arXiv:2602.10676v1 [math.GT] 11 Feb 2026

钻孔与填充的线性体积界

GABRIELE VIAGGI

Abstract. 我们证明了有限体积双曲三维流形在钻孔与填充操作下体积变化的一致线性界。

1. Introduction

在有限体积双曲三维流形上可以施行两种重要操作：可以钻去一条简单闭测地线，也可以对一个尖点作 Dehn 填充。一个众所周知的现象是，所有钻孔以及大多数填充都会重新得到一个可双曲化三维流形，其中第一种操作使体积增大，第二种操作使体积减小。这篇短文的目标是证明两个结果，它们对体积能够变化多少给出线性的定量控制。

钻孔。我们先从钻孔开始。我们证明如下结果。

定理 A。 存在一个常数 $c > 0$，使得以下结论成立。设 M 是一个闭双曲三维流形，$\gamma \subset M$ 是一条简单闭测地线。假设 γ 的长度为 ℓ，且其具有半径至少为$R \in (0,1)$的嵌入管状邻域。那么 $M - \gamma$ 上的唯一双曲度量的体积为

$$\mathrm{vol}(M - \gamma) \leq \mathrm{vol}(M) + c\frac{\ell}{R}.$$

推论 B。 存在一个常数 $c > 0$，使得以下结论成立。设 M是一个闭双曲三维流形，$\gamma \subset M$ 是 M中的最短非平凡闭测地线。那么 $M - \gamma$ 上的唯一双曲度量的体积为

$$\mathrm{vol}(M - \gamma) \leq \mathrm{vol}(M) + c\ell$$

其中 $\ell = 2 \cdot \mathrm{inj}(M)$ 是 γ的长度。

此前，Bridgeman [Bri98], Agol [Ago02], Agol、Storm、Thurston 和 Dunfield [ASTD07，定理 10.1] 已经研究了双曲三维流形上钻孔操作导致的体积增加，并证明存在显式函数 f，$g > 1$使得 vol$(M - \gamma) \leq f(R)\mathrm{vol}(M) + g(R)\ell$。因此，本文的主要成果是去掉 vol$(M)$前的乘法常数。这表明体积增加仅取决于 局部几何，即 γ周围的几何。

定理 A 沿着 Bridgeman 的一个猜想的方向 [Bri98]，，该猜想询问在钻孔操作下体积增加是否存在线性上界。虽然当被钻孔的测地线

较短（参见 Hodgson 与 Kerckhoff 的工作 [HK05]），对于长测地线的情形仍不清楚。注意，只要我们能从下方一致地给出下界R，体积的增加至多是线性的。这立即导出推论 B。事实上，众所周知，闭双曲三维流形中的最短测地线具有半径至少为 $\ell/4$ 的管状邻域，其中 ℓ 是该测地线的长度（参见 [GMT03，命题 1.11]）。结合 Margulis 引理的标准推论，这给出一个通用常数 $R_0 > 0$，使得闭双曲三维流形 M 中的最短测地线总具有半径为 $R \geq R_0$ 的管状邻域（关于更为精细的估计，参见 [GMT03，定理 4.1]）。

需要指出的是，将讨论范围限定为闭双曲三维流形中的简单测地线，而不研究任意有限体积流形中的测地线链环，并不重要。在这一更广泛的情形下，定理 A 仍以完全相同的论证成立，而且记账也更加稳健。我们选择只讨论简单情形，以使论述更加简洁。

填充。 现在我们转而讨论填充。我们将用完全不同的技巧，给出以下由 Hodgson 和 Kerckhoff 得到的下界的新证明 [HK05]。

定理 C。 *存在一个常数 $c > 0$，使得以下结论成立。设 M 是一个具有一个尖点的有限体积双曲三维流形。设 C 是 M 的一个尖点邻域，其边界为 horospherical 环面 ∂C。考虑 ∂C上内在平坦度量下的一条简单闭测地线$\mu \subset \partial C$。若 μ 的长度为 $\ell > \sqrt{c}\pi$，且 ∂C 的面积为 A，则对 $M - C$ 沿斜率 μ进行德恩填充所得的流形（记作 M_μ）具有体积为*

$$\mathrm{vol}(M_\mu) + \frac{A}{2}\frac{\pi^2}{\ell^2}\left(1 - c\frac{\pi^2}{\ell^2}\right) \leq \mathrm{vol}(M).$$

我们指出，我们的假设与 [HK05] 的假设略有不同，因为我们要求 $\ell \geq \sqrt{c}\pi$，而 [HK05]要求 $\bar{\ell}^2/A$ 大于一个普适常数。

与钻孔情形相比，关于填充下体积减少多少这一问题已得到更好的理解，并已用多种方法加以研究。Thurston [Thu80，第 6] 章证明了 $\mathrm{vol}(M_\mu) < \mathrm{vol}(M)$，并且对每个固定的 M，当 $\ell \to \infty$ 时有 $\mathrm{vol}(M_\mu) \to \mathrm{vol}(M)$。随后，Neumann 与 Zagier [NZ85] 对每个固定的 M 阐明了 $\mathrm{vol}(M) - \mathrm{vol}(M_\mu)$ 作为 A/ℓ^2 的函数的渐近行为。后来，Hodgson 与 Kerckhoff [HK05]，给出了形如 $\mathrm{vol}(M) - \mathrm{vol}(M_\mu) = A\pi^2/2\ell^2 + O(A^2/\ell^4)$ 的普适界。

将讨论限制于具有一个尖点的有限体积双曲三维流形的德恩填充，而不允许对任意有限体积双曲三维流形的若干选定尖点进行多重德恩填充，这一点其实并不重要。定理 C 的一个直接推广在该更一般的设定下成立，证明相同，只是记号更多。为使叙述尽可能线性且简短，我们仅限于这一简单设定。

关于证明。 最后，简单谈几句证明。

为了证明定理 A，我们采用了 [ASTD07定理 101] 的方法，但有所不同。首先，我们在 M 管状邻域 T 内改变 γ 的度量，在管状邻域上的度量与适当双曲尖点上的度量之间进行插值。我们通过控制标量曲率来实现这一点（见引理3.1）。随后，我们比较修改后的度量的体积与 $M-\gamma$上的双曲结构的体积。我们不依赖 Perelman 的单调性公式，而是利用 Perelman 研究的其他一些结果 [Per02、Per 03], , 即 Anderson [And06] 以及 Kleiner 和 Lott [KL08]对闭双曲三维流形的 σ 不变量所作的精确计算。这使我们能够将这一事实纳入考量：我们没有改变管状邻域之外的度量 T，从而在体积增加中得到加性误差，而非乘性误差。

定理 C 的证明采用完全相同的策略。我们按照 Gromov-Thurston 的 M 做法，改变 C 尖点邻域中的度量 2π-定理 [BH96，定理 9]（我们将证明其定量版本，见命题 5.1）。这一次，尖点上的度量与管状邻域上的度量之间的插值更为微妙，因为我们希望将标量曲率控制到更高阶（见引理4.1）。随后，我们利用 σ 不变量的比较得出结论。

致谢。 我衷心感谢 Ian Agol 和 Martin Bridgeman 就本文初稿提供了有益的讨论和慷慨的反馈。

2. Preliminaries

本节回顾证明主要结果所需的一些关键概念和工具。本节分为两部分。第一部分介绍闭三维流形的所谓 σ 不变量，并给出一个有用的积分估计（命题 2.2）。第二部分概述一类特殊度量的曲率性质，这类度量可用于描述双曲管状邻域和双曲尖点。

2.1. σ 不变量。

三维流形的 σ 不变量是定理 A 和C证明中涉及的关键量。

定义 2.1 （σ 不变量）。 设 M 为一个闭三维流形。对于每个黎曼度量 (M,g)，定义爱因斯坦–希尔伯特泛函

$$\mathcal{E}(g) := \frac{\int_M S_g \,\mathrm{dvol}_g}{\mathrm{vol}(M,g)^{1/3}}$$

其中 S_g 是 (M,g) 的标量曲率。

用 $[g]$ 表示 $(M,\ g)$ 的共形类，即 M 上与 g 共形等价的黎曼度量集合。$(M,\ [g])$ 的经典亚马贝常数定义为

$$Y(M,[g]) := \inf_{g'\in[g]} \mathcal{E}(g').$$

考虑 M 上所有可能的黎曼度量共形类构成的集合 $\mathcal{C}$，定义 σ 不变量为

$$\sigma(M) := \sup_{[g]\in\mathcal{C}} Y(M,[g]).$$

下面给出一个有用的下界。

命题 2.2. 设 M 是一个闭三维流形。对于每个黎曼度量(M,g)，我们有

$$Y(M,[g]) \geq -\left(\int_M |S_g|^{3/2}\mathrm{dvol}_g\right)^{2/3}.$$

证明。考虑任意一个形如 $g' = u^4 g$ 的共形变换，其中 $u : M \to (0,\infty)$ 是一个光滑函数。我们有

$$S_{g'} = u^{-5}(-8\Delta_g u + S_g u) \quad \text{and} \quad \mathrm{dvol}_{g'} = u^6 \mathrm{dvol}_g.$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{\int_M S_{g'}\mathrm{dvol}_{g'}}{\mathrm{vol}(M,g')^{1/3}} &= \frac{\int_M -8u\Delta_g u + S_g u^2 \mathrm{dvol}_g}{\left(\int_M u^6\mathrm{dvol}_g\right)^{1/3}} && \text{by formulas conformal change}\\
&= \frac{\int_M 8|\nabla_g u|^2 + S_g u^2\mathrm{dvol}_g}{\left(\int_M u^6\mathrm{dvol}_g\right)^{1/3}} && \text{integration by parts}\\
&\geq \frac{\int_M S_g u^2\mathrm{dvol}_g}{\left(\int_M u^6\mathrm{dvol}_g\right)^{1/3}} && |\nabla_g u|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

根据 H¨older 不等式

$$\left|\int_M S_g u^2 \mathrm{dvol}_g\right| \leq \left(\int_M |S_g|^{3/2}\mathrm{dvol}_g\right)^{2/3}\left(\int_M (u^2)^3\mathrm{dvol}_g\right)^{1/3}.$$

因此，我们可以继续得到以下不等式链：

$$\geq \frac{-\left(\int_M |S_g|^{3/2}\mathrm{dvol}_g\right)^{2/3}\left(\int_M (u^2)^3\mathrm{dvol}_g\right)^{1/3}}{\left(\int_M u^6\mathrm{dvol}_g\right)^{1/3}} = -\left(\int_M |S_g|^{3/2}\mathrm{dvol}_g\right)^{2/3}.$$

至此，命题的证明完成。 □

一般而言，σ 不变量很难计算，我们只知道少数流形的精确值。幸运的是，正如 Anderson 所证明的，双曲 3-流形属于这一类 [And06，第 2] 节中，Kleiner 和 Lott [KL08] 利用了 Perelman 的工作 [Per02，Per03]。

定理 2.3 (参见 [KL08，命题 93。10])。设 $(M,\ g_M)$ 是一个闭双曲三维流形。那么

$$\sigma(M) = \mathcal{E}(M,g_M) = -6\cdot \mathrm{vol}(M,g_M)^{2/3}.$$

2.2. **管状邻域与尖点之间的插值。** 我们证明定理A和 C的策略涉及在双曲管状邻域的度量与双曲尖点的度量之间进行平滑插值。

为此，我们自然需要研究如下形式的度量

$$g := \mathrm{d}r^2 + a(r)^2\mathrm{d}\theta^2 + b(r)^2\mathrm{d}y^2.$$

在 $[R_0, R_1]\times\mathbb{S}^1\times[0,1]$，其中 a，b：$[R_0, R_1]\to(0,\ \infty)$ 是光滑函数。事实上，当我们取 $R_0 = 0$，$R_1 = R$ 和 $a(r) = 2\pi$ 双曲正弦(r) $b(r) = \ell$双曲余弦(r) 时，得到的是半径为 R 、核心测地线长度为 ℓ 的双曲管状邻域的度量。当我们取 $R_0 = -\infty$，$R_1 = 0$ 和 $a(r) = \ell_1 e^r$，$b(r) = \ell_2 e^r$ 时，得到的是基于平坦圆柱的双曲尖点的度量，其核心曲线长度为 ℓ_1，高度为 ℓ_2。

本节总结这些研究充分的度量的曲率性质。用 ∂_r，∂_θ，∂_y 表示标准坐标标架。

引理 2.4（见 [Ago02，引理 2.3] 或 [BH96，引理 10]）。设 $g := \mathrm{d}r^2 + a(r)^2\mathrm{d}\theta^2 + b(r)^2\mathrm{d}y^2$ 是 $[R_0, R_1]\times\mathbb{S}^1\times[0,1]$上的一个度量。我们有如下对称表

$K(\partial_i,\partial_j)$	∂_r	∂_θ	∂_y
∂_r	0	$-\frac{a''}{a}$	$-\frac{b''}{b}$
∂_θ		0	$-\frac{a'b'}{ab}$
∂_y			0

由于 $\partial_r, \partial_\theta, \partial_y$ 是一个正交标架，度量 g 的标量曲率为

$$S_g = 2(K(\partial_r,\partial_\theta) + K(\partial_r,\partial_y) + K(\partial_\theta,\partial_y)) = -2\left(\frac{a''}{a} + \frac{b''}{b} + \frac{a'b'}{ab}\right).$$

在接下来的两节中，我们通过仔细选择 a，b，构造从管状邻域到尖点的适当光滑过渡。我们将用它们来修改初始流形 M 的双曲度量：在钻孔情形下，修改简单闭测地线的管状邻域；在填充情形下，修改流形的尖点端。

3. From tubes to cusps

本节中，我们构造在钻孔情形下使用的函数 a_{drill}，b_{drill}。

引理 3.1. 存在常数 $c > 0$，使得下列结论成立。对每个$R > 0$，存在函数 a_{drill}、b_{drill}：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得

(1) a_{drill}，$b_{\mathrm{drill}} > 0$。 *(2)* $a_{\mathrm{drill}}(r) =$双曲正弦(r) $b_{\mathrm{drill}}(r) =$双曲余弦(r) 在 $(2R/3,\ \infty)$。 *(3)* $a_{\mathrm{drill}}(r) =$双曲正弦$(R)e^r$，双曲余弦$(R)b_{\mathrm{drill}}(r) = e^r$ 在 $(-\infty,\ R/3)$。

(4) 在 $[R/3, 2R/3]$ 我们有

$$\left|\frac{a''_{\text{drill}}}{a_{\text{drill}}} + \frac{b''_{\text{drill}}}{b_{\text{drill}}} + \frac{a'_{\text{drill}} b'_{\text{drill}}}{a_{\text{drill}} b_{\text{drill}}}\right| \leq c\frac{1}{R^2}.$$

(5) 我们有 $a_{\text{drill}} b_{\text{drill}} \leq$ 双曲正弦(R)双曲余弦$(R)e^{2r}$。

证明。令 $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为一个非递减的光滑凸起函数，使得

- $\eta = 0$ 在 $(-\infty, 1/3]$ 上，且 $\chi = 1$ 在 $[2/3, \infty)$ 上。
- $|\eta'| \leq c_1$ 且 $|\eta''| \leq c_2$。

令 $\chi(r) := \eta(r/R)$。显然

- $\chi = 0$ 在（$-\infty$, $R/3]$ 且 $\chi = 1$ 在 $[2R/3, \infty$上）。
- $|\chi'| \leq c_1/R$ 和 $|\chi''| \leq c_2/R^2$。

定义

$$\phi(r) := (1 - \chi(r)) \log(\sinh(R)e^r) + \chi(r) \log(\sinh(r))$$
$$\psi(r) := (1 - \chi(r)) \log(\cosh(R)e^r) + \chi(r) \log(\cosh(r)).$$

令 $a_{\text{drill}}(r) = e^{\phi(r)}$ 以及 $b_{\text{drill}}(r) = e^{\psi(r)}$。

这自动确保性质 (1)、(2) 和 (3) 得到满足。

现在讨论性质 (4)。我们有

$$\frac{a'_{\text{drill}}}{a_{\text{drill}}} = \phi', \frac{a''_{\text{drill}}}{a_{\text{drill}}} = (\phi')^2 + \phi'' \quad \text{and} \quad \frac{b'}{b_{\text{drill}}} = \psi', \frac{b''_{\text{drill}}}{b_{\text{drill}}} = (\psi')^2 + \psi''.$$

现在我们计算一阶导数

$$\phi' = \chi'(r) \log\left(\frac{\sinh(r)}{\sinh(R)e^r}\right) + \chi(r)(\coth(r) - 1) + 1,$$
$$\psi' = \chi'(r) \log\left(\frac{\cosh(r)}{\cosh(R)e^r}\right) + \chi(r)(\tanh(r) - 1) + 1.$$

含有 χ' 系数的项具有以下性质。由于双曲正弦$(x)/e^x$ 在增加，双曲余弦$(x)/e^x$ 在减小，并且 $r \in [R/3, 2R/3]$，我们有

$$\frac{\sinh(r)}{\sinh(R)e^r} \in \left(\frac{\sinh(R/3)}{\sinh(R)e^{R/3}}, 1\right) \quad \text{and} \quad \frac{\cosh(r)}{\cosh(R)e^r} \in \left(\frac{\cosh(2R/3)}{\cosh(R)e^{2R/3}}, 1\right).$$

函数 双曲正弦$(y/3)$ 双曲正弦$(y)e^{y/3}$、双曲余弦$(2y/3)$ 双曲余弦$(y)e^{2y/3}$ 均在减小，因此它们的下界为

$$c_3 = \frac{\sinh(1/3)}{\sinh(1)e^{1/3}}, c_4 = \frac{\cosh(2/3)}{\cosh(1)e^{2/3}} \in (0, 1).$$

分别。因此，

$$\left|\log\left(\frac{\sinh(r)}{\sinh(R)e^r}\right)\right| \leq |\log(c_3)| \quad \text{and} \quad \left|\log\left(\frac{\cosh(r)}{\cosh(R)e^r}\right)\right| \leq |\log(c_4)|.$$

接下来考虑带有 χ 系数的项。在 $[0,1]$ 上，我们有

$$\coth(r)-1=\frac{2}{1-e^{-2r}}\in\left(0,\frac{1}{r}\right)\quad\text{and}\quad\tanh(r)-1=-\frac{2}{1+e^{-2r}}\in(-2,-1)\,.$$

因此，对于 $r\in[R/3,2R/3]$，我们得到

$$|\coth(r)-1|\le\frac{3}{R}\quad\text{and}\quad|\tanh(r)-1|\le 2.$$

利用事实 $|\chi'|\le c_1/R$，我们得到

$$\begin{aligned}|\phi'(r)|&\le\frac{c_1}{R}|\log(c_3)|+\frac{2}{R}+1=\frac{1}{R}\left(c_1|\log(c_3)|+2+R\right)\le\frac{c_5}{R},\\|\psi'(r)|&\le\frac{c_1}{R}|\log(c_4)|+2+1=\frac{1}{R}\left(c_1|\log(c_4)|+3R\right)\le\frac{c_6}{R}\end{aligned}$$

其中 $c_5=c_1|\log(c_3)|+3$，且 $c_6=c_1|\log(c_4)|+3$。

至于二阶导数，我们有

$$\begin{aligned}\phi''&=\chi''(r)\log\left(\frac{\sinh(r)}{\sinh(R)e^r}\right)+2\chi'(r)(\coth(r)-1)-\chi(r)\frac{1}{\sinh(r)^2}\\\psi''&=\chi''(r)\log\left(\frac{\cosh(r)}{\cosh(R)e^r}\right)+2\chi'(r)(\tanh(r)-1)+\chi(r)\frac{1}{\cosh(r)^2}.\end{aligned}$$

利用事实 $|\chi'|\le c_1/R$，$|\chi''|\le c_2/R^2$ 以及

$$\frac{1}{\sinh(r)^2}\le\frac{1}{r^2}\quad\text{and}\quad\frac{1}{\cosh(r)^2}\le 1,$$

我们得到

$$\begin{aligned}|\phi''(r)|&\le\frac{c_2}{R^2}|\log(c_3)|+2\frac{c_1}{R^2}+\frac{9}{R^2}=\frac{c_7}{R^2},\\|\psi''(r)|&\le\frac{c_2}{R^2}|\log(c_4)|+4\frac{c_1}{R}+1=\frac{1}{R^2}\left(c_2|\log(c_4)|+4c_1R+R^2\right)\le\frac{c_8}{R^2}\end{aligned}$$

其中 $c_7=c_2|\log(c_3)|+2c_1+9$ 且 $c_8=c_2|\log(c_4)|+4c_1+1$。

总之

$$\frac{a''_{\text{drill}}}{a_{\text{drill}}}+\frac{b''_{\text{drill}}}{b_{\text{drill}}}+\frac{a'_{\text{drill}}b'_{\text{drill}}}{a_{\text{drill}}b_{\text{drill}}}=(\phi')^2+(\psi')^2+\phi'\psi'+\phi''+\psi''\le\frac{c}{R^2}$$

其中 $c=c_5^2+c_6^2+c_5c_6+c_7+c_8$。

我们需要检验（5）。

$$\begin{aligned}\phi(r)+\psi(r)&=(1-\chi(r))\log(e^{2r})+\chi(r)\log\left(\sinh(r)\cosh(r)\right)\\&=\log(\sinh(R)\cosh(R)e^{2r})+\chi(r)\log\left(\frac{\sinh(r)\cosh(r)}{e^{2r}}\right)\\&\le\log(\sinh(R)\cosh(R)e^{2r})\end{aligned}$$

作为双曲正弦(r) 双曲余弦$(r)/e^{2r}<1$。至此，引理的证明完成。 □

4. From cusps to tubes

本节中，我们构造填充情形中使用的函数 a_{fill}， b_{fill}

引理 4.1. 存在一个常数 $c > 0$，使得以下结论成立。对于任意$\ell_1 > 2\pi, \ell_2 > 0$，都存在函数 $a_{\text{fill}}, b_{\text{fill}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，满足以下性质。令 $R = \log(\ell_1/\pi)$ 且 $\kappa = 2\pi\ell_2/\ell_1$。

(1) $a_{\text{fill}}, b_{\text{fill}} > 0$. *(2)* $a_{\text{fill}}(r) = 2\pi$双曲正弦$(r + R)$ $b(r + R) = \kappa$双曲余弦$(r + R)$在 $(-R, -2\delta)$上。*(3)* $a_{\text{fill}}(r) = \ell_1 e^r, b(r) = \ell_2 e^r$在 $(-\delta, 0)$上。*(4)* 我们有

$$\left| \frac{a''_{\text{fill}}}{a_{\text{fill}}} + \frac{b''_{\text{fill}}}{b_{\text{fill}}} + \frac{a'_{\text{fill}} b'_{\text{fill}}}{a_{\text{fill}} b_{\text{fill}}} - 3 \right| \leq c \frac{\pi^4}{\ell_1^4}.$$

(5) 我们有

$$a_{\text{fill}} b_{\text{fill}} \leq \ell_1 \ell_2 e^{2r}.$$

证明。令 $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为一个光滑单调不减函数，使得在 $(-\infty, -\log(2)/2)$ 上有 $\chi(r) = 0$，且在 $(-\log(2)/4, \infty)$ 上有 $\chi(r) = 1$，其一阶和二阶导数分别由 $|\chi'| \leq c_1$ 和 $|\chi''| \leq c_2$界定。定义

$$\phi(r) := (1 - \chi(r)) \log(2\pi \sinh(r + R)) + \chi(r) \log(\ell_1 e^r)$$
$$\psi(r) := (1 - \chi(r)) \log(\kappa \cosh(r + R)) + \chi(r) \log(\ell_2 e^r).$$

令 $a_{\text{fill}}(r) = e^{\phi(r)}$ 和 $b_{\text{fill}}(r) = e^{\psi(r)}$。

这就自动保证了性质 (1)、(2) 和 (3) 成立。

现在讨论性质 (4)。我们有

$$\frac{a'_{\text{fill}}}{a_{\text{fill}}} = \phi', \frac{a''_{\text{fill}}}{a_{\text{fill}}} = (\phi')^2 + \phi'' \quad \text{and} \quad \frac{b'_{\text{fill}}}{b_{\text{fill}}} = \psi', \frac{b''_{\text{fill}}}{b_{\text{fill}}} = (\psi')^2 + \psi''.$$

因此，我们需要控制三项。第一项是 $(\phi')^2 + (\psi')^2$，我们将其简便地写作

$$\begin{aligned}(\phi')^2 + (\psi')^2 &= (1 + (\phi' - 1))^2 + (1 + (\psi' - 1)^2 \\ &= 2 + 2[(\phi' - 1) + (\psi' - 1)] + (\phi' - 1)^2 + (\psi' - 1)^2.\end{aligned}$$

第二项是 $\phi'\psi'$，我们将其写作

$$\begin{aligned}\phi'\psi' &= (1 + (\phi' - 1))(1 + (\psi' - 1)) \\ &= 1 + [(\phi' - 1) + (\psi' - 1)] + (\phi' - 1)(\psi' - 1).\end{aligned}$$

第三个是 $\phi'' + \psi''$。让我们先计算一阶导数。

$$\phi'(r) - 1 = -\chi'(r) \log\left(\frac{2\pi}{\ell_1} \frac{\sinh(r + R)}{e^r}\right) + (1 - \chi(r))(\coth(r + R) - 1)$$
$$\psi'(r) - 1 = -\chi'(r) \log\left(\frac{\kappa}{\ell_2} \frac{\cosh(r + R)}{e^r}\right) + (1 - \chi(r))(\tanh(r + R) - 1).$$

含有 $\chi'(r)$ 系数的项可以利用 $R = \log(\ell_1/\pi)$ 的定义以及 $\kappa = 2\pi\ell_2/\ell_1$ 简化如下。

$$\frac{2\pi}{\ell_1}\frac{\sinh(r+R)}{e^r} = \frac{\pi e^R}{\ell_1}\left(1 - e^{-2(r+R)}\right) = 1 - e^{-2(r+R)}$$

and

$$\frac{\kappa}{\ell_2}\frac{\cosh(r+R)}{e^r} = \frac{\kappa e^R}{2\ell_2}\left(1 + e^{-2(r+R)}\right) = 1 + e^{-2(r+R)}.$$

通过写成以下形式，可以更好地理解带有 $1-\chi(r)$ 系数的项

$$\coth(r+R) - 1 = \frac{2e^{-2(r+R)}}{1 - e^{-2(r+R)}}$$

and

$$\tanh(r+R) - 1 = -\frac{2e^{-2(r+R)}}{1 + e^{-2(r+R)}}.$$

综合以上结果，可得

$$\phi'(r) - 1 = -\chi'(r)\log\left(1 - e^{-2(r+R)}\right) + (1-\chi(r))\frac{2e^{-2(r+R)}}{1 - e^{-2(r+R)}},$$
$$\psi'(r) - 1 = -\chi'(r)\log\left(1 + e^{-2(r+R)}\right) - (1-\chi(r))\frac{2e^{-2(r+R)}}{1 + e^{-2(r+R)}}.$$

回顾一下，$r \in [-\log(2)/2,\ -\log(2)/4]$，并注意到

$$e^{-2(r+R)} = \frac{\pi^2}{\ell^2}e^{-2r} < \frac{1}{4}e^{-2r} < \frac{1}{2}.$$

由于 $|\log(1\pm x)| \le x$ 对于 $x \in (0,\ 1)$ 成立，且 $1/(1\pm x) \le 3/2 \mp 1/2$ 对于 $x \in (0,\ 1/2)$ 成立，因此有 $|\phi'(r) - 1| \le c_3 e^{-2R}$，$|\psi'(r) - 1| \le c_4 e^{-2R}$，其中 $c_3 = 2(c_1+4)$ $c_4 = 2(c_1+2)$ 仅取决于 χ。

根据以上公式，可得

$$(\phi'(r) - 1) + (\psi'(r) - 1) = -\chi'(r)\log\left(1 - e^{-4(r+R)}\right) + (1-\chi(r))\frac{4e^{-4(r+R)}}{1 - e^{-4(r+R)}}.$$

对 $\log(1\pm x)$ 和 $1/(1\pm x)$ 使用与上文相同的控制（注意 $e^{-4(r+R)} < e^{-2(r+R)}$），我们推得 $|(\phi'(r) - 1) + (\psi'(r) - 1)| \le c_5 e^{-4R}$，其中 $c_5 = 4(c_1+8)$ 仅依赖于 χ。

至于二阶导数，我们有

$$\phi''(r) = -\chi''(r)\log\left(\frac{2\pi}{\ell_1}\frac{\sinh(r+R)}{e^r}\right) - 2\chi'(r)(\coth(r+R) - 1) - (1-\chi(r))\frac{1}{\sinh(r+R)^2},$$
$$\psi''(r) = -\chi''(r)\log\left(\frac{2\pi}{\ell_1}\frac{\cosh(r+R)}{e^r}\right) - 2\chi'(r)(\tanh(r+R) - 1) + (1-\chi(r))\frac{1}{\cosh(r+R)^2}.$$

按上述方法化简表达式后，我们得到

$$\phi''(r) = -\chi''(r)\log\left(1-e^{-2(r+R)}\right) - 2\chi'(r)\frac{2e^{-2(r+R)}}{1-e^{-2(r+R)}} - (1-\chi(r))\left(\frac{2e^{-(r+R)}}{1-e^{-2(r+R)}}\right)^2,$$

$$\psi''(r) = -\chi''(r)\log\left(1+e^{-2(r+R)}\right) + 2\chi'(r)\frac{2e^{-2(r+R)}}{1+e^{-2(r+R)}} + (1-\chi(r))\left(\frac{2e^{-(r+R)}}{1+e^{-2(r+R)}}\right)^2.$$

将这两项相加，得到

$$\phi''(r)+\psi''(r) = -\chi''(r)\log\left(1-e^{-4(r+R)}\right) - 2\chi'(r)\frac{4e^{-4(r+R)}}{1-e^{-4(r+R)}} - (1-\chi(r))\frac{16e^{-4(r+R)}}{(1-e^{-4(r+R)})^2}.$$

再次利用 $|\log(1\pm x)| \le x$ 和 $1/(1\pm x) \le 2$，我们推得存在一个常数$c_6 = 4($
$c_2 + 16c_1 + 32)$，使得$|\phi''(r) + \psi''(r)| \le c_6 e^{-4R}$。将所有项合并，得到以下不等式

$$\begin{aligned}
&\left|(\phi')^2 + (\psi')^2 + \phi'\psi' + \phi'' + \psi'' - 3\right| \\
&= \left|2[(\phi'-1)+(\psi'-1)] + (\phi'-1)^2 + (\psi'-1)^2 + [(\phi'-1)+(\psi'-1)] + (\phi'-1)(\psi'-1) + \phi'' + \psi''\right| \\
&\le 3|(\phi'-1)+(\psi'-1)| + |\phi'-1||\psi'-1| + |\phi'-1|^2 + |\psi'-1|^2 + |\phi''+\psi''| \\
&\le (3c_5 + c_3c_4 + c_3^2 + c_4^2 + c_6)e^{-4R} = c\pi^4/\ell^4
\end{aligned}$$

其中 $c = 3c_5 + c_3c_4 + c_3^2 + c_4^2 + c_6$ 仅依赖于 χ。

最后，我们需要验证 (5)。我们有

$$\begin{aligned}
\phi(r) + \psi(r) &= (1-\chi(r))\log\left(2\pi\kappa\sinh(r+R)\cosh(r+R)\right) + \chi(r)\log(\ell_1\ell_2 e^{2r}) \\
&= (1-\chi(r))\log\left(\frac{2\pi\kappa e^{2R}}{4}e^{2r}(1-e^{-4(r+R)})\right) + \chi(r)\log(\ell_1\ell_2 e^{2r}).
\end{aligned}$$

利用 $\frac{2\pi\kappa e^{2R}}{4} = \ell_1\ell_2$，我们继续得到以下等式链

$$\begin{aligned}
&= (1-\chi(r))\log\left(\ell_1\ell_2 e^{2r}(1-e^{-4(r+R)})\right) + \chi(r)\log(\ell_1\ell_2 e^{2r}) \\
&= \log(\ell_1\ell_2 e^{2r}) + (1-\chi(r))\log\left(1-e^{-4(r+R)}\right) \le \log(\ell_1\ell_2 e^{2r}).
\end{aligned}$$

至此，引理的证明结束。 □

5. Metrics on tubes

在定义了函数 a_{fill}，b_{fill}之后，我们用它们来证明如下延拓结果，该结果或许具有独立意义（它是 2π-定理的一个定量版本，可与 [BH96，定理 9], [CL98，命题 3.1], 以及 [FKP08，定理2.1]相比较）。

命题 5.1. 存在一个常数 $c > 0$，使得以下结论成立。设V 是一个实心环面。假设边界 ∂V 上配备了面积为 A 的平坦度量。设子午线 ∂V 上的平坦测地代表的长度为

子午线 $\mu \subset \partial V$ 的长度为 $\ell > 2\pi$。那么存在一个光滑的黎曼度量 (V, g)，具有以下性质。

- 度量 g 在 ∂V的领圈内是双曲尖点度量，边界∂V 是尖点的等距面截面，并且 g 在边界上的限制与 ∂V上给定的平坦度量一致。

- 将度量 g的标量曲率记为 S_g 。我们有

$$\int_V \left(\frac{|S_g|}{6}\right)^{3/2} \mathrm{dvol}_g \leq \frac{A}{2}\left(1 - \frac{\pi^2}{\ell^2}\right)\left(1 + c\frac{\pi^4}{\ell^4}\right).$$

证明。 令 $R :=\log(\ell/\pi)$。

考虑与 $\ker(\pi_1(\partial V) \to \pi_1(V)) = \mathbb{Z}\mu$ 对应的正规覆盖 $W \to \partial V$（环路 $\mu \subset \partial V$ 是子午线的一个平坦代表）。根据覆盖理论，子午线 μ 提升为 W上的一条简单闭曲线。记 $\delta\colon W \to W$ 为覆盖变换群 $\pi_1(\partial V)/\mathbb{Z}\mu$的一个生成元，使得 $\partial V = W/\langle\delta\rangle$。

赋予诱导的平坦度量后， W 是一个平坦圆柱，我们可以将其等距识别为

$$(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \ell_1^2 \mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}y^2)$$

其中 $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$。由于 μ 以长度为 ℓ 的简单闭测地线的形式同胚地提升到 W 上，因此必有 $\ell_1 = \ell$。在识别 $W \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ 下，甲板变换 δ 对应于等距变换

$$\tau : (\theta, y) \to (\theta + \alpha, y + s)$$

并且我们有 $\partial V = W/\langle\delta\rangle = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}/\langle\tau\rangle$。为了计算 s，我们注意到以下事实： τ 的每个基本域的面积都等于 A，即 ∂V 的面积。根据 τ 的显式公式，一个基本域为 $\mathbb{S}^1 \times [0, s]$，其面积为 $\ell_1 s$。因此 $s = A/\ell_1 = A/\ell$。

根据上述讨论，等距微分同胚

$$f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}/\langle\tau\rangle \to \partial V$$

将 $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ 映到 μ 的一个平行副本上；后者是 ∂V 上子午线的测地代表。现在我们将此微分同胚扩展为一个适当实心环面的微分同胚，其边界为 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}/\langle\tau\rangle$ 和 V。为此，注意到 τ 可扩展为一个微分同胚

$$U := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times [-R, 0] \,/\, (\theta, y, -R) \sim (\theta', y, -R)$$

我们仍稍微滥用记号，将其记为 τ，其公式为

$$\tau(\theta, y, r) = (\theta + \alpha, y + s, r).$$

由此扩张生成的群 $\langle\tau\rangle$ 在 U 上自由且恰当不连续地作用。商空间 $U/\langle\tau\rangle$ 是一个实心环面，其边界为 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \{0\}/\langle\tau\rangle$，子午线由 $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \times \{0\}$ 给出。由于 $f\colon \partial U/\langle\tau\rangle \to \partial V$ 将源空间的子午线映射到目标空间的子午线，因此它可以延拓为一个微分同胚$U/\langle\tau\rangle \to V$。

从现在起，我们在 U 上进行讨论，其边界 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}\times\{0\}$ 配备度量 $\ell_1^2\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{d}y^2$。我们将考虑形如 $g=\mathrm{d}r^2+a(r)^2\mathrm{d}\theta^2+b(r)^2\mathrm{d}y^2$ 的度量。所有这些度量均为 τ-不变的。因此，它们可下降为 $U/\langle\tau\rangle$ 上的黎曼度量。注意， g 在 $r=-R$ 轨迹处可能是奇异的（该轨迹是一条直线）。众所周知，当 $a'(-R)=2\pi$ 时， g 处处光滑（见 [BH96] 或 [FKP08]）。我们选取由引理 4.1 在输入 $\ell_1=\ell$ 和 $\ell_2=1$ 下给出的 $a(r)=a_{\mathrm{fill}}(r)$ 和 $b(r)=b_{\mathrm{fill}}(r)$。注意，引理 4.1 的性质 (2) 保证了 $a'_{\mathrm{fill}}(-R)=2\pi$。另请注意，引理 4.1 的性质 (4) 与引理 2.4 一起意味着所得度量的标量曲率 S_g 满足

$$\left|\left(\frac{S_g}{6}\right)^{3/2}-1\right|\leq\left|\left(1+c\frac{\pi^4}{\ell^4}\right)^{3/2}-1\right|\leq\frac{3}{2}c\frac{\pi^4}{\ell^4}.$$

现在计算

$$\int_V\left|\frac{S_g}{6}\right|^{3/2}\mathrm{dvol}_g.$$

由于 S_g 接近于 1，我们首先将其与体积(V,g)进行比较，并控制两者之差。然后我们证明，体积(V,g)有界于 $(1-\pi^2/\ell^2)A/2$。为进行这些计算，我们在 τ 作用于 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}\times[-R,0]$的基本域 $F:=\mathbb{S}^1\times[0,s]\times[-R,0]$ 上进行。我们有

$$\left|\int_V\left(\frac{|S_g|}{6}\right)^{3/2}\mathrm{dvol}_g-\mathrm{vol}(V,g)\right|\leq\int_V\left|\left(\frac{|S_g|}{6}\right)^{3/2}-1\right|\mathrm{dvol}_g\leq\frac{3}{2}c\frac{\pi^4}{\ell^4}\mathrm{vol}(V,g).$$

让我们计算体积。根据引理 4.1 (5)，有 $a_{\mathrm{fill}}b_{\mathrm{fill}}\leq\ell e^{2r}$。因此 s

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(V,g)&=\mathrm{vol}(F,g)\\&=\int_0^{A/\ell}\int_0^1\int_{-R}^0 a_{\mathrm{fill}}b_{\mathrm{fill}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}y\\&=\frac{A}{\ell}\int_{-R}^0 a_{\mathrm{fill}}b_{\mathrm{fill}}\mathrm{d}r\\&\leq\frac{A}{\ell}\int_{-R}^0\ell e^{2r}\mathrm{d}r=\frac{A}{2}\left(1-\frac{\pi^2}{\ell^2}\right).\end{aligned}$$

总之

$$\begin{aligned}\int_V\left(\frac{|S_g|}{6}\right)^{3/2}\mathrm{dvol}_g&=\left(\int_V\left(\frac{|S_g|}{6}\right)^{3/2}\mathrm{dvol}_g-\mathrm{vol}(V,g)\right)+\mathrm{vol}(V,g)\\&\leq\left(1+\frac{3}{2}c\frac{\pi^4}{\ell^2}\right)\mathrm{vol}(V,g)\leq\left(1+\frac{3}{2}c\frac{\pi^4}{\ell^2}\right)\frac{A}{2}\left(1-\frac{\pi^2}{\ell^2}\right)\end{aligned}$$

如所愿。 □

6. Proof of Theorem A

存在一个 T 的 γ管状邻域，该邻域由所谓的费米坐标参数化，在此坐标下， M 的双曲度量可写为

$$g_M = \mathrm{d}r^2 + 4\pi^2 \sinh(r)^2 \mathrm{d}\theta^2 + \ell^2 \cosh(r)^2 \mathrm{d}y^2$$

其中 $y \in [0,1]$ 是沿 γ的长度参数，而 $r \in [0,R]$， $\theta \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 分别是围绕 γ的径向参数和角参数。

启发式地说，基本图景如下。理想情况下，应当有$\sigma(M-\gamma) = -6^{3/2}$体积$(M-\gamma)^{2/3}$（类似于定理 2.3），并希望利用不等式 $\sigma(M-\gamma) \geq -(\int_{M-\gamma} |S_g|^{3/2}\,\mathrm{dvol}_g)^{2/3}$（类似于命题 2.2），将体积$(M-\gamma)$与标量曲率的积分进行比较，该标量曲率对应于我们通过修改 $T-\gamma$ 上的双曲度量 g_M 而得到的黎曼度量（替换为利用引理 3.1 定义的那些度量之一）。由于定理 2.3 和命题 2.2 仅适用于闭流形（$M-\gamma$ 有一个尖点），这一策略无法完全按所述方式实施。不过，这只是一个技术性障碍，我们将用德恩填充技巧加以绕过（如 [ASTD07]中所述）。

我们从证明开始。先定义如下对象会比较方便。我们将 $[r_0,r_1]$-壳层 称为 T 的子流形，它在费米坐标中对应于径向坐标 r 在区间 $[r_0,r_1]$内变化的区域。

固定任意的 $\epsilon > 0$ 。按照我们的策略，我们将$[\epsilon,R]$-壳层 S_ϵ 上的度量 g_M 替换为度量

$$g_{S_\epsilon} := \mathrm{d}r^2 + 4\pi^2 a_{\mathrm{drill}}(r)^2 \mathrm{d}\theta^2 + \ell^2 b_{\mathrm{drill}}(r)^2 \mathrm{d}y^2$$

其中 a_{drill}， b_{drill} 是引理 3.1 在输入 R下给出的函数。注意，g_{S_ϵ} 在 $[2R/3,R]$-壳层上与 g_M 一致，而与

$$g_C := \mathrm{d}r^2 + 4\pi^2 \sinh(R)^2 e^{2r} \mathrm{d}\theta^2 + \ell^2 \cosh(R)^2 e^{2r} \mathrm{d}y^2$$

在 $[\epsilon,R/3]$-壳层中。度量 g_C 可按相同公式自然地延拓到每个 $r \leq \epsilon$ 。该延拓与一个双曲尖点等距，其中切片r =为常数时是类球面环面。

下一步只是一个小技巧，用来弥补 σ 不变量的计算仅适用于闭双曲流形这一事实。我们要做的是利用长德恩填充，将 $M-\gamma$ 实现为闭双曲流形的几何极限。根据几何收敛的标准性质， $M-\gamma$ 的体积可通过逼近双曲流形的体积取极限来计算。

考虑较小的环面 $T_\epsilon := T - S_{\epsilon\circ}$ 在环面 ∂T_ϵ 上选取一列两两不同的本质简单闭曲线 μ_n ，并定义 M_n 为对 $M - T_\epsilon$ 进行德恩填充所得的空间，其填充斜率为 μ_n，即

$$M_n = (M - T_\epsilon) \cup_{\mu_n} \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$$

其中粘合映射 $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \partial T_\epsilon$ 由以下条件完全确定（在同伦意义下）：将 $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ 的子午线映射到 $\mu_{n\circ}$ 根据瑟斯顿双曲德恩填充定理（例如参见 [Mar22，第 15]章），当 n足够大时，我们

有 M_n 具有双曲度量 g_{M_n}，其体积 $\mathrm{vol}(M_n,\ g_{M_n})$ 收敛于 $(M-\gamma,\ g_{M-\gamma})$ 的体积，其中 $g_{M-\gamma}$ 表示 $M-\gamma$ 上的双曲度量。

根据命题 5.1，对于每个足够大的 n，我们都可以将度量g_C 光滑地延拓为度量 $g_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1,\ n}$ 定义在添加的实心环面 $\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1$ 上，使得

$$\int_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1}|S_{g_n}|^{3/2}\mathrm{dvol}_{g_n}\to 6^{3/2}\cdot\frac{\mathrm{Area}(\partial T_\epsilon,g_C)}{2}=e^{\epsilon}\sinh(R)\cosh(R)\pi\ell.$$

根据定理 2.3，我们有 $-6\cdot$ 体积$(M,\ g_{M_n})^{2/3}=\sigma(M_n)$。

根据命题2.2 我们有

$$\sigma(M_n)\geq-\left(\int_{M_n}|S_{g_n}|^{3/2}\mathrm{dvol}_{g_n}\right)^{2/3}$$

对于 M_n 上的任意黎曼度量 g_n。特别地，这对由下式定义的黎曼度量成立：

$$g_n:=\begin{cases}g_M & \text{on } M-T,\\ g_{S_\epsilon} & \text{on } S_\epsilon,\\ g_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1,n} & \text{on } \mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1.\end{cases}$$

因此，

$$6^{3/2}\cdot\mathrm{vol}(M,g_{M_n})\leq\int_{M_n}|S_{g_n}|^{3/2}\mathrm{dvol}_{g_n}.$$

我们将积分拆分为

$$\begin{aligned}\int_{M_n}|S_{g_n}|^{3/2}\mathrm{dvol}_{g_n}=&\int_{M-T}|S_{g_M}|^{3/2}\mathrm{dvol}_{g_M}+\int_{S_\epsilon}|S_{g_S}|^{3/2}\mathrm{dvol}_{g_S}\\&+\int_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1}|S_{g_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1,n}}|^{3/2}\mathrm{dvol}_{g_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1,n}}.\end{aligned}$$

由于度量 g_n 与 $M-T$ 上的双曲度量一致，第一项 i s

$$\int_{M-T}|S_g|^{3/2}\mathrm{dvol}_g=6^{3/2}\cdot\mathrm{vol}(M-T)\leq 6^{3/2}\mathrm{vol}(M).$$

在 S_ϵ 上，我们计算

$$\begin{aligned}&\int_0^\ell\int_0^1\int_\epsilon^R|S_g|^{3/2}a_{\mathrm{drill}}b_{\mathrm{drill}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}y\\&\leq 2\pi\ell(2c)^{3/2}\frac{1}{R^3}\int_\epsilon^R a_{\mathrm{drill}}b_{\mathrm{drill}}\,\mathrm{d}r && \text{by Lemma 3.1 (4)}\\&\leq 2\pi\ell(2c)^{3/2}\frac{1}{R^3}\int_\epsilon^R\sinh(R)\cosh(R)e^{2r}\,\mathrm{d}r && \text{by Lemma 3.1 (5)}\\&=(2c)^{3/2}\pi\ell\frac{\sinh(R)\cosh(R)}{R^3}(e^{2R}-e^{2\epsilon}).\end{aligned}$$

最后，在 $\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1$ 上我们有

$$\int_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1}|S_{g_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1,n}}|^{3/2}\mathrm{dvol}_{g_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1,n}}\to 6^{3/2}e^{\epsilon}\sinh(R)\cosh(R)\pi\ell.$$

将三个项合并并除以 $6^{3/2}$，我们得到

$$\mathrm{vol}(M_n,g_{M_n})\le\mathrm{vol}(M)+\frac{(2c)^{3/2}}{6^{3/2}}\pi\ell\frac{\sinh(R)\cosh(R)}{R^3}(e^{2R}-e^{2\epsilon})+e^{\epsilon}\sinh(R)\cosh(R)\pi\ell$$

先令 $n\to\infty$ 趋于极限，再令 $\epsilon\to 0$趋于极限，我们得到

$$\mathrm{vol}(M-\gamma)\le\mathrm{vol}(M)+\pi\frac{\ell}{R}\left(\frac{(2c)^{3/2}}{6^{3/2}}\frac{\sinh(R)\cosh(R)(e^{2R}-1)}{R^2}+\frac{\sinh(R)\cosh(R)}{R}\right).$$

为了得出结论，我们只需注意到 $\sinh(R)\cosh(R)(e^{2R}-1)/R^2\le c_1$，并且 $\sinh(R)\cosh(R)/R\le c_2$对于 $R\in(0,1)$（其中 c_1可以取约为 $c_1=11.59$，而 $c_2=1.81$）。定理 A 的证明到此结束。□

7. The proof of Theorem C

设 C 为由 horospherical 环面 ∂C围成的尖点邻域。根据命题 5.1，我们可以在德恩填充上找到一个度量g_μ

$$M_\mu=(M-C)\cup_\mu\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1$$

与 M 在 $M-C$ 上的双曲度量一致，并且满足

$$\int_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1}|S_g|^{3/2}\mathrm{dvol}_g\le 6^{3/2}\frac{A}{2}\left(1-\frac{\pi^2}{\ell^2}\right)\left(1+c\frac{\pi^4}{\ell^4}\right).$$

根据定理2.3，我们有 $-6\cdot$体积$(M_\mu,\ g_{M_\mu})^{2/3}=\sigma(M_\mu)$。

根据命题2.2 我们有

$$\sigma(M_\mu)\ge-\left(\int_{M_\mu}|S_g|^{3/2}\mathrm{dvol}_g\right)^{2/3}.$$

对于每个黎曼度量 g 在 M_μ上。特别是

$$6^{3/2}\cdot\mathrm{vol}(M_\mu)\le\int_{M_\mu}|S_g|^{3/2}\,\mathrm{dvol}_g$$

我们使用度量$g=g_\mu$ 并计算积分

$$\int_{M_\mu}|S_{g_\mu}|^{3/2}\,\mathrm{dvol}_{g_\mu}=\int_{M-C}|S_{g_M}|^{3/2}\mathrm{dvol}_{g_M}+\int_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1}|S_{g_\mu}|^{3/2}\,\mathrm{dvol}_{g_\mu}.$$

由于度量 g_μ 与 $M-C$上的双曲度量重合，第一个项 i s

$$\int_{M-C}|S_g|^{3/2}\mathrm{dvol}_g=6^{3/2}\cdot\mathrm{vol}(M-C)=6^{3/2}\left(\mathrm{vol}(M)-\frac{A}{2}\right).$$

根据命题 5.1，在 $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ 上有

$$\int_{\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1} |S_g|^{3/2} \mathrm{dvol}_g \leq 6^{3/2} \frac{A}{2} \left(1 - \frac{\pi^2}{\ell^2}\right) \left(1 + c\frac{\pi^4}{\ell^4}\right).$$

将各项合并并除以 $6^{3/2}$，得到

$$\mathrm{vol}(M_\mu) + \frac{A}{2} \left(\frac{\pi^2}{\ell^2} - c\frac{\pi^4}{\ell^4} + c\frac{\pi^6}{\ell^6}\right) \leq \mathrm{vol}(M).$$

这就完成了定理C的证明。 □

References

[Ago02] Ian Agol, *Volume change under drilling*, 《几何与拓扑》6 (2002), 905–916。[And06] Michael T. Anderson, *Canonical metrics on 3-manifolds and 4-manifolds*, 《亚洲数学杂志》10 (2006), 第 1 期, 127–164。[ASTD07] Ian Agol、Peter A. Storm、William P. Thurston 和 Nathan Dunfield, *Lower bounds on volumes of hyperbolic Haken 3-manifolds* **20** 2007 4, 1053 1077 , 《美国数学会杂志》 () , 第 – 期。[BH96] Steven A. Bleiler 和 Craig D. Hodgson, *Spherical space forms and Dehn filling*, 《拓扑学》35 (1996), 第 3 期, 809–833。[Bri98] Martin Bridgeman, *Bounds on volume increase under Dehn drilling operations*, 《伦敦数学会会刊》 (3) 77 (1998), 第 2 期, 415–436。[CL98] Daryl Cooper 和 Marc Lackenby, *Dehn surgery and negatively curved 3-manifolds*, 《微分几何杂志》50 (1998), 第 3 期, 591–624。[FKP08] David Futer、Efstratia Kalfagianni 和 Jessica S. Purcel, *Dehn filling volume and the Jones polynomial* **78** 2008 3, 429 464 , , , 《微分几何杂志》 () , 第 – 期。[GMT03] David Gabai、Robert Meyerhoff 和 Nathaniel Thurston, *Homotopy hyperbolic 3-manifolds are hyperbolic* 2 **157** 2003 2, 335 431 , 《数学年刊》 () () , 第 – 期。[HK05] Craig D. Hodgson 和 Steven P. Kerckhoff, *Universal bounds for hyperbolic Dehn surgery* 2 **162** 2005 1, 367 421 , 《数学年刊》 () () , 第 – 期。[KL08] Bruce Kleiner 和 John Lott, *Notes on Perelman's papers*, 《几何与拓扑》12 (2008), 第 5 期, 2587–2855。[Mar22] Bruno Martelli, *An introduction to geometric topology*, 独立出版, 2022。[NZ85] Walter D. Neumann 和 Don Zagier, *Volumes of hyperbolic three-manifolds*, 《拓扑学》24 (1985), 307–332。[Per02] Grisha Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, 预印本, arXiv:math/0211159 [math.DG] (2002)., 2002, Id/No 0211159。[Per03] , *Ricci flow with surgery on three-manifolds* 0303109 , 预印本, arXiv:math/[ ] 2003 2003, 0303109 math.DG ( )。, Id/No。[Thu80] William P. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, http://library.msri.org/books/gt3m/, 1980, 普林斯顿大学讲义。

GABRIELE VIAGGI, Mathematical Institute, University of Pisa,
Pisa*E-mail address*: gabriele.viaggi@unipi.it