i_1,i_2\in\mathbb{Z}} \Big(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1 e_2 \otimes x_1^{m-i_1}x_2^{n-i_2+1}\partial_1 e_3 - x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2 e_2 \otimes x_1^{m-i_1+1}x_2^{n-i_2}\partial_1 e_3\\
&\qquad + x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2 e_3 \otimes x_1^{m-i_1+1}x_2^{n-i_2}\partial_1 e_2 - x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1 e_3 \otimes x_1^{m-i_1}x_2^{n-i_2+1}\partial_1 e_2\Big),\\
&\vartheta(x_1^m x_2^n\partial_2 e_1) = \sum_{i_1,i_2\in\mathbb{Z}} \Big(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1 e_2 \otimes x_1^{m-i_1}x_2^{n-i_2+1}\partial_2 e_3 - x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2 e_2 \otimes x_1^{m-i_1+1}x_2^{n-i_2}\partial_2 e_3\\
&\qquad + x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2 e_3 \otimes x_1^{m-i_1+1}x_2^{n-i_2}\partial_2 e_2 - x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1 e_3 \otimes x_1^{m-i_1}x_2^{n-i_2+1}\partial_2 e_2\Big),
\end{aligned}
$$

其余均为零。

另一方面，根据PoiYBE 在$(P, \cdot, [-,-])$中的斜对称解 r，我们可以得到DPYBE 在$(P \otimes B, \circ, *)$中的一个对称解：

$$
\begin{aligned}
\widehat{r} = \sum_{i_1,i_2\in\mathbb{Z}} \Big(&x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1 e_2 \otimes x_1^{-i_1}x_2^{-i_2}\partial_2 e_3 - x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_1 e_3 \otimes x_1^{-i_1}x_2^{-i_2}\partial_2 e_2\\
&- x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2 e_2 \otimes x_1^{-i_1}x_2^{-i_2}\partial_1 e_3 + x_1^{i_1}x_2^{i_2}\partial_2 e_3 \otimes x_1^{-i_1}x_2^{-i_2}\partial_1 e_2\Big).
\end{aligned}
$$

该对称解诱导出一个三角 *DPP* 双代数$(P \otimes B, \circ, *, \nu_{\widehat{r}}, \vartheta_{\widehat{r}})$。可以检验，$\nu_{\widehat{r}} = \nu$ 和 $\vartheta_{\widehat{r}} = \vartheta$如上所定义。

本节最后，我们考虑由泊松双代数构造的有限维 DPP 双代数。首先，在定理4.20中，如果二次 $\mathbb{Z}$-分次置换代数（$B = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i, \circ_B, \omega$) 是有限维二次 perm 代数，那么诱导出的有限维 DPP 双代数（$P \otimes B, \circ, *, \nu, \vartheta$) 是余边界（分别对应拟三角、三角），当且仅当（$P, \cdot, [-,-], \Delta, \delta$) 是余边界（分别对应拟三角、三角）。接下来，我们考虑通过这种方法得到的可因子化 DPP 双代数。

命题 *4.22*. 设 $(P, \cdot, [-,-], \Delta, \delta)$ 是一个有限维泊松双代数，$(B, \circ_B, \omega)$ 是一个二次 *perm* 代数，而 $(P \otimes B, \circ, *, \nu, \vartheta)$ 是由 $(B, \circ_B, \omega)$ 从 $(P, \cdot, [-,-], \Delta, \delta)$ 诱导出的 *DPP* 双代数。那么，如果 $(P, \cdot, [-,-], \Delta, \delta)$ 是可因子化的，则 $(P \otimes B, \circ, *, \nu, \vartheta)$ 也是可因子化的。

证明。设 $(\mathrm{P}, \cdot, [-,-], \Delta, \delta)$ 是一个可分解泊松双代数，即对于某个 $\mathrm{r} = \sum \mathrm{i}\, \mathrm{x}_i \otimes \mathrm{y}_i \in \mathrm{P} \otimes \mathrm{P}$，有 $\Delta = \Delta_r$和 $\delta = \delta_r$，且 $\mathcal{I} = \mathrm{r}^\sharp + \tau(\mathrm{r})^\sharp : \mathrm{P}^* \to \mathrm{P}$ 是向量空间之间的同构。由定理 4.20 可知，$(\mathrm{P} \otimes \mathrm{B}, \circ, *, \nu, \vartheta) = (\mathrm{P} \otimes \mathrm{B}, \circ, *, \nu_{\widehat{r}}, \vartheta_{\widehat{r}})$ 是一个 DPP 双代数，其中 $\widehat{\ }\mathrm{r}$ 由公式 (4.14) 给出。这里需要证明 $\widehat{\mathcal{I}} := \widehat{\ }\mathrm{r}^\sharp - \tau(\widehat{\ }\mathrm{r})^\sharp : (\mathrm{P} \otimes \mathrm{B})^* \to \mathrm{P} \otimes \mathrm{B}$ 是向量空间之间的同构。记 $\kappa := \sum \mathrm{j}\, \mathrm{e}\, \mathrm{j} \otimes \mathrm{f}_j \in \mathrm{B} \otimes \mathrm{B}$，其中 $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}2, \cdots, \mathrm{e}_n\}$ 是 B 的一组基，$\{\mathrm{f}_1, \mathrm{f}2, \cdots, \mathrm{f}_n\}$ 是关于 $\omega(-,-)$ 的对偶基。定义 $\kappa^\sharp : \mathrm{B}^* \to \mathrm{B}$ 为

$\langle\kappa^\sharp(\xi_1),\ \xi_2\rangle=\langle\xi_1\otimes\xi_2,\ \kappa\rangle$，对任意 $\xi_1,\xi_2\in B^*$。然后可以验证，$\kappa^\sharp$ 是一个线性同构，且 $\langle\kappa^\sharp(\xi_1),\ \xi_2\rangle=\langle\xi_1\otimes\xi_2,\ \kappa\rangle=-\langle\xi_2\otimes\xi_1,\ \kappa\rangle=-\langle\kappa^\sharp(\xi_2),\ \xi_1\rangle$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\langle\widehat{r}^\sharp(\eta_1\otimes\xi_1),\ \eta_2\otimes\xi_2\rangle&=\sum_{i,j}\langle(\eta_1\otimes\xi_1)\otimes(\eta_2\otimes\xi_2),\ (x_i\otimes e_j)\otimes(y_i\otimes f_j)\rangle\\&=\Big(\sum_j\langle\eta_1,x_i\rangle\langle\eta_2,y_i\rangle\Big)\Big(\sum_i\langle\xi_1,e_j\rangle\langle\xi_2,f_j\rangle\Big)\\&=\langle r^\sharp(\eta_1),\ \eta_2\rangle\langle\kappa^\sharp(\xi_1),\ \xi_2\rangle\\&=\langle r^\sharp(\eta_1)\otimes\kappa^\sharp(\xi_1),\ \eta_2\otimes\xi_2\rangle.\end{aligned}$$

对任意 ξ_1、$\xi_2\in B^*$ 以及 η_1、$\eta_2\in P^*$。即，$\widehat{r}^\sharp=r^\sharp\otimes\kappa^\sharp$，同样，$\tau(\widehat{r})^\sharp=-\tau(r)^\sharp\otimes\kappa^\sharp$。因此，$\widehat{\mathcal{I}}=\mathcal{I}\otimes\kappa^\sharp$是向量空间的同构，$(P\otimes B,\ \circ,\ *,\ \nu,\ \vartheta)$是可因子化 DPP 双代数。□

在 [18], 中，Kupershmidt 发现，李代数上张量形式的经典杨-巴克斯特方程可以转化为与余伴随表示相关联的 $\mathcal{O}$-算子。这一结论已在˜各类代数上得到证实。设 (A, ∘, ∗) 为 DPP 代数，(V, l, r, l, ˜r) 为其表示。若对任意 v_1,$v_2\in V$，线性映射 $T:V\to A$ 称为 (A, ∘, ∗) 关于 (V, l, r, ˜l, ˜r) 的 $\mathcal{O}$-算子，

$$\begin{aligned}T(v_1)\circ T(v_2)&=T(\mathfrak{l}(T(v_1))(v_2)+\mathfrak{r}(T(v_2))(v_1)),\\T(v_1)* T(v_2)&=T(\tilde{\mathfrak{l}}(T(v_1))(v_2)+\tilde{\mathfrak{r}}(T(v_2))(v_1)).\end{aligned}$$

命题 *4.23* ([26])。设 $(A,\circ,*)$ 是一个 *DPP* 代数，且 $r\in A\otimes A$ 是对称的。那么，r 是 $(A,\circ,*)$ 中 *DPYBE* 的解，当且仅当 $r^\sharp:A^*\to A$ 是 $(A,\circ,*)$ 的一个 $\mathcal{O}$-算子，且与余正则表示 $(A^*,-l_A^*,r_A^*-l_A^*,l_A^*,-l_A^*-\tilde{r}_A^*)$ 相关联˜ ˜。

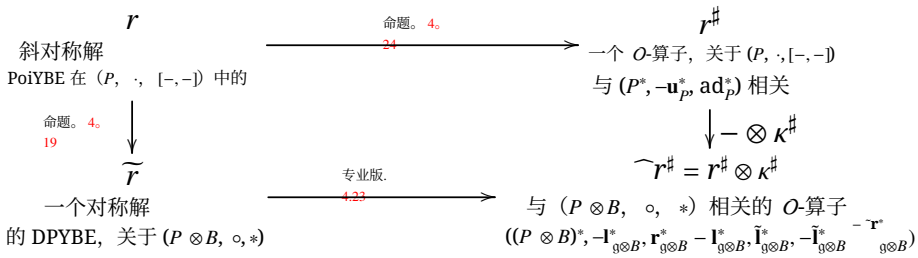
泊松代数的 $\mathcal{O}$-算子已在 [27] 中讨论。设 (P, ·, [−, −]) 是一个泊松代数，V 是一个向量空间，$\mu,\rho:P\to gl(V)$ 是两个线性映射。回顾一下，若 (V, μ, ρ) 是 (P, ·, [−, −]) 的一个表示，则称其为该表示，其中 (V, ρ) 是李代数 (P, [−, −]) 的一个表示，且 (V, μ) 是交换结合代数 (P, ·) 的一个表示，并且 μ, ρ 满足以下条件：$\rho(p_1p_2)=\mu(p_2)\rho(p_1)+\mu(p_1)\rho(p_2)$，以及 $\mu([p_1,p_2])=\rho(p_1)\mu(p_2)-\mu(p_2)\rho(p_1)$，其中任意 $p_1,p_2\in P$。特别地，(P,u_P,ad_P) 是泊松代数 (P, ·, [−, −]) 的一个表示，称为 (P, ·, [−, −]) 的正则表示。此外，$(P^*,-u_P^*,ad^*P)$ 也是泊松代数 (P, ·, [−, −]) 的一个表示，称为 (P, ·, [−, −]) 的余正则表示。回顾一下，与表示 (V, μ, ρ) 相关联的泊松代数 (P, ·, [−, −]) 的一个 $\mathcal{O}$-算子，是一个线性映射 $T:V\to P$，使得

$$\begin{aligned}T(v_1)T(v_2)&=T(\mu(T(v_1))(v_2)+\mu(T(v_2))(v_1)),\\[T(v_1),T(v_2)]&=T(\rho(T(v_1))(v_2)-\rho(T(v_2))(v_1)),\end{aligned}$$

对于任意v_1,$v_2\in V$。

命题 4.24 ([27])。设$(P,\ \cdot,\ [-,-])$是一个泊松代数，且 $r\in P\otimes P$ 为斜对称的。则 r 是PoiYBE 在 $(P,\ \cdot,\ [-,-])$ 中的一个解，当且仅当 $r^\sharp$ 是$(P,\ \cdot,\ [-,-])$的一个 $\mathcal{O}$-算子，该算子与余正则表示$(P^*,\ -\mathbf{u}_P^*,\ \mathrm{ad}^*{}_P)$相关联。

设（P，·，[−, −]）是一个泊松代数，$r\in P\otimes P$ 且（B，$\circ_B$，ω）是一个二次 perm 代数。根据定理4.20和命题 4.22的证明，我们还得到以下交换图：



最后，我们给出一个简单的例子。

例 *4.25*。考虑三维三角泊松双代数 $(P = \mathbb{k}\{e_1, e_2, e_3\}, \cdot, [-,-], \Delta_r, \delta_r)$，如例 *4.21* 中所给，即 $r = e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2$, $e_1e_1 = e_2$, $[e_1, e_3] = e_3$, $\Delta_r = 0$, $\delta_r(e_1) = e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2$ 以及 $\delta_r(e_2) = \delta_r(e_3) = 0$。设二维 $B = \mathbb{k}\{x_1, x_2\}$。若我们定义 $x_1 \circ_B x_1 = x_1$ 以及 $x_1 \circ_B x_2 = x_2$, ，则 $(B, \circ_B)$ 是一个置换代数。此外，若我们定义反对称不变非退化双线性型 $\omega(-,-)$ 在 $(B, \circ_B)$ 上，由 $\omega(x_1, x_2) = 1 = -\omega(x_2, x_1)$，则 $(B, \circ, \omega)$ 是一个二次 *perm* 代数。由定理 *4.16*，我们得到一个 *DPP* 双代数 $(P \otimes B, \circ, *, \nu, \vartheta)$，其中

$$
\begin{aligned}
\vartheta(e_1 \otimes x_1) &= (e_2 \otimes x_2) \otimes (e_3 \otimes x_1) - (e_3 \otimes x_2) \otimes (e_2 \otimes x_1),\\
\vartheta(e_1 \otimes x_1) &= (e_2 \otimes x_2) \otimes (e_3 \otimes x_2) - (e_3 \otimes x_2) \otimes (e_2 \otimes x_2),\\
(e_1 \otimes x_1) \circ (e_1 \otimes x_1) &= e_1 \otimes x_1, \qquad (e_1 \otimes x_1) \circ (e_1 \otimes x_2) = e_1 \otimes x_2,\\
(e_1 \otimes x_1) * (e_3 \otimes x_1) &= e_3 \otimes x_1, \qquad (e_3 \otimes x_1) * (e_1 \otimes x_2) = -e_3 \otimes x_2,\\
(e_1 \otimes x_1) * (e_3 \otimes x_2) &= e_3 \otimes x_2, \qquad (e_3 \otimes x_1) * (e_1 \otimes x_2) = -e_3 \otimes x_2,
\end{aligned}
$$

其他项均为零。定义

$$\widehat{r} = (e_2 \otimes x_2) * (e_3 \otimes x_1) + (e_3 \otimes x_1) * (e_2 \otimes x_2) - (e_2 \otimes x_1) * (e_3 \otimes x_2) - (e_3 \otimes x_2) * (e_2 \otimes x_1).$$

那么，$\widehat{r}$ 是 DPYBE 在$(P \otimes B, \circ, *)$中的一个对称解。通过直接计算可得线性映射 $r^\sharp : P^* \to P$ 为

$$r^\sharp(\xi_1) = 0, \qquad r^\sharp(\xi_2) = e_3, \qquad r^\sharp(\xi_3) = -e_2,$$

其中，$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in P^*$ 是 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 的对偶基；线性映射 $\kappa^\sharp : B^* \to B$ 为

$$r^\sharp(\eta_1) = -x_2, \qquad r^\sharp(\eta_2) = x_1,$$

其中，$\kappa = x_2 \otimes x_1 - x_1 \otimes x_2$, $\eta_1, \eta_2 \in B^*$ 是 $\{x_1, x_2\}$ 的对偶基；线性映射 $\widehat{r}^\sharp : (P \otimes B)^* \to P \otimes B$ 为

$$
\begin{aligned}
\widehat{r}^\sharp(\xi_2 \otimes \eta_1) &= -e_3 \otimes x_2, \qquad \widehat{r}^\sharp(\xi_2 \otimes \eta_2) = e_3 \otimes x_1,\\
\widehat{r}^\sharp(\xi_3 \otimes \eta_1) &= e_2 \otimes x_2, \qquad \widehat{r}^\sharp(\xi_3 \otimes \eta_2) = -e_2 \otimes x_1.
\end{aligned}
$$

容易看出 $\widehat{r}^\sharp = r^\sharp \otimes \kappa^\sharp$，且它是与余正则表示相关联的 O-算子，定义在$(P \otimes B, \circ, *)$上。

致谢。 本研究得到中国国家自然科学基金（No. 11771122）的资助。

利益声明。 作者声明不存在需要披露的利益冲突。
数据可用性。 由于本研究未创建或分析任何新数据，因此本文不适用数据共享。

参考文献

[1] M. Aguiar，预泊松代数，《数学物理通讯》**54**（2000），263–277。[2] V.I. Arnol'd，《经典力学的数学方法》，第60卷，施普林格科学与商业媒体出版社，2013。[3] C. Bai，左对称双代数与经典杨–巴克斯特方程的一个类比，《当代数学通讯》**10**（2008），221–260。[4] C. Bai，Frobenius代数、Connes余循环及其对偶性的双构造，《非交换几何杂志》**4**（2010），475–530。[5] C. Bai，L. Guo，X. Ni，非阿贝尔广义Lax对、经典杨–巴克斯特方程与后 Lie 代数，《数学物理通讯》**297**（2010），553–596。[6] C. Bai，O. Bellier，L. Guo，X. Ni，运算的分裂、Manin 乘积与 Rota-Baxter 算子，《国际数学研究通报》**2013**（2013），485–524。

[7] C. Bai，Y，Lin，Y. Sheng，R. Tang，拟三角、可因子化 Leibniz 双代数与相对 Rota-Baxter 算子，《Forum Math.》37（2025），1083–1101。[8] Z. Cui，B. Hou，拟三角 Novikov 双代数及其诱导的拟三角李双代数，arXiv：2505.19579[9] V. Dotsenko，P. Tamaroff，自函子与 Poincar´é-Birkhoff-Witt 定理，《国际数学研究通报》2021（2021），12670-12690。[10] V. Drinfeld，量子群，载于：《国际数学家大会论文集》，第1卷，第798–820页，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛，1987。[11] V. Ginzburg，D. Kaledin，辛商奇点的泊松变形，《高等数学》186（2004），1–57。[12] Y. Gou，B. Hou，Zinbiel 双代数与预泊松双代数的仿射化、无限维泊松双代数，arXiv：2512.11540。[13] Y. Hong，C. Bai，L. Guo，无限维李双代数：通过 Novikov 双代数的仿射化与 Koszul 对偶，《数学物理通讯》401（2023），2011–2049。[14] B. Hou，置换代数与置换双代数的扩张结构，《代数杂志》649（2024），392–432。[15] B. Hou，R. Li，李双代数与二次 perm 代数张量积上的 Leibniz 双代数结构，准备中。[16] J. Huebschmann，泊松上同调与量子化，《纯粹与应用数学杂志》408（1990），57–113。[17] M. Kontsevich，泊松流形的变形量子化，《数学物理通讯》66（2003），157–216。[18] B. Kupershmidt，经典 r-矩阵究竟是什么，《非线性数学物理杂志》6（1999），448–488。[19] H. Lang，Y. Sheng，可因子化 Lie 双代数、二次 Rota-Baxter Lie 代数与 Rota-Baxter Lie 双代数，《数学物理通讯》397（2023），763–791。[20] Y. Lin，P. Zhou，C. Bai，通过 perm 双代数与前 Lie 双代数的仿射化得到的无限维李双代数，《代数杂志》663（2025），210–258。[21] Y，Lin，拟三角与可因子化 perm 双代数，arXiv：2504.16495。[22] Y. Lin，D. Lu，拟三角与可因子化泊松双代数，arXiv：2506.21870。[23] G. Liu，C. Bai，泊松代数与转置泊松代数运算的新分裂及相关代数结构，载于：《无边界代数——经典与构造性非结合代数结构：基础与应用》，施普林格，2023，第49–96页。[24] M. Livernet，Leibniz 代数的有理同伦，《数学手稿》96（1998），295–315。[25] J. L. Loday，二代数，载于《二代数及相关运算子》，《数学讲义》1763，施普林格，柏林，2001，第7–66页。[26] D. Lu，对偶前泊松代数的性质、变形量子化与双代数，arXiv：2601.11017。[27] X. Ni，C. Bai，泊松双代数，《数学物理杂志》54（2013），023515。[28] J. Pei，C. Bai，L. Guo，X. Ni，复制子、二元运算子的 Manin 白乘积与平均算子，载于：《代数与组合学新趋势》，世界科学出版社有限公司，哈肯萨克，新泽西州，2020，第317–353页。[29] A. Polishchuk，泊松括号的代数几何，《数学科学杂志》84（1997），1413–1444。[30] N. Reshetikhin，M.A. Semenov-Tian-Shansky，量子 R-矩阵与因子分解问题，《几何与物理杂志》5（1988），533–550。[31] M.A. Semenov-Tian-Shansky，什么是经典 r-矩阵？《功能分析及其应用》17（1983），259–272。[32] Y. Sheng，Y. Wang，拟三角与可因子化反对称无穷小双代数，《代数杂志》628（2023），415–433。[33] K. Uchino，导出括号构造与 Manin 乘积，《数学物理通讯》93（2010），37–53。[34] I. Vaisman，《泊松流形几何讲义》，第118卷，Birkh¨auser，2012。[35] Y. Wang，Y. Sheng，泊松代数的相空间及其诱导的前泊松双代数，arXiv：2504.2093。[36] A. Weinstein，《辛流形讲义》，CBMS 数学区域会议丛书29，美国数学学会，普罗维登斯，1979。

河南大学数学与统计学院，开封 475004，中国电子邮箱：bohou1981@163.com

数学与统计学院 , 河南大学 , 开封 475004 , 中国
电子邮箱地址：13037698973@163.com