arXiv:2602.10753v1 [math.OA] 11 Feb 2026

关于 C*-代数上可分解映射的推广

KRZYSZTOF SZCZYGIELSKI

Abstract. 我们提出了 C*-代数上映射可数可分解性的概念：若有界线性映射 φ：$\mathscr{A} \to B(\mathcal{H})$ 存在表示 $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \circ \phi_k$，其中 $\mathscr{A}$ 是 C*-代数，$\mathcal{H}$ 是希尔伯特空间，ψ_k：$\mathscr{A} \to B(\mathcal{H})$ 为完全正映射，而 ϕ_k：$\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 为有界 *-映射，则称该映射为 *countably decomposable* 。在对映射 ϕ_k 施加各种假设的若干情形下，我们给出了可数可分解性的刻画。我们的研究结果推广了 Størmer 在《美国数学会会刊》**86** (1982), 402-404 中提出的经典结果；该结果最初针对可分解正映射。

1. Introduction

设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 为 C*-代数，$\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。若线性映射 φ：$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 保持自伴元，即当 $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ 时，则称其为 *-映射 。若有界 *-映射 还满足 $\varphi(\mathscr{A}^+) \subseteq \mathscr{B}^+$（其中 $\mathscr{M}^+$ 是 $\mathscr{M}$ 中正元构成的凸锥），则进一步称其为 正 。此外，当 $\mathrm{id}_n \otimes \varphi$ 或 $t_n \otimes \varphi$（分别）作为从 $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ 到 $\mathbb{M}_n(\mathscr{B})$ 的映射对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都是正映射时（id_n 和 t_n 分别是 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 上的恒等映射和转置），称 φ 为 完全正（简称 c.p.）或 完全余正 （简称 c.cp.）。从 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$ 的所有完全正映射构成 $B(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ 中的一个凸锥。最后，若 φ 可以表示为

$$\varphi = \phi_1 + \phi_2 \tag{1.1}$$

对于完全正映射 ϕ_1 和完全共正映射 ϕ_2。可分解映射构成了 C*-代数之间正映射的一个非平凡但在数学上易于处理的子类。它们的重要性在低维矩阵代数的情形下尤为明显；例如，已知在 $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$上的所有正映射，或 $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$与 $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$之间（反之亦然）的所有正映射，实际上都是可分解的 [1]。对于高维代数，这一论断不再成立，因为已构造出不可分解正映射（例如参见 [2–5]）；在 $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$情形下便已如此。设 $\mathscr{B} = B(\mathcal{H})$，其中希尔伯特空间为 $\mathcal{H}$。从 $\mathscr{A}$ 到 $B(\mathcal{H})$的可分解映射可由以下扩张定理刻画：

定理 1.1（参见 [6]）。映射 φ： $\mathscr{A} \to B(\mathcal{H})$ 是可分解的，当且仅当存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{K}$、一个有界线性算子 V： $\mathcal{H} \to \mathcal{K}$ 以及一个 *Jordan* *-态射 π： $\mathscr{A} \to B(\mathcal{K})$，使得 $\varphi(a) = V^*\pi(a)V$ 对任意 $a \in \mathscr{A}$ 均成立。

那么，以下经典结果 [7] 可以通过考察分解映射的形如 $\varphi_n = \mathrm{id}_n \otimes \varphi$ 的扩张，或其在张量积代数 $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ $n \in \mathbb{N}$ 上的扩大量的表现，进一步刻画分解映射：

定理 *1.2*（参见 [7]）。映射 $\varphi\colon \mathscr{A} \to B(\mathcal{H})$ 是分解的，当且仅当对所有 $[a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$，若 $[a_{ij}]_{i,j}, [a_{ji}]_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})^+$，则对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $[\varphi(a_{ij})]_{i,j} \in \mathbb{M}_n(B(\mathcal{H}))^+$。

上述结果可视为本文背后的主要灵感来源。正映射的通常分解性已被证明具有很高的数学价值，既体现在纯粹的结构层面，也体现在其对量子物理和量子信息论的实用价值上。因此，寻求分解性的各种可能扩张似乎是合理的，尤其是因为这些扩张可能有助于更好地理解正映射锥本身的结构。我们的目标是通过扩展定理 1.2 在 [7] 中的证明里提出的一种代数构造，定义从 $\mathscr{A}$ 到 $B(\mathcal{H})$ 的可分解映射的一种特定推广，并称之为可数可分解。为此，我们在第 2 节采用了两种方法：首先，允许分解中包含任意多个项；其次，我们先验地 不将讨论范围限制于正映射。本文的主要结果以定理 3.2、3.5 和 3.8 的形式给出，它们在各种技术条件下，针对含幺和非幺 C*-代数刻画了可数可分解性，并扩展了定理 1.2 的适用范围。我们还探讨了一些其他性质，例如凸锥结构以及在 BW 拓扑下的闭性。

2. Countable decomposability

我们先给出可数可分解性的形式定义。我们用 $\mathsf{CP}(\mathscr{A}, \mathcal{H})$ 表示从 $\mathscr{A}$ 到 $B(\mathcal{H})$ 的完全正映射所构成的凸锥。下文中，令 τ 为 $B(\mathcal{H})$ 上的某个向量拓扑。

定义 2.1. 令 $\mathscr{A}$ 为一个 C*-代数，$\mathcal{H}$ 为一个希尔伯特空间，且 $\phi = (\phi_k)_k$ 为 $\mathscr{A}$ 上一列 *-映射。若存在一列 $(\psi_k)_k \in \mathsf{CP}(\mathscr{A}, \mathcal{H})^{\mathbb{N}}$，使得映射 $\varphi \in B(\mathscr{A}, B(\mathcal{H}))$ 可表示为级数，则称其关于 ϕ 可数可分解，简称为 ϕ-可分解。

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \circ \phi_k \tag{2.1}$$

该级数在 τ 中逐点收敛于 $B(\mathscr{A}, B(\mathcal{H}))$。形如 (2.1) 的所有映射构成的集合记为 $\mathsf{D}_\phi(\mathscr{A}, \mathcal{H})$。

可数可分解性的定义必然导出以下必要条件：

定理 2.1. 若 $\varphi \in B(\mathscr{A}, B(\mathcal{H}))$ 是 ϕ-可分解的，则必然

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \ker \phi_k \subseteq \ker \varphi. \tag{2.2}$$

证明。对所有 k 取 $a \in \ker \phi_k$，得到部分和序列 $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \circ \phi_k(a) = 0$，对所有 n均成立。于是 $\sigma_n \xrightarrow{\tau} \varphi(a)$ 在 $B(\mathcal{H})$ 中推出 $\varphi(a) = 0$。□

稍后我们将详细讨论 $(\phi_k)_k$ 仅由有限个非零元素组成的情形。自然地，以这种方式 φ表示的映射将被称为有限可分解。

注 2.1。 作为由定义本身直接得出的结果，我们看到，所有正可分解映射也都是有限可分解的。事实上，任意可分解映射都可以写成 $\varphi = \psi_1 + \psi_2 \circ t$ 的形式，其中 ψ_1、$\psi_2 \in$ 完全正$(\mathscr{A}$、$\mathcal{H})$，而且t 是 $\mathscr{A}$ 上的转置，这里的 $\mathscr{A}$ 是指在某个希尔伯特空间上对 $\mathscr{A}$的忠实表示。因此，每个可分解映射都是 $(\mathrm{id}\ t)$-可分解的；显然，同样的观察也适用于完全正映射和完全余正映射。

2.1. **一般性质**。

2.1.1. 非唯一性。 显然，分解 (2.1) 并不唯一：原则上，许多不同的序列 $(\psi_k)_k$、$(\phi_k)_k$ 都可以用来表示同一个映射 φ。例如，对序列 (id t，0，0，.....) 作任意置换，仍会生成同一类可分解映射。类似地，任何其他由可分解映射构成的序列 $(\phi_k)_k$ 也有相同情况，因为由完全正映射和完全余正映射的映射锥性质可知，复合 $\psi_k \circ \phi_k$ 仍是可分解的。这种选择自由在生成可数可分解性的过程中造成了大量冗余。对于 $\mathscr{A}$ 上有界 *-映射的某个集合 X，我们引入序列之间的等价关系 $\sim$

$$\phi \sim \phi' \ \Leftrightarrow\ \mathsf{D}_{\phi}(\mathscr{A},\mathcal{H}) = \mathsf{D}_{\phi'}(\mathscr{A},\mathcal{H}). \tag{2.3}$$

那么，等价类 $[\phi]_\sim \in X^{\mathbb{N}}/\sim$ 生成一组 ϕ-可分解映射 $\mathsf{D}_{[\phi]_\sim}(\mathscr{A},\ \mathcal{H}) := \mathsf{D}_{\phi}(\mathscr{A},\ \mathcal{H})$，其中任意 $\phi \in X^{\mathbb{N}}$ 均成立。由此不难得出：

推论 2.1. $B(\mathscr{A}, B(\mathcal{H}))$ 中的完全正、完全共正及可分解映射的锥，分别是集合 $\mathsf{D}_{[\phi]_\sim}(\mathscr{A}, \mathcal{H})$的特例，它们分别由等价类生成

$$[(\mathrm{id}, 0, ...)]_\sim, \quad [(t, 0, ...)]_\sim \quad and \quad [(\mathrm{id}, t, 0, ...)]_\sim. \tag{2.4}$$

显然，因此值得探寻给定等价类 $[\phi]_\sim$ 尽可能简单（例如最短）的代表，以便在不失一般性的前提下描述 ϕ-可分解映射。

2.1.2. 锥结构。 </style}显然，计数 y

可分解映射集 D{v3}({v4}<style id='5'>，</style>{v7}) 与通常的可分解映射类似，是一个凸锥：

定理 2.2. 集合 $\mathsf{D}_{\phi}(\mathscr{A}, \mathcal{H})$ 是 $B(\mathscr{A}, B(\mathcal{H}))$中的凸锥。

证明. 任取 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathsf{D}_{\phi}(\mathscr{A}, \mathcal{H})$，使得部分和序列

$$\sigma_n^{(i)}(a) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k^{(i)} \circ \phi_k(a) \tag{2.5}$$

在 τ 中完全正地收敛到 $\varphi_i(a)$，对所有 $a \in \mathscr{A}$ 均成立。令 $\tilde{\varphi}_n(a) = \lambda_1\sigma_n^{(1)}(a) + \lambda_2\sigma_n^{(2)}(a)$，其中 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$。由于 τ 是向量拓扑，我们有

$$\lambda_i\sigma_n^{(i)}(a) \xrightarrow{\tau} \lambda_i\varphi_i(a), \quad \tilde{\varphi}_n(a) \xrightarrow{\tau} \lambda_1\varphi_1(a) + \lambda_2\varphi_2(a), \tag{2.6}$$

对所有 a 均成立，这是因为线性空间运算在 τ 下连续。因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_1\psi_k^{(1)} + \lambda_2\psi_k^{(2)}\right) \circ \phi_k = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \tag{2.7}$$

在 τ 中逐点收敛。由于 $\lambda_1\psi_k^{(1)} + \lambda_2\psi_k^{(2)}$ 是完全正的，(2.7) 是 ϕ-可分解的。因此，$\mathsf{D}_{\phi}(\mathscr{A},\ \mathcal{H})$ 对其元素的锥组合封闭，因而是一个凸锥。□

3. Special cases

本节将重点讨论可数可分解性的几种特定“类型”，这些类型由对定义序列 ϕ及其性质的不同选择来确定。在讨论中，我们作出两项限制，即

- 我们假设 $\mathscr{A}$ 具有单位元 $\mathbb{1}_{\mathscr{A}}$，除非另有说明，并且
- 我们将 τ 限制为范数拓扑，位于 $B(\mathcal{H})$中。

考察 τ的其他一些更弱的选择会很有意义；我们将其记为一个有待进一步研究的有趣问题。尽管如此，从此以后我们假设分解(2.1)依范数逐点收敛。每种情形下所构造映射的刻画都将用到一族凸锥

$$\Gamma_n^+(\phi) = \Big\{ [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A}) : [\phi_k(a_{ij})]_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})^+ \text{ for all } k \Big\} \tag{3.1}$$

针对给定序列 ϕ 与 $n \in \mathbb{N}$而定义。我们在此指出，$\Gamma_n^+(\phi)$的定义明显受到原始定理 1.2 中所出现条件的影响：事实上，$[a_{ij}]_{i,j}$ 与$[a_{ji}]_{i,j}$ 二者的正性等价于$[a_{ij}]_{i,j}$ 属于 $\Gamma_n^+(\mathrm{id}\ t)$。

3.1. 有限可分解映射。 首先，我们讨论ϕ 仅包含有限个非零元素的情形，也就是说，它实际上是一个m元组；这种情形最容易处理，而且可能具有最规整的结构。

定义 3.1。 设 $\mathscr{A}$ 是一个 C*-代数，$\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，$\phi = (\phi_k)_{k=1}^m$ 是 $\mathscr{A}$上的有序 m元组有界 *-映射。若映射 $\varphi \in B(\mathscr{A}, B(\mathcal{H}))$是 ϕ可分解的，即具有如下形式

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} \psi_k \circ \phi_k \tag{3.2}$$

其中有序 m元组$(\psi_k)_{k=1}^m \in \mathsf{CP}(\mathscr{A}, \mathcal{H})^m$，则称其为有限可分解的。

3.1.1. 刻画。 以下膨胀定理可以按照 Stinespring 和 Størmer 的思路来表达有限可分解性：

定理 3.1。 若映射 $\varphi \in B(\mathscr{A}, B(\mathcal{H}))$ 是 ϕ可分解的，则存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{K}$、一个有界算子 $V\colon\ \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ 以及一个 *-映射 $\rho : \mathscr{A} \to B(\mathcal{K})$，使得

$$\varphi(a) = V^* \rho(a) V \tag{3.3}$$

对所有 $a \in \mathscr{A}$。

证明。 假设 φ 存在分解 (3.2)。根据 Stinespring 膨胀定理[8]，存在希尔伯特空间 $\mathcal{K}_k$、有界线性算子 $V_k : \mathcal{H} \to \mathcal{K}_k$ 以及 *-同态 $\pi_k : \mathscr{A} \to B(\mathcal{K}_k)$，使得

$$\psi_k(a) = V_k^* \pi_k(a) V_k \tag{3.4}$$

对所有 $a \in \mathscr{A}$、$k \in \{1, \ldots, m\}$。定义 $\mathcal{K} = \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{K}_k$，以及正交投影 $\mathsf{P}_k : \mathcal{K} \to \mathcal{K}_k$。通过以下方式设置有界算子 $V\colon\ \mathcal{H} \to \mathcal{K}$

$$Vh = \sum_{k=1}^{m} V_k h, \quad h \in \mathcal{H}, \tag{3.5}$$

并通过以下方式定义 $\rho:\mathscr{A}\to B(\mathcal{K})$

$$\rho(a)x=\sum_{k=1}^{m}\mathsf{P}_k\pi_k\circ\phi_k(a)\mathsf{P}_kx,\quad x\in\mathcal{K}. \tag{3.6}$$

接着可以验证 V^* 在 $x\in\mathcal{K}$ 上的作用为 $V^*x=\sum_{k=1}^{m}V_k^*\mathsf{P}_kx$。由于所有 ϕ_k 都是含幺 *-映射，且 π_k 都是 *-同态，很容易验证 $\rho(a^*)=\rho(a)^*$。最后，经过简单计算并利用 P_k 的相互正交性，对所有 $a\in\mathscr{A}$、 $h\in\mathcal{H}$,

$$V^*\rho(a)Vh=\sum_{k=1}^{m}V_k^*\pi_k\circ\phi_k(a)V_kh=\sum_{k=1}^{m}\psi_k\circ\phi_k(a)h, \tag{3.7}$$

也就是说，我们得到 $\varphi(a)h$。 □

反过来，若 $\rho:\mathscr{A}\to B(\mathcal{K})$具有如下形式

$$\rho(a)=\sum_{k=1}^{m}\pi_k\circ\phi_k(a) \tag{3.8}$$

对于 *-同态 $\pi_k:\mathscr{A}\to B(\mathcal{K}_k)$ 和 *-映射 $\phi_k\in B(\mathscr{A})$，则映射$a\mapsto V^*\rho(a)V$具有形式(3.2)。

正如下文定理 3.2 所示，将范围限定为含幺映射 ϕ_k，即可完整刻画有限可分解性。这是对 [7] 结果最直接的推广。

定理 3.2。设 $\mathscr{A}$ 是一个含幺 C*-代数，且$(\phi_k)_{k=1}^m$ 是 $\mathscr{A}$ 上有界含幺 *-映射的一个有序 m 元组。映射 $\varphi:\mathscr{A}\to B(\mathcal{H})$ 关于 ϕ 有限可分解，当且仅当

$$\forall\, n\in\mathbb{N}:[a_{ij}]_{i,j}\in\Gamma_n^+(\phi)\Rightarrow[\varphi(a_{ij})]_{i,j}\in\mathbb{M}_n(B(\mathcal{H}))^+. \tag{3.9}$$

在给出证明之前，我们先展示一些辅助结果。在以下讨论中，我们默认定理 3.2 的“仅当”部分成立，即条件 (3.9) 成立。定义

$$\mathscr{W}=\mathbb{M}_n(\mathscr{A})\simeq\mathbb{M}_n(\mathbb{C})\otimes\mathscr{A} \tag{3.10}$$

它同样是一个含幺 C*-代数，其单位元为 $\mathbb{1}_{\mathscr{W}}=I_n\otimes\mathbb{1}_{\mathscr{A}}$（$I_n$ 表示单位矩阵）。设 E_{kl} 为张成 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 的矩阵单位，并设 $\mathscr{D}\subset\mathscr{W}$为所有分块对角矩阵构成的子空间。考虑由下列等式定义的函数 $\xi:\mathscr{A}\to\mathscr{D}$

$$\xi(a)=\begin{pmatrix}\phi_1(a)&0&\cdots&0\\0&\phi_2(a)&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\phi_m(a)\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{m}E_{kk}\otimes\phi_k(a). \tag{3.11}$$

并记为 $\mathscr{X}=\xi(\mathscr{A})$。可以验证，由于所有 ϕ_k 都是线性含幺 *-映射，$\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{W}$ 中的一个算子系统，即包含 $\mathbb{1}_{\mathscr{W}}$的 *-不变子空间。设$\Phi:\mathscr{X}\to B(\mathcal{H})$由下列表达式定义

$$\varphi(a)=(\Phi\circ\xi)(a). \tag{3.12}$$

我们首先确认 Φ 是定义良好的线性映射。由于所有映射 φ、 ϕ_k 都是线性的，且 $\mathscr{A}$是巴拿赫空间，因此等式 $\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)$和 $\Phi(\lambda x)=\lambda\Phi(x)$

对所有 $x, y \in \mathscr{X}$、 $\lambda \in \mathbb{C}$自然成立。任取 $n \geqslant 2$，并对所有 k取任意$c \in \ker \phi_k$。考虑一个大小为 n的对角矩阵，

$$[a_{ij}]_{i,j} = \operatorname{diag}\{c, -c, 0, ..., 0\}. \tag{3.13}$$

于是 $[\phi_k(a_{ij})]_{i,\,j} = 0$ 对于任意 k，它都是 $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ 中的一个正元。根据假设 (3.9)，

$$[\varphi(a_{ij})]_{i,j} = \operatorname{diag}\{\varphi(c), -\varphi(c), 0, ..., 0\} \in \mathbb{M}_n(B(\mathcal{H}))^+, \tag{3.14}$$

也就是说， $\varphi(c)$ 和 $-\varphi(c)$ 都是正的。然而，当且仅当 $\varphi(c) =0$ 时，这才可能成立；因此 $c \in \ker \varphi$，必要的相容性条件 (2.2) 自动满足。 $\mathscr{X}$ 的元素是零向量，当且仅当它具有如下形式：对于某个 $c \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \ker \phi_k$， $\xi(c)$。因此，对于这样的 c，我们有 $0 = \varphi(c) = \Phi(0)$。剩下要证明的是，$x \mapsto \Phi(x)$ 是良定义的函数，也就是说， x 唯一确定 $\Phi(x)$。为此，任取 $x \in \mathscr{X}$，并假设存在 y_1、 $y_2 \in B(\mathcal{H})$ 满足等式$y_1 = \Phi(x)$ 和 $y_2 = \Phi(x)$。 Φ 的线性以及 $\Phi(0) = 0$ 这一事实共同推出 $y_1 - y_2 = \Phi(x - x) = 0$, 因此 $y_1 = y_2$，从而 Φ 是一个良定义的线性映射。

引理 3.1。由 (3.12) 定义的映射 $\Phi : \mathscr{X} \to B(\mathcal{H})$ 是完全正的。

证明。定义 $\eta\colon \mathbb{M}_n(\mathscr{D}) \to \bigoplus_{k=1}^m \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ 如下

$$\eta\left(E_{ij} \otimes \operatorname{diag}\{a_k\}_{k=1}^m\right) = \operatorname{diag}\{E_{ij} \otimes a_k\}_{k=1}^m \tag{3.15}$$

然后按线性延拓。对于 $n \in \mathbb{N}$，任取 $h_1, h_2 \in \mathbb{M}_n(\mathscr{D})$，使得

$$h_1 = \left[\operatorname{diag}\left\{a_k^{(i,j)}\right\}_{k=1}^m\right]_{i,j}, \quad h_2 = \left[\operatorname{diag}\left\{b_k^{(i,j)}\right\}_{k=1}^m\right]_{i,j} \tag{3.16}$$

and

$$h_1 h_2 = \left[\operatorname{diag}\left\{\sum_{l=1}^n a_k^{(i,l)} b_k^{(l,j)}\right\}_{k=1}^m\right]_{i,j}. \tag{3.17}$$

通过直接计算可得

$$\eta(h_1 h_2) = \operatorname{diag}\left\{\left[\sum_{l=1}^n a_k^{(i,l)} b_k^{(l,j)}\right]_{i,j}\right\}_k = \eta(h_1)\eta(h_2) \tag{3.18}$$

且 $\eta(h^*) = \eta(h)^*$，因此 η 是一个 *-同态和可逆正映射。这意味着 $h \in \mathbb{M}_n(\mathscr{X})$, $h = \left[\operatorname{diag}\{\phi_k(a_{ij})\}_{k=1}^m\right]_{i,j}$ 为正，当且仅当

$$\eta(h) = \operatorname{diag}\left\{[\phi_k(a_{ij})]_{i,j}\right\}_{k=1}^m \tag{3.19}$$

也为正。后者为正等价于所有对角块均为正，即 $[\phi_k(a_{ij})]_{i,j}$ 对所有 k 都必须为正。对于任意这样的正 h，注意到

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_n \otimes \Phi)(h) &= \left[\Phi(\operatorname{diag}\{\phi_k(a_{ij})\}_{k=1}^m)\right]_{i,j} \\ &= \left[\Phi\left(\begin{pmatrix} \phi_1(a) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_2(a) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_m(a) \end{pmatrix}\right)\right]_{i,j} = [\varphi(a_{ij})]_{i,j}\end{aligned} \tag{3.20}$$

根据假设，它也是正的。因此，对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{id}_n \otimes \Phi$ 都是正的，即 Φ 是完全正的。□

有了上述引理，我们便可以证明定理 3.2。

定理 *3.2* 的证明。 先证明充分性。设 φ 是 ϕ-可分解的，并任取$[a_{ij}]_{i,j} \in \Gamma_n^+(\phi)$。于是，

$$[\varphi(a_{ij})]_{i,j} = \left[\sum_{k=1}^{m} \psi_k \circ \phi_k\left(a_{ij}\right)\right]_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} \left(\mathrm{id}_n \otimes \psi_k\right)\left(\left[\phi_k(a_{ij})\right]_{i,j}\right), \tag{3.21}$$

这是正的，因为根据假设，$[\phi_k(a_{ij})]_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathscr{A})^+$，而由 ψ_k的完全正性，id $_n \otimes \psi_k$ 在 $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$上是正的。

为证明必要性，我们采用此前专门构造的方法，其中 C*-代数$\mathscr{W}$由（3.10）指定，映射 ξ、 Φ分别由（3.11）和（3.12）给出。引理 3.1 已证明映射Φ 在算子系统 $\mathscr{X} = \xi(\mathscr{A})$上是完全正的，因此根据 Arveson 延拓定理，它存在一个完全正延拓 $\Phi : \mathscr{W} \to B(\mathcal{H})$。接着，Stinespring 膨胀定理 [8] 保证存在希尔伯特空间 $\mathcal{K}$、有界线性算子 $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ 以及一个 *-同态 $\pi : \mathscr{W} \to B(\mathcal{K})$，使得 $\Phi(x) = V^*\pi(x)V$。令 $\psi_k : \mathscr{A} \to B(\mathcal{H})$，且 $\pi_k : \mathscr{A} \to B(\mathcal{K})$，定义如下：

$$\pi_k(a) = \pi(E_{kk} \otimes a), \quad \psi_k(a) = V^*\pi_k(a)V. \tag{3.22}$$

容易验证 π_k 是 *-同态；因此 ψ_k 是完全正的。于是，

$$\sum_{k=1}^{m} \psi_k \circ \phi_k(a) = \tilde{\Phi}\left(\sum_{k=1}^{m} E_{kk} \otimes \phi_k(a)\right) = \varphi(a) \tag{3.23}$$

对每个 $a \in \mathscr{A}$均成立。证明完毕。 □

注 3.1. 假设映射 ϕ_k 含幺，似乎会严重限制上述结果的稳健性；然而，为了使子空间 $\mathscr{X} = \xi(\mathscr{A})$成为一个算子系统，从而能够应用 *Arveson* 延拓定理，这是必要的。若不要求含幺性，那么即使改用幺元化，除非 $\mathscr{X}$ 是 $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$中的 *C**子代数，否则构造仍可能失败。第 *3.2* 节和第 *3.3* 节在更大程度上讨论了一个与此类似的情形，尽管其处于无限维背景下。

3.1.2. 性质。 回顾一下，C*-代数 $B(\mathcal{H})$ 可赋予由一族半范数 $T \mapsto |\langle x, Ty\rangle|$, $x, y \in \mathcal{H}$所诱导的弱算子拓扑。由此在 $B(\mathscr{A}, B(\mathcal{H}))$ 上诱导的逐点收敛拓扑称为 *BW* 拓扑。相应地，若映射的有界网 $(\varphi_\lambda)_\lambda$ 收敛到映射 φ，当且仅当对每个 $a \in \mathscr{A}$，$\varphi_\lambda(a) \to \varphi(a)$ 在 $B(\mathcal{H})$中按弱算子拓扑收敛，我们就称其在 BW 拓扑下收敛。众所周知，完全正映射、完全共正映射和可分解映射的锥都是 BW 闭的 [6]。正如下文所示，这一性质也适用于有限可分解情形。

定理 3.3。 集合 D$\phi(\mathscr{A}, \mathcal{H})$ 在 $B(\mathscr{A}, B(\mathcal{H}))$ 中关于 *BW* 拓扑是闭的。

证明。 设 $(\varphi_\alpha)_\alpha$ 是 D$\phi(\mathscr{A}, \mathcal{H})$ 中的有界网，在弱算子拓扑下逐点收敛于 φ。设 $\{e_i\}$ 是张成 $\mathbb{C}^n$ 的标准基，其中 $\mathbb{C}^n$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。取$[a_{ij}]_{i,\,j} \in \Gamma_n^+(\phi)$ 和 $x,\ y \in \mathcal{H}^n$，使得 $x = \sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i$ 且 $y = \sum_{i=1}^n e_i \otimes y_i$，其中向量 x_i, $y_i \in \mathcal{H}$。$(\varphi_\alpha)_\alpha$ 的收敛性意味着存在 α_{ij}，对于$i,\ j \in \{1, ..., n\}$，使得

$$\alpha > \alpha_{ij} \Rightarrow |\langle x_i, (\varphi_\alpha(a) - \varphi(a))\, y_j\rangle| < \frac{\epsilon}{n^2}, \tag{3.24}$$

对任意 $a \in \mathscr{A}, \epsilon > 0$ 均成立。因此，对于 $\alpha > \max_{i,\ j} \alpha_{ij}$，有

$$\left|\left\langle x, [\varphi_\alpha(a_{ij}) - \varphi(a_{ij})]_{i,j}\, y \right\rangle\right| < \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\epsilon}{n^2} = \epsilon, \tag{3.25}$$

因此 $[\varphi_\alpha(a_{ij})]_{i,j} \to [\varphi(a_{ij})]_{i,j}$ 在 $\mathbb{M}_n(B(\mathcal{H}))$ 的弱算子拓扑中。由于对所有 α，矩阵$[\varphi_\alpha(a_{ij})]_{i,j}$ 依定理 3.2 均为正，且 $\mathbb{M}_n(B(\mathcal{H}))^+$ 是弱算子闭的，故对所有 n，$[\varphi(a_{ij})]_{i,j}$ 也必然为正。因此条件 (3.26) 成立（取 $\phi \in c_0(B(\mathscr{A}))$），从而由定理 3.2 可知 φ 也必为ϕ-可分解的，$\varphi \in \mathrm{D}\phi(\mathscr{A}, \mathcal{H})$。于是该集合如所断言是闭的。□

回顾，$B(\mathscr{A}, B(\mathcal{H}))$ 中的真凸锥 C 称为映射锥，若它在 BW 拓扑中闭，且对与完全正映射的复合保持不变，即对任意 $\varphi \in C$ 以及任意 $\psi_1 \in \mathrm{CP}(B(\mathcal{H}))$、$\psi_2 \in \mathrm{CP}(\mathscr{A})$，有 $\psi_1 \circ \varphi \circ \psi_2 \in C$。若对所有完全正映射 ψ，仅 $\psi \circ \varphi$（相应地，$\varphi \circ \psi$）属于 C，则我们可称 C 为左（相应地，右）映射锥。于是有如下简单推论：

定理 3.4. 集合 $\mathrm{D}\phi(\mathscr{A}, \mathcal{H})$ 是 $B(\mathscr{A}, B(\mathcal{H}))$中的一个左映射锥。

证明。凸锥结构由定理 2.2 得出。显然，该集合在从左侧与完全正映射复合时保持不变。最后，BW 闭性由定理 3.3 得出。□

3.2. **无限分解**。这里我们证明，类似于定理 3.2 的结果也适用于真正的可数可分解映射，即可通过含有无限 项的 (2.1) 来表示。

3.2.1. 刻画。为了保证某些求和的良好性质，我们将讨论范围限制在像 $\mathscr{X} = \xi(\mathscr{A})$ 本身是一个 C*-代数的情形；例如，当所有 ϕ_k 都是*-同态时，便会出现这种情况。此外，我们假设 ϕ 是一个趋于零的序列，记作 $\phi \in c_0(B(\mathscr{A}))$，也就是说，$(\|\phi_k\|)_k$ 一致有界且当 $k \to \infty$ 时收敛于 0。

定理 3.5. 设 $\mathscr{A}$ 是一个含幺 C*-代数，且 $(\phi_k)_k \in c_0(B(\mathscr{A}))$ 是 $\mathscr{A}$上的一列 *-映射。记 $\xi(a) = \operatorname{diag}\{\phi_k(a)\}_k$ 和 $\mathscr{X} = \xi(\mathscr{A})$。若 $\mathscr{X}$恰好是一个 C*-代数，则映射 $\varphi \in B(\mathscr{A}, B(\mathcal{H}))$ 是 ϕ-可分解的，当且仅当

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : [a_{ij}]_{i,j} \in \Gamma_n^+(\phi) \Rightarrow [\varphi(a_{ij})]_{i,j} \in \mathbb{M}_n(B(\mathcal{H}))^+. \tag{3.26}$$

证明. 要证明该结论，需要对定理 3.2 的证明作适度修改。对于充分性，任取 $n \in \mathbb{N}$和任意 $[a_{ij}] \in \Gamma_n^+(\phi)$；由于对任意 $a \in \mathscr{A}$，$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \circ \phi_k(a)$ 都在范数下收敛，因此容易得到一列部分和

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \psi_k \circ \phi_k(a_{ij})\right]_{i,j} \tag{3.27}$$

在 $n \to \infty$ 时，收敛到 $[\varphi(a_{ij})]_{i,\ j}$，且在 $\mathbb{M}_n(B(\mathcal{H}))$ 中关于弱算子拓扑收敛。映射ψ_k 是完全正的，并且根据假设，$[\phi_k(a_{ij})]_{i,\ j}$ 都是正的；因此所有矩阵 (3.27) 也都是正的。由于 $\mathbb{M}_n(B(\mathcal{H}))^+$ 是弱算子闭的，$[\varphi(a_{ij})]_{i,\ j}$ 也必为正。

现在我们证明必要性。设 $\{e_k\}_k$ 为张成 l^2 的标准基，并记作$E_{kl} = \langle e_l, \cdot\rangle\, e_k \in B(l^2)$。任取 w属于 $B(l^2) \odot \mathscr{A}$（即代数张量积），并定义其空间范数

$$\|w\|_* = \|\,(\mathrm{id} \otimes \pi_{\mathscr{A}})\,(w)\|, \tag{3.28}$$

其中 $\pi_{\mathscr{A}}$： $\mathscr{A} \to B(H_{\mathscr{A}})$ 是 $\mathscr{A}$ 在外部希尔伯特空间 $H_{\mathscr{A}}$上的（任意）忠实 *-表示。我们将 $\mathscr{W}$ 定义为空间张量积，即其完备化

$$\mathscr{W} = \overline{B(l^2) \odot \mathscr{A}}^{\|\cdot\|_*} = B(l^2)\hat{\otimes}_{\min}\mathscr{A} \tag{3.29}$$

$B(l^2) \odot \mathscr{A}$，它也是一个具有单位元 $\mathbb{1}_{\mathscr{W}} = \mathrm{id} \otimes \mathbb{1}_{\mathscr{A}}$的 C*-代数。令 $c_0(\mathscr{A})$ 表示所有元素取自 $\mathscr{A}$的消失序列构成的线性空间，$(a_k)_k \in c_0(\mathscr{A})$ 当且仅当$\|a_k\| \to 0$，并考虑形式上定义为如下的 w

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} E_{kk} \otimes a_k, \quad (a_k)_k \in c_0(\mathscr{A}). \tag{3.30}$$

然后，可以证明 w 是 $\mathscr{W}$的一个元素，并且

$$\|w\|_* = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\|. \tag{3.31}$$

令 $\mathscr{D}$ 为所有此类元素的集合，对于任意 $(a_k)_k \in c_0(\mathscr{A})$；则 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{W}$ 中的范数闭线性子空间，并且根据 (3.31) 与 $c_0(\mathscr{A})$ 等距同构。现在，令$\phi \in c_0(B(\mathscr{A}))$，并定义 $\xi(a) = \mathrm{diag}\,\{\phi_k(a)\}_k$。于是可见，对于任意$a \in \mathscr{A}$， $\xi(a) \in c_0(\mathscr{A})$，因此 $\mathscr{X} = \xi(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{D}$ 中的 *-不变线性子空间。也就是说，

$$\xi(a) = \sum_{k=1}^{\infty} E_{kk} \otimes \phi_k(a) \tag{3.32}$$

在 $\mathscr{D}$中按空间范数 (3.31) 收敛。然而，与有限可分解情形相反， $\mathscr{X}$ 在 $\mathscr{W}$ 中不是算子系统：事实上，由于假设 ϕ 在范数下趋于零，映射 ϕ_k 不可能全都含幺；因此，根据构造， $\mathscr{X}$ 不包含$\mathbb{1}_{\mathscr{W}}$（我们在此指出，放宽条件 $\phi \in c_0(B(\mathscr{A}))$ 以允许含幺性，会破坏 (3.32) 的范数收敛性）。按照定理 3.2，通过令 $\varphi(a) = \Phi \circ \xi(a)$，定义有界映射 Φ： $\mathscr{X} \to B(\mathcal{H})$。通过令线性映射 η： $\mathbb{M}_n(\mathscr{D}) \to \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{M}_n(\mathscr{A})$，我们可以调整引理 3.1 的证明以涵盖无限维序列 ϕ，即

$$\eta(E_{ij} \otimes \mathrm{diag}\,\{a_k\}_k) = \mathrm{diag}\,\{E_{ij} \otimes a_k\}_k, \tag{3.33}$$

对于 E_{ij} 是 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 中的矩阵单位以及 $(a_k)_k \in c_0(\mathscr{A})$，并以几乎完全相同的方式证明它是一个 *-同态。然后，根据假设 $[\varphi(a_{ij})]_{i,\,j} \in \mathbb{M}_n(B(\mathcal{H}))^+$，对所有 n 均成立，立即可知 $\mathrm{id}_n \otimes \Phi$ 是一个正映射，也就是说， Φ 是完全正的。

为克服 $\mathscr{X}$ 不是算子系统这一困难，我们转而考虑其幺元化。在我们一开始所假设的 $\mathscr{X}$ 是（非含幺）C*-代数的情形下，映射 Φ 在 $\mathscr{X}$ 上自动是完全有界的。根据引理 A.1（见附录），它随即扩张为完全正映射 $\Phi^{\sim}$： $\mathscr{X} \oplus \mathbb{C}1 \to B(\mathcal{H})$，定义为

$$\Phi^{\sim}((x, z)) = \Phi(x) + z\,\|\Phi\|_{\mathrm{cb}}\, I \tag{3.34}$$

对于 $(x,\ z)$， $\in \mathscr{X} \oplus \mathbb{C}1$, $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathrm{id}_n \otimes \Phi\|$ 是 Φ 的完全有界范数，而 I 是 $B(\mathcal{H})$ 中的恒等算子。由于 $\mathscr{X} \oplus \mathbb{C}1$ 是 $\mathscr{W}^{\sim} = \mathscr{W} \oplus \mathbb{C}1$ 中的算子系统，即 $\mathscr{W}$ 的强制单位化，映射 $\Phi^{\sim}$ 存在一个有界

完全正扩张 $\Psi^{\sim}: \mathscr{W}^{\sim} \to B(\mathcal{H})$，由 Arveson 延拓定理可知。定义 $\tilde{\Phi}: \mathscr{W} \to B(\mathcal{H})$，令 $\Phi = \Psi^{\sim}|_{\mathscr{W}}((\cdot, 0))$。于是，对于任意 $x \in \mathscr{X}$，有

$$\tilde{\Phi}(x) = \Psi^{\sim}|_{\mathscr{W}}((x,0)) = \Phi^{\sim}((x,0)) = \Phi(x), \tag{3.35}$$

即，$\tilde{\Phi}$ 是 $\mathscr{W}$ 上 Φ 的有界完全正扩张。其余推理与有限可分解情形类似：根据 Stinespring 定理，Φ 可表示为 $V^*\pi(\cdot)V$，其中 $V: \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ 有界，$\pi: \mathscr{W} \to B(\mathcal{K})$是一个 *-同态，而 $\mathcal{K}$ 是一个外部希尔伯特空间。为完成证明，按 (3.22) 定义 π_k 和 ψ_k；则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \circ \phi_k(a) = \tilde{\Phi}\left(\sum_{k=1}^{\infty} E_{kk} \otimes \phi_k(a)\right) = \varphi(a) \tag{3.36}$$

其中，对每个 $a \in \mathscr{A}$，最左边的级数都按范数收敛，这是由$\tilde{\Phi}$的有界性以及 (3.32) 的范数收敛性得出的。□

3.2.2. 性质。

定理 3.6. 在定理 *3.5* 的假设下，集合 $\mathrm{D}\phi(\mathscr{A}, \mathcal{H})$ 在 $B(\mathscr{A}, B(\mathcal{H}))$中关于 *BW* 拓扑是闭的。

证明。只需重新采用定理 3.3 中关于弱算子收敛的推理，然后运用定理 3.5 证明其闭性。□

定理 3.7。集合 $\mathrm{D}\phi(\mathscr{A}, \mathcal{H})$ 是 $B(\mathscr{A}, B(\mathcal{H}))$中的一个左映射锥。

证明。设 $\psi \in \mathrm{CP}(B(\mathcal{H}))$。若 $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \circ \phi_k$ 按范数逐点收敛到φ，则 $(\psi \circ \sigma_n)_n$ 收敛到 $\psi \circ \varphi$，因为 ψ 有界且范数连续；因此，$\mathrm{D}\phi(\mathscr{A}, \mathcal{H})$ 在从左侧与完全正映射复合时保持不变。由定理 2.2 和 3.6 即得结论。□

3.3. **非幺 C*-代数**。研究$\mathscr{A}$ 不含单位元的情形可能颇有意义；事实证明，此时的情况有所不同。下面给出一个在本质上类似于含幺情形的定理 3.5 的结果，其中对 $\mathscr{X} = \xi(\mathscr{A})$ 施加了相同的限制性假设，而这里它也是一个 C*- 代数。该结果适用于可数可分解和有限可分解两种情形。

定理 3.8。设 $\mathscr{A}$ 为非幺 *C**-代数，且 $(\phi_k)_k \in c_0(B(\mathscr{A}))$ 为 $\mathscr{A}$ 上的有界 *-映射的消失序列（长度可能有限）。记作$\xi(a) = \mathrm{diag}\{\phi_k(a)\}_k$ 以及 $\mathscr{X} = \xi(\mathscr{A})$。若 $\mathscr{X}$恰好是一个 *C**-代数，则定理 *3.5* 的结论适用。

证明。充分性以完全相同的方式得到，因为它不依赖于 $\mathscr{A}$的含幺性。对于必要性，构造几乎相同，其中 $\mathscr{W}$ 和 ξ 分别按照其中的方式由 (3.29) 和 (3.32) 定义。映射 Φ仍由等式 $\varphi = \Phi \circ \xi$给出，并且仍然是完全正的，因为引理 3.1 中所述的构造不涉及含幺性。其余论证随后采用相同的单位化技巧，其中 $\mathscr{X} \oplus \mathbb{C}1$在 $\mathscr{W}^{\sim} = \mathscr{W} \oplus \mathbb{C}1$中既是一个 C*子代数，也是一个算子系统。借助引理 A.1，映射 Φ 再次扩张为完全正映射 $\Phi^{\sim}: \mathscr{X}^{\sim} \oplus \mathbb{C}1 \to B(\mathcal{H})$，其定义为

$$\Phi^{\sim}((x,z)) = \Phi_0(x) + z\,\|\Phi\|_{\mathrm{cb}}\, I, \tag{3.37}$$

其中，I 是 $B(\mathcal{H})$中的恒等算子，而 $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}}$ 是 Φ的完全有界范数。根据 Arveson 的

˜扩张定理，这又扩张为同范数的完全正映射 Φ: □()。同样， $\Phi = \Psi\tilde{}((\cdot, 0))$扩张了 Φ。其余的构造与定理 3.5 的证明类似。□

作为本文的最终结果，我们指出，关于 D$\phi(\mathscr{A}, \mathcal{H})$ 集合的 BW 闭性和凸锥结构的相同结论，即定理 3.6 和定理 3.7，在满足定理 3.8 的假设时也适用于非含幺情形。

4. 致谢

作者感谢 OpenAI 的 GPT-5.2 和 Google 的 Gemini 2.5 Pro 在阐明证明定理 3.5 中一些与收敛有关的问题、提出证明引理 A.1 的策略，以及对稿件早期版本进行全面校对方面所作的贡献。

5. Summary

我们提出了 C*-代数上线性映射的可数可分解性概念，并在若干特定情形下给出了其一般刻画。我们的研究结果可视为将 [7] 的结果推广至项数任意的更一般分解。值得强调的是，我们提出的所有核心定理都与 Størmer 原始的可分解性刻画的总体精神一致。可能的后续研究方向和未解决问题包括但不限于以下内容：

(1) 通过考虑分解（2.1）的较弱收敛拓扑来推广这一构造。(2) 探索一些非平凡的 ϕ选择，并验证以此方式构造的锥 D$\phi(\mathscr{A}, \mathcal{H})$ 的性质。(3) 将映射 ψ_k 的完全正性要求替换为 n-正性。这一修改将带来截然不同的刻画定理，并形成一种广义得多的可数 n-可分解性概念。(4) 最后，进一步建立与正映射的联系。由于可数可分解性这一概念源自可分解正映射，沿此方向开展研究似乎最为自然。值得验证的是，至少在矩阵代数情形下，我们的方法能否进一步揭示正映射本身的一般结构。

Appendix 附录 A.

引理 A.1. 设 $\mathscr{A}$ 为非幺 C*-代数， $\mathscr{M} \subset \mathscr{A}$ 为 C*子代数， H 为希尔伯特空间，且 T: $\mathscr{M} \to B(H)$ 为一个完全正映射。那么，其通过以下方式给出的扩张 $T^{\sim}$: $\mathscr{M} \oplus \mathbb{C}1 \to B(H)$

$$T^{\sim}((a, z)) = T(a) + z \|T\|_{\mathrm{cb}} I, \tag{A.1}$$

其中 I 为 H 上的恒等算子， $\|T\|_{\mathrm{cb}}$ 为 T的完全有界范数，是完全正的。

证明. 记 $\mathscr{M}^{\sim} = \mathscr{M} \oplus \mathbb{C}1$。我们必须证明 $T_n^{\sim} = \mathrm{id}_n \otimes T^{\sim}$ 在$\mathbb{M}_n(\mathscr{M}^{\sim})$上为正，对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。任取矩阵$[x_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathscr{M})$ 和 $\Lambda \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。那么，任意元素 $A \in \mathbb{M}_n(\mathscr{M}^{\sim})$ 均可表示为矩阵形式

$$A = X + \Lambda \otimes \mathbb{1}_{\sim}, \tag{A.2}$$

其中， $X = [(x_{ij}, 0)]_{i,j}$且 $\mathbb{1}_{\sim} = (0, 1)$ 是 $\mathscr{A}^{\sim} = \mathscr{A} \oplus \mathbb{C}1$ 中的单位元，
$\mathscr{A}^{\sim} = \mathscr{A} \oplus \mathbb{C}1$ 是 $\mathscr{A}$ 的强制单位化。假设 A 是 $\mathbb{M}_n(\mathscr{M}^{\sim})$ 中的一个正元。令 q: $\mathscr{A}^{\sim} \to \mathbb{C}$ 为商映射， $q((a, z)) = z$。容易验证， q 是一个 *-同态和完全正映射

因此；于是 $q_n = \mathrm{id}_n \otimes q$ 是正的。由于 q_n 通过将 A 限制到其标量部分来作用， $q_n(A) = \Lambda$，故必有 Λ 是半正定的。定义$\Lambda_\epsilon = \Lambda + \epsilon I_n$和 $A_\epsilon = X + \Lambda_\epsilon \otimes \mathbb{1}_\sim$，其中 $\epsilon > 0$，且 I_n 是 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$中的一个单位矩阵。由于 $A_\epsilon - A = \epsilon I_n \otimes \mathbb{1}_\sim$，我们得到 $A_\epsilon > A$，因此 $(A_\epsilon)_\epsilon$ 是一个严格正元素网，并按 $\epsilon \to 0$ 在范数意义下逼近 A。元素 A_ϵ 是正的，当且仅当

$$(\Lambda_\epsilon^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{1}_\sim) A_\epsilon (\Lambda_\epsilon^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{1}_\sim) = Y_\epsilon + I_n \otimes \mathbb{1}_\sim \tag{A.3}$$

也为正，其中我们引入了

$$Y_\epsilon = (\Lambda_\epsilon^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{1}_\sim) X (\Lambda_\epsilon^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{1}_\sim). \tag{A.4}$$

$Y_\epsilon + I_n \otimes \mathbb{1}_\sim$ 为正等价于 Y_ϵ 是自伴的，且谱$\sigma(Y_\epsilon + I_n \otimes \mathbb{1}_\sim)$非负，即

$$\sigma(Y_\epsilon) \subset [-1, \infty). \tag{A.5}$$

分别用 $\sigma(Y_\epsilon)_\pm$ 表示谱的正（非负）部和负部。由于 $\mathscr{M}$ 是一个 C*-代数，它存在良定义的函数演算；因此 $\mathscr{M}^\sim$ 和 $\mathbb{M}_n(\mathscr{M}^\sim)$也同样如此。令 E 为 Y_ϵ的谱测度。定义

$$Y_\epsilon^\pm = \int\limits_{\sigma(Y_\epsilon)_\pm} |\lambda| \, dE(\lambda), \tag{A.6}$$

因此 $Y_\epsilon^\pm$为正，满足 $Y_\epsilon^+ Y_\epsilon^- = 0$ 和 $Y_\epsilon = Y_\epsilon^+ - Y_\epsilon^-$。由于 Y_ϵ^-是自伴的，且其谱 $\sigma(Y_\epsilon)_-$ 包含于 $[-1, 0]$，我们得到 $\|Y_\epsilon\| \leqslant 1$。不难验证，根据定义， $Y_\epsilon^\pm$具有如下结构： $\left[(y_{ij}^\pm(\epsilon),\ 0)\right]_{i,\ j}$，其中某个$\hat{}y_\epsilon^\pm = \left[y_{ij}^\pm(\epsilon)\right]_{i,\ j} \in \mathbb{M}_n(\mathscr{M})$；因此它们包含在 $\mathbb{M}_n(\mathscr{M}^\sim)$的一个子空间中，该子空间与 $\mathbb{M}_n(\mathscr{M})$典范地等距同构；特别地， $\|Y_\epsilon^\pm\| = \|\hat{} y_\epsilon^\pm\|$。作用于 $T_n^\sim$，得到

$$T_n^\sim(Y_\epsilon + I_n \otimes \mathbb{1}_\sim) = T_n^\sim(Y_\epsilon^+) - T_n^\sim(Y_\epsilon^-) + \|T\|_{\mathrm{cb}} I_n \otimes I, \tag{A.7}$$

因为根据 $T^\sim$ 的定义， $T_n^\sim(I_n \otimes \mathbb{1}_\sim) = [T^\sim((0,1))]_{i,j} = \|T\|_{\mathrm{cb}} [\delta_{ij} I]_{i,j}$。注意

$$T_n^\sim(Y_\epsilon^-) = \left[T^\sim((y_{ij}^-(\epsilon), 0))\right]_{i,j} = \left[T(y_{ij}^-(\epsilon))\right]_{i,j} = T_n(\hat{y}_\epsilon^-) \tag{A.8}$$

对于 $T_n = \mathrm{id}_n \otimes T\colon\ \mathbb{M}_n(\mathscr{M}) \to \mathbb{M}_n(B(H))$。由于我们假设 T 是完全有界的，且 $\|Y_\epsilon^-\| \leqslant 1$，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们有如下估计

$$\left\|T_n^\sim(Y_\epsilon^-)\right\| \leqslant \|T\|_{\mathrm{cb}} \left\|\hat{y}_\epsilon^-\right\| = \|T\|_{\mathrm{cb}} \left\|Y_\epsilon^-\right\| \leqslant \|T\|_{\mathrm{cb}}. \tag{A.9}$$

根据假设 T 的完全正性，两个元素 $T_n^\sim(Y_\epsilon^+)$、 $T_n^\sim(Y_\epsilon^-)$ 都是正的。特别地，

$$\sigma\left(T_n^\sim(Y_\epsilon^-)\right) \subset [0, \|T\|_{\mathrm{cb}}] \tag{A.10}$$

利用谱定理可得，谱

$$\sigma\left(\|T\|_{\mathrm{cb}} I_n \otimes I - T_n^\sim(Y_\epsilon^-)\right) = \{\|T\|_{\mathrm{cb}} - \lambda : \lambda \in [0, \|T\|_{\mathrm{cb}}]\} \tag{A.11}$$

包含于 $[0, \|T\|_{\mathrm{cb}}]$ 中，即 $\|T\|_{\mathrm{cb}} I_n \otimes I - T_n^\sim(Y_\epsilon^-)$ 为正。因此，对于所有 n 和所有 $\epsilon > 0$，(A.7) 的右端均为正。记 $\mathcal{Y}_\epsilon = T_n^\sim(Y_\epsilon + I_n \otimes \mathbb{1}_\sim)$。直接计算可验证，任意映射 $\phi_n = \mathrm{id}_n \otimes \phi$（其中 ϕ 作用于 $\mathscr{M}^\sim$）都满足交织关系

$$\phi_n\left((K \otimes \mathbb{1}_\sim) X (L \otimes \mathbb{1}_\sim)\right) = (K \otimes \mathbb{1}_\sim) \phi_n(X) (L \otimes \mathbb{1}_\sim) \tag{A.12}$$

对于任意 K， $L \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 和 $X \in \mathbb{M}_n(\mathscr{M}^{\sim})$；由此得到

$$T_n^{\sim}(A_\epsilon) = \left(\Lambda_\epsilon^{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{1}_{\sim}\right) \mathcal{Y}_\epsilon \left(\Lambda_\epsilon^{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{1}_{\sim}\right) \tag{A.13}$$

定义了 $\mathbb{M}_n(B(H))$中的正元网。网 $(A_\epsilon)_\epsilon$ 在范数下收敛于 A，因此对于某个 $\delta > 0$ 以及足够小的 ϵ，有 $\|A_\epsilon - A\| \prec \frac{\delta}{\|T_n^{\sim}\|}$；于是$\|T_n^{\sim}(A_\epsilon - A)\| < \delta$，并且 $(T_n^{\sim}(A_\epsilon))_\epsilon$在范数下收敛于 $T_n^{\sim}(A)$，当 $\epsilon \to 0$时。由于$\mathbb{M}_n(B(H))^+$ 在范数下闭，故对于任意 $A \in \mathbb{M}_n(\mathscr{M}^{\sim})^+$ 以及任意 n， $T_n^{\sim}(A)$必为正。这表明 $T^{\sim}$ 是完全正的。□

References

[1] S. L. Woronowicz。《低维矩阵代数的正映射》。 *Reports on Mathematical Physics* 10 2 165 183, 1976

, ( ): –。[2] M.-D. Choi。《C*-代数上正线性映射的一些不等式》。 *J. Operat. Theor.* 4 2 271

, ( ): –285, 1980。[3] M. Miller 和 R. Olkiewicz。《矩阵代数正映射的稳定子空间》。 *Open Syst. Inf. Dyn.* 22 02 1550011, 2015

, ( ): 。[4] A. Rutkowski、G. Sarbicki 和 D. Chru´sci´nski。《Md(C)中的一类双随机正最优映射》。 *Open Syst. Inf. Dyn.*, 22(03):1550016, 2015年9月。[5] D. Chru´sci´nski、M. Marciniak 和 A. Rutkowski。《类 Choi 映射的推广》。[6] , ( ): –。 *Positive Linear Maps of Operator Algebras* E. Størmer。《附录 A》。Springer Berlin Heidelberg, 2013。[7] E. Størmer。《C*-代数上的可分解正映射》。 *Acta Math. Vietnam.* 43 4 661 674, 2018

Proc. Amer. Math. Soc., 86(3):402–404, 1982。[8] W. F. Stinespring。《C*-代数上的正函数》。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 216, 1955 2 211( ): –。

Institute of Theoretical Physics and Astrophysics, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, University of Gdańsk, Wita Stwosza 57, 80-308 Gdańsk, Poland*Email address*: krzysztof.szczygielski@ug.edu.pl