arXiv:2602.10783v1 [math.PR] 11 Feb 2026

实向量空间的随机链复形

AYAT ABABNEH 和 MATTHEW KAHLE

摘要。我们引入一类自然的实向量空间随机链复形模型，其中长度为1的情形对应于若干经典的随机矩阵系综。本文关注这些随机复形的同调性质。对于长度为1或2的链复形，我们根据向量空间的维数刻画其贝蒂数（几乎必然）。我们还研究了维数受到某些约束的长度为3的复形，以及所有向量空间维数相等的任意有限长度复形。在上述所有情形中，我们证明，贝蒂数之和几乎必然达到可能的最小值，即由底层向量空间的维数和欧拉公式决定的平凡下界 $|\chi|$ 。这些结果表明，随机拓扑中经常观察到的一种现象背后存在一种代数启发：除非受到强制，否则非平凡同调很少出现。

1. 引言

过去 15 至 20 年间，随机拓扑一直是一个活跃的研究领域。研究过多种模型，包括随机流形 [DT06], 、随 [BK18, Kah14b], 机单纯复形、随机群 [Oll05], 、随机纽结[EZ17, EZHLN18], 等。这些随机拓扑对象的代数拓扑不变量已得到广泛研究，并且在不同情境下观察到了定性上相似的现象。

Dunfield 和 W. Thurston [DT06] 提出了一种自然的随机 3 维流形 M模型，并证明以高概率 $H_1(M, \mathbb{R}) = 0$。在随机单纯复形中也观察到了类似的同调消失现象，包括$\mathbb{R}$ 以及有限域上的情形。在这些情境中，通常存在阻碍上同调消失的平凡组合障碍。该领域的若干定理表明，一旦某种组合障碍消失，上同调便会消失[Bob22, Kah14a, KPR21, KP16, LM06, MW09, NP23]。有时还会 k观察到，在某个参数范围内， $k-1$面的数量远多于 $k+1$面或 β_k 面。在这种情况下，出于维数原因，[必定非零09]CF17, Fow19, Kah。

我们在链复形层面研究同调。Ginzburg 和 Pasechnik [GP17] 以及 Catanzaro 和 Zabka [CZ21]此前研究过有限域上向量空间的随机链复形。我们研究实数域上的情形，其特点略有不同。在有限域情形中，人们自然会考虑某个参数趋于无穷时的渐近行为，这个参数可以是有限域的阶，也可以是链复形的长度。人们可能会关注那些“渐近地几乎必然”发生的事件，即其发生概率趋于 1 的事件。本文则给出一些“几乎必然”成立的结果，也就是说，相关概率等于 1。测度论上，定义实向量空间的随机链复形也稍

日期：2026年2月12日。

微妙，因为这里无法使用计数测度。下一节将对此作出精确定义。

在下文中，我们考虑实向量空间的有界链复形（A_*, d_*），

$$0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_n} A_n \leftarrow 0.$$

我们假设向量空间的维数由 $a_i = \dim A_i$ 给出，链的欧拉示性数则定义为

$$\chi = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i.$$

回想一下，若映射的秩由 $r_i = \operatorname{rank} d_i$ 给出，则我们可以将贝蒂数定义为

$$\beta_i = -r_i + a_i - r_{i+1}.$$

等价地，$\beta_i = \dim H_i(A_*)$。著名的欧拉公式表明

$$\chi = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i.$$

对两边取绝对值并应用三角不等式，我们得到

$$|\chi| \leq \sum_{i=0}^{n} \beta_i.$$

若等号成立，则称该链复形的总同调尽可能小。

实向量空间的随机链复形的精确定义将在下一节给出。我们先陈述主要结果。

定理 3.2。对于长度为2的随机链复形，

$$0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} A_2 \leftarrow 0,$$

几乎必然

$$(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = \begin{cases} (a_0 - a_1 \ , \ 0 \ , \ a_2), & \text{if } a_0 \geq a_1 + a_2, \\ (a_0 \ , \ 0 \ , \ a_1 - a_2), & \text{if } a_2 \geq a_0 + a_1, \\ (0 \ , \ a_1 - a_0 - a_2 \ , \ 0), & \text{if } a_1 \geq a_0 + a_2, \\ (\chi/2 \ , \ 0 \ , \ \chi/2), & \text{if } a_2 - a_1 \leq a_0 \leq a_1 + a_2, \\ & a_1 \leq a_0 + a_2, \text{ and } \chi \text{ is even}, \\ ((\chi \pm 1)/2 \ , \ 0 \ , \ (\chi \mp 1)/2), & \text{if } a_2 - a_1 \leq a_0 \leq a_1 + a_2, \\ & a_1 \leq a_0 + a_2, \text{ and } \chi \text{ is odd}. \end{cases}$$

由此可知，几乎必然

$$\sum_{i=0}^{2} \beta_i = |\chi|.$$

对于长度为 2 的随机链复形，总同调几乎必然达到可能的最小值。对于长度为

3 的随机链复形，如果没有额外假设，我们不能指望这一结论成立。例如，如果 $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (2, 1, 1, 2)$，那么对于每个链复形，我们都有非平凡同调 $\beta_0 \geq 1$ 和 $\beta_3 \geq 1$，但是$|\chi| = 0$。这个例子的问题在于，我们通过向量空间的维数强制产生了同调。因此，一个合理的额外假设是，对于每个 i，$a_i + a_{i+2} \geq a_{i+1}$，否则 β_{i+1} 必定为正。在这些额外假设下，我们证明总同调确实几乎必然达到可能的最小值。

定理 3.3。 对于长度为3的随机链复形，

$$0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} A_2 \xleftarrow{d_3} A_3 \leftarrow 0,$$

其中 $a_i + a_{i+2} \geq a_{i+1}$对于 $i = -1,\ 0,\ 1,\ 2$，几乎必然 $\sum \beta_i = |\chi|$。

接下来，我们研究任意长度的实向量空间有界链复形，其中所有向量空间的维数均相等。首先，我们考虑 n 为奇数的情形。在这种情况下，该随机链复形几乎必然是一个正合列。

定理 4.1。 设 n 为奇数，且 m 为正整数。对于随机链复形 $0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \cdots \xleftarrow{d_n} A_n \leftarrow 0$，其中 $a_i = m$ 对每个 i都成立，几乎必然$\beta_i = 0$ 对于 $i = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ n.$

最后，我们考虑维数相等且 n 为偶数的情形。

定理 4.2. 设 n 为偶数，且 m 为正整数。对于满足对每个 i 都有 $a_i = m$ 的随机链复形 $0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \cdots \xleftarrow{d_n} A_n \leftarrow 0$，几乎必然有 $\sum \beta_i = |\chi|$。

在 n 为偶数的情形下，我们进一步证明所有奇数阶贝蒂数都为零，并且对于 $k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{n}{2}$，要么 $\beta_{2k} = \left\lfloor \frac{m}{n/2+1} \right\rfloor$，要么 $\beta_{2k} = \left\lceil \frac{m}{n/2+1} \right\rceil$。注意 $|\chi| = m$，因此这意味着总同调尽可能均匀地分布。如果 $m/(n/2+1)$ 不是整数，那么贝蒂数向量（$\beta_0,\ \ldots\ldots,\ \beta_m$）可能有许多种取值。这与上面的许多例子形成对比，在那些例子中，贝蒂数向量只集中于一个向量。

致谢。 第一作者的研究部分得到了约旦大学研究基金的资助。第二作者感谢 Elliot Paquette 和 Kenny Easwaran 就零概率事件上的条件化问题进行的有益讨论，也感谢 Dave Anderson 就链复形的种类进行的有益讨论。

2. The model

本节将介绍一类关于 $\mathbb{R}$ 上随机链复形的自然模型，并计算其若干基本特征。

2.1. 对零概率事件进行条件化。条件概率$\mathbb{P}(B \mid A)$通常定义为

$$\mathbb{P}(B \mid A) := \frac{\mathbb{P}(A \text{ and } B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

尽管这个定义很直观，但如果 $\mathbb{P}(A) = 0$，它的用途就十分有限。关于对零概率事件进行条件化，无论是在数学上[BD75]还是哲学上 [Eas19]，都已有大量论述。

设 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 是有界、可测的连续概率密度函数。例如，设 f 是标准多元正态分布。假设豪斯多夫维数 $\dim_H X = k$，并且 X 和 Y 是 $\mathbb{R}^N$ 的可求 rectifiable 子集。下文中，X 总是 $\mathbb{R}^n$ 中的仿射代数簇，而 Y 是子簇，因此这必然成立。

我们定义

$$\mathbb{P}(Y \mid X) = \frac{\int_Y f(x) d\square^k(x)}{\int_X f(x) d\square^k(x)},$$

其中 $d\square^k(p)$ 是 k 维豪斯多夫（曲面）测度。

本文后续部分将反复用到一个简单但有用的事实：若 $\dim_H(Y) < \dim_H(X)$，则分子为零，且 $\mathbb{P}(Y \mid X) = 0$。

下文中，$\mathbb{R}^N$ 将是由所有线性映射序列构成的空间

$$0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \cdots \xleftarrow{d_n} A_n \leftarrow 0,$$

$X = M(\vec{a}) \subseteq R^N$ 将是维数为$\vec{a}$的向量空间链复形簇，而 $Y = P(\vec{a}, \vec{r})$则是 $M(\vec{a})$ 的子簇，其中映射的秩由 $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$给定。

另一个等价的定义如下。对于子集 $A \subseteq \mathbb{R}^N$，令 $A(\epsilon)$表示 A的 ϵ-加厚。也就是说，

$$A(\epsilon) := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid d(x, A) < \epsilon \right\}.$$

那么我们也可以等价地定义

$$\mathbb{P}(Y \mid X) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\int_{Y(\epsilon)} f(x) dx}{\int_{X(\epsilon)} f(x) dx},$$

其中 dx 表示勒贝格测度。

这些定义等价是一个标准结论，并且与测度分解的概念密切相关。实际上，我们不要求 f 连续——例如，只要 f 有界且博雷尔可测[Fed69, DHS13]即可。我们甚至可以在 $\mathbb{R}^N$上考虑一个没有密度函数的基础概率测度，只要它相对于勒贝格测度绝对连续即可。

因此，从某种强意义上说，出于维数方面的原因，我们的所有主要结果都相当普遍地成立。与此同时，我们认为这些定义十分自然；事实上，这使得我们能够用经典随机矩阵系综来定义实向量空间的随机链复形。上文提到的高斯例子是一个重要的特例，它将研究充分的、矩阵元独立同分布且服从高斯分布的随机矩阵模型推广到了更长的随机复形。

2.2. 随机链复形。 给定一个非负整数向量 $\vec{a} = (a_0, \ldots, a_n)$，对于每个 $i = 0, 1, \ldots, n$，令 $A_i = \mathbb{R}^{a_i}$ 为维数为a_i的实向量空间。我们定义随机链复形

$$0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \cdots \xleftarrow{d_n} A_n \leftarrow 0.$$

令 $M(\vec{a})$ 表示所有链复形构成的空间。我们可以将 $M(\vec{a})$ 视为 $\mathbb{R}^N$ 中的一个仿射代数簇，其中 $N = a_0 a_1 + \cdots + a_{n-1} a_n$，具体如下

所述。我们将每个边界映射 d_i 视为由一个 $a_{i+1} \times a_i$ 矩阵给出。矩阵中的元素总数为 N。对于每个 i，条件 $d_{i+1}d_i = 0$等价于矩阵 d_i 和 d_{i+1}的元素满足一组二次多项式为零。

现在，给定另一个非负整数向量 $\vec{r} = (r_1, r_1, \ldots, r_n)$，令 $P(\vec{a}, \vec{r})$ 表示 $M(\vec{a})$ 的子空间，其中对每个 $i = 1, \ldots, n$，我们有秩 $d_i = r_i$。

对于 $\vec{a}$ 和 $\vec{r}$ 的某些选择，子空间 $P(\vec{a}, \vec{r})$ 是空的——即不存在具有给定维数和秩的链复形。下面的命题确立了存在性的充要条件。该条件想必已为人所熟知，但为完整起见，我们在此给出其陈述。

命题 2.1. 存在一个链复形

$$0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \cdots \xleftarrow{d_n} A_n \leftarrow 0$$

使得对 $i = 0, \ldots, n$ 有 维数 $A_i = a_i$，且对 $i = 1, \ldots, n$ 有秩 $d_i = r_i$，当且仅当对每个 $i = 0, \ldots, n$ 有 $r_i + r_{i+1} \leq a_i$。

证明很直接，因此省略。

命题 2.2。 设 $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ 和 $\vec{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ 为非负整数向量。若存在一个链复形，其向量空间维数由 $\vec{a}$ 给出，且映射的秩由 $\vec{r}$给出，那么实向量空间链复形子簇的维数

$$0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} A_2 \leftarrow \cdots \xleftarrow{d_n} A_n \leftarrow 0$$

在秩为 $\vec{r}$ 时由以下公式给出

$$d(\vec{a}, \vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} r_i(a_i + a_{i-1} - r_{i-1} - r_i).$$

这个公式为代数几何学家所熟知——例如，参见 De Concini 和 Strickland 关于复形簇的论文 [DCS81]。他们研究的簇满足条件 rank $d_i \leq r_i$，而非 rank $d_i = r_i$；不过后者是前者的一个开子簇，因此二者维数相同。下文将看到，对于许多秩向量 $\vec{r}$，dim $P(\vec{a}, \vec{r})$ $<$dim $M(\vec{a})$。根据前面的讨论，若 dim $P(\vec{a}, \vec{r})$ $<$ dim $M(\vec{a})$，那么具有向量空间维数 $\vec{a}$ 的随机链复形具有秩向量 $\vec{r}$的概率为零。首先，我们注意到以下有用的引理。

引理 2.3 (单调性引理)。 对于随机链复形

$$0 \leftarrow A_0 \leftarrow A_1 \leftarrow \cdots \leftarrow A_n \leftarrow 0.$$

如果 $\vec{r} = (r_1, \cdots, r_i + 1, \cdots, r_n)$ 属于允许区域，则

$$d(\vec{a}, (r_1, \cdots, r_i + 1, \cdots, r_n)) > d(\vec{a}, (r_1, \cdots, r_i, \cdots, r_n)).$$

也就是说，链复形空间的维数随着每个秩的增加而严格递增。

证明。 令 $\vec{\rho_1} = (r_1, \cdots, r_i + 1, \cdots, r_n)$ 和 $\vec{\rho_2} = (r_1, \cdots, r_i, \cdots, r_n)$。 我们有

$$\begin{aligned} d(\vec{a}, \vec{\rho_1}) - d(\vec{a}, \vec{\rho_2}) &= (r_i + 1)(a_{i-1} + a_i - (r_i + 1) - r_{i-1}) \\ &\quad +(r_{i+1})(a_i + a_{i+1} - r_{i+1} - (r_i + 1)) \\ &\quad -r_{i+1}(a_{i+1} + a_i - r_i - r_{i+1}) - r_i(a_i + a_{i-1} - r_{i-1} - r_i) \\ &= -r_{i+1} + a_i + a_{i-1} - r_{i-1} - (r_i + 1) - r_i \\ &= a_{i-1} - (r_{i-1} + r_i) + a_i - (r_i + r_{i+1}) - 1 \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

最后一个不等式由以下假设得出：秩向量 $\vec{\rho_1}$ 位于允许区域内，这意味着 $r_{i-1} + r_i + 1 \leq a_{i-1}$ 和 $r_i + 1 + r_{i+1} \leq a_i$. □

3. Random chain complexes of length 1, 2, and 3

现在我们着重讨论长度为1、2和3的特殊情形。

3.1. 长度为1的链复形。

定理3.1. 对于随机链复形 $0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \leftarrow 0$，有

$$(\beta_0, \beta_1) = \begin{cases} (0, a_1 - a_0), & a_0 \leq a_1, \\ (a_0 - a_1, 0), & a_1 < a_0. \end{cases}$$

证明. 作为上述公式的一个特殊情形， $d(\vec{a}, \vec{r}) = r_1(a_0 + a_1 - r) = -r_1^2 + (a_0 + a_1)r_1$, 其中 r_1 是映射 d_1. 的秩。为了确定哪些秩向量具有正概率，我们在约束 $0 \leq r_1 \leq \min\{a_0, a_1\}$. 下最大化 d。根据单调性引理， d 随 r_1 增大，并在 $r_1 = \min\{a_0, a_1\}$. 时取得最大值。因此，贝蒂数为 $\beta_0 = a_0 - \min\{a_0, a_1\}$，且 $\beta_1 = a_1 - \min\{a_0, a_1\}$， 如所求。□

3.2. 长度为2的链复形。

随机链复形的同调可由以下定理刻画。

定理 3.2。对于一个长度为2的随机链复形，

$$0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} A_2 \leftarrow 0,$$

几乎必然

$$(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = \begin{cases} (a_0 - a_1 \ , \ 0 \ , \ a_2), & \text{if } a_0 \geq a_1 + a_2, \\ (a_0 \ , \ 0 \ , \ a_1 - a_2), & \text{if } a_2 \geq a_0 + a_1, \\ (0 \ , \ a_1 - a_0 - a_2 \ , \ 0), & \text{if } a_1 \geq a_0 + a_2, \\ (\chi/2 \ , \ 0 \ , \ \chi/2), & \text{if } a_2 - a_1 \leq a_0 \leq a_1 + a_2, \\ & a_1 \leq a_0 + a_2, \text{ and } \chi \text{ is even}, \\ ((\chi \pm 1)/2 \ , \ 0 \ , \ (\chi \mp 1)/2), & \text{if } a_2 - a_1 \leq a_0 \leq a_1 + a_2, \\ & a_1 \leq a_0 + a_2, \text{ and } \chi \text{ is odd}. \end{cases}$$

由此可知，几乎必然

$$\sum_{i=0}^{2} \beta_i = |\chi|.$$

在最后一种情形中，有两种不同的秩向量选择可以使维数 d 达到最大值，且每种选择出现的概率均为正。例如，当$a_0 = a_1 = a_2 = m$ 其中 m 为奇数时，贝蒂数向量（β_0、β_1、β_2）为

$$\big((m-1)/2,\, 0,\, (m+1)/2\big) \quad \text{and} \quad \big((m+1)/2,\, 0,\, (m-1)/2\big).$$

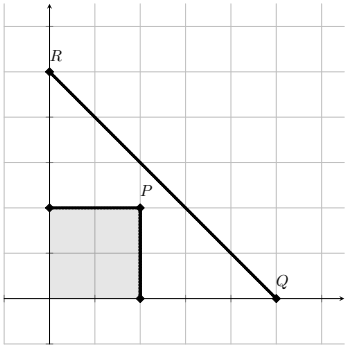

图1. 在 $a_1 \geq a_0 + a_2$ 的情况下，(r_1, r_2) 的可行区域。对角线是直线 $r_1 + r_2 = a_1$，点为 $P = (a_0, a_2)$。

定义不等式中等号成立的边界情形与所述公式相容。事实上，若 $a_0 = a_1 + a_2$，则 $a_0 - a_1 = (a_0 - a_1 + a_2)/2 = a_2$；若 $a_2 = a_0 + a_1$，则 $a_2 - a_1 = (a_0 - a_1 + a_2)/2 = a_0$；若 $a_1 = a_0 + a_2$，则 $a_1 - a_0 - a_2 = (a_0 - a_1 + a_2)/2 = 0$。

定理 3.2 涵盖所有非负整数三元组 (a_0, a_1, a_2)。$a_0 \geq a_1 + a_2$、$a_1 \geq a_0 + a_2$ 或 $a_2 \geq a_0 + a_1$ 中至少有一个不等式成立；否则，三个不等式均不成立，此时 $a_2 - a_1 < a_0 < a_1 + a_2$。

证明。 我们要找出 $\vec{r} = (r_1, r_2)$ 的值，使维数 $d(\vec{a}, \vec{r})$ 最大，并满足以下约束条件

$$\begin{aligned} r_1 &\leq \min\{a_0, a_1\}, \\ r_2 &\leq \min\{a_1, a_2\}, \text{ and} \\ r_1 + r_2 &\leq a_1. \end{aligned}$$

由命题 2.2,

$$d(\vec{a}, \vec{r}) = r_1(a_0 + a_1) + r_2(a_1 + a_3) - r_1^2 - r_2^2 - r_1 r_2.$$

根据引理 2.3，在可行秩向量区域内，$d(\vec{a}, \vec{r})$ 沿格向右或向上移动时会增大。因此，维数 d 在该区域右上部分的格点处达到最大值。故我们考虑两种情况。

(1) 首先，假设 $a_1 \geq a_0 + a_2$。由约束条件定义的可行区域是图1中的阴影矩形，其右上角为点 $P = (a_0, a_2)$。因此，维数在 $r_1 = a_0$，$r_2 = a_2$ 处达到最大值，得到贝蒂数 $\beta_1 = a_1 - a_0 - a_2$.(2) 现在，假设 $a_1 < a_0 + a_2$。在这种情况下，任何使维数达到最大值的点 (r_1, r_2) 都在线 $r_1 + r_2 = a_1$ 上。参见图 2。

总而言之，我们证明了 $r_1 + r_2 = \min\{a_1, a_0 + a_2\}$，从而得到 $\beta_1 = \max\{0, a_1 - a_0 - a_2\}$，这正是所需的结论。

由上可知，当 $a_1 \geq a_0 + a_2$ 时，秩的取值为 $(r_1, r_2) = (a_0, a_2)$，由此得到贝蒂数 $\beta_0 = 0$，$\beta_2 = 0$. 当 $a_1 < a_0 + a_2$，时，我们看到

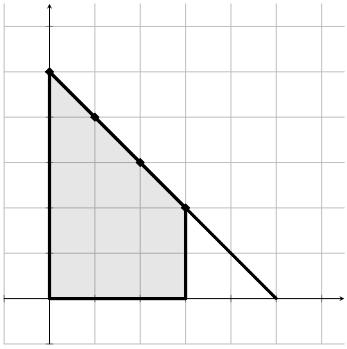

图2. 在 $a_1 < a_0 + a_2$和 $a_0 < a_1 \leq a_2$ 的情况下，$(r_1,\ r_2)$ 的可行区域。在这种情况下，根据单调性引理，任何使维数达到最大值的点 $(r_1,\ r_2)$ 都必须位于直线 $r_1 + r_2 = a_1$ 上。

秩满足 $r_1 + r_2 = a_1$，因此

$$\begin{aligned} d &= r_1(a_0 + a_1) + (a_1 - r_1)(a_1 + a_2) - r_1^2 - (a_1 - r_1)^2 - r_1(a_1 - r_1) \\ &= -r_1^2 + r_1(a_0 + a_1 - a_2) + a_1 a_2. \end{aligned}$$

函数 d 现在只是单变量 r_1 的函数，其最大值在$r_1 = (a_0 + a_1 - a_2)/2.$处取得。由于 $r_2 = a_1 - r_1$，我们有 $r_2 = (-a_0 + a_1 + a_2)/2$，并且只要满足 $a_2 - a_1 \leq a_0 \leq a_1 + a_2.$，这些秩就位于允许区域内。因此我们有两种情况：

(1) 若 $a_2 - a_1 \leq a_0 \leq a_1 + a_2,$ ，则秩向量是可行的，并且我们有两个子情况。

(a) 若 $a_0 - a_1 + a_2$ 为偶数，则通过检验 $d^{'}$ 的符号可知，当 $(r_1, r_2) = (($ $a_0 + a_1 - a_2)/2, (a_1 + a_2 - a_0)/2).$时，维数达到最大值。(b) 若 $a_0 - a_1 + a_2$ 为奇数，则维数的最大值出现在 $r_1 = (a_0 + a_1 - a_2 - 1)/2$ 或 $r_1 = ($ $a_0 + a_1 - a_2 + 1)/2$时，前提是这些秩位于允许区域内。计算这两个秩值对应的维数后，我们得到相同的结果，因此有两个使 d达到最大值的 $\vec{r}$ 值。

(2) 若不满足不等式 $a_2 - a_1 \leq a_0 \leq a_1 + a_2$，也就是说，若 $a_0 > a_1 + a_2$或 $a_0 < a_2 - a_1.$，那么使维数达到最大值的秩将是一个端点；对于这三个维数的所有可能排列，该秩必为 $(r_1, r_2) = (a_1, 0)$ 或 $(r_1, r_2) = (0, a_1).$

□

3.3. **长度为 3 的链复形**。 在完整刻画了长度为 1 或 2 的链的同调之后，我们现在研究长度为 3 的链，并对向量空间的维数作出一些限制。

定理 3.3。 对于长度为 3 的随机链复形，

$$0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} A_2 \xleftarrow{d_3} A_3 \leftarrow 0,$$

其中，对于 $i = -1$，几乎必然有 $\sum \beta_i = |\chi|$。

证明。令 $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ 为使链空间维数最大的秩向量，并回顾 $\sum \beta_i = \sum a_i - 2r_{i\circ}$ 为证明该$_{i=0}$ $_{i=0}$命题，我们将考虑三种情况。

情形 1: $a_0+a_2 > a_1+a_3$. 那么 $|\chi| = a_0-a_1+a_2-a_3$ 且 $r_1+r_2+r_3 = a_1+a_{3\circ}$ 若 $r_3 < a_3$ 且 $r_2 + r_3 < a_2$，则 $(r_1,\ r_2,\ r_3+1)$ 是允许的，并使 d 增大，这与极大性矛盾。因此，$r_3 < a_3$ 蕴含 $r_2 + r_3 = a_{2\circ}$ 此外，若 $r_1 = a_0$，则 $a_0 + a_2 \leq a_1 + a_3$，这就产生矛盾；故 $r_1 < a_0$，而 $(r_1+1,\ r_2-1,\ r_3)$ 再次使 d 增大。因此 $r_3 = a_{3\circ}$ 由于 $r_1 + r_2 + r_3 = a_1 + a_3$，我们有 $r_1 + r_2 \leq a_1$，同样的交换论证表明等号必然成立。因此 $r_1 + r_2 = a_{1\circ}$

情形 2: $a_1+a_3 > a_0+a_2$. 那么 $|\chi| = -a_0+a_1-a_2+a_3$ 且 $r_1+r_2+r_3 = a_0+a_{2\circ}$ 若 $r_1 < a_0$ 且 $r_1 + r_2 < a_1$，则 $(r_1 + 1, r_2, r_3)$ 增大 $d_\circ$ 若 $r_1 < a_0$ 且$r_1 + r_2 = a_1$，则必有 $r_3 < a_3$，且 $(r_1, r_2 - 1, r_3 + 1)$ 增大 $d_\circ$ 因此$r_1 = a_0$，由前一种情形的论证可得 $r_2 + r_3 = a_{2\circ}$

情形 3: $a_0 + a_2 = a_1 + a_3$. 那么 $|\chi| = 0$ 且 $r_1 + r_2 + r_3 = a_0 + a_{2\circ}$ 若 $r_1 < a_0$，则 $(r_1 + 1, r_2, r_3)$ 或 $(r_1 + 1, r_2 - 1, r_3 + 1)$ 是允许的，并且增大 d，这就产生了矛盾；因此 $r_1 = a_{0\circ}$ 由对称性，$r_3 = a_3$，因此

$$r_2 = (a_0 + a_2) - (a_0 + a_3) = a_2 - a_3 = a_1 - a_0.$$

□

4. 等维向量空间的随机复形

本节研究向量空间维数都相等、长度任意的随机链复形。首先，我们研究奇数长度的随机链复形。它们几乎必然是正合序列。

定理 4.1. 设 n 为奇数，m 为正整数。对于满足 $a_i = m$（对每个 i均成立）的随机链复形 $0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \cdots \xleftarrow{d_n} A_n \leftarrow 0$，几乎必然有$\beta_i = 0$，其中 $i = 0,\ 1, \ldots, n$.

证明. 对于长度为 n、其中 n为奇数且所有向量空间维数相同的随机链复形 m，链复形空间的维数由下式给出

$$d(\vec{a}, \vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} r_i(2m - r_{i-1} - r_i).$$

计算该函数的海森矩阵，得到

$$\mathbf{H}_d = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & -2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & -2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

这是一个常数负定矩阵。因此，函数 d是凸函数，这反过来意味着 d 的任何局部最大值都是全局最大值。现在，为了

找到局部最大值，我们可以求解以下方程组

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d}{\partial r_1} &= 2m - 2r_1 - r_2 = 0,\\
\frac{\partial d}{\partial r_2} &= 2m - r_1 - 2r_2 - r_3 = 0,\\
&\vdots\\
\frac{\partial d}{\partial r_{n-1}} &= 2m - r_{n-2} - 2r_{n-1} - r_n = 0,\\
\frac{\partial d}{\partial r_n} &= 2m - 2r_n - r_{n-1}.
\end{aligned}$$

解这个线性方程组，我们得到唯一解 $\vec{r} = (m,\ 0,\ m,\ \cdots,\ m,\ 0,\ m)$。这是 d 关于 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的全局最大值。它也是可行区域内的整数解。因此，$\vec{r} = (m,\ 0,\ m,\ \cdots,\ m,\ 0,\ m)$ 几乎必然成立。

□

现在我们考虑偶数长度。上述基于凸性的思路并不完全适用。我们省略细节，但使 d 达到最大值的唯一向量 $\vec{r}$ 不是整数向量，甚至不在可行区域内。

定理 4.2. 设 n 为偶数，且 m 为正整数。对于满足每个 i 都有 $a_i = m$ 的随机链复形 $0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \cdots \xleftarrow{d_n} A_n \leftarrow 0$，几乎必然有 $\sum_{i=0}^{n} \beta_i = |\chi|$。我们还有，对于 $i = 1、3、\ldots\ldots、n-1$，几乎必然有 $\beta_i = 0$。

证明。回想一下，合格秩向量 $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ 的分量均为非负整数，并满足 $r_i + r_{i+1} \le m$ 对于 $i = 0, \ldots n$。

下面我们证明，对于可行区域中使 d 最大的任意 $\vec{r}$，都有 $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = m$。由于

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i = (n+1)m - 2\sum_{i=1}^{n} r_i,$$

这等价于证明

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = nm/2.$$

设 $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ 是使 d 最大的秩向量。定义

$$S := \{i \mid r_i + r_{i+1} = m\}.$$

由单调性引理 2.3，对于每个 $i = 1, 2, \ldots, n-1$，都有 $S \cap \{i, i+1\} \neq \emptyset$。事实上，如果 $i \notin S$ 且 $i+1 \notin S$，那么可以增大 r_{i+1}，同时仍处于可行区域内，从而严格增大 d。这与 $d(\vec{r})$ 为最大值的假设矛盾。

接下来我们将看到，事实上，对于每个 $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ (n/2) - 1,\ \ 2k+1 \in S$。我们对 k 使用归纳法。首先，$k = 0$ 的情形显然成立。根据上述内容，我们要么有 $r_1 = m$，要么有 $r_1 + r_2 = m$。但若 $r_1 = m$，条件 $r_1 + r_2 \le m$ 会迫使 $r_2 = 0$，而且无论如何都有 $r_1 + r_2 = m$。

现在，假设根据强归纳假设，$\{1,3,\dots 2k-1\}\subseteq S$，我们将证明 $2k+1\in S$。若 $2k+1\notin S$，则立刻可知我们必有 $2k\in S$ 和 $2k+2\in S$。

令 b 为使整个整数区间 $\{b,b+1,\cdots,2k\}\subseteq S$ 满足条件的最小数。显然 $b\leq 2k-1$。此外，由于 $\{1,3,\dots 2k-1\}\subseteq S$，$b$ 必须为奇数。我们有等式 $r_b+r_{b+1}=m$，$r_{b+1}+r_{b+2}=m$，……，$r_{2k}+r_{2k+1}=m$。简记 r 为奇映射的秩，即 $r:=r_b$，r_{b+2}，……，r_{2k+1}。

现在，我们的策略是将奇数下标的秩 r_b，r_{b+2}，$\dots r_{2k+1}$ 增加 1，并将偶数下标的秩 r_{b+1}，r_{b+3}，……，r_{2k} 减少 1。这样可保持所有等式 $r_i+r_{i+1}=m$ 对 $i=b$，$b+1$，……，$2k$ 成立。现在来看看区间端点处的情况。由 b 的最小性可知，$r_{b-1}+r_b<m$，因此我们可以将 r_b 增加 1，仍处于允许区域内。最后，根据假设 $2k+1\notin S$，可知 $r_{2k+1}+r_{2k+2}<m$，因此我们可以增加 r_{2k+1}，仍处于允许区域内。

最后，我们可以检验当 $r_b,r_{b+2},\dots r_{2k+1}$ 各增加 1，且 $r_{b+1},r_{b+3},\dots,r_{2k}$ 各减少 1 时，d 如何变化。若 $\vec{r}'$ 是新的秩向量，则经过繁琐但直接的计算可得

$$\begin{aligned}
d(\vec{a},\vec{r}')-d(\vec{a},\vec{r}) &= \sum_{i=1}^{n} r'_i(2m-r'_{i-1}-r'_i)-\sum_{i=1}^{n} r_i(2m-r_{i-1}-r_i)\\
&= \sum_{i=b}^{2k+2} r'_i(2m-r'_{i-1}-r'_i)-r_i(2m-r_{i-1}-r_i)\\
&= (r_b+1)(2m-r_{b-1}-r_b-1)+r_{2k+2}(2m-r_{2k+1}-1-r_{2k+2})\\
&+ \sum_{i=b+1}^{2k+1}(r_i+(-1)^{i+1})(2m-r_{i-1}-r_i)\\
&- [r_b(2m-r_{b-1}-r_b)+r_{2k+2}(2m-r_{2k+1}-r_{2k+2})\\
&+ \sum_{i=b+1}^{2k+1} r_i(2m-r_{i-1}-r_i)]\\
&= 2m-2r_b-r_{b-1}-1-r_b+r_{2k+1}-r_{2k+2},
\end{aligned}$$

现在，由于我们有 $r=r_b,r_{b+2},\cdots,r_{2k+1},$，因此得到

$$d(\vec{r}')-d(\vec{r})=2m-(2r+1)-r_{b-1}-r_{2k+2}.$$

由 b 的极小性可知，$r_{b-1}+r\leq m-1$。另一方面，由假设 $2k+1\notin S$ 可知，$r+r_{2k+2}\leq m-1$。因此 $d(\vec{r}')-d(\vec{r})\geq 1$。不可能是 d 在 $\vec{r}$ 处取最大值。

因此，我们已经证明，对于每个 $k=0$，1，…，$(n/2)-1$。也就是说，对于每个奇数 i，都有 $r_i+r_{i+1}=m$。将这些等式相加，得到 $\sum_{i=1}^{m} r_i=nm/2$，正如所要求的。由 $r_i+r_{i+1}=m$ 和 $\dim a_i=m$ 还可推出，对于 $i=1$，3，…，$n-1$，有 $\beta_i=0$。□

定理 4.3。对于随机链复形 $0 \leftarrow A_0 \leftarrow A_1 \leftarrow \cdots \leftarrow A_n \leftarrow 0$，其中 A_i 是定义在 $\mathbb{R}$ 上、维数为 $a_i = m$ 的向量空间，m 是某个正整数，并且对所有 i（其中 n 为偶数）均成立。则几乎必然有 $\beta_{2k} = \left\lfloor \binom{m}{n/2+1} \right\rfloor$ 或 $\beta_{2k} = \left\lceil \binom{m}{n/2+1} \right\rceil$，其中 $k = 0, 1, 2, \cdots, n/2$.

证明。回顾一下，链复形空间的维数为

$$\begin{aligned} d(\vec{a}, \vec{r}) &= \sum_{i=1}^{n} r_i(2m - r_{i-1} - r_i) \\ &= 2m \sum_{i=1}^{n} r_i - \sum_{i=1}^{n} r_i(r_{i-1} + r_i). \end{aligned}$$

并且我们在定理 4.1 的证明中已经看到 $\sum_{i=1}^{n} r_i = \binom{nm}{2}$，因此有

$$d(\vec{a}, \vec{r}) = nm^2 - \sum_{i=1}^{n} r_i(r_{i-1} + r_i).$$

由于我们将 n 和 m 视为给定常数，秩向量 $\vec{r} = (r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n)$ 当且仅当使 d 最大化时，才会使 $f(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} r_i(r_{i-1} + r_i)$ 最小化。现在令 M 为使 $f\}$ 最小化的极值秩向量 $M = \{\vec{r} \mid \vec{r}$ 的集合，并考虑函数 $g = \sum_{i=0}^{n} \beta_i^2$.。根据定理 4.2，对于所有 $k = 1, 2, \cdots, \binom{n}{2}$.，我们有 $\beta_{2k-1} = 0$。于是可以将 g 写成 $\vec{r}$ 的函数:

$$g(\vec{r}) = (m - r_1)^2 + (m - r_2 - r_3)^2 + \cdots + (m - r_{n-2} - r_{n-1})^2 + (m - r_n)^2.$$

现在设 $M' = \{\vec{r} \mid \vec{r}$使 $g\}$取最小值，我们的断言是 $M = M'$。事实上，根据前面的证明，我们知道对于所有奇数 i，都有 $r_i + r_{i+1} = m$。于是

$$\begin{aligned} g(\vec{r}) &= (m - (m - r_2))^2 - (m - r_2 - (m - r_4))^2 + \cdots + (m - r_n)^2 \\ &= r_2^2 + (r_4 - r_2)^2 + \cdots + (r_n - r_{n-2})^2 + (m - r_n)^2 \\ &= 2r_2^2 + 2r_4^2 + \cdots + 2r_n^2 - 2r_2r_4 - 2r_4r_6 - \cdots - 2r_{n-2}r_n - 2mr_n + m^2 \\ &= 2(f(\vec{r}) - m\textstyle\sum_{i=1}^{n} r_i) + m^2 \\ &= 2f(\vec{r}) - nm^2 + m^2. \end{aligned}$$

因此，$\vec{r}$ 使维数函数 d 取最大值，当且仅当它使函数 g取最小值。根据我们在定理4.2中已经证明的结论，即

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i = m.$$

因此，对于 $k = 0$，要么是 $\beta_{2k} = \left\lfloor \binom{m}{n/2+1} \right\rfloor$，要么是 $\beta_{2k} = \left\lceil \binom{m}{n/2+1} \right\rceil$，$1, 2, \cdots, \binom{n}{2}$。同样容易验证，只要 β_{2k} 仅取这两个值且满足 $\sum_{i=0}^{n} \beta_i = m$，维数 d 就相同。因此，这些可能性中的每一种都以正概率发生。□

这可以为向量（$\beta_0, \beta_1, \ldots\ldots, \beta_n$）提供许多可能性。考虑以下示例。为方便起见，设 n 为 4 的倍数，然后令$m = n^2/4 + n/4$。根据上述结论，以正概率出现的秩向量都满足 $\beta_0 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = m$，且对于每个 i，都有 $\beta_{2i} = n/2 - 1$ 或 $\beta_{2i} = n/2$。容易验证，满足 $\beta_{2i} = n/2 - 1$ 的 i 的数量为 $n/4$。

因此有

$$\binom{n/2+1}{n/4} = \left(\sqrt{2} - o(1)\right)^n$$

贝蒂数向量的可能取值。这个例子表明，如果允许 m 随 n 增长，那么正概率的贝蒂数向量的数量可以随 n 指数级增长。

5. 问题

- 我们猜想，定理 3.3 的类似结论对任意长度的随机链复形也成立。

  猜想 5.1。 对于长度为 n 的实向量空间上的随机链复形，

  $$0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \cdots \xleftarrow{d_n} A_n \leftarrow 0$$

  其中，对于每个 i，几乎必然有 $\sum \beta_i = |\chi|$。

- 我们在这里看到了两种性质迥异的随机链复形示例：一种的贝蒂数向量集中于单个向量，另一种则分散在指数多个向量上。我们想知道，在参数空间 $\vec{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$ 中的哪些点会出现这两种行为。

- 如果能有一种高效算法，在给定 $\vec{a}$的情况下，求出所有可行秩向量 $\vec{r}$中使 $d(\vec{a}, \vec{r})$ 最大的秩向量，那就太好了。这将有助于开展随机链复形的实验研究。正如我们在前面的示例中看到的，对于某些 $\vec{a}$ ，有许多 $\vec{r}$ 都能使 d达到最大值。其计算复杂度如何？上面的示例表明，我们无法期待其运行时间优于关于 n的指数时间。但如果贝蒂数集中于单个向量，能否高效地找到它？

- 这里我们关注的是证明随机链复形的贝蒂数向量在 L_1 范数下通常很小。研究其他范数似乎也很自然。定理 4.1 的证明过程中还表明，贝蒂数向量在 L_2 范数下几乎必然也小到了可能的最小程度。

- 还可以研究自由阿贝尔群的随机链复形，其中随机群同态由随机整数矩阵给出。这类复形可能具有扭结。其中一种情形已经得到广泛研究。长度为 1 的随机复形中的零阶同调 H_0 等价于研究离散随机矩阵的余核。在方阵情形下，带有 $\mathbb{Z}$ 系数的同调通常是一个有限阿贝尔群，其分布可用*Cohen–Lenstra* 启发式来理解。参见 Wood [Woo17, Woo23] 以及 Nguyen–Wood [NW22, NW25], 关于随机整数矩阵余核的工作，以及 Kahle、Lutz、Newman 和 Parsons [KLNP20]关于随机单纯复形同调中扭结的实验研究。

第二作者谨以此文纪念 Frank Lutz。

参考文献

[BD75] David Blackwell 和 Lester E. Dubins。《适当的正则条件分布的存在性与不存在性》。《概率年刊》，3(5):741–752，1975。[BK18] Omer Bobrowski 和 Matthew Kahle。《随机几何复形的拓扑：综述》。《应用与计算拓扑学杂志》，1(3-4):331–364，2018。[Bob22] Omer Bobrowski。《随机切赫复形中的同调连通性》。《概率理论及相关领域》，183(3-4):715–788，2022。[CF17] A. Costa 和 M. Farber。《大型随机单纯复形，III：临界维数》。《纽结理论及其分支》，26(2):1740010, 26，2017。[CZ21] Michael J. Catanzaro 和 Matthew J. Zabka。《随机链复形的一个模型》。《汉堡大学数学研讨会论文集》，91(2):335–344，2021。[DCS81] Corrado De Concini 和 Elisabetta Strickland。《关于复形簇》。《数学进展》，41(1):57–77，1981。[DHS13] Persi Diaconis、Susan Holmes 和 Mehrdad Shahshahani。《从流形中抽样》。载于《现代统计理论与应用进展：纪念 Morris L. Eaton 的论文集》，《数学统计学会文集》10 卷，第 102–125 页。数学统计学会，Beachwood，OH，2013。[DT06] Nathan M. Dunfield 和 William P. Thurston。《随机三维流形的有限覆盖》。《数学发明》，166(3):457–521，2006。[Eas19] Kenny Easwaran。《条件概率》。载于 Richard Pettigrew 和 Jonathan Weisberg（编），《形式认识论开放手册》，第 131–198 页。PhilPapers Foundation，2019。[EZ17] Chaim Even-Zohar。《随机纽结模型》。《应用与计算拓扑学杂志》，1 296，2017 2 263( ): – 。[EZHLN18] Chaim Even-Zohar、Joel Hass、Nathan Linial 和 Tahl Nowik。《Petaluma 模型中纽结的分布》。《代数与几何拓扑》，18(6):3647–3667，2018。[Fed69] Herbert Federer。《几何测度论》，《数学科学基础》丛书第 153 卷。Springer-Verlag New York, Inc.，纽约，1969。[Fow19] Christopher F. Fowler。《多参数随机单纯复形的同调》。《离散与计算几何》，62(1):87–127，2019。[GP17] Viktor L. Ginzburg 和 Dmitrii V. Pasechnik。《随机链复形》。《阿诺德数学杂志》，3(2):197–204，2017。[Kah09] Matthew Kahle。《随机团复形的拓扑》。《离散数学》，309(6):1658–1671，2009。[Kah14a] Matthew Kahle。《随机旗复形上同调的尖锐消失阈值》。《数学年刊》（第 2 辑），179(3):1085–1107，2014。[Kah14b] Matthew Kahle。《随机单纯复形的拓扑：综述》。载于《代数拓扑：应用与新方向》，《当代数学》620 卷，第 201–221 页。美国数学会，Providence，RI，2014。[KLNP20] Matthew Kahle、Frank H. Lutz、Andrew Newman 和 Kyle Parsons。《随机复形同调中扭结的科恩-伦斯特拉启发式》。《实验数学》，29 359，2020 3 347( ): – 。[KP16] Matthew Kahle 和 Boris Pittel。《随机k-复形上同调的临界窗口内部》。《随机结构与算法》，48(1):102–124，2016。[KPR21] Matthew Kahle、Elliot Paquette 和 Érika Roldán。《随机二维立方复形的拓扑》。《数学论坛：西格玛》，9:论文编号 e76，24，2021。[LM06] Nathan Linial 和 Roy Meshulam。《随机二维复形的同调连通性》。《组合数学》，26(4):475–487，2006。[MW09] R. Meshulam 和 N. Wallach。《随机 k-维复形的同调连通性》。《随机结构与算法》，34(3):408–417，2009。[NP23] Andrew Newman 和 Elliot Paquette。《 $Y_d(n,p)$ 中的整数同调阈值》。《美国数学会会刊》，151(8):3213–3228，2023。[NW22] Hoi H. Nguyen 和 Melanie Matchett Wood。《随机整数矩阵：满射性的普适性与余核》。《数学发明》，228(1):1–76，2022。[NW25] Hoi H. Nguyen 和 Melanie Matchett Wood。《随机矩阵余核的局部与整体普适性》。《数学年刊》，391(4):5117–5210，2025。

[Oll05] Yann Ollivier。《随机群：2005年1月的一份邀请》，《数学论文集》第10卷。巴西数学学会，里约热内卢，2005年。[Woo17] Melanie Matchett Wood。随机图沙堆群的分布。《美国数学学会杂志》，30(4):915–958，2017年。[Woo23] Melanie Matchett Wood。数论中随机群的概率论。载于《国际数学家大会。第6卷。第12–14节》，第4476–4508页。EMS出版社，柏林， [2023] ©2023。