# ON ´小波系统的 Calderón 求和公式 S

ULRIK ENSTAD 和 JORDY TIMO VAN VELTHOVEN

arXiv:2602.10766v1 [math.CA] 11 Feb 2026

Abstract. 我们证明，在对小波函数施加一个温和条件的情况下，正交归一小波基的 Calder´ón 求和公式对于任意膨胀矩阵和平移矩阵均成立。这部分解决了 Bownik 和 Lemvig 提出的一个猜想。

## 1. Introduction

对于 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 和矩阵 $A, P \in$ 一般线性群$(d, \mathbb{R})$，相应的小波系统由以下函数组成：

$$\left\{|\det(A)|^{-j/2}\psi(A^j \cdot -Pk)\right\}_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^d}. \tag{1.1}$$

在高维中，研究小波系统时的一个经典条件是，假设矩阵 $A$ 保持整数格 $\mathbb{Z}^d$不变，即 $A\mathbb{Z}^d \subseteq \mathbb{Z}^d$，且 $A$ 是膨胀矩阵，也就是说，其所有特征值的模都严格大于一。在这些条件下，Parseval 小波框架的完整刻画，或更一般地，对偶小波框架的完整刻画，已由 $[4, 8, 10]$, 等人给出。此外， [12]还证明了此类膨胀对应的小波基的存在性。这两类结果将一维的经典结果推广到了任意维度。

除扩张膨胀矩阵的情形外，高维小波系统理论的完善程度要低得多。尽管如此，关于非扩张膨胀矩阵的小波基存在性，已有研究 $[5, 23, 30, 32]$，并在近期取得突破 [7]: 这一成果刻画了哪些膨胀矩阵能够生成小波集。另一方面，上述关于 Parseval 小波框架的刻画，目前仅对某些特殊膨胀已知，例如放大膨胀 [25], 、在某个子空间上扩张的膨胀 [21,22] ，或满足格点计数估计的膨胀 [5]。由此引出了以下猜想 [5,猜想 1] 以及尚未解决的问题 [6, 问题 3.3]„ 这一问题已在 [30,第 177] 页被隐含提出。[1]

**猜想 1.1** ([5, 6, 30])。 设 $A, P \in$ 一般线性群$(d, \mathbb{R})$ 且 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$。假设

$$\{|\det(A)|^{-j/2}\psi(A^j \cdot -Pk)\}_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^d}$$

是一个正交归一基，或者更一般地说，是 $L^2$（$\mathbb{R}^d$） 的 *Parseval* 框架。于是 *Calder´on* 和公式成立：

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}((A^t)^j\xi)|^2 = |\det(P)| \quad \textit{for a.e.} \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

2020 数学主题分类。42C40, 43A80。关键词和短语。Calder´on 求和公式、准格、酉表示、小波系统。[1] [5, 6] 中的表述都隐含假设 $|\det(P)| = 1$。

Calder´on 和公式（1.2）是上述 Parseval 小波框架刻画的一部分，在对膨胀矩阵作附加假设的条件下，这一刻画是已知的。对于界为 1 的任意 Bessel 序列，Calder´on 和的上界均已知成立（参见 [22, 命题 4.1]）。

本文提出了一种研究猜想 1.1 的新方法。借助这一方法，在对小波函数作出一个温和条件的假设下，我们能够证明适用于任意平移矩阵和膨胀矩阵的 Calder´on 求和公式。我们的方法基于离散小波系统 (1.1) 的框架性质与半连续小波系统之间的关系，后者的元素定义为

$$\pi(x, A^j)\psi := |\det(A)|^{-j/2}\psi(A^{-j}(\cdot - x)), \quad x \in \mathbb{R}^d, j \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

作用 $\pi$ 构成了半直积群$G = \mathbb{R}^d \rtimes \langle A\rangle$ （由 $\mathbb{R}^d$ 和循环群 $\langle A\rangle := \{A^j : j \in \mathbb{Z}\}$ 生成）的酉群表示，其中 $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$。注意，小波系统 (1.1) 对应于 $\{\pi(A^j Pk, A^j)\psi : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d\}$。我们将假设小波函数满足一个温和条件。具体而言，我们假设$\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$满足：对于 $G = \mathbb{R}^d \rtimes \langle A\rangle$中的所有相对分离集 $\Lambda$， $\pi(\Lambda)\psi$ 都是 $L^2(\mathbb{R}^d)$中的 Bessel 序列；用符号表示，即 $\psi \in \mathcal{B}_\pi$。在研究群表示轨道中的框架时，这是一项常见假设，参见例如 [9, 14, 17, 18, 20]。关于空间 $\mathcal{B}_\pi$ 的另一种描述及其更多性质，请参见第 3.1 节。

Usi沿用上一段的记号，我们的主要结果如下 :

**定理 1.2**。 设 $A, P \in$一般线性群$(d, \mathbb{R})$。若 $\psi \in \mathcal{B}_\pi$和 $\{\pi(A^j Pk, A^j)\psi\}_{j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}^d}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的 *Parseval* 框架，则 $\{\pi(x, A^j)\psi\}_{x\in\mathbb{R}^d,\ j\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的紧框架，并且

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}((A^t)^j\xi)|^2 = |\det(P)| \quad \textit{for a.e. } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

结合定理 1.2 与已知事实：形如$\{\pi(x, A^j)\psi\}_{x\in\mathbb{R}^d,\ j\in\mathbb{Z}}$的紧框架仅在 $|\det(A)| \neq 1$ 时存在（参见 [24, 26]），可得以下推论。

**推论 1.3**。 设 $A, P \in$一般线性群$(d, \mathbb{R})$。若存在函数 $\psi \in \mathcal{B}_\pi$，使得$\{\pi(A^j Pk, A^j)\psi\}_{j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}^d}$是 $L^2(\mathbb{R}^d)$上的 *Parseval* 框架，则 $|\det(A)| \neq 1$。

我们对定理 1.2 的证明，旨在根据离散小波框架 (1.1) 的框架界，给出与半连续系统 (1.3) 相关联的连续小波变换范数的下界和上界。对于离散帕塞瓦尔小波框架 (1.1)，所得的等式 恰好表明半连续系统 (1.3) 是一个连续紧框架，正如定理 1.2 所断言的那样。对于各向同性膨胀，联系连续小波变换与离散框架框架界的不等式早已为人所知，参见例如 [11, 13, 16]。对于一般的膨胀矩阵，这类不等式通常只知道一个上界 [1]。[2]我们提出一种新方法来同时获得下界和上界：将此类估计解释为联系小波变换范数、框架的框架界以及其点集密度的不等式。为此，我们采用一种点集密度的概念（即相对于给定点集凸包上的不变测度的余体积 ），

[2]尽管 [1]，中也断言了涉及下框架界的不等式，但所声称的证明并不完整；另请参见注 3.7。

该概念近期在 [14] 中针对幺模群提出；具体细节见第 2.3 节。在非幺模群的情形下运用这一概念，我们推导出联系点集余体积与框架框架界的不等式（参见推论 3.6），从而推广了 [29] 中针对幺模群内格所得的类似不等式；关于 Gabor 系统的此类不等式，另见 [2]。与 [14, 29], 一样，这类不等式的实际证明基于一个简单思路：将小波变换的范数周期化，并对每个被积函数应用相应的框架不等式。

上述概述的证明方法自然适用于局部紧群的一般（射影）酉表示。由于这些辅助结果可能对小波系统之外的研究也有意义，我们在这一一般框架下给出结果。特别地，这使我们能够将 [1] 关于可 amenable 群的主要结果扩展到半直积的准正则表示框架之外（见注 3.7）。

本文结构如下。第 2 节介绍局部紧群中点集的背景知识，并重点讨论余体积的概念。第 3 节给出涉及框架界、余体积和小波变换范数的不等式。最后，第 4 节展示如何从第 3 节的一般结果推导出定理 1.2。

## 2. Point sets in locally compact groups

设 $G$ 为第二可数局部紧群。我们在 $G$上固定左、右 Haar 测度，分别记为 $\lambda_G$ 和 $\rho_G$。

**2.1. Delone 集。** 给定集合 $S \subseteq G$，如果一个子集 $\Lambda \subseteq G$

(1) 对所有 $g \in G$，若 $\#(\Lambda \cap gS) \leq 1$，则称其为 $S$-分离的；
(2) 对所有 $g \in G$，若 $\#(\Lambda \cap gS) \geq 1$，则称其为 $S$-稠密的。

如果集合 $\Lambda$ 对某个非空开集 $U \subseteq G$ 是 $U$-分离的，则称其为分离的；如果它对某个紧集 $K \subseteq G$ 是 $K$-稠密的，则称其为相对稠密的。如果一个集合同时是分离的和相对稠密的，则称其为 *Delone* 集。如果集合 $\Lambda$ 是有限个分离集的并，则称其为相对分离的。等价地，集合 $\Lambda$ 是相对分离的，当且仅当

$$\mathrm{rel}_Q(\Lambda) := \sup_{g \in G} \#(\Lambda \cap gQ) < \infty$$

存在某个（等价地，对所有）非空开相对紧集 $Q \subseteq G$。

如果集合 $\Lambda$ 的补集为 $C$，且 $G$ 是形如 $\lambda C$（$\lambda \in \Lambda$）的集合的不交并，则称其为准格。注意，这等价于 $\Lambda$ 同时是 $C^{-1}$-分离的和 $C^{-1}$-稠密的。我们将关注 $C$ 是*Jordan* 可测的情形，即 $\mu_G(\partial C) = 0$。注意，任何格子子群 $\Lambda \subseteq G$ 都是准格。然而，与格子子群不同，每个连通单连通可解李群中都存在准格，参见 [17, 命题 5.10]。

**2.2. 点集的凸包。** 设 $\mathcal{C}(G)$ 为 $G$ 的所有闭子集构成的集合。我们在 $\mathcal{C}(G)$ 上赋予所谓的 *Chabauty–Fell* 拓扑，该拓扑由每个 $C \in \mathcal{C}(G)$ 处的开邻域基确定，这些开邻域基由以下集合组成：

$$\mathcal{V}_{K,U}(C) := \big\{ C' \in \mathcal{C}(G) : C' \cap K \subseteq CU,\ \ C \cap K \subseteq C'U \big\},$$

其中， $K$ 和 $U$ 分别遍历 $G$ 的所有紧子集和开单位邻域。我们始终将 $\mathcal{C}(G)$ 视为赋有 Chabauty–Fell 拓扑的拓扑空间。空间 $\mathcal{C}(G)$ 是紧致、可度量化且第二可数的。有关 Chabauty–Fell 拓扑的更多细节，请参见 [3, 附录 A] 。

群 $G$通过作用连续地作用于 $\mathcal{C}(G)$

$$\{xC : x \in G\} \quad \text{for} \quad x \in G \quad \text{and} \quad C \in \mathcal{C}(G).$$

集合 $\Lambda \in \mathcal{C}(G)$ 在 $\mathcal{C}(G)$ 中的轨道闭包称为 $\Lambda$ 的 凸包 ，记作

$$\Omega(\Lambda) := \overline{\{x\Lambda : x \in G\}} \subseteq \mathcal{C}(G).$$

以下引理对应于 [14, 命题 2.2]。

**引理 2.1**。 设 $U \subseteq G$ 为开集，且 $K \subseteq G$ 为紧致集。则以下断言成立：

*(i)* 若 $\Lambda \subseteq G$ 是 $U$-分离的，则每个 $\Gamma \in \Omega(\Lambda)$ 也如此。
*(ii)* 若 $\Lambda \subseteq G$ 是 $K$-稠密的，则每个 $\Gamma \in \Omega(\Lambda)$ 也如此。

最后，我们陈述以下结果，它是 [14, 命题 3.3] 的一个特例。

**引理 2.2.** 设 $U \subseteq G$ 是一个开集。设 $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个由 $U$-分离集构成、收敛到集合 $\Gamma \in \mathcal{C}(G)$ 的序列。设 $K \subseteq G$ 是一个紧子集，使得 $\Gamma \cap \partial K = \emptyset$，并记 $\Gamma \cap K = \{\gamma^{(1)}, ..., \gamma^{(k)}\}$。那么存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \geq n_0$，都存在 $\mu_n^{(j)} \in \Lambda_n$、 $1 \leq j \leq k$，满足

$$\Lambda_n \cap K = \{\mu^{(1)}, ..., \mu^{(k)}\}$$

并且对每个 $1 \leq j \leq k$，当 $n \to \infty$ 时， $\mu_n^{(j)} \to \gamma^{(j)}$ 。

2.3. **点集的余体积**。 设 $\Lambda \subseteq G$ 是一个 Delone集。对于 $f \in C_c$（$G$），我们可以通过以下方式构造其周期化 $\mathcal{P}f \in C_c(\Omega(\Lambda))$：

$$(\mathcal{P}f)(\Gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma), \quad \Gamma \in \Omega(\Lambda).$$

$\Omega(\Lambda)$上的 Radon概率测度 $\nu$ 称为不变，若对所有$g \in G$ 以及可测的 $A \subseteq \Omega(\Lambda)$，都有 $\nu(gA) = \nu(A)$。对于这样的测度 $\nu$，映射

$$f \mapsto \int_{\Omega(\Lambda)} \mathcal{P}(f)\,\mathrm{d}\nu,$$

是 $G$-不变的 $C_c(G)$上的线性泛函，因此正比于对左 Haar 测度 $\mu_G$的积分。按照 [14], 的说法，我们将这个比例常数的倒数称为 $\mathrm{covol}_\nu(\Lambda)$。也就是说，

$$\int_{\Omega(\Lambda)} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)\,\mathrm{d}\nu(\Gamma) = \mathrm{covol}_\nu(\Lambda)^{-1} \int_G f(x)\,\mathrm{d}\mu_G(x). \tag{2.1}$$

注意，$\mathrm{covol}_\nu(\Lambda)$同时取决于 $\nu$ 和 $\mu_G$。

我们提到，$\Omega(\Lambda)$ 上通常不存在不变测度 $\nu$ 。然而，对于可 amenable 群 $G$中的 Delone 集 $\Lambda \subseteq G$ ，不变测度确实存在。事实上，回想一下， $G$ 是可 amenable 的，当且仅当每个紧致

$G$-空间上都存在不变概率测度，参见 [27, 第 14 题，第90]页。此外，只要 $\Lambda$ 是格子子群或某种模型集，$\Omega(\Lambda)$ 上就存在（唯一的）不变测度，参见 [3, 定理 3.4]。

Th以下命题给出了 Delone 集余体积的有用界 .

**命题 2.3**。设 $\Lambda \subseteq G$ 是一个 *Delone* 集，且 $\nu$ 是$\Omega(\Lambda)$上的不变概率测度。则有以下结论：

*(i)* 若 $\Lambda$对某个非空开集 $U \subseteq G$是 $U$-离散的，则 余体积$\nu(\Lambda) \geq \mu_G(U)$。*(ii)* 若 $\Lambda$ 对某个紧集 $K \subseteq G$ 是 $K$- 稠密的，则 余体积 $\nu(\Lambda) \leq \mu_G(K)$。*(iii)* 若 $\Lambda$ 是一个准格，且其补集 $C$相对紧并且 *Jordan* 可测，则 余体积$\nu(\Lambda) = \rho_G(C)$。

证明。将定义关系 (2.1) 应用于有限测度集合 $S \subseteq G$的指示函数 $\mathbb{1}_S$，得到

$$\int_{\Omega(\Lambda)} \#(\Gamma \cap S)\, \mathrm{d}\nu(\Gamma) = \mathrm{covol}_\nu(\Lambda)^{-1} \mu_G(S). \tag{2.2}$$

我们利用这个恒等式证明上述结论。

(i) 如果 $\Lambda$ 是 $U$-离散的，那么根据引理 2.1，我们还可得，对于任意$\Gamma \in \Omega(\Lambda)$，$\#(\Gamma \cap U) \leq 1$。因此，利用 $\nu$ 是概率测度这一事实，(2.2) 立即给出$1 \geq \mathrm{covol}_\nu(\Lambda)^{-1}\mu_G(U)$，如所要求。

(ii) 如果 $\Lambda$ 是 $K$-稠密的，那么引理 2.1 表明，对于任意 $\Gamma \in \Omega(\Lambda)$，也有 $\#(\Gamma \cap K) \geq 1$。因此，由 (2.2) 可得 $1 \geq \mathrm{covol}_\nu(\Lambda)^{-1}\mu_G(K)$。

(iii) $C$ 的 Jordan 可测性蕴含 $S = C^{-1}$ 的 Jordan 可测性，这是因为求逆运算是连续的，并且 $G$ 上的左哈尔测度与右哈尔测度等价。分别记 $S$ 的内部和闭包为 $U = S^\circ$ 和 $K = S$。注意，由于 $C$ 是相对紧的， $K$ 是紧致的。Jordan 可测性给出 $\mu_G(S) = \mu_G(U) = \mu_G(K)$。由于 $U \subseteq S$ （分别为 $K \supseteq S$）且 $\Lambda$ 是 $S$-分离的（分别为 $S$-稠密的），可知 $\Lambda$ 也必然是 $U$-分离的（分别为 $K$-稠密的）。于是 (i) 和 (ii) 给出

$$\mu_G(S) = \mu_G(U) \leq \mathrm{covol}_\nu(\Lambda) \leq \mu_G(K) = \mu_G(S).$$

因此，$\mathrm{covol}_\nu(\Lambda) = \mu_G(S) = \mu_G(C^{-1}) = \rho_G(C)$，从而证明了该结论。 □

上述命题的断言 (i) 和 (ii) 已在 [14, 命题 2.10] 中得到证明，所用的余体积定义略有不同，但等价。

## 3. Frame bounds, covolume and the norm of wavelet transform

本节将导出一些不等式，揭示框架的框架界、其点集的余体积以及相应小波变换的范数之间的关系。

**3.1. 小波变换**。设 $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ 是 $G$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\pi$ 上的射影酉表示，即一个强可测映射 $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$，满足$\pi(e_G) = I_{\mathcal{H}_\pi}$ 并且

$$\pi(g_1)\pi(g_2) = \sigma(g_1, g_2)\pi(g_1 g_2), \quad g_1, g_2 \in G,$$

对于某个（可测）函数 $\sigma\colon G\times G\to\mathbb{T}$。对于 $\psi,\ f\in\mathcal{H}_\pi$，我们定义函数

$$C_\psi f(g)=\langle f,\pi(g)\psi\rangle,\quad g\in G.$$

根据 [31, 引理 7.1，定理 7.5],，绝对值 $|C_\psi f|:G\to[0,\infty)$ 对任意 $f,\psi\in\mathcal{H}_\pi$ 都是连续的。若向量 $\psi\in\mathcal{H}_\pi$ 满足关联的小波变换 $C_\psi:\mathcal{H}_\pi\to L^\infty(G)$（由 $f\mapsto C_\psi f$ 给出）是到 $L^2(G)$ 中的等距映射，则称其为可容许的；也就是说，轨道 $\pi(G)\psi$ 是 $\mathcal{H}_\pi$ 的连续帕塞瓦尔框架。全文中，我们始终考虑相对于左 Haar 测度 $\mu_G$ 的 $L^2(G)$。

对于固定的紧致单位邻域 $Q$，我们将相应的 $F\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(G)$ 的局部极大函数 $MF$ 定义为

$$(MF)(g)=\sup_{q\in Q}|F(gq)|,\quad g\in G,$$

并令 $W(L^2):=\left\{F\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(G):\|MF\|_{L^2}<\infty\right\}$。空间 $W(L^2)$ 关于范数 $\|F\|_{W(L^2)}:=\|MF\|_{L^2}$ 构成一个巴拿赫空间，且与定义邻域 $Q$ 的选取无关，参见例如 [28, 定理 2.6、推论 4.2]。

我们定义空间

$$\mathcal{B}_\pi:=\left\{\psi\in\mathcal{H}_\pi:C_\psi f\in W(L^2),\quad\forall f\in\mathcal{H}_\pi\right\}.$$

以下引理给出了该空间稠密的一个简单充分条件。

**引理3.1**。 假设$(\pi,\mathcal{H}_\pi)$ 存在可容许向量。那么空间 $\mathcal{B}_\pi$ 在 $\mathcal{H}_\pi$中范数稠密。

证明。设 $\eta\in\mathcal{H}_\pi$ 是一个可容许向量，因此 $C_\eta(\mathcal{H}_\pi)$是$L^2(G)$的闭子空间。考虑 $G$的左正则 $\sigma$-表示$(L^\sigma,L^2(G))$，其作用定义为$(L^\sigma(h)F)(g)=\sigma(h,h^{-1}g)F(h^{-1}g)$，其中 $g$、$h\in G$和 $F\in L^2(G)$。由于空间$\mathcal{H}_\pi$ 是 $\pi$-不变的，并且对所有 $g\in G$ 和 $f\in\mathcal{H}_\pi$，都有 $C_\eta\pi(g)f=L^\sigma(g)C_\eta f$，因此$C_\eta(\mathcal{H}_\pi)$在 $L^\sigma$下不变。记 $P$为从 $L^2(G)$到$C_\eta(\mathcal{H}_\pi)$的正交投影；由于 $C_\eta(\mathcal{H}_\pi)$是一个 $L^\sigma$-不变子空间，它与每个 $g\in G$对应的 $L^\sigma(g)$都可交换。设 $\psi\in C_\eta^{-1}PC_c(G)$，则对某个 $F\in C_c(G)$有 $C_\eta\psi=PF$。于是，给定$f\in\mathcal{H}_\pi$，直接计算可得

$$\begin{aligned}|(C_\psi f)(g)|&=|\langle C_\eta f,C_\eta\pi(g)\psi\rangle|=|\langle C_\eta f,L^\sigma(g)C_\eta\psi\rangle|=|\langle C_\eta f,PL^\sigma(g)F\rangle|\\&\le(|C_\eta f|*|F^\vee|)(g),\end{aligned}$$

其中，$*$表示在 $G$上的卷积，且对于 $g\in G$，$F^\vee(g)=F(g^{-1})$。此外，这很容易推出 $MC_\psi f\le|C_\eta f|*M(F^\vee)$。注意，$M(F^\vee)\in C_c(G)$，因此$|C_\eta f|*M(F^\vee)\in L^2(G)$，由此可得 $MC_\psi f\in L^2(G)$。由于 $f\in\mathcal{H}_\pi$是任意的，且 $C_\eta^{-1}PC_c(G)$在 $\mathcal{H}_\pi$中稠密，结论得证。□

最后，我们用 $\mathcal{B}_\pi$的术语重新表述空间 $W(L^2)$的两个众所周知的性质。

**引理 3.2**。 设 $\psi\in\mathcal{H}_\pi$。那么，当且仅当对于每个相对分离集 $\Lambda\subseteq G$，$\psi\in\mathcal{B}_\pi$ $(\Lambda)\psi$ 都是$\mathcal{H}_\pi$中的 *Bessel* 序列。

证明。 根据 [15, 引理 3.8], ，连续函数 $F:G\to\mathbb{C}$ 属于 $W(L^2)$，当且仅当对每个相对分离集 $\Lambda\subseteq G$，$(F(\lambda))_{\lambda\in\Lambda}\in\ell^2(\Lambda)$。特别地，将此结论应用于某个 $f\in\mathcal{H}_\pi$对应的连续函数 $|C_\psi f|$，可得对每个相对分离集 $\Lambda\subseteq G$，$|C_\psi f|\in W(L^2)$当且仅当$(|C_\psi f(\lambda)|)_{\lambda\in\Lambda}\in\ell^2(\Lambda)$。

由一致有界定理，对所有 $f \in \mathcal{H}_\pi$ 成立的条件$(|C_\psi f(\lambda)|)_{\lambda\in\Lambda} \in \ell^2(\Lambda)$等价于 $\pi(\Lambda)\psi$ 是 $\mathcal{H}_\pi$中的 Bessel 序列。因此，引理得证。□

以下引理是 $[20,$ 引理 $1]$的直接推论。

**引理 3.3.** 设 $\psi \in \mathcal{B}_\pi$，设 $f \in \mathcal{H}_\pi$，且 $Q \subseteq G$ 相对紧。对于每个$\varepsilon > 0$ 和 $R > 0$，存在一个紧集 $K \subseteq G$，使得对于每个满足 $\mathrm{rel}_Q(\Lambda) \le R$ 的相对分离集 $\Lambda \subseteq G$，都有

$$\sum_{\lambda\in\Lambda\cap K^c} |(C_\psi f)(\lambda)|^2 < \varepsilon.$$

3.2. **框架**。以下引理对应于 $[14,$ 定理 3.9$]$。由于该论文[14] 将群 $G$ 是单模作为一项基本假设，为了保证完备性，我们给出证明。

**引理 3.4.** 设 $\psi \in \mathcal{H}_\pi$，且 $\Lambda \subseteq G$ 是一个分离集。则以下结论成立：

*(i)* 若 $\pi(\Lambda)\psi$ 是 $\mathcal{H}_\pi$ 中的 *Bessel* 序列，则对每个 $\Gamma \in \Omega(\Lambda)$，$\pi(\Gamma)\psi$ 都是 *Bessel* 序列（具有相同的 *Bessel* 界）。*(ii)* 若 $\pi(\Lambda)\psi$ 是 $\mathcal{H}$ 的框架，且 $\psi \in \mathcal{B}_\pi$，则对每个 $\Gamma \in\Omega(\Lambda)$，$\pi(\Gamma)\psi$ 都是框架（具有相同的框架界）。

证明。令 $\varepsilon > 0$、$f \in \mathcal{H}_\pi$，并令 $U \subseteq G$ 为一个开且相对紧的集合，使得 $\Lambda$ 是 $U$-分离的。令 $\Gamma \in \Omega(\Lambda)$，并令 $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\Lambda_n \subseteq G$ 的左平移序列，使得 $\Gamma = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n$。显然，每个集合 $\Lambda_n$、$n \in \mathbb{N}$ 都是 $U$-分离的；根据引理 2.1，集合 $\Gamma$ 也是 $U$-分离的。

(i) 令 $\pi(\Lambda)\psi$ 为一个 Bessel 序列，其 Bessel 界为 $C_2$。那么，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\pi(\Lambda_n)\psi$ 都是一个 Bessel 序列，其 Bessel 界为 $C_2$。令 $K \subseteq G$ 为一个紧集。扩大 $K$ 后，不妨设 $\Gamma \cap \partial K = \emptyset$。记 $\Gamma \cap K = \{\gamma^{(1)}, ..., \gamma^{(k)}\}$。于是，根据引理 2.2，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \ge n_0$ 以及当 $n \to \infty$ 时对所有 $1 \le j \le k$，均有 $\Lambda_n \cap K = \{\lambda_n^{(1)}, ..., \lambda_n^{(k)}\}$。结合函数 $|C_\psi f|$ 在 $G$ 上的连续性，可得存在 $n_1 \ge n_0$，使得

$$\left| \sum_{\gamma\in\Gamma\cap K} |(C_\psi f)(\gamma)|^2 - \sum_{\mu\in\Lambda_n\cap K} |(C_\psi f)(\mu)|^2 \right| \le \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n \ge n_1. \tag{3.1}$$

因此，由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们得出

$$\sum_{\gamma\in\Gamma\cap K} |(C_\psi f)(\gamma)|^2 \le \sum_{\mu\in\Lambda_n\cap K} |(C_\psi f)(\mu)|^2 \le C_2\|f\|^2.$$

由于 $f \in \mathcal{H}_\pi$，且这对任意大的紧集 $K \subseteq G$ 都成立，因此我们推得 $\pi(\Gamma)\psi$ 是一个 Bessel 序列，其 Bessel 界为 $C_2$。

(ii) 假设 $\pi(\Lambda)\psi$ 是一个框架，且 $\psi \in \mathcal{B}_\pi$。根据引理 3.3，存在一个紧集 $K \subseteq G$，使得

$$\sum_{\gamma\in\Gamma\cap K^c} |(C_\psi f)(\gamma)|^2 < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{and} \quad \sum_{\mu\in\Lambda_n\cap K^c} |(C_\psi f)(\mu)|^2 < \frac{\varepsilon}{4}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。因此，

$$\left| \sum_{\gamma \in \Gamma \cap K^c} |(C_\psi f)(\gamma)|^2 - \sum_{\mu \in \Lambda_n \cap K^c} |(C_\psi f)(\mu)|^2 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.2}$$

如有必要，扩大 $K$，我们可以假设对于某个紧致的 $K \subseteq G$（满足 $\Gamma \cap \partial K = \emptyset$），(3.2) 成立；例如参见 [14, 定理 3.9] 的证明。

结合 (3.1) 和 (3.2)（使用同一个紧集 $K \subseteq G$），我们可找到 $n_2 \in \mathbb{N}$，使得

$$\left| \sum_{\gamma \in \Gamma} |(C_\psi f)(\gamma)|^2 - \sum_{\mu \in \Lambda_n \cap K^c} |(C_\psi f)(\mu)|^2 \right| \leq \varepsilon$$

对所有 $n \geq n_2$ 均成立。这很容易推出所需的结论。 □

下面的结果是本节的主要结果。

**定理 3.5.** 设 $\Lambda \subseteq G$ 是一个 ***Delone*** 集，且 $\nu$ 是 Ω(Λ) 上的不变测度。若 $\pi(\Lambda)\psi$ 在 $\mathcal{H}_\pi$ 中是一个 ***Bessel*** 序列，其中某个 $\psi \in \mathcal{H}_\pi$ 对应的 ***Bessel*** 界为 $C_2 > 0$，则

$$\frac{\|C_\psi f\|^2}{\|f\|^2 \operatorname{covol}_\nu(\Lambda)} \leq C_2 \quad \textit{for all} \quad f \in \mathcal{H}_\pi.$$

此外，如果 $\psi \in \mathcal{B}_\pi$ 和 $\pi$（Λ）$\psi$ 还具有下框架界 $C_1 > 0$，那么

$$\frac{\|C_\psi f\|^2}{\|f\|^2 \operatorname{covol}_\nu(\Lambda)} \geq C_1 \quad \textit{for all} \quad f \in \mathcal{H}_\pi.$$

证明。 设 $f \in \mathcal{H}_\pi$。根据引理 3.4 的 (i) 部分，我们有

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle f, \pi(\gamma)\psi \rangle|^2 \leq C_2 \|f\|^2$$

对于任意 $\Gamma \in$ Ω(Λ)。对左侧项关于 $\nu$ 积分，得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(\Lambda)} \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle f, \pi(g)\psi \rangle|^2 \, \mathrm{d}\nu(\Gamma) &= \operatorname{covol}_\nu(\Lambda)^{-1} \int_G |C_\psi f(g)|^2 \, d\mu_G(g) \\ &= \operatorname{covol}_\nu(\Lambda)^{-1} \|C_\psi f\|^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

由于 $\nu$ 是概率测度，因此有

$$\operatorname{covol}_\nu(\Lambda)^{-1} \|C_\psi f\|^2 \leq C_2 \|f\|^2,$$

由此我们立即可以得出第一个结论。

此外，如果 $\pi$(Λ)$\psi$ 且 $\psi \in \mathcal{B}_\pi$ 具有下框架界 $C_1 > 0$，那么

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle f, \pi(\gamma)\psi \rangle|^2 \geq C_1 \|f\|^2$$

对任意 $\Gamma \in$Ω(Λ)，由引理 3.4 的第 (ii) 部分可得。结合恒等式 (3.3)，即可轻松完成证明。□

最后，我们得到定理 3.5 关于可 amenable 群的以下推论。

**推论 3.6.** 设 $G$ 是可 *amenable* 的，且 $U \subseteq G$ 和 $K \subseteq G$ 分别是非空开集和紧集。设 $\Lambda \subseteq G$ 是一个 $U$-分离、 $K$-稠密的集合，且 $\psi \in \mathcal{H}_\pi$。

若 $\pi(\Lambda)\psi$ 是 $\mathcal{H}_\pi$ 中具有 *Bessel* 界 $C_2 > 0$ 的 *Bessel* 序列，则

$$\|C_\psi f\|^2 \le C_2 \mu_G(K)\|f\|^2 \quad for\ all \quad f \in \mathcal{H}_\pi.$$

此外，若 $\psi \in \mathcal{B}_\pi$ 和 $\pi(\Lambda)\psi$ 也具有下框架界 $C_1 > 0$，则

$$\|C_\psi f\|^2 \ge C_1 \mu_G(U)\|f\|^2 \quad for\ all \quad f \in \mathcal{H}_\pi.$$

特别地，若 $\pi(\Lambda)\psi$ 是框架，且其 $\psi \in \mathcal{B}_\pi$ 对某个准格 $\Lambda \subseteq G$ 具有相对紧的 *Jordan* 可测补集 $C$，则

$$C_1\|f\|^2 \le \frac{\|C_\psi f\|^2}{\rho_G(C)} \le C_2\|f\|^2$$

对所有 $f \in \mathcal{H}_\pi$。

证明。 由于 $G$ 是可 amenable 的，紧致 $G$-空间 Ω(Λ) 存在一个不变概率测度 $\nu$。应用定理 3.5，得到

$$\mathrm{covol}_\nu(\Lambda)^{-1}\|C_\psi f\|_2^2 \le C_2\|f\|^2$$

对 $f \in \mathcal{H}_\pi$。由命题 2.3 可知，covol$_\mu$(Λ) $\le \mu_G(K)$，由此可得第一个结论。其余结论的证明类似。□

注记 3.7。 推论 3.6 特别意味着，若 $\pi(\Lambda)\psi$ 对某个相对稠密集 $\Lambda \subseteq G$ 构成 Bessel 序列，则 $\pi$ 必须是平方可积的，即对所有 $f \in \mathcal{H}_\pi$，都有$C_\psi f \in L^2(G)$。对于由 $\mathbb{R}^d$ 与矩阵群 $H \le \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 构成的半直积群 $G = \mathbb{R}^d \rtimes H$ 的某些表示，这一点已在 [1] 中证明。在该情形下，推论 3.6 给出的上界对应于 [1, 命题 1]。尽管相应的下界被表述为 [1, 命题 2]（即使不对 $\psi$作任何额外假设），但 [1]中给出的下界论证（参见[1,定理 1]）并不完整。

## 4. Calderón's condition for arbitrary dilations

本节中，我们令 $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$，并考虑由 $\mathbb{R}^d$ 和循环群 $\langle A\rangle := \{A^j : j \in \mathbb{Z}\}$ 构成的半直积群 $G = \mathbb{R}^d \rtimes \langle A\rangle$，其群运算为

$$(x, A^j)(y, A^k) = (x + A^j y, A^{j+k}).$$

由于 $G$ 是两个阿贝尔（因而可 amenable）局部紧群的半直积，因此它本身也是一个可 amenable 的局部紧群，参见例如 [27, 命题 0.15] 和 [27, 问题 5，第 47] 页。$G$ 的左、右 Haar 测度分别由测度 $d\mu_G(x, A^j) = |\det(A)|^{-j}dx\mu_c(j)$ 和 $d\rho_G(x, A^j) = dxd\mu_c(j)$ 给出，其中 $dx$ 表示对 Lebesgue 测度积分， $\mu_c$ 表示计数测度。

以下引理给出了 $G$ 中一类拟格。

**引理4.1**。 对于 $A, P \in$一般线性群$(d,\mathbb{R})$，集合

$$\Lambda := \left\{(A^j Pk, A^j) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d\right\}$$

是 $G$ 中的准格，其*Jordan*可测补集由 $C = P[0,1)^d \times \{I_d\}$给出。

证明。 首先，设$(A^jPk, A^j), (A^{j'}Pk', A^{j'}) \in \Lambda$使得

$$(A^jPk, A^j)C \cap (A^{j'}Pk', A^{j'})C \neq \emptyset.$$

于是存在 $t,\ t' \in [0,1)^d$，使得$(A^jPk,\ A^j)(Pt,\ I_d) = (A^{j'}Pk',\ A^{j'})(Pt',\ I_d)$。这意味着 $A^jPk + A^jPt = A^{j'}Pk' + A^{j'}Pt'$和 $A^j = A^{j'}$。后者迫使 $j = j'$，因此前者给出 $k + t = k' + t'$。由于 $t,\ t' \in [0,1)^d$，我们得出 $t = t'$和$k = k'$。

其次，令$(x,\ A^j) \in G$为任意的。选择 $k \in \mathbb{Z}^d$和 $t \in [0,1)^d$，使得 $P^{-1}A^{-j}x = k + t$。于是$(x,\ A^j) = (A^jP(k + t)\ A^j) = (A^jPk,\ A^j)(Pt,\ I_d)$。上述两个性质表明，$G = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \lambda Q$。 □

接下来考虑 $G = \mathbb{R}^d \rtimes \langle A\rangle$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的准正则表示，定义如下:

$$\pi(x, A^j)f(t) = |\det(A)|^{-j/2} f(A^{-j}(t - x)), \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

容易验证，此作用在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上定义了 $G$ 的酉表示。根据 [26, 第 3] 节或 [24, 定理 2], ，只要 $|\det(A)| \neq 1$，表示 $\pi$ 就存在一个可容许向量。在这种情况下，根据引理3.1，空间 $\mathcal{B}_\pi$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中范数稠密。

接下来证明定理 1.2 的以下更一般版本。

定理 *4.2*。设 $A, P \in GL(d, \mathbb{R})$。若 $\psi \in \mathcal{B}_\pi$ 且 $\{\pi(A^jPk, A^j)\psi\}_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^d}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的一个框架，框架界为 $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$，则 $\{\pi(x, A^j)\psi\}_{x\in\mathbb{R}^d,j\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的一个连续框架，框架界为 $C_1|det(P)|$ 和 $C_2|det(P)|$，并且

$$C_1 \leq \frac{1}{|\det(P)|} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}((A^t)^j\xi)|^2 \leq C_2 \quad for\ a.e.\ \xi \in \mathbb{R}^d.$$

证明。 由引理4.1可知，集合 $\Lambda = \{(A^jPk, A^j) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d\}$ 是 $G$中的一个准格，其补集为 $C = P[0,1)^d \times \{I_d\}$，因此 $\rho_G(C) = |\det(P)|$。因此，若系统$\pi(\Lambda)\psi$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$的框架，且满足 $\psi \in \mathcal{B}_\pi$，则由推论 3.6 可知

$$C_1|\det(P)| \leq \|C_\psi f\|^2 \leq C_2|\det(P)|\|f\|^2$$

对所有 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 都成立，这表明 $\{\pi(x,\ A^j)\psi\}_{x\in\mathbb{R}^d,\ j\in\mathbb{Z}}$ 是一个具有所声称的界的框架。接下来，标准计算（例如参见 [19, 26]）表明

$$\begin{aligned}
\|C_\psi f\|^2 &= \int_G |\langle \widehat{f}, \widehat{\pi(x, A^j)\psi}\rangle|^2 \, d\mu_G(x, A^j) \\
&= \int_G \left| \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)|\det(A)|^{j/2} e^{-2\pi i\xi\cdot x} \overline{\widehat{\psi}((A^t)^j\xi)} \, d\xi \right|^2 d\mu_G(x, A^j) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\psi}((A^t)^j\xi)} e^{-2\pi i\xi\cdot x} \, d\xi \right|^2 dx \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \widehat{f}(\xi)\widehat{\psi}((A^t)^j\xi) \right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}((A^t)^j\xi)|^2 \, d\xi,
\end{aligned}$$

其中倒数第二步用到了 Plancherel 公式。因此，

$$C_1|\det(P)|\|\widehat{f}\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}((A^t)^j\xi)|^2 \, d\xi \leq C_2|\det(P)|\|\widehat{f}\|^2.$$

由于这对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 都成立，因此可得

$$C_1|\det(P)| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}((A^t)^j\xi)|^2 \leq C_2|\det(P)|$$

对几乎处处的 $\xi \in \mathbb{R}^d$。 □

## Acknowledgements

第二位署名作者感谢 Felix Voigtlaender 就离散与连续 Parseval 小波框架之间的关系所进行的有益讨论，这些讨论启发了本文所采用的证明思路。对 J.v.V. 而言，这项研究全部或部分由奥地利科学基金（FWF）资助：10.55776/PAT2545623。为实现开放获取，作者已将 CC BY 公共版权许可应用于因本次投稿而产生的任何作者接受稿版本。

## References

[1] P. Aniello、G. Cassinelli、E. De Vito 和 A. Levrero。关于与半直积相关的离散框架。《傅里叶分析与应用杂志》，7(2):199–206，2001。[2] R. Balan、P. G. Casazza、C. Heil 和 Z. Landau。框架的密度、过完备性与局部化。II：Gabor 系统。《傅里叶分析与应用杂志》，12(3):307–344，2006。[3] M. Bj¨orklund、T. Hartnick 和 F. Pogorzelski。非周期序与球面衍射，I：正则模型集的自相关。《伦敦数学学会会刊》*(3)*，116(4):957–996，2018。[4] M. Bownik。 $L^2(\mathbb{R}^n)$中仿射对偶框架的刻画。《应用与计算调和分析》，8(2):203–221，2000。[5] M. Bownik 和 J. Lemvig。非扩张膨胀的小波与格点计数估计。《国际数学研究通知》，2017(23):7264–7291，2017。[6] M. Bownik 和 Z. Rzeszotnik。小波理论中的开放问题。载于《算子理论、算子代数及其与几何和拓扑的相互作用：*Ronald G. Douglas* 纪念文集。国际算子理论与应用研讨会（*IWOTA 2018*）论文集，上海，中国，*2018*年*7*月*23*日至*27*日》，第77–100页。Cham：Birkh¨auser，2020。[7] M. Bownik 和 D. Speegle。 $\mathbb{R}^n$的同步膨胀与平移铺砌。《美国数学杂志》，即将出版。[8] A. Calogero。一般格上小波的刻画。《几何分析杂志》，10(4):597–622，2000。[9]M. Caspers 和 J. T. van Velthoven。幺模可均群上相干框架的过完备性。《数学档案》，61(2):277–299，2023。[10] C. K. Chui、W. Czaja、M. Maggioni 和 G. Weiss。矩阵膨胀与保持紧性的过采样下，一般紧小波框架的刻画。《傅里叶分析与应用杂志》，8(2):173–200，2002。[11] C. K. Chui 和 X. S hi。框架与小波的 Littlewood-Paley 型不等式。《工业与应用数学学会数学分析杂志》，24(1):263–277，1993。[12] X. Dai、D. R. Larson 和 D. M. Speegle。 $\mathbb{R}^n$中的小波集。《傅里叶分析与应用杂志》，3(4):451–456，1997。[13] I. Daubechies。《小波十讲》，第61卷，*CBMS-NSF* 应用数学区域会议丛书。宾夕法尼亚州费城：工业与应用数学学会，1992。[14] U. Enstad 和 S. Raum。幺模群上采样与插值的动力学方法。《美国数学会会刊》，378(3):1975–2006，2025。

[15] H. G. Feichtinger 和 K. H. Gr¨ochenig。与可积群表示相关的巴拿赫空间及其原子分解。I。《泛函分析杂志》，86(2):307–340，1989。[16] H. F¨uhr。高维中的小波框架与容许性。《数学物理杂志》，37(12):6353–6366，1996。[17] H. F¨uhr 和 K. Gr¨ochenig。基于振荡估计的局部紧群采样定理。《数学杂志》，255(1):177–194，2007。[18] H. F¨uhr、K. Gr¨ochenig、A. Haimi、A. Klotz 和 J. L. Romero。再生核希尔伯特空间中采样与插值的密度。《伦敦数学学会杂志》，第二辑，96(3):663–686，2017。[19] H. F¨uhr 和 M. Mayer。半直积上的连续小波变换：循环表示与普朗歇尔测度。《傅里叶分析与应用杂志》，8(4):375–397，2002。[20] K. Gr¨ochenig。相干框架的齐次逼近性质与比较定理。《采样理论、信号与图像处理》，7(3):271–279，2008。[21] K. Guo 和 D. Labate。关于再生系统统一刻画的若干评论。《数学文集》，57(3):295–307，2006。[22] E. Hern´andez、D. Labate 和 G. Weiss。由有限族生成的再生系统的统一刻画。II。《几何分析杂志》，12(4):615–662，2002。[23] E. J. Ionascu 和 Y. Wang。$\mathbb{R}^2$中的同步平移与乘法铺砌及小波集。《印第安纳大学数学杂志》，55(6):1935–1949，2006。[24] D. Larson、E. Schulz、D. Speegle 和 K. F. Taylor。单生成群作用的显式截面。载于《调和分析与应用：向 John J. Benedetto 致敬》，第209–230页。巴塞尔：Birkh¨auser，2006。[25] R. S. Laugesen。用于小波完备性、刻画及过采样的平移平均。《数学文集》，53(3):211–249，2002。[26] R. S. Laugesen、N. Weaver、G. L. Weiss 和 E. N. Wilson。与连续小波相关的高维群的刻画。《几何分析杂志》，12(1):89–102，2002。[27] A. L. T. Paterson。《可和性》，第29卷，数学调查与专著。罗得岛州普罗维登斯：美国数学学会，1988。[28]H. Rauhut。相对于拟巴拿赫空间的维纳拼接空间。《数学讨论集》，109(2):345–362，2007。[29] J. L. Romero 和 J. T. van Velthoven。限制在格上的离散级数表示的密度定理。《数学博览》，40(2):265–301，2022。[30] D. Speegle。非扩张膨胀矩阵对应的小波存在性。《数学文集》，54(2):163–179，2003。[31] V. S. Varadarajan。《量子理论的几何》。第2版。施普林格出版社，412页，1985。[32] Y. Wang。小波、铺砌与谱集。《杜克数学杂志》，114(1):43–57，2002。

Department of Mathematics, University of Oslo, Moltke Moes vei 35, 0851 Oslo.
电子邮箱地址: ubenstad@math.uio.no

Faculty of Mathematics, University of Vienna, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090Vienna, Austria电子邮箱地址: jordy-timo.van-velthoven@univie.ac.at