arXiv:2602.10826v1 [math.MG] 11 Feb 2026

几何约束下纸面曲面的度量几何

Luciana M. Vasconcelos*数学与统计研究所 应用数学系 圣保罗大学 圣保罗，SP，05508-090，巴西。lucianamvasc@ime.usp.br

摘要

我们研究一类特殊度量曲面的拟对称一致化，这类曲面称为纸曲面，可由平面多边形组通过线段配对（包括无限 W 型识别）构造为商空间。这些空间自然产生于动力系统背景，具有圆锥奇点和复杂的几何结构。我们的目标是证明，这类曲面中的一大类满足 Ahlfors 2-正则性和线性局部可缩性；这两项性质共同确保存在一个到标准 2-球面的拟对称参数化。

***Key*关键词** 纸面 ·阿尔福斯正则性 · 线性局部可缩性 · 拟对称映射 .

1 引言

一致化问题随着时间推移不断演变，从经典的共形几何发展到涉及度量几何和拟对称映射的现代方法。该领域取得了显著发展，尤其是在分形、双曲群以及用于研究几何结构的计算工具方面。

1851年，伯恩哈德·黎曼证明，复平面中的任意单连通开集（整个复平面除外）都可以共形映射到单位圆盘。这为现代共形映射奠定了基础。此后，一致化定理扩展了这一思想，指出每个单连通黎曼曲面都与黎曼球面、复平面或单位圆盘共形等价。

后来，研究人员将这些概念应用于更一般的情形，推动该领域不断拓展，并发展出丰富的几何分析理论。研究重点转向为具有特定几何性质的度量空间构造参数化或一致化，旨在对具有相似结构的空间进行分类。

1954年，Lars Ahlfors [Ahl54] 通过引入拟共形映射和共形不变量推动了该领域的发展，为后续的拟对称一致化研究奠定了基础。此后，Semmes [Sem91], David 和 Semmes [DS93], 以及2002年的 Mario Bonk 和 Bruce Kleiner[BK02], 作出了重要贡献，他们建立了一致化定理的度量版本。他们证明，任意 Ahlfors 2-正则、线性局部可缩的度量球面，都可以拟对称映射到拓扑 2-球面。后续研究 [BK05、MW13、Wil08、Wil10]通过探讨更多几何条件进一步发展了这些结果。在这些研究中，阿尔福斯正则条件与陪域上不同的几何条件结合起来。

近期研究探讨了空间在何种条件下能够拟对称地映射到拓扑 2-球面。研究人员考察了各种类型的度量曲面以及带边界的区域。例如，Fitzi 和 Meier [FM22] 证明，具有特定性质的曲面可以映射到拓扑相同的模型曲面。

*通讯作者：lucianamvasc@ime.usp.br

现在我们转向纸面空间一致化问题。对纸空间的研究进一步拓展了这些思路。纸空间是通过识别多边形的边界线段构造而成的，所得曲面除奇异点外均为平坦的。De Carvalho and Hall [dCH12] 提出了折纸方案，将这些构造与动力系统联系起来。他们的研究表明，特定的折叠模式会产生唯一的共形结构。

例如，将正八边形的对边粘合形成二亏格曲面时，八个顶点会全部合并为一个总角度为 6π 的锥点。更一般地，任何亏格为 $g \geq 1$ 的闭曲面，在拓扑上都可以通过粘合正 $4g$边形的各边得到。

纸空间也有纯数学以外的应用。在动力系统中，尤其是在台球理论研究中，与之密切相关的包括所谓的平移曲面，详见 [Zor06] 和 [Ran16]。平移曲面的定义还涵盖了其他背景中的多边形商空间，例如在动力系统研究中也具有重要意义的无限型平移曲面 [CRW19]。De Carvalho and Hall [dCH14] 提出了相关条件，使多边形内部的复结构能够唯一地延拓到边界商空间上，从而得到一个闭黎曼曲面。
这一构造除了赋予曲面度量结构外，还在其上诱导出自然的共形结构。在奇点之外，共形结构直接继承自多边形的欧几里得几何。然而，在锥点处，仍可通过应用分数次幂坐标变换恢复这一结构，从而得到定义良好的局部全纯坐标图。

然而，挑战依然存在。许多具有动力学意义的纸面空间不满足 [BBI01], 中的有界曲率条件，从而无法直接应用现有结果。折纸方案可能涉及无穷多个相互识别的边界线段，使一致化分析更加复杂。

一个重要的情形是所谓的紧马蹄。该空间不满足阿尔福斯正则条件，因此无法应用 Bonk-Kleiner 定理来保证存在映射到 2-球面的拟对称映射。然而，已知其底层复结构仍能唯一延拓到该点，从而提供一个共形一致化映射 [dCH12]。

在动力系统中，纸面空间的构造已被证明有助于描述拟阿诺索夫变换[FLP79]。纸面空间最初虽因其动力学性质受到研究，但后来由于其结构复杂性及一致化潜力，在度量几何领域获得了广泛认可。

折纸方案可以形式化地描述为一种等价关系：它将复平面中给定的有限个互不相交多边形的边界线段（可能有无穷多个）进行识别。多边形边界在所得商空间中的像 S 称为疤痕。该结构包含锥点，即总角度不同于 2π 的点；还包含奇异点，它们可能作为锥奇点的聚点出现。这些特征对于理解该空间的几何和拓扑性质起着关键作用，并影响其能否通过拟对称方式实现一致化。

拟对称映射在此发挥着关键作用。若存在函数 $\eta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$，使得同胚 $f\colon X \to Y$ 是 η-拟对称的，则

$$d_X(x,a) \leq t d_X(x,b) \implies d_Y(f(x),f(a)) \leq \eta(t) d_Y(f(x),f(b))$$

对所有 a， b， $x \in X$ 以及 $t > 0$。这类映射将共形思想推广到了缺乏微分结构的度量空间中。Tukia 和 Väisälä 最初在度量空间中研究这类映射 [TV80], , 其研究建立在 Beurling 和 Ahlfors 的奠基性工作之上 [BA56], ; 后者研究了二维中拟共形映射的边界行为。Tukia 和 Väisälä 确立了拟对称映射的关键性质，并给出了首个涉及此类映射的一致化结果：基于度量空间内蕴性质，对拟对称圆作出完整刻画。

拟对称映射还保持倍增性和 LLC（线性局部连通）性质，因此它们是研究一致化问题的自然出发点。许多著名空间，例如欧几里得空间、球和球面，都具有这些性质。在 Tukia 和 Väisälä 的奠基性工作之后，度量空间之间拟对称映射的理论取得了长足进展。

本研究从度量几何的角度继续探讨纸面空间，遵循 [BBI01] 和 [AZ67] 所讨论的原则，并研究纸面曲面的拟对称一致化，提出了这类曲面可映射到拓扑 2-球面的条件。我们证明了以下主要结果：

定理3.1。 类 $\mathcal{L}$ ——由具有类型 W 粘合或基本线段配对的多边形构造的纸曲面（见第*3*节）——满足以下性质：

（a）*Ahlfors 2*-正则性；
（b）线性局部可缩性。

因此， $\mathcal{L}^*$ 型曲面与 *2*-球面拟对称等价。

该定理证明，即使是带有奇点的曲面，例如存在锥点或奇点聚集的曲面，也可以映射到 2-球面。它还概述了此类映射无法实现的条件。
配对的类型由动力学所启发：与单峰广义伪阿诺索夫映射相关的曲面，可以视为某些多边形的度量商。在此背景下，正方形边上的粘合属于 W 型识别，并存在一个特殊点，使得相关序列按几何级数衰减。

因此，全面理解纸曲面的拟对称一致化，有助于深入认识这些空间所蕴含的几何结构及其与动力系统的相互作用。具体而言，正如前述定理所示，由广义伪阿诺索夫映射产生的曲面，可以在这一框架下解释为纸曲面。

2 背景

本节概述作为本文基础的关键理论概念和结果，并提供更详细讨论的参考文献。

第 2.1 节 介绍商空间的理论，并探讨其与拓扑商的关系，为后续章节奠定必要的背景。此外，文中还证明了，尊重给定关系的同伦会在商空间上诱导出一个同伦。

构成本文核心研究对象的纸面空间将在第 2.2 节中进行讨论，同时介绍其基本性质和初步结果。第 2.3 节重点研究这些空间的度量结构，证明每个纸面空间都可以视为圆锥平面曲面。最后，第2.4 节考察与球面同胚的度量空间，分析在何种条件下这些空间能够拟对称地映射到标准欧氏球面上 S^2。

2.1 度量空间：商空间与内在度量

本节将介绍全文中将采用的一些约定，并回顾与度量相关的基本定义。本节讨论的概念可在 [BBI01] 和[dCH12], 中找到更详尽的阐述，该文献是进一步探索的优秀参考资料。

集合上的一个度量 X 是一个函数 d_X： $X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ，满足通常的条件：非负、对称，并满足三角不等式。此外，任意两个不同点之间的距离总是正的，当且仅当两点相同时，距离才为零。由此，度量空间由一个集合及其上的度量构成。形式上，它定义为一个偶(X, d_X)，其中 d_X 是 X上的度量。 X 的元素称为度量空间中的点，而 $d_X(x, y)$表示点 x 与 y之间的距离。
函数 d_X： $X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ 若满足度量的所有性质（但 $d_X(x, y) = 0$ 不一定蕴含 $x = y$，也就是说，不同的点之间允许距离为零），则称为半度量或伪度量。若d_X 是伪度量，则 $d_X(x, y)$表示点 x 与 y之间的伪距离。将伪度量空间(X, d_X)转化为度量空间$(X/d_R, d_X)$有一种典范方法：若两点之间的伪距离为零，则将它们定义为等价，并将等价类 $[x], [y]$ 之间的距离设为类中任意两个元素之间的距离，即 $d_R([x], [y]) := d_R(x, y)$，其中第一个 d_R 是 $X/\sim_R$上的距离，第二个是 X上的伪度量。

记号。 对于度量空间或伪度量空间 (X, d_X)，使用以下记号。给定一点 $x \in X$和半径 $r \geq 0$，以 x 为中心、半径为 r 的开球和闭球定义如下：

$$B_X(x, r) := \{y \in X \mid d_X(y, x) < r\},$$
$$\overline{B}_X(x, r) := \{y \in X \mid d_X(y, x) \leq r\}.$$

当上下文已明确所处空间时，可以使用简化记号 $B(x, r)$.

设 (X, d) 为一个度量空间。在 X 中，路径 定义为连续映射 $\gamma\colon I \to X$，其中 I 是区间 $[0, 1]$ 或 $[a, b] \subset \mathbb{R}$。 $\gamma\colon [a, b] \to X$ 的长度 为

$$|\gamma|_X = \sup \left\{ \sum d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\},$$

其中 上确界取遍区间 $[a,b$ 的所有有限划分 $a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$ $]$.
路径长度这一概念引出了内在度量的概念。具体来说，如果任意两点之间的距离都能通过连接这两点的曲线长度任意精确地近似，则该度量是内在的。如果下确界能够取到，则该度量是严格内在的。也就是说，对于每个 x， $y\in X$，都存在一条从 x 到 y 的路径，其长度等于 $d(x,\ y)$。特别地，如果不存在从 x 到 y的路径，则 $d(x,\ y)=\infty$ 。可以证明，紧内在度量是严格内在的。

ˆ 如果 d 不是内在度量，那么在 X上存在一个诱导内在度量 d ，其定义为

$$\hat{d}(x,y)=\inf\{|\gamma|_X \mid \gamma:[a,b]\to X \text{ is a path with } \gamma(a)=x,\ \gamma(b)=y\}.$$

例如，如果 $P\subset\mathbb{R}^2$，则 P上存在一个由 $\mathbb{R}^2$上的欧几里得度量诱导的内在度量 d_P。然而，该度量不一定与 P上的子空间度量一致。

内在度量和长度空间的关键性质确保某些度量结构在商运算下保持一致。具体而言，其中一个性质是：长度空间的度量商本身也是长度空间。
简单来说，长度空间 是一种度量为内蕴度量的度量空间，也就是说，任意两点之间的距离都可以实现为连接它们的一条适当路径的长度。更正式地说，在长度空间中，距离函数定义为两点之间所有可能路径长度的下确界。这一概念确保可以在空间中找到测地线（最短路径），使其成为度量几何研究中的核心对象。

设 (X,d) 是一个度量空间，且 R 是 X 上的一个对称自反关系。从 x 到 y 的 R-链 是 X^2 中的一个序列 $((p_i,q_i))_{i=0}^{k}$，满足 xRp_0, q_iRp_{i+1}，对 $i=0,1,...,k-1$，且 q_kRy。 R-链 的长度为

$$L^R((p_i,q_i)):=\sum_{i=0}^{k}d(p_i,q_i).$$

关系 R 可视为 X 的一个子集族；若 x 和 y 属于该集合族 R 中的同一个集合，则关系 xRy 成立。

子集的集合总是可以与相应的关系联系起来。给定度量空间 X 的子集集合 $\mathcal{G}$，由此可知，它将确定 X 上的一个自反且对称的关系 $R_{\mathcal{G}}$，定义如下：

$$xR_{\mathcal{G}}y \Leftrightarrow x \text{ and } y \text{ are } \mathcal{G}\text{-equivalent},$$

即 $x=y$，或者存在 $g\in\mathcal{G}$，使得 $x,\ y\in g$。
函数 d^R：$X\times X\to\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ 的定义为：对 X 中任意的 x 和 y，

$$d^R(x,y):=\inf\{L^R((p_i,q_i)):((p_i,q_i)) \text{ is an } R\text{-chain of } x \text{ to } y\}.$$

注意， d^R 是 X 上的一个伪度量，且定义良好，因为从 x 到 y 总至少存在一条 R-链，即平凡链。

X 上将 d^R-伪距离为零的点视为等价的等价关系记作 $\sim_R$。该等价关系下的商空间称为 $(X,\ d)$ 关于关系 R 的度量商空间，记作 $(X/d^R,\ d^R)$ 或 $(X/\sim_R,\ d^R)$。等价类 $[x],\ [y]\in X/\sim_R$ 之间的距离定义为 $d^R([x],\ [y]):=d^R\ x$ $(,\ y)$，不难看出这确实是一个度量。
许多数学家对拓扑商空间的概念更为熟悉。给定一个等价关系R，度量商空间 $(X/d^R,\ d^R)$ 可能与拓扑商 X/R 不一致，主要有两个原因。第一个涉及它们的底层集合：例如， $\mathbb{R}$ 按 $\mathbb{Q}$ 取度量商后会缩并为一个点，因为任意两个元素之间都存在任意短的 R链。

第二个差异在于它们的拓扑：即使商空间作为集合相同，它们也可能具有不同的拓扑。一个典型例子（见 [BBI01] 中的例 3.1.17）涉及一个空间 X，它是可数多个区间的不交并 I_i，每个区间的长度为 ℓ_i，并且有一个等价关系将所有左端点识别为同一点。度量商空间的拓扑取决于序列 ℓ_i：当 $\ell_i\to 0$ 时它是紧致的，否则是非紧致的。相比之下，拓扑商不受 ℓ_i的具体取值影响。
如果 X 是紧致的，那么不会出现商空间作为集合相同、但作为拓扑空间不同的问题（见 [BBI01]）：若（X, d）是紧度量空间，且 R 是 X 上的自反对称关系，则度量商（X/d^R, d^R）与拓扑商 X/R 同胚。此外，若（X, d）是长度空间，且 R 是 X上的自反对称关系，则度量商（X/d^R, d^R）也是长度空间。

拓扑空间 X 的一个分离是将 X 分解为不交并 $X = A \cup B$，其中 A 和 B是 X的非空闭子集。若不存在 X 的分离，我们就称 X 连通。子集 $C \subset X$若能将两点 x、$y \in X$（或两个子集 D、$E \subset X$）分离开来，就称其分离这两点（或这两个子集）；也就是说，存在一个分离 $X \setminus C = A \cup B$，其中 $x \in A$和 y$\in B$（或 $D \subset A$ 和 $E \subset B$）。若 X 连通而 $X \setminus C$ 不连通，我们就称 C 分离X。

若拓扑空间 X 中的等价关系 R 满足 R 是积空间$X \times X$中的闭子集，则称其为闭的 。

此外，若将拓扑空间划分或分解为紧集的划分或分解 $\mathcal{G}$ 是上半连续的，则对每个元素 $\zeta \in \mathcal{G}$ 和每个开集 $U \supset \zeta$，都存在一个开集 $V \subset U$，使得 $\zeta \subset V$，并且对于每个满足$\zeta' \cap V \neq \emptyset$ 的$\zeta' \subset \mathcal{G}$，都有 $\zeta' \subset U$。若分解中的元素都是连通的，则该分解是单调的 。

R.L. Moore 的一条重要定理给出了充分条件，使得 2-球面的拓扑商仍为 2-球面。

定理 2.1 ([Moo25])。 设 $\mathcal{G}$ 是拓扑球面 S的一个上半连续且单调的分解， $\mathcal{G}$ 并且其中没有元素将 S分离。则将分解中的每个元素收缩为一个点所得到的商空间是一个拓扑球面。

˜为了将同伦与商空间联系起来，考虑一个集合 X 及其上的等价关系 R。若同伦 $H : X \times I \to X$ 沿着 t 逐点保持 R，则会在商空间 X/R上诱导出一个定义良好的同伦。这依赖于这样一个事实：在 X 上保持等价关系的任何连续映射，都可以唯一地延拓到 X/R，从而确保函数的性质在商运算下得到一致保留。下面的定理将这一构造形式化。

˜**定理 2.2**。 设 X 为一个集合， R 为 X上的一个等价关系。令 $H\colon X \times I \to X$ 为 X 中的一个同伦，满足˜ ˜对所有 $x, y \in X$，若 x和 y在关系 R下等价，则对所有 $t \in I$都有 $H(x,t) = H(y,t)$，其中 I为单位区间。商空间中存在唯一的同伦 $F\colon X/R \times I \to I/R$，使得

$$\pi_R \circ \tilde{H}_t = F_t \circ \pi_R.$$

证明。对于每个 $t \in I$，根据商拓扑的万有性质，存在唯一的连续函数 n
$f_t\colon X/R \to X$ 使得 t hat

$$\tilde{H}_t = f_t \circ \pi_R.$$

因此，

$$\pi_R \circ \tilde{H}_t = \pi_R \circ f_t \circ \pi_R.$$

定义 $F_t := \pi_R \circ f_t$，结论即得。

□

2.2 纸曲面

本节将考察纸空间及其性质。这些空间是通过识别平直多边形边界上的子线段偶，或更一般地，平直多重多边形边界上的子线段偶而形成的商空间。由此得到的结构是可定向的，并具有平坦锥几何。一个著名的例子是环面，它可以通过识别正方形的两对相对边而得到。构造并不局限于有限次识别；也可以沿着 P的边识别一个无限的线段集合来构造曲面。本节的主要参考文献包括 [dCH10], [dCH12], [Fig18], 和 [Vin12]。

我们先固定一些记号，并给出若干定义。在度量空间 X 中，弧是一个连续且单射的映射 $\gamma\colon [0,1] \to X$，满足 $\gamma([0,1]) \subset X$。点 γ(0)和 γ(1)称为其端点，而弧的内部记作 $\mathring{\gamma}$，对应于 γ((0，1))。

线段是弧的一种特殊情况，它完全位于一条直线上。线段的长度用 $|\alpha|$ 表示。

简单闭曲线是从单位圆到 X 的连续单射函数的像。当 $\mathbb{C}$ 中的弧或简单闭曲线由有限个首尾相连的线段组成时，称其为多边形的。构成多边形曲线的最长连续线段称为其边，这些线段的端点称为顶点。

多边形是 $\mathbb{C}$ 中一个闭的拓扑圆盘，其边界构成一条多边形简单闭曲线。它的顶点与其边界的顶点相对应，而它的边则是构成其周界的边。

多边形是有限个多边形的不交并。同样，多边形多曲线由有限条多边形简单闭曲线的不交并构成。

设 $P \subset \mathbb{R}^2$ 为一个多边形，并令 $C = \partial P$ 表示其边界，其中 C 的每个分支均取正向。

定义 2.3。设 $\alpha, \alpha' \subset C$ 是长度相同、内部互不相交的闭非平凡线段。线段配对 $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ 是一种等价关系，它以保长且反向的方式识别 α 和 α' 上的点对。具体而言，若 $\gamma_1 \colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ 和 $\gamma_2 \colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ 分别是 α 和 α' 按弧长定义的参数化（其中 $L = |\alpha| = |\alpha'|$），且与 C 的定向相容，则 $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ 的每个元素都具有 $\{\gamma_1(t)\ \gamma_2(L-t)\}$ 的形式。线段 α 和 α' 不必与 C 的整条边重合，而且在大多数情况下并不重合。

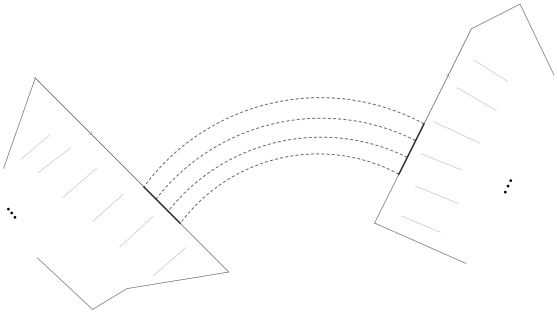


图1：线段配对。

线段 α, α'，以及配对下被识别的任意两点，称为配对点。位于线段配对内部的两个配对点构成一个内部配对点。注意，$\langle \alpha, \alpha' \rangle$ 和 $\langle \alpha', \alpha \rangle$ 表示同一个配对。
如果两个线段配对 $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ 和 $\langle \beta, \beta' \rangle$ 的四条线段的内部两两不相交，则称它们具有互不相交的内部。
配对线段 $\langle \alpha, \alpha' \rangle$的长度记为 $|\langle \alpha, \alpha' \rangle|$，它等于配对中任一条线段的长度，即

$$|\langle \alpha, \alpha' \rangle| := |\alpha|_{\mathbb{R}^2} = |\alpha'|_{\mathbb{R}^2}.$$

若 $\mathcal{P} = \langle \alpha_i, \alpha_i' \rangle$ 是一个由两两内部不相交的线段配对构成的（可数）集合，则其长度记为 $|\mathcal{P}|$，等于 $\mathcal{P}$ 中各配对的长度之和，即

$$|\mathcal{P}| = \sum_i |\langle \alpha_i, \alpha_i' \rangle|.$$

内部不相交配对的集合 $\mathcal{P}$ 是满的，如果 $|\mathcal{P}|$ 等于 C长度的一半。这意味着 $\mathcal{P}$中的配对覆盖 C 的全部，至多除去一个勒贝格一维测度为零的集合。
两条具有一个公共端点的线段的配对称为折叠，该公共端点称为折叠点。

线段配对的一个内部不相交集 $\mathcal{P}$ 诱导出一个自反且对称的配对关系，亦记为 $\mathcal{P}$，使得

$$\mathcal{P} = \{(x, x') \mid x, x' \text{ are paired or } x = x'\}.$$

定义2.4. 一个纸张折叠方案，或简称为折纸，是一个偶（P，$\mathcal{P}$），其中 $P \subset \mathbb{R}^2$ 是带有由 $\mathbb{R}^2$诱导的内在度量 d_P的多边形，且 $\mathcal{P}$是 ∂P中内部不相交线段配对的满集合。由配对关系诱导的伪度量 $d_S = d_P^{\mathcal{P}}$之下，P的度量商 $S := P/d_P^{\mathcal{P}}$

$$R_{\mathcal{P}} := \{(x, x') \mid x = x' \text{or } x, x' \text{are paired under some pairing in } \mathcal{P}\}$$

是相应的纸空间。若已知 S 是闭的（无边界的紧致）拓扑曲面，则（P，$\mathcal{P}$）是一个曲面折纸方案，且 S 是相应的纸曲面。

投影映射记为 $\pi \colon P \to S$，边界的商空间 $G = \pi(\partial P) \subset S$称为疤痕。注意，限制映射 $\pi : \mathrm{Int}(P) \to S \setminus G$ 是一个同胚。提及经由 π关联的 P和 S中的点时，常使用带波浪号和不带波浪号的符号。例如，若 $x \in S$，则 $\tilde{x} \in P$表示 $\pi^{-1}(x)$中的任意元素。

我们也对一类特殊的纸张折叠方案感兴趣，即普通纸张折叠方案。这类方案是该理论中最基础、也最常见的情形。此外，在这种情况下，相应的纸空间同胚于球面。对于这一类方案，除了纸面是 Ahlfors 2-正则且线性局部可缩之外，我们还将看到它们与 2-球面拟对称等价。特别是，一致化结果恰好适用于普通纸张折叠方案，此时所得的纸空间同胚于球面。

具体而言，设 γ 为一条多边形弧或一条简单多边形闭曲线。γ 上的两对（不一定互不相同的）点 $\{x, x'\}$ 和 $\{y, y'\}$ 若其中一对包含在另一对的补集的某个连通分支的闭包中，则称它们非交错；否则，称它们交错。若一个定义在 γ 上的对称自反关系 R 满足：任意两对由该关系关联的点，只要彼此不相关，就都是非交错的，则称该关系非交错。也就是说，若 xRx'、yRy'，且 x 和 x' 均不与 y 或 y' 相关联，则 $\{x, x'\}$ 和 $\{y, y'\}$ 非交错。在 γ 上的线段配对的内部不相交集 $\mathcal{P}$ 若满足关系 $\mathcal{P}$ 非交错，则称其为非交错。最后，平面折纸方案 $(P, \mathcal{P})$ 定义为满足以下条件的方案：P 由单个多边形构成，且关系 $\mathcal{P}$ 非交错。

例 2.5 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ $\sum a_i = \frac{1}{2}$ $P = \{a + ib \in \mathbb{C} \quad 0 \le$ .. 考虑一列正实数，使得 。令 $: , b \le 1\}$ 为单位正方形，并令为一种配对，将的水平边粘合起来，并将的右边对折。在左边上，我们定义一列可数个长度为 a_i 的折痕，记作 $\{\langle \alpha_i, \alpha_i' \rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$。见图 2。

这里，α_0 是从 P左上顶点出发、长度为 a_0 的线段，而 α_0' 是 ∂P的一条线段，长度为a_0，从 α_0的端点出发。类似地，α_1 是 ∂P的一条线段，长度为 a_1，从 α_0'的端点出发，依此类推。这个过程持续进行，使得 P的左边除下方顶点外，都被从上到下排列的折痕覆盖。

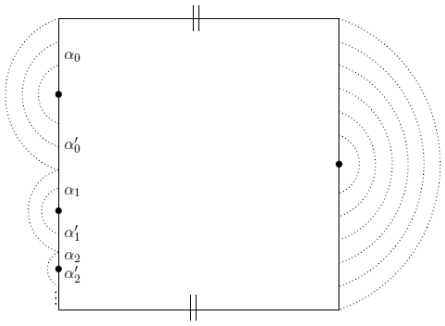


图 2：示例的纸空间2.5。

在此基础上，纸空间中的点根据以下标准进行分类。对于 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，如果 $\#\pi^{-1}(x) = k \neq 2$，或者 $\#\pi^{-1}(x) = k = 2$ 且 $\pi^{-1}(x)$ 包含 P 的一个顶点（此处 $\#A$ 表示集合 A 的基数），则点 $x \in G = \pi(\partial P)$ 是一个价数为 k 的 -顶点，或简称为 k。G 中既不是顶点、也不是顶点聚点的点称为平面点。如果一个点不是顶点聚点，也不是 ∞-顶点，则称其为正则顶点。如果一个点是 ∞-顶点或是顶点聚点，则称其为奇异点。现在注意，如果 $\langle \alpha, \alpha' \rangle \in \mathcal{P}$ 和 $x \in$ 属于 $\text{int}(\alpha)$，那么 $\pi_P(x)$ 是一个平面点，因为原像 $\pi_P^{-1}(\pi_P(x))$ 恰好由两个点组成，且这两个点都不是 P 的顶点。这一区分解释了为什么上述定义在 $k \neq 2$ 时要区分 2-顶点和 k-顶点。

另一方面，配对线段的端点不一定投影到圆锥点或非正则点。给定 $\langle \alpha, \alpha' \rangle \in P$，两条线段都可以分解为两个共享同一点的子线段 $\alpha_1 \cup \alpha_2$和 $\alpha_1' \cup \alpha_2'$。在这种情况下，α_1与 α_1'配对，而 α_2与 α_2'配对，从而形成新的配对 P'。由于 $S_P = S_{P'}$，α_1 和 α_2 的公共端点投影到纸空间中的一个平面点。

然而，总是可以选择一种纸张折叠 $(P, \mathcal{P})$，使得任意线段配对的端点都投影到纸空间中的非平面点。这些构型称为高效纸折叠(参见[Vin12],第2.4节)。

定理2.6。 *(普通纸折叠的拓扑结构 [dCH12])*。普通纸折叠方案 S 的商空间是一个拓扑球面。

总之，正如前文各节所论证的，纸空间的度量 d_S 是内蕴的。鉴于 P是紧致的，且投影映射 π 连续并且满射，因此 $S = \pi(P)$也是紧致的。

因此， d_S 是严格内在的，这意味着纸空间中的任意两点要么相距无穷远，要么可以通过一条路径连接，且该路径的 d_S 长度恰好等于两点之间的距离。
此外，由于 S 的紧致性，可以得出 $(S,\ d_S)$ 与 ∂P 上的配对所诱导的 P 的商空间在拓扑上同胚。由于 π 是闭映射，且 ∂P 是 P 的闭子集，因此商空间 $G = \pi(\partial P)$ 是 S 中的闭子集。

2.3 纸面空间的度量结构

本节分析纸面空间的度量性质，更详细的信息见 [dCH12] 和 [BBI01]。设 S 为一个纸空间。可以看到，在平面点的邻域内， S 是局部欧几里得的，这意味着此类点具有一个与 $\mathbb{R}^2$中的某个开球等距的开邻域。类似地，在正则顶点 x的邻域内，空间 S 与圆锥的顶点等距，其中圆锥角对应于多边形 P在 $\pi^{-1}(x)$各点处的内角之和。
在本节中，$(P, \mathcal{P})$ 表示任意的折纸方案及其关联的纸空间 S。
对于一个非奇异点 $x \in G$，其在 π 下的原像为

$$\pi^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k\}.$$

P在每个 $\tilde{x}_i$ 处的内角记为 $\tilde{\eta}_i$，而 x 处的圆锥角定义为

$$\eta(x) = \tilde{\eta}_1 + \cdots + \tilde{\eta}_k.$$

特别地，如果 $x \in G$是一个平面点，则其圆锥角为

$$\eta(x) = 2\pi.$$

现在，考虑圆锥这一拓扑概念。在拓扑空间 X 上构造的圆锥 $\mathsf{Cone}(X)$ 是 $[0,\infty) \times X$ 的商空间，其等价关系将 $\{0\} \times X$ 压缩为一个点，该点称为圆锥的原点或顶点。如果 (X, d) 是一个度量空间，则可以为该圆锥赋予一个度量，其中对于 $p = [t, x]$ 和 $q = [s, y] \in \mathsf{Cone}(X)$，距离定义为：

$$d_c(p,q) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + s^2 - 2st\cos(d(x,y))}, & \text{if } d(x,y) \le \pi, \\ t + s & \text{if } d(x,y) \ge \pi. \end{cases}$$

一个重要的结果是 t 如果 d <style id='4'}>是严格内在的，那么 d_c 也严格内在，如 [BBI01], 定理 3.6.17所示 .
另一个重要事实是，每个平面点都有一个与平坦欧氏球等距的邻域，而每个正则顶点都有一个邻域，该邻域与以度量锥顶点为中心的球等距。具体而言，设 S^1_r 表示半径为 $r > 0$ 的圆，并在 $\mathbb{R}^2$ 上赋予内蕴的度量。相应的圆锥 $\mathrm{Cone}(S^1_r)$在除顶点外的每一点处都局部等距于欧氏平面，当 $r \neq 1$时。在 $r = 1$的特殊情形下，圆锥 $\mathrm{Cone}(S^1_1)$ 与 $\mathbb{R}^2$全局等距。这些结果见于 [dCH12]。
定义 2.7。 一个圆锥平坦曲面 S 是一个度量空间，它局部等距于圆上的圆锥。具体而言，对于每个 $p \in S$，存在 r、$\epsilon > 0$、$x \in \mathsf{Cone}(S^1_r)$，以及一个从 $B_S(p,\ \epsilon)$ 到 $B_{\mathrm{Cone}(S^1_r)}(x,\ \epsilon)$的等距映射，其中 S^1_r是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个圆，其半径为 r，并配备内蕴的度量。这意味着，圆锥平坦曲面 S上的点有两种类型：一类点处， S 局部欧几里得；另一类点处， S 局部等距于 $\mathsf{Cone}(S^1_r)$顶点的一个邻域。在后一种情形下， $2\pi r$ 是该点处的圆锥角。

如 [dCH12], 所述，纸面空间的度量结构保证：对于 G 上的非奇异点 x，存在一个半径 $r > 0$，使得球 $B_S(x,\ r)$ 与球 $B_{\mathrm{Cone}(S^1_{\eta(x)/2\pi})}(0, r)$ 等距。特别是，
补集 $S \setminus \mathcal{V}^s$ 构成一个圆锥平坦曲面，其中 $\mathcal{V}^s$ 表示奇异点集。此外，
已证明，纸空间 S 上的度量 d_S 是严格内在的。
注意，如果 S 没有奇异点，那么该结果保证 S 中的每个点都有一个邻域，该邻域与以圆锥顶点为中心、底面为圆的球等距。

2.4 拟对称一致化

本节探讨一个度量空间 S，它与 S^2 同胚，并考察在什么条件下 S 可以通过拟对称同胚映射到 S^2。本节主要参考文献包括 [BK02],[Ahl54], [Fal04], 和 [dC05]。

2.4.1 拟对称映射

直接研究映射的局部畸变性质可能颇具挑战。因此，为了便于分析和应用，通常会对映射 f 施加更强的全局条件。拟对称映射为度量空间中的这类研究提供了一个框架，将受控畸变的概念从无穷小尺度推广开来。

定义 2.8。如果存在一个同胚η：$[0,\infty) \to [0,\infty)$，使得下式成立，则称同胚 $f: X \to Y$ 为 η-拟对称映射

$$d_X(x,a) \le t d_X(x,b) \Rightarrow d_Y(f(x),f(a)) \le \eta(t) d_Y(f(x),f(b)) \tag{2.1}$$

对于任意 a、b、$x \in X$ 以及任意 $t>0$。

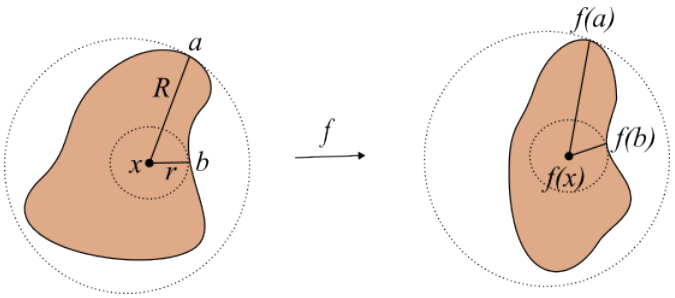


图 3：拟对称映射。

这一条件的几何含义是，球会映射为“圆形”集合，且其“偏心率”受到定量控制。这意味着，球在拟对称映射下的像不会被过度拉伸或扭曲，能够保持形状受控。 f 是拟对称的，因为它对相对距离的扭曲幅度有限，且取决于 t。

根据定义，不难证明，合理空间之间的拟对称同胚具有许多重要性质：它们是赫尔德连续的，而且拟对称性可延拓至极限同胚。此外，拟对称映射总是单射且连续。两个拟对称映射的复合仍是拟对称映射，而满射拟对称映射的逆映射也具有拟对称性。若两个度量空间之间存在一个从其中一个空间映到另一个空间上的拟对称映射，则称它们拟对称等价 [DS97]。
映射 $f(x) = \lambda x$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是一个拟对称映射，其中 $\eta(t) = t$，对每个 $\lambda > 0$.

2.4.2 豪斯多夫测度

豪斯多夫测度是经典面积和体积概念向非整数维度的推广。这种测度对于理解度量空间中最小子集的大小至关重要，尤其是在分形几何中。本节的主要参考文献是 [Fal04]。

设 $\{C_i\}$ 是一个可数（或有限）集合，其元素为直径至多为 δ 的集合，并且覆盖 C，即 $C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$，其中对每个 i 都有 $0 < \operatorname{diam}(C_i) \le \delta$。在这种情况下，我们称 $\{C_i\}$ 是 C 的一个 δ-覆盖。
现在，对于 $0 \le s < \infty$ 和 $A \subset X$， A 的豪斯多夫测度定义为

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\left\{ \sum_j \operatorname{diam}(C_j)^s \,;\, \{C_i\} \text{ is a } \delta\text{-cover of } A \right\},$$

其中，下确界取遍所有由满足 $\operatorname{diam}(C_j) < \delta$ 的集合 $C_j \subset X$ 对 A 所作的可数覆盖。这里，集合 C 的直径定义为

$$\operatorname{diam}(C) = \sup\{ d_X(x,y) \,;\, x,y \in C \},$$

即 C 中任意一偶点之间的最大距离。
随着 δ 减小， A 的允许覆盖类也随之缩小。因此，随着 $\delta \to 0$，下确界 $\mathcal{H}^s_\delta(A)$ 增大，或者至少不会减小，因而趋向一个极限。于是， s维豪斯多夫测度 定义为 A 的

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

豪斯多夫测度推广了长度、面积、体积等熟悉的概念。对于 $\mathbb{R}^n$的子集， n维豪斯多夫测度除了相差一个常数因子外，就是 n维勒贝格测度，对应于通常的 n维体积。更确切地说，若 C 是 $\mathbb{R}^n$的博雷尔子集，则

$$\mathcal{H}^n(C) = c_n^{-1}\,\mathrm{vol}^n(C),$$

其中， c_n 是单位 n维球的体积。

引理 2.9。 设 X 为一个度量空间， d 和 d' 是 X中的两个利普希茨等价度量。与每个度量相关的 s维豪斯多夫测度也是等价的。

证明。 由于 d 和 d' 是等价度量，即存在一个常数 L 使得 $\frac{1}{L}d' \le d \le Ld'$。因此，对于任意子集 $E \subset X$，有:

$$\frac{1}{L^s}\mathcal{H}^s_{d,\delta}(E) \le \mathcal{H}^s_{d',\delta}(E) \le L^s\mathcal{H}^s_{d,\delta}(E).$$

□

注意，豪斯多夫测度在度量空间的等距映射下保持不变。这意味着该测度并不 s
若集合经过 平移、旋转或反射，则不会改变。

2.4.3 正则性的定义

在度量空间中，阿尔福斯正则空间在过去几十年里得到了广泛研究。这些空间已被证明是发展调和分析的绝佳环境 [DS00]。这项研究中使用的主要工具之一，是线性局部连通且满足阿尔福斯正则性这一条件。

定义 2.10。若度量空间 X 满足阿尔福斯 Q-正则，则存在常数 $C > 0$ ，使得每个闭合的 r-球 $B(a,r)$ 的 Q 维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^Q$ 满足

$$C^{-1}r^Q \le \mathcal{H}^Q(\overline{B}(a,r)) \le Cr^Q$$

对所有 $0 < r \le \mathrm{diam}(X)$。

这一条件确保空间中球的测度随半径呈多项式增长，这意味着测度在整个空间中分布均匀。

定义 2.11. 度量空间 (Z,d) 称为 λ-线性局部可收缩，其中 $\lambda \ge 1$，如果 Z 中每个满足 $0 < r \le \mathrm{diam}\, Z/\lambda$ 的球 $B(a,r)$ 都可在 $B(a,\lambda r)$ 内收缩。这意味着存在一个连续映射 $H{:}B(a,r) \times [0,1] \to B(a,\lambda r)$，使得 $H(\cdot,0)$ 在 $B(a,r)$ 上为恒等映射，而 $H(\cdot,1)$ 为常数映射。

The 如果某个空间对于某个 $\lambda \ge 1$ 是 λ-线性局部可收缩的，则称该空间为线性局部可收缩 空间 .

这一性质确保空间中的每个小球都可以在稍大的球内连续收缩到一点。

这两个条件在度量空间研究中常常同时出现，尤其是在几何群论和度量空间上的分析领域。例如，如果一个空间是 Ahlfors n-正则且线性局部可收缩，那么它通常具有重要的几何和解析性质，例如庞加莱不等式。

定义 2.12。如果度量空间 (Z,d) 满足以下两个条件，则称其为 λ-线性局部连通（ $\lambda \ge 1$ ，LLC 是“线性局部连通”的缩写）：

- (λ-LLC$_1$) 若 $B(a,r)$ 是 Z中的一个球，且 $x,y \in B(a,r)$，则存在一个连续统 $E \subset B(a,\lambda r)$，包含 x和 y。

- (λ-LLC$_2$) 若 $B(a,r)$ 是 Z中的一个球，且 $x,y \in Z \setminus B(a,r)$，则存在一个连续统 $E \subset Z \setminus B(a,r/\lambda)$，包含 x和 y。

请回忆，连续统是一个包含多个点的紧致连通集。

粗略地说，LLC 条件排除了度量空间几何中的尖点。线性局部连通 （LLC）这一术语源自以下性质：设 (X,d) 是满足 λ-LLC$_1$ 条件的度量空间，并取一点 $x \in X$ 和半径 $r > 0$。若 $C(x)$ 表示包含 x 的球 $B(x,r)$ 的连通分支，则有如下包含关系:

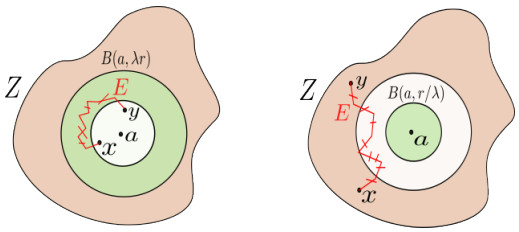


图 4：分别为 LLC_1 和 LLC_2 条件。

$$B(x, r/\lambda) \subseteq C(x) \subseteq B(x, r).$$

以下引理指出，对于紧致连通拓扑 n-流形，线性局部可缩性蕴含 LLC（线性局部连通）条件；当 $n = 2$ 时，两者等价。

引理 2.13 ([BK02])。 设 Z 是一个紧致连通拓扑 n-流形度量空间。那么：

1. 如果 Z 是 λ-线性局部可收缩的，那么对于每个 $\lambda' > \lambda$， Z 都是 λ'-*LLC*。*2.* 如果 $n = 2$ 和 Z 是 *LLC*，那么 Z 是线性局部可缩的。线性局部可缩常数取决于 Z，而不仅仅取决于 *LLC* 常数。

下述定理给出了度量球面的一致化结果。这与黎曼曲面的经典一致化定理类似；该定理指出，每个单连通黎曼曲面都共形等价于单位圆盘、复平面或黎曼球面。

定理 2.14 ([BK02])。 设 Z 是一个与 S^2同胚的 *Ahlfors 2*-正则度量空间。那么 Z 与 S^2 拟对称，当且仅当 Z 是线性局部可缩的。

3 纸空间的拟对称一致化

本节介绍一类特殊的纸面空间，它们是本文研究的核心对象。回顾一下，纸空间由一偶（P， $\mathcal{P}$）构造而成，其中 P是一个多边形， $\mathcal{P}$ 是边界 ∂P上的一组配对。这些配对遵循特定的结构模式，其具体描述将在本节中给出。

我们考虑两种配对：线段配对，即此前介绍过的沿多边形的同一条边或不同边，将等长线段进行识别；以及类型 W 识别，由一条边上的递减线段构成无限序列，并交替配对。

图 6 和 7 展示了使用这些配对构造纸空间的示例。其中一个例子是，一个多边形的一条边上有类型 W 识别，其余边上则有线段配对。另一个例子中，四个矩形连接成一个多边形，其各边上既有有限识别，也有无限识别。

为确立记号，我们将所得的普通纸空间记为度量商 $\mathcal{L}_{\mathcal{P}} := P/d_P^{\mathcal{P}}$。相应的投影记为 $\pi_{\mathcal{P}}\colon P \to \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$，其在 P 内部上的限制是到粘合边界 $G_{\mathcal{P}} := \pi_{\mathcal{P}}(\partial P)$ 补集上的一个同胚。本文余下部分将始终使用这一记号。

这一构造产生了一类曲面，记为 $\mathcal{L}$，由所有通过此类配对得到的度量商空间 $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ 组成。此外，我们还考虑 $\mathcal{L}$的一个特殊子类，记为 $\mathcal{L}^*$，它由包含于 $\mathcal{L}$中的普通纸空间构成。请注意，普通纸折叠方案由单个多边形定义。然而，也可能出现类似图5 的情况，此时多个多边形的并实际上构成一个多边形。在这种情况下，将其视为一个多边形时，配对 $\mathcal{P}$ 是非交错的，因此，将其分解为多个多边形也可以视为一个具有非交错配对的单个多边形。

本节余下部分将用于证明我们的主定理，现将其重述如下。第3.1节介绍我们所考虑的曲面类别。第3.2节分析这些新空间中度量球的几何。最后，在第3.3节，我们验证这些空间满足 Ahlfors 2-正则和线性局部可缩的条件。

定理 3.1。 $\mathcal{L}$ 类中的曲面满足以下性质：

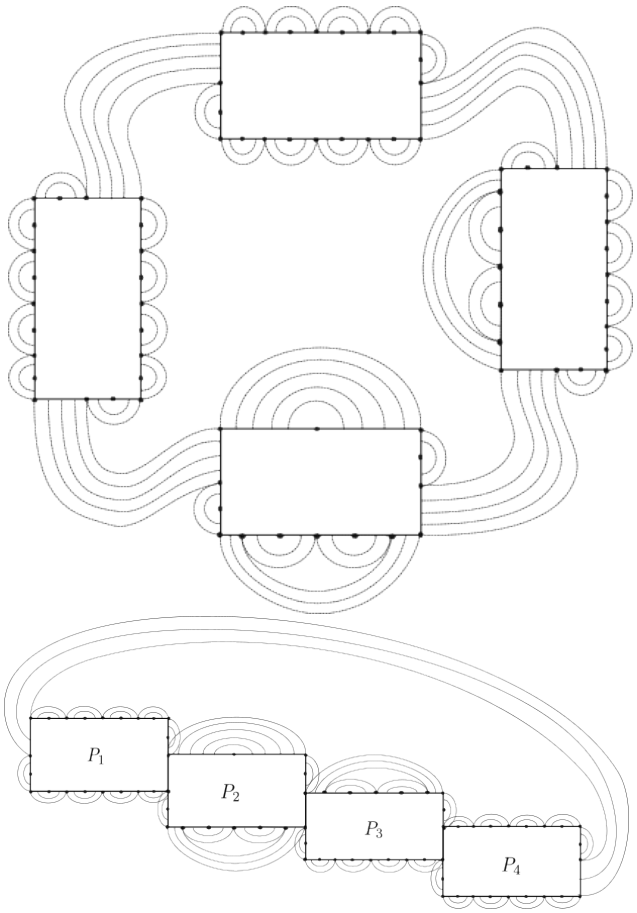


图 5：由四个矩形的商空间得到的纸空间。

*(a) Ahlfors 2-*正则性；*(b)*
线性局部可缩性。

因此， $\mathcal{L}^*$ 类曲面与 *2-*球面拟对称等价 .

3.1 构造

设 $(P,\ \mathcal{P})$ 为一个纸张折叠方案，其配对遵循下文所述的特定结构模式。
所考虑的配对分为两类：基本线段配对（图 1），它们将多边形中同一条边上或不同边上的等长线段识别起来；另一类是类型 W 粘合，定义如下。本文中，我们假设集合 $\mathcal{P}$ 由有限个基本线段配对以及有限个类型 W 粘合组成，后者是一种特定类型的无限配对集合。

不失一般性，在以下讨论中我们假定下述配对类型位于多边形的一条竖直边上。对水平边可作类似的推理。在这些情形下，对“上”顶点与“下”顶点的指称应分别理解为“左”顶点与“右”顶点。

无穷型 W 粘合。 考虑两个实数列 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 与 $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，满足

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i = \frac{\ell}{2},$$

其中 ℓ 表示一个常数。多边形一边上的无限配对模式 P（长度为 ℓ）描述如下（图6）：

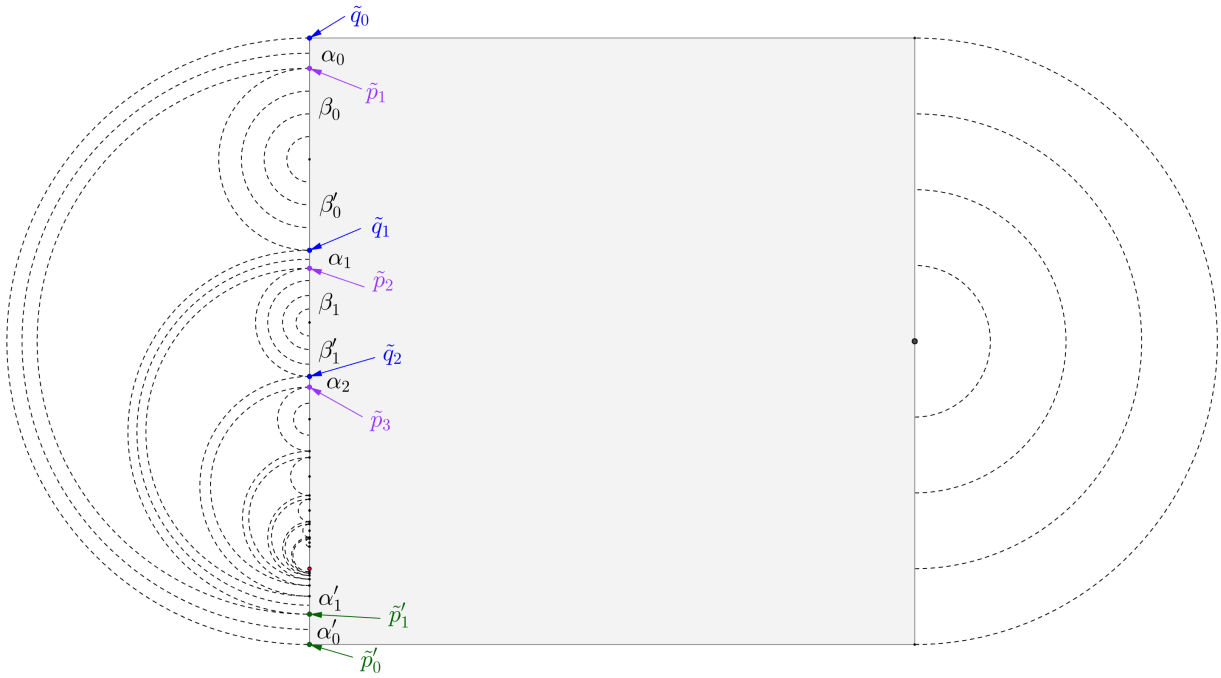


图6：一个纸空间示例，属于由 $\mathcal{L}^*$ 表示的曲面类。

(i) α_0：从左上顶点 $\tilde{q}_0$ 开始、长度为 a_0 的线段与 α_0'配对，后者是长度相同、终止于左下顶点 $\tilde{p}_0'$的线段；(ii) β_0：从 α_0的端点（记为 $\tilde{p}_1$）开始、长度为 b_0 的线段与 β_0'配对，后者从 β_0的端点开始；(iii) α_1：从 β_0'的端点（记为 $\tilde{q}_1$）开始、长度为 a_1 的线段与 α_1'配对，后者从α_0'的端点（记为 $\tilde{p}_1'$）开始；(iv) 依此类推，使得 P的左边从上到下由序列 α_0，β_0，β_0'，α_1，β_1，β_1'，..... 覆盖，而从下到上则由 α_0'，α_1'，α_2'，..... 覆盖。

每条线段 α_i 都与其对应的线段 α_i' 粘合，每条线段 β_i 也都与其对应的线段 β_i' 粘合。

有限型 W 粘合。这是类型 W 构造的有限类比。这里考虑满足以下条件的有限序列 $\{a_i\}_{i=0}^n$和 $\{b_i\}_{i=0}^n$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i = \frac{\ell}{2},$$

配对的构造方式类似，但在有限条线段之后终止，其中 ℓ 表示一个代表多边形一条边的常数。

我们注意到，有限型 W 粘合虽然单独介绍，但可以解释为基本线段配对的有限并。同样，无限型 W 粘合可自然地理解为此类配对的无限集合。

图 6 和7 展示了使用上述类型的配对构造的纸面空间。在图 6中，左边呈现类型 W 粘合；右边通过基本线段配对沿中线折叠；顶边和底边则通过另一种基本线段配对彼此粘合。在图 7中，三个矩形和一个五边形通过使用基本线段配对识别其中四条边，组合成一个多边形。沿着矩形的边，我们可以看到，例如，将线段对折的有限基本线段配对，以及两条边上的无限类型 W粘合。根据具体构型，其他边也可能对折。

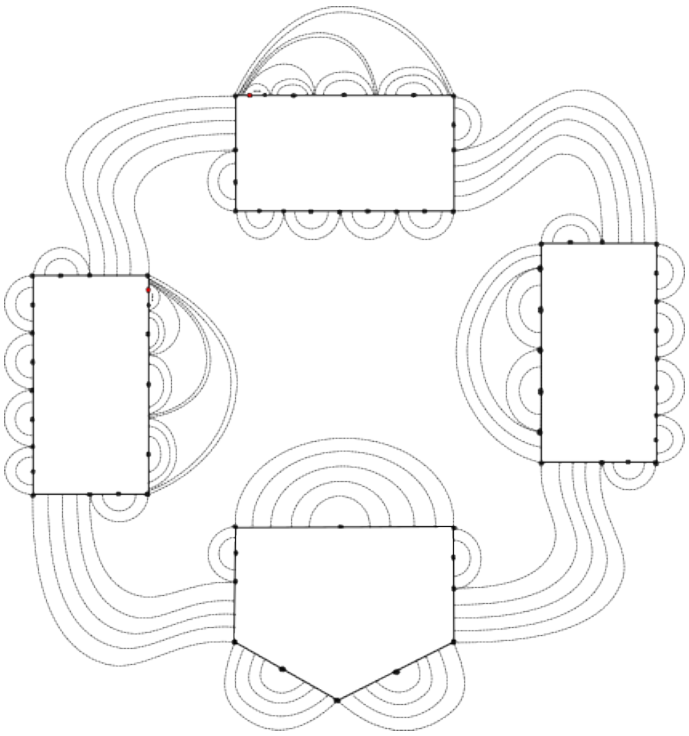


图7：由四个多边形取商构造的一个纸空间，属于类别 $\mathcal{L}$，但不属于 $\mathcal{L}^*$。

由于

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}} := P/d_P^{\mathcal{P}}$$

表示平面多多边形 P 在其边界上按照一组容许配对 $\mathcal{P}$ 所得的度量商，我们定义以下曲面类。类别 $\mathcal{L}$ 由所有此类由纸张折叠方案产生的度量空间构成：

$$\mathcal{L} := \{\mathcal{L}_{\mathcal{P}} \mid (P,\mathcal{P}) \text{ 是如上所述的纸张折叠方案}\},$$

子类 $\mathcal{L}^*$ 由通过普通纸张折叠方案得到的那些空间构成：

$$\mathcal{L}^* := \{\mathcal{L}_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L} \mid (P,\mathcal{P}) \text{ is a plain paper folding scheme}\}.$$

这两个曲面类将作为后续章节的主要研究对象。

3.2 球在投影映射下的原像

在证明主定理之前，有必要更深入地了解所研究纸空间的几何性质。更确切地说，我们需要分析这些空间中度量球的形状。由于粘合仅发生在多边形的边界上，因此只需研究度量球在投影映射下的原像 $\pi_{\mathcal{P}}$：$P \to \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$，其中 $\mathcal{L}_{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}$ 是一个纸曲面（见定理2.2）。

本节旨在研究这类原像，重点关注球心位置所对应的三种不同情形：正则内点、边界上的聚点（或奇异点），以及锥点。

回顾一下，多边形 P 边界上的粘合可以采用以下形式之一：有限个基本线段配对；有限个无限型 W 识别；或基本线段配对与有限个无限型 W 识别的有限组合。

为避免歧义，我们在本节中明确说明，任何对度量球，或简称球的引用，均默认为其在投影映射下的原像

$$\pi_{\mathcal{P}} \colon P \to \mathcal{L}_{\mathcal{P}}.$$

特别是，当我们提到锥点或<styლ id='1'>角为 $k\pi$ 的锥点（其中 $k \in \mathbb{N}$）时，我们指的是其在边界域 P 中的 k原像之一。也就是说，如果 $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ 是角为 $k\pi$的锥点，我们记作

$$\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(x) = \{\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^k\} \subset P,$$

其中每个 $\tilde{x}^i \in P$ 也被称为锥点，并表示边界域中 x 的一个原像。从这个意义上说，每当我们写下 $\tilde{x}$时，我们都在 $\pi_{\mathcal{P}}^{-1}(x)$ 中隐式地选择了一个代表元。
我们称半球为：以边界上的一点 ∂P 为中心的球与多边形 P内部的相交部分。也就是说，它表示完全位于 P内的球的部分。我们用 $\mathrm{SB}(\tilde{p},\ r)$ 表示这样的集合，即以 $\tilde{p} \in \partial P$为中心、半径为 r 的半球 。

此外，从现在起，我们将使用 P 上的最大度量 （也称为 ℓ_∞ 度量），而非欧几里得度量。此选择纯粹是为了方便，因为它能简化几何分析，而不影响论证的普遍性。

在讨论更一般的情形之前，我们先注意以下例子。若半径 r 足够小，且 $\tilde{p}$ 是一个角为 π 的锥点，使得 $B(\tilde{p},\ r)$ 中不包含其他角度不同的锥点，那么 $B(\tilde{p},\ r)$ 就是一个以 $\tilde{p}$ 为中心、半径为 r的半球 ，即 $B(\tilde{p},\ r) = \mathrm{SB}(\tilde{p},\ r)$。

更一般地，如果 $\tilde{p}$ 是角度为 $k\pi$ 的锥点，且球 $B(\tilde{p},\ r)$ 不包含其他锥点，那么 $B(\tilde{p},\ r)$ 就是 k 个半径为 r 的半球的并集，这些半球以 $\tilde{p}$ 以及与 $\tilde{p}$ 识别的锥点为中心。
例如，如果

$$\tilde{p} \in \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(p) = \{\tilde{p}^1, \dots, \tilde{p}^k\},$$

其中每个 $\tilde{p}^i$ 都是角度为 $k\pi$ 的锥点 p 的一个原像，那么

$$B(\tilde{p}, r) = \mathrm{SB}(\tilde{p}^1, r) \cup \cdots \cup \mathrm{SB}(\tilde{p}^k, r),$$

其中 $\mathrm{SB}(\tilde{p}^i,\ r)$ 表示以 $\tilde{p}^i$ 为中心、半径为 r 的半球。

3.2.1 与其他边不相交的聚点情形。

首先，考虑球以聚点为中心的情形。在此分析中，有必要假设多边形至少有一条边包含无限多个粘合，并且这些粘合遵循类型 W。
设 $\tilde{p}_\infty \in P$ 为位于多边形 P 边界上的圆锥点的聚点，并考虑以 $\tilde{p}_\infty$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的球 $B(\tilde{p}_\infty, r)$。假设该球不与多边形的任何其他边相交。在此情形下， $B(\tilde{p}_\infty, r)$ 可分解为在 l_∞-度量下测得的半球之并。

需要注意的是，这样的球包含无穷多个（圆锥点的）原像，因为其中心本身就是圆锥点的聚点。为准确描述其结构，在构造时必须明确考虑这些圆锥点。

方法如下：我们首先考察以聚点为中心的第一个半球内的所有圆锥点。对其中每个圆锥点，计算其到聚点的距离。然后，在每个圆锥点（同一等价类中）处构造一个半球，其半径对应于到聚点的剩余距离。该迭代过程持续进行，并考虑粘合经由类型 W 粘合的传播。由此，我们确保恢复球 $B(\tilde{p}_\infty, r)$ 的完整几何，包括所有相关锥识别的贡献。

因此，球的原像为

$$B(\tilde{p}_\infty, r) = \bigcup_{i=s+1}^{\infty} B_i,$$

其中，对于 $i \in \{s+1, s+2, \dots\}$， $B_i = \mathrm{SB}(\tilde{p}_i r_i)$。这里， $\tilde{p}'_{s+1}$ 表示线段 α'_s 的端点，该线段与球 $B(\tilde{p}_\infty, r)$ 相切。点 $\tilde{p}_i$ 表示线段 α'_i 的端点，每个半球 B_i 的半径 r_i 为

$$r_i = r - \sum_{n=i+1}^{\infty} a_n,$$

其中， $\{a_n\}$是由类型 W 识别得到的线段长度序列。
注意，点 $\tilde{p}'_i$、 $\tilde{p}_i$ 和 $\tilde{q}_i$ 均来自类型 W 识别模式。更具体地说，点 $\tilde{p}_i$是线段 β_i 的端点，点 $\tilde{q}_i$ 是线段 α_i 的起点，而点 $\tilde{p}'_i$ 是线段 α'_i 的端点；这些线段与 α_i 线段配对。

虽然每个 $\tilde{p}'_i$ 都与 $\tilde{p}_i$ 和 $\tilde{q}_i$ 相对应，但只需考虑以点 $\tilde{p}_i$ 为中心的半球即可。这是因为半径满足 $r_i > r_{i+1}$，因此，

$$\mathrm{SB}(\tilde{p}_{i+1}, r_{i+1}) \supset \mathrm{SB}(\tilde{q}_i, r_i), \quad \text{for } i \in \{s+1, s+2, \dots\}.$$

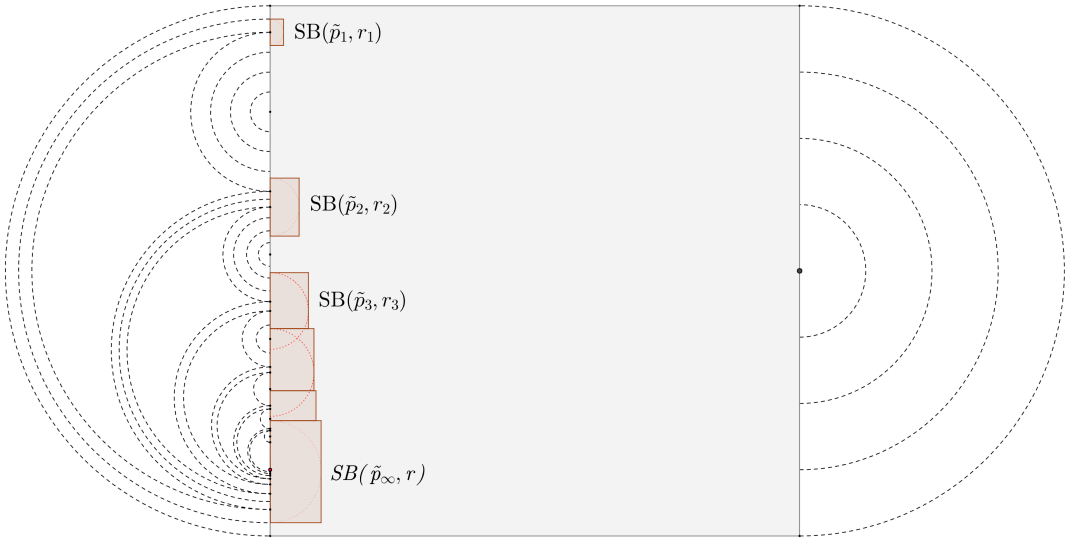


图 8：示例　　一个以聚点为中心、且不与正方形的任何其他边相交的球　　e.

这种包含关系确保，以 $\tilde{q}_i$ 为中心的半球所作的贡献已包含在以 $\tilde{p}_{i+1}$ 为中心的较大半球中，从而简化了几何分析。

3.2.2 不与其他边相交的圆锥情形。

设 $p \in \mathcal{L}$是商曲面 $\mathcal{L}$ 上的一个锥点，$\tilde{p} \in P$是其在投影映射$\pi_{\mathcal{P}}$：$P \to \mathcal{L}$下的一个原像。我们用 $B(\tilde{p},\ r)$表示度量 P中以 $\tilde{p}$为中心、半径为 $r > 0$的球。在此情形下，$\tilde{p}$位于 P的边界上，并通过 $\pi_{\mathcal{P}}$对应于商曲面上的锥点 p。

对于这一构造，必须假设多边形的某些边被赋予了类型 W的粘合或有限基本线段配对。因此，不失一般性，我们可以考虑所有类型的配对。我们进一步假设该球不与多边形的其余任何边相交。

如前所述，若 $\tilde{p}$是角度为 $k\pi$ 的锥点，且球 $B(\tilde{p},\ r)$ 不包含其他锥点，则 $B(\tilde{p},\ r)$ 可分解为以 $\tilde{p}$的原像为中心、半径为 r的 k 个半球的并集。
若 $\tilde{p}$是角度为 $k\pi$的锥点，且球 $B(\tilde{p},\ r)$ 包含其他锥点，则 $B(\tilde{p},\ r)$ 是以 $\tilde{p}$ 及与 $\tilde{p}$粘合的点为中心、半径为 r的 k个半球的并集，再并上以这些初始半球内其他锥点为中心的半球。这些附加半球的半径等于 r减去其中心到最近的、先前已纳入且作为球心的锥点的距离。该情形是一个有限且简化的例子，代表球以位于具有 Type W粘合的边上的锥点为中心的情形，后文将对此进行详细讨论。

现在，假设多边形的至少一条边具有类型为 W的粘合，并且以锥点 $\tilde{p}$为中心、$B(\tilde{p},\ r)$的球包含其他圆锥点。那么，主球（所考虑的第一个半球）必然至少包含一个角为 3π的圆锥点。因此，存在一个球，其中心位于某条线段α'_s的端点处（该线段对应于最接近中心 $\tilde{p}$、角为 3π 的圆锥点），或者在 $\tilde{p}$ 本身处；后一种情况发生在 $\tilde{p}$ 是角为 3π的圆锥点时。
假设该对应球以点 $\tilde{p}'_{s+1}$为中心，并且其下边界与线段 α'_n相交。
首先，我们需要构造半球，其中心对应于 $\tilde{p}'_j$在 $j \in \{n+1, \cdots, s\}$中的粘合。注意，如果 $\tilde{p}$是一个角度为 3π的锥点，那么 $r = r_{s+1}$；否则，$r_{s+1} = r - b_{s+1}$（见图 9）。此外，注意，对于每个 j，$\tilde{p}'_j$ 都与点 $\tilde{p}_j$ 和 $\tilde{q}_j$识别。在这些点中的每一个点处，对于 $j \in \{n+1, \cdots, s\}$，我们都有一个半径为 r_j的半球，其半径由下式给出

$$r_j = r_{s+1} - \sum_{i=j}^{s} a_i.$$

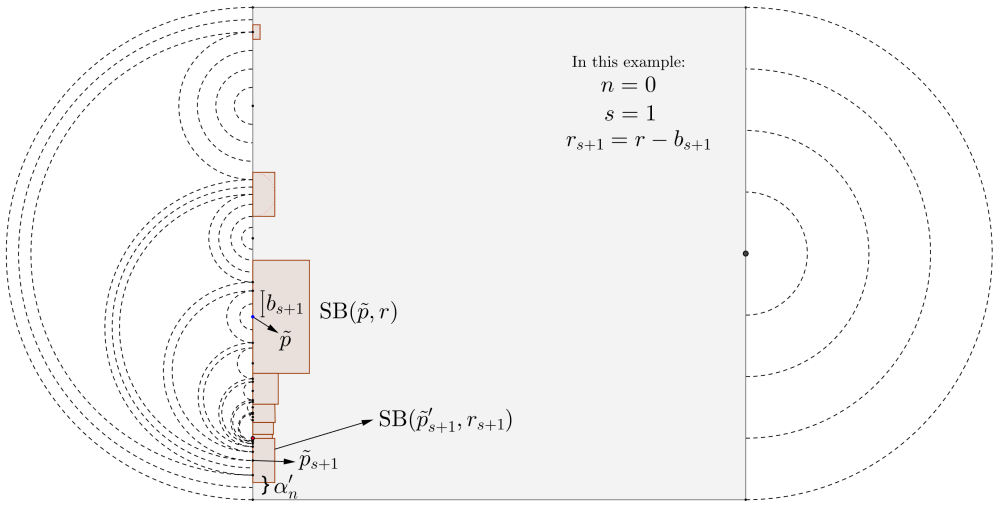


图9：以锥点为中心的球。

如果 $B(\tilde{p}'_{s+1},\ r_{s+1})$ 包含聚点，那么对于 $j \in \{s+2, \cdots, \infty\}$，我们有一个半径为 r_j的半球，其半径由下式给出

$$r_j = r_{s+1} - \sum_{i=s+1}^{j-1} a_i.$$

因此，我们有

$$B(\tilde{p}'_{s+1}, r_{s+1}) = \mathrm{SB}(\tilde{p}'_{s+1}, r_{s+1}) \cup \bigcup_{i=n+1}^{s} \mathrm{SB}(\tilde{p}_i, r_i) \cup \bigcup_{i=n+1}^{s} \mathrm{SB}(\tilde{q}_i, r_i) \cup \bigcup_{i=s+2}^{\infty} \mathrm{SB}(\tilde{p}_i, r_i) \cup \bigcup_{i=s+2}^{\infty} \mathrm{SB}(\tilde{q}_i, r_i).$$

由于 $r_i > r_{i+1}$ 和 $\mathrm{SB}(\tilde{p}_{i+1}, r_{i+1}) \supset \mathrm{SB}(\tilde{q}_i, r_i)$，$j \in \{n+1, \cdots, s\}$，可得

$$B(\tilde{p}'_{s+1}, r_{s+1}) = \mathrm{SB}(\tilde{p}'_{s+1}, r_{s+1}) \cup \bigcup_{i=n+1}^{s} \mathrm{SB}(\tilde{p}_i, r_i) \cup \bigcup_{i=s+2}^{\infty} \mathrm{SB}(\tilde{p}_i, r_i) \cup \bigcup_{i=s+2}^{\infty} \mathrm{SB}(\tilde{q}_i, r_i).$$

另一方面，对于 $j \in \{s+2, \cdots, \infty\}$，$\mathrm{SB}(\tilde{q}_{j+1}, r_{j+1}) \supset \mathrm{SB}(\tilde{p}_j, r_j)$，则

$$B(\tilde{p}'_{s+1}, r_{s+1}) = \mathrm{SB}(\tilde{p}'_{s+1}, r_{s+1}) \cup \bigcup_{i=n+1}^{s} \mathrm{SB}(\tilde{p}_i, r_i) \cup \bigcup_{i=s+2}^{\infty} \mathrm{SB}(\tilde{q}_i, r_i).$$

如果球 $B(\tilde{p}'_{s+1}, r_{s+1})$ 不包含聚点，那么它会与某个 α'_t 相交。这样，我们有

$$B(\tilde{p}'_{s+1}, r_{s+1}) = \mathrm{SB}(\tilde{p}'_{s+1}, r_{s+1}) \cup \bigcup_{i=n+1}^{s} \mathrm{SB}(\tilde{p}_i, r_i) \cup \bigcup_{i=s+2}^{t} \mathrm{SB}(\tilde{q}_i, r_i).$$

因此，以 $\tilde{p}$ 为球心、半径为 r 的球由以 $\tilde{p}$ 为球心、半径为 r 的半球（记作 $\mathrm{SB}(\tilde{p}, r)$）与球 B（$\tilde{p}'_{s+1}, r_{s+1}$）的并集构成。也就是说，

$$B(\tilde{p}, r) = \mathrm{SB}(\tilde{p}, r) \cup B(\tilde{p}'_{s+1}, r_{s+1}).$$

请注意，到目前为止，我们描述的都是位于具有一般基本线段配对和 Type W 粘合的边上的锥点所对应的球，只剩下有限 *Type* W 粘合的情形。这些情形可以视为一般基本线段配对的特殊实例，也有助于理解更复杂情况下球的构造。

这种情形与 Type W 粘合类似，关键区别在于，由此得到的球始终是有限个半球的并集。

对于上述描述，假设对于类型 W 粘合，我们有 n_F 个 a_i 和 b_i 的值，即 $i \in \{1, 2, \ldots, n_F\}$，则应将存在无限多个粘合的情形解释为 n_F；当存在聚点时，应将其理解为 $\tilde{p}'_{n_F}$。

$$B(\tilde{p}, r) = \mathrm{SB}(\tilde{p}, r) \cup B(\tilde{p}'_{s+1}, r_{s+1}).$$

3.2.3 不与其他边相交的正则情形。

现在，设 B（$\tilde{p}$，r）是一个以不与多边形的两条边相交的正则点（的原像）为球心的球。此外，假设如果一个球与某条边相交，则该边具有无限多个粘合，这意味着它遵循类型 W 的粘合。

只需考虑这种情形，因为其他类型是类似的。在这种情况下，球要么是完整的球，要么是 l_∞-度量下的球片段与半球的并集。
球的原像有几种可能（示例见图10）。如果球的半径足够小，不包含任何非正则点，那么它仍是一个欧几里得正方形。

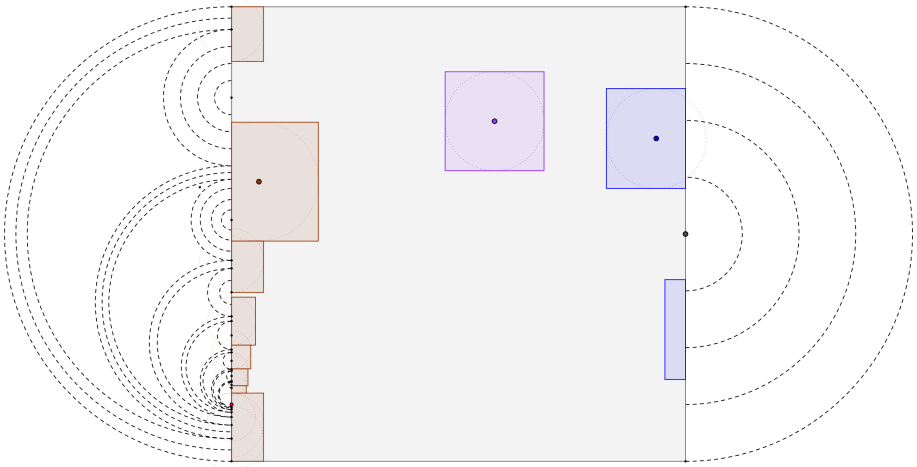


图10：以正则点为中心的球的示例。

如果半径不够小，也就是说球包含非正则点，则需要计算球心到每个非正则点的距离。然后，以主球内识别出的锥点为中心构造新的球。这些球的半径由主球半径减去相应锥点与初始球心之间的距离得到。完成这一步后，对于与类型为 W 的识别边界及基本线段配对的相交情况，分析都可归结为前文所述的圆锥情形。

因此，$B(\tilde{p}, r)$由以 $\tilde{p}$ 为中心、半径为 r的球片段（记作PB($\tilde{p}$，r)）与一个以锥点 B为中心的球$\tilde{c}$(，r)的并集给出，其中 $\tilde{c}$ 可以是 $\tilde{p}_i$、$\tilde{p}'_i$或 $\tilde{q}_i$。需要考虑最大的球，即半径最大的球。以锥点为中心的球的构造方法与之前相同。

注意，正则点可能位于正方形的边界上，具体来说，是位于带有粘合的线段上。在这种情况下，必须找到最近的锥点，并据此构造球，使得 PB($\tilde{p}$，r) =SB($\tilde{p}$，r)。

The因此，在球包含至少一个锥点的所有情况下，球 $B(\tilde{p}, r)$ 由下式给出

$$B(\tilde{p}, r) = \mathrm{PB}(\tilde{p}, r) \cup B(\tilde{c}, r).$$

3.2.4 与其他边相交的球。

现在，考虑一个球与多边形的多条边相交的情况。首先注意，如果球的中心是一个聚点，那么由于它是较小球的并集，它与相邻边的相交可能会形成各种不同的构型。

为简化论述，我们首先描述多边形 P 是正方形时的构造。一般情形下， P 是任意多边形，可通过对其各边进行归纳来处理，并将在本节末尾讨论。

下面给出几个示例，以突出这些可能性。

1. 如果相邻边与对边识别为同一条边 (见图6)，那么

$$B(\tilde{p}_\infty, r) = \bigcup_1 B_i \cup B(\tilde{p}'_0, r_0),$$

这属于此前分析过的情形，其中 $B(\tilde{p}'_0,\ r_0)$ 是以 $\tilde{p}'_0$和 $\tilde{p}_0$为球心、半径均为 r_0的两个四分之一球的并集。

2. 如果相邻边遵循折叠识别，那么球结构会发生变化。在这种情况下，

$$B(\tilde{p}_\infty, r) = \bigcup_1 B_i \cup B(\tilde{p}'_0, r_0) \cup B(\tilde{\tilde{p}}'_0, r_0),$$

其中， $B(\tilde{p}'_0,\ r_0)$ 是以 $\tilde{p}'_0$ 和 $\tilde{p}_0$ 为中心、半径均为 r_0 的两个四分之一球的并集，而 $B(\tilde{\tilde{p}}'_0,\ r_0)$ 是另一个球，它表示一个以与 $\tilde{p}'_0$ 粘合的正方形顶点为中心、半径为 r_0 的球的四分之一。这个新球 $B(\tilde{\tilde{p}}'_0,\ r_0)$ 会接触另一条相邻边，该边可能具有类型 W 的识别或基本线段配对。因此，还必须分析这条新接触边上的识别类型，但其过程与第一条相邻边的步骤相同。
例如，如果第三条边遵循折叠识别，那么正方形的第四个顶点处将出现一个额外的四分之一球，记为 $\tilde{\tilde{p}}_0$。随后必须分析第四条边上的识别类型。如果它同样遵循折叠识别，那么以 $\tilde{\tilde{p}}_0$ 为中心的四分之一球已经被计入。

另一方面，如果第四条边有有限或无限次粘合，如类型 W and finite W，那么 $B(\tilde{\tilde{p}}_0,\ r_0)$ 不再是单个四分之一球，而是分别由以圆锥点为中心的有限个球的并或无限个球的并构成。在这种情况下，该结构属于圆锥情形。
Th
erefore, we have

$$B(\tilde{p}_\infty, r) = \bigcup_1 B_i \cup B(\tilde{p}'_0, r_0) \cup B(\tilde{\tilde{p}}'_0, r_0) \cup B(\tilde{\tilde{\tilde{p}}}_0, r_0),$$

其中这些球 $B(\tilde{p}'_0,\ r_0)$、 $B(\tilde{\tilde{p}}'_0,\ r_0)$ 和 $B(\tilde{\tilde{\tilde{p}}}_0,\ r_0)$ 取决于边的粘合类型，这些边 y
相交于 逆时针方向。也就是说，它们可以是有限个球的并，也可以是无限个球的并。

3. 如果相邻边有无限次粘合（类型 W），则点 $\tilde{p}'_0$ 被视为这条边的圆锥点。因此，以该点为中心的球满足

$$B(\tilde{p}_\infty, r) = \bigcup_1 B_i \cup B(\tilde{p}'_0, r_0) \cup B(\tilde{\tilde{p}}'_0, r_0),$$

这意味着它属于圆锥情形。与之前一样，这个新球 $B(\tilde{\tilde{p}}'_0,\ r_0)$ 与另一条相邻边相切，该边可能具有识别类型 W 或基本线段配对。这个新边的识别类型也必须进行分析，步骤与应用于第一条相邻边的步骤相同。

因此，我们有

$$B(\tilde{p}_\infty, r) = \bigcup_1 B_i \cup B(\tilde{p}'_0, r_0) \cup B(\tilde{\tilde{p}}'_0, r_0) \cup B(\tilde{\tilde{\tilde{p}}}_0, r_0),$$

其中，球 $B(\tilde{p}'_0,\ r_0)$、 $B(\tilde{\tilde{p}}'_0,\ r_0)$ 和 $B(\tilde{\tilde{\tilde{p}}}_0,\ r_0)$ 取决于它们沿逆时针方向相交的边的识别类型。也就是说，它们可以是有限个球的并，也可以是无限个球的并。

4. 如果相邻边具有有限类型的 W 粘合，那么 $\tilde{p}'_0$ 就被视为这条边上的锥点。因此，以该点为中心构造球满足

$$B(\tilde{p}_\infty, r) = \bigcup_1 B_i \cup B(\tilde{p}'_0, r_0) \cup B(\tilde{\tilde{p}}'_0, r_0),$$

这使其属于不包含聚点的球的圆锥情形。同样，这个新球$B(\tilde{p}_0', r_0)$与另一条相邻边相切，而该边可能具有 W 类型的粘合或基本线段配对。必须分析这条相邻边的识别类型，但处理过程与第一条相邻边相同。

因此，我们有

$$B(\tilde{p}_\infty, r) = \bigcup_1 B_i \cup B(\tilde{p}_0', r_0) \cup B(\tilde{\tilde{p}}_0', r_0) \cup B(\tilde{\tilde{p}}_0, r_0),$$

其中，球 $B(\tilde{p}_0', r_0)$、 $B(\tilde{\tilde{p}}_0', r_0)$ 和 $B(\tilde{\tilde{p}}_0, r_0)$ 取决于它们沿逆时针方向相交的边的识别类型。也就是说，它们可能是有限个球的并或无限个球的并。

现在注意，对于球心位于正则点或锥点的情形，其分析与聚点的情形类似。这是因为，与正方形的其他边相交的球是那些以其顶点为球心的球；根据边界识别的类型，这些球可能是两个四分之一球的并、有限个半球的并，或无限个半球的并。

因此，最终我们得到

$$B(\tilde{p}, r) = \hat{B}(\tilde{p}, r) \cup B(\tilde{p}_0', r_0) \cup B(\tilde{\tilde{p}}_0', r_0) \cup B(\tilde{\tilde{p}}_0, r_0),$$

其中，$\hat{}B(\tilde{p}, r)$ 是在第一条边上构造的球，不考虑以顶点为球心的球；而球 $B(\tilde{p}_0', r_0)$、 $B(\tilde{\tilde{p}}_0', r_0)$ 和 $B(\tilde{\tilde{p}}_0, r_0)$ 是以顶点为球心的球，其结构取决于它们沿逆时针方向相交的边的识别类型。

Rec所有这些情况中，如果第一个相邻边识别属于折叠识别，则该并集会简化为 o

$$B(\tilde{p}, r) = \hat{B}(\tilde{p}, r) \cup B(\tilde{p}_0', r_0).$$

我们强调，正方形各边上可能的识别方式有无穷多种。此处讨论的四种类型仅为说明之用，并旨在为构造提供概念框架。一般而言，球的几何形状复杂地取决于边界上规定的配对方式。

现在我们转向一般情形，其中 P 是一个多边形。我们的目标是将之前针对正方形构建的方法推广到一般多边形的情形，使球与其两条或更多条边相交。

设球 $B(\tilde{p},\ r)$ 以点 $\tilde{p} \in P$ 为中心，并与该多边形至少两条边相交。我们先按照之前球不与其他边相交时所用的相同步骤，构造球与第一条边相交的部分。然后，我们用相同的方法分析与第二条边相交的部分。

根据每条边上的识别类型，以及相交区域内包含的圆锥点数量，球可能会产生有限或无限多个额外部分（例如半球或四分之一球），其中心位于与球内圆锥点相识别的点上。

这些新球本身可能还会与多边形的其他边相交。发生这种情况时，便重复这一过程：我们检查新相交的区域是否包含圆锥点；如果包含，就在相应的识别点处构造额外的局部球。此步骤又可能导致与其他相邻边相交，随后再以递归方式处理。

由此可沿多边形的各边进行归纳构造。每一步中：

- 确定当前球配置与哪些边相交；
- 对于每条这样的边，检查交集是否包含圆锥点；
- 如果包含，则在相应的识别点处构造新的球部分。

这个归纳过程会持续进行，直到原始球 $B(\tilde{p},\ r)$ 所交的所有边都已考虑在内。如果球只与两条边相交，过程在两步后停止；如果与三条边相交，则继续进行到第三步；一般而言，最多经过 n 步后过程便会终止，其中 n 是多边形的边数。

在每一步中，球各部分的构造都严格遵循正方形情形中所述的相同原则，具体取决于每条边上的识别类型以及相交点的性质（常规、锥形或聚集）。

该方法为分析由多边形上的任意边识别构造而成的纸面空间中度量球的局部几何提供了一个清晰的框架。

重要的是，所得球的形状与复杂程度不仅受其相交边数的影响，还受所涉粘合性质的影响——无论是折叠、有限模式，还是如类型 W 那样的无限构型。每一次识别都会产生新的圆锥点或粘合结构，进而决定该球如何在曲面上延展。

通过逐步遍历各边，该构造确保所有相关的几何贡献都得到考量，并纳入球的最终结构中。

3.3 定理3.1的证明

首先，在本节中，$(P,\ \mathcal{P})$仍然是一个折纸方案，其对应的纸球面或纸空间为 $\mathcal{L}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{L}$。我们证明，$\mathcal{L}$ 类中的曲面满足 Ahlfors 2-正则性和线性局部可缩条件。因此，我们得出结论：$\mathcal{L}^*$ 类型的曲面与 2-球面拟对称等价。

3.3.1 Ahlfors 2-正则性

为了证明空间 $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ 是 Ahlfors 2-正则的，我们首先需要确立 $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$上度量结构的某些性质。具体而言，我们需要证明存在一个常数 $r_0 > 0$，使得 $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$满足阿尔福斯正则性的条件。为此，我们将应用引理 3.2，该引理根据度量空间中球的测度给出了一个判定阿尔福斯正则性的准则。

引理 3.2. 设 X 是一个度量空间，使得 $\mathcal{H}^Q(X) < \infty$。假设存在正数常数 $r_0 > 0$ 和$c_0 > 0$，使得对所有 $0 < r \le r_0$ 以及每个 $a \in X$，都有

$$\frac{1}{c_0} r^Q \le \mathcal{H}^Q(\overline{B}(a,r)) \le c_0 r^Q.$$

那么 X 是 *Ahlfors* Q-正则的。

Proof. Let $C := \max\left\{c_0, \frac{\mathcal{H}^Q(X)}{r_0^Q}\right\}$, and let $r > 0$ be arbitrary.

若 $0 < r \le r_0$，则该假设直接给出

$$\frac{1}{c_0} r^Q \le \mathcal{H}^Q(\overline{B}(a,r)) \le c_0 r^Q \le C r^Q.$$

现在，假设 $r > r_0$。则

$$\mathcal{H}^Q(\overline{B}(a,r)) \le \mathcal{H}^Q(X) = \frac{\mathcal{H}^Q(X)}{r^Q} \cdot r^Q \le \frac{\mathcal{H}^Q(X)}{r_0^Q} \cdot r^Q \le C r^Q.$$

对于下界，注意到 $B(a,r)$包含一个半径为 r_0的球，因为 $r > r_0$，所以

$$\mathcal{H}^Q(\overline{B}(a,r)) \ge \mathcal{H}^Q(\overline{B}(a,r_0)) \ge \frac{1}{c_0} r_0^Q =: c_1 r^Q,$$

其中 $c_1 = \frac{1}{c_0} \cdot \frac{r_0^Q}{r^Q} \ge \frac{1}{c_0} \cdot \frac{r_0^Q}{r^Q}$。于是对于 $r \ge r_0$，这意味着

$$\mathcal{H}^Q(\overline{B}(a,r)) \ge \frac{r^Q}{c_0 \cdot (r/r_0)^Q} = \frac{1}{c_0} r_0^Q.$$

因此，X 是 Ahlfors Q-正则的。 □

定理 *3.1(a)* 的证明。由于 $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ 中球在投影映射下的原像是 $\mathbb{R}^2$ 的子集，因此在此情形下，豪斯多夫 2-测度等于球的面积乘以一个常数因子。

此外，必须根据球心的位置考虑不同类型的球。具体而言，有三种情况：球心位于圆锥点、聚点和正则点的球。因此，有必要详细考察每种情况。

为了应用引理3.2 并证明空间 $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ 是 Ahlfors 2-正则的，我们首先需要确定 r_0的一个合适取值。考虑一个多边形 P，它有 n 条边。将 P的各边记为 $e_1, e_2, \ldots, e_n$。令 $d_{\min}$ 表示 P的非相邻边之间的最小距离，定义如下

$$d_{\min} = \min\{d(e_i, e_j) : j \ne i+1\}.$$

注意，对于 $r < d_{\min}/2$，以及位于 P某条边上的点 $\tilde{p}$，以 $\tilde{p}$为中心、半径为r的球 $B(\tilde{p},\ r)$ 不会与任何多边形的非相邻边相交。在此阶段，我们将 $B(\tilde{p},\ r)$ 称为第一个球，不考虑边上的任何粘合。

对于边 e_i 上的点 $\tilde{p}$，且对于 $r < \text{diam}(P)$，存在一个常数 K，使得对于 $r/2K_r < d_{\min}/2$，球 $B(\tilde{p},\ r/2K_r)$ 不与任何非相邻边相交。

需要注意的是，此时 K_r 取决于半径 r，而我们需要找到一个适用于所有 r 的 K。为此，我们考虑 r 的最大可能值，即 $r = \text{diam}(P)$。在这种情况下，存在一个常数 K，使得对于多边形 P的一条边上的每个$\tilde{p}$，$B(\tilde{p},\ r/2K)$（在考虑边上的粘合之前）都不与任何非相邻边相交。

因此，我们得出结论：对于任何 $r < \text{diam}(P)$，同一个 K 都适用，从而确保球 $B(\tilde{p},\ r)$ 不与多边形 P 的任何非相邻边相交（在考虑边上的粘合之前）。

于是我们可以将 $r_0 = \frac{\text{直径}(P)}{2K}$ 定义为所需的半径。

在整个证明中，凡是提到球，均指其在投影映射下的原像；提到角为 $k\pi$（其中 $k \in \mathbb{N}$）的锥点时，均指其位于 P边界上的某个 k 原像。

若我们考虑足够小的半径，使球远离非正则点，则正则点处满足 Ahlfors 2-正则性这一条件显而易见。在这些点处，球将是欧几里得正方形；由于l_∞-度量与欧几里得度量等价，根据引理2.9，存在一个常数 L 使得

$$\mathcal{H}^2(B(\tilde{p},r)) = \frac{1}{4}\pi L^2 \operatorname{Area}(B(\tilde{p},r)) = \frac{1}{4}\pi L^2 4r^2 = \pi L^2 r^2$$

这意味着所需的有界性。

当考虑足够小的半径，使球不包含任何其他锥点时，锥点处满足 Ahlfors 2-正则性这一条件便可直接得出。在这种情况下，我们有

$$\mathcal{H}^2(B(\tilde{p},r)) \le \frac{1}{4}\pi L^2 k \operatorname{Area}(\mathrm{SB}(\tilde{p},r)) = \frac{1}{4}\pi L^2 k \cdot 2r^2 = \frac{1}{2}\pi L^2 k r^2,$$

其中 $\tilde{p}$ 是角度为 $k\pi$的锥点。

如果多边形至少有一条边采用 Type W 识别，则将 $B(\tilde{p}_\infty,\ r)$视为以聚点为中心的球，且该球不与多边形的任何其他边相交。

假设球的边界与线段 α_n'相交。球 $B(\tilde{p}_\infty,\ r)$面积的上界可按如下方式确定：计算包含所有以点 $\tilde{p}_i$为中心的球的矩形面积（其中$i \in \{n+1, \cdots, \infty\}$），再加上以点 $\tilde{p}_n$为中心的球的面积，如图11所示。

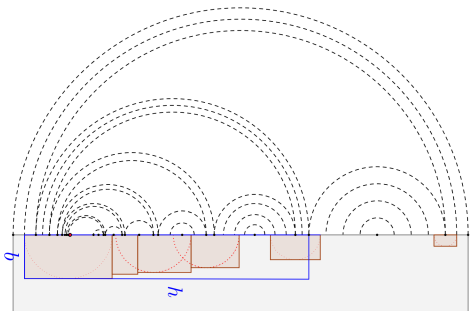


图 11：用于说明如何确定面积上界的示意图。

由于 $r = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_k + \epsilon a_n$，其中 $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ 和 $\epsilon < 1$，

$$\begin{aligned}\operatorname{Area}(B(\tilde{p}_\infty, r_n)) &\le bh + \operatorname{Area}(B(\tilde{p}_n, \epsilon a_n)) + \epsilon a_n r \\ &\le r\left(r + 2\sum_{n+1}^{\infty} b_k + \sum_{n+1}^{\infty} a_k\right) + \frac{r^2}{2} + r^2\end{aligned}$$

由于 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是满足条件的常值序列

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i = \ell/2,$$

由此可知，存在一个常数 $K' > 0$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} b_i \leq K' \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Area}(B(\tilde{p}_\infty, r_n)) &\leq r\left(r + 2K' \sum_{n+1}^{\infty} a_k + \sum_{n+1}^{\infty} a_k\right) + \frac{3r^2}{2} \\
&\leq r\left(r + (2K'+1)r\right) + \frac{3r^2}{2} \\
&\leq \left(2K' + \frac{7}{2}\right) r^2.
\end{aligned}$$

特别地，考虑序列按几何方式递减的情况；也就是说，

$$a_k = a_0\lambda^{-k}, \quad b_k = b_0\lambda^{-k},$$

对于某个实数 $\lambda > 1$。在这种情况下，以下不等式成立。这种情况尤为重要，因为由动力系统产生的纸面常常表现出这种行为（参见 [dCH04]）。

$$\begin{aligned}
\operatorname{Area}(B(\tilde{p}_\infty, r_n)) &\leq bh + \operatorname{Area}(B(\tilde{p}_n, \epsilon a_n)) + \epsilon a_n r \\
&\leq r\left(r + 2\sum_{n+1}^{\infty} b_k + \sum_{n+1}^{\infty} a_k\right) + \frac{r^2}{2} + r^2 \\
&\leq r\left(r + 2\left(\frac{b_0\lambda^{-(n+1)}}{1-\lambda^{-1}}\right) + r\right) + \frac{3r^2}{2} \\
&\leq r\left(2r + 2\left(\frac{b_0\lambda^{-n}}{1-\lambda^{-1}}\right)\right) + \frac{3r^2}{2}.
\end{aligned}$$

如果 $b_0 > a_0$，其中 a_0 和 b_0 是固定实数，那么存在一个 $p \in \mathbb{R}$，使得 $pa_0 > b_0$。因此，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Area}(B(\tilde{p}_\infty, r)) &\leq r\left(2r + 2a_0 p\left(\frac{\lambda^{-n}}{1-\lambda^{-1}}\right)\right) + \frac{3r^2}{2} \\
&= r(2r + 2pr) + \frac{3r^2}{2} = \left(2p + \frac{7}{2}\right) r^2.
\end{aligned}$$

并且，如果 $a_0 > b_0$，我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Area}(B(\tilde{p}_\infty, r)) &\leq r\left(2r + 2a_0\left(\frac{\lambda^{-n}}{1-\lambda^{-1}}\right)\right) + \frac{3r^2}{2} \\
&= r(2r + 2r) + \frac{3r^2}{2} \\
&= \frac{11}{2} r^2.
\end{aligned}$$

球 $B(\tilde{p}_\infty, r)$ 的面积上界可由下式确定

$$\mathrm{Area}(B(\tilde{p}_\infty, r)) \geq 2r^2.$$

如果多边形至少有一条边具有类型 W 识别，则将 $B(\tilde{p},\ r)$ 视为以一个圆锥点为中心的球，且该球不与多边形的任何其他边相交。对于圆锥点处 Ahlfors 2-正则性的通常情形，可采用与处理聚点时类似的论证。

在这种情况下，对于位于聚点上方、以圆锥点为中心的任意球，沿边进行粘合后，会出现一个以聚点下方圆锥点为中心的球。
我们将其分为两种情况：

C1) 以聚点下方圆锥点为中心的球包含该聚点；
我们将以 n 表示该球所接触的下方 α'_n 对应的指标，以 k 表示该球所接触的上方 α'_k 对应的指标。这意味着存在一个以点 $\tilde{p}'_k$ 为中心的新球。因此，

$$r > \sum_{i=n+1}^{k-1} a_i \text{ and } r > \sum_{i=k}^{\infty} a_i.$$

总面积由以下部分构成：以聚点下方的点为中心的球的面积、与 α_n 对应的球的面积的两倍（以计入与 α_{n+1} 对应的球中属于 β_n 的部分），以及两个矩形的面积。第一个矩形的高为 h_1，其中包含与 $i \in \{n+1, \cdots, k-1\}$下 α_i 两端的粘合相对应的球。第二个矩形的高为 h_2，对应于主球以及与指标 $i \in \{k+1, k+2, \cdots\}$相对应的球。
因此，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}(B(\tilde{p}, r)) &< 2r^2 + r^2 + r \cdot h_1 + r \cdot h_2 \\
&< 6r^2 + r\left(r + 2\sum_{n+1}^{k-1} b_i + \sum_{n+1}^{k-1} a_i\right) + r\left(r + 2\sum_{k+1}^{\infty} b_i + \sum_{k+1}^{\infty} a_i\right) \\
&< 6r^2 + r\left(r + 2\sum_{n+1}^{k-1} b_i + r\right) + r\left(r + 2\sum_{k+1}^{\infty} b_i + r\right).
\end{aligned}$$

由于 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是满足以下条件的常值序列

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i = \ell/2,$$

因此，存在常数 $K' > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=n+1}^{k-1} b_i \leq K'' \sum_{i=n+1}^{k-1} a_i.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}(B(\tilde{p}, r)) &< 6r^2 + r(2r + 2K''r) + r(2r + 2K''r) \\
&= (10 + 4K'')\, r^2.
\end{aligned}$$

C2）以聚点下方的锥点为中心的球不包含该锥点。
同样，我们用 n 表示该球接触的下方 α_n 所对应的指标，用 k 表示该球接触的上方 α_k 所对应的指标。因此，

$$r > \sum_{i=n+1}^{k-1} a_i \text{ and } r > \sum_{i=k}^{s} a_i.$$

可采用与情况 C1) 中相似的论证：

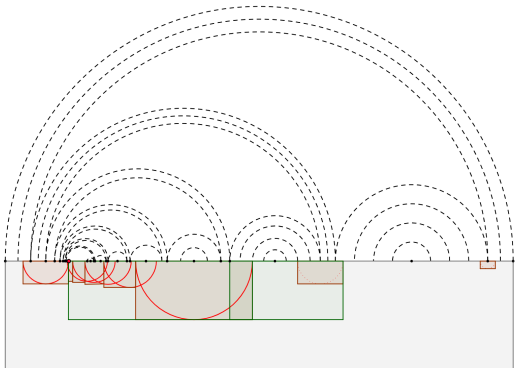


图12：用于说明如何确定面积上界的图。

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(B(\tilde{p},r)) <& 2r^2+4r^2+r\cdot h_1+r\cdot h_2\\ <& 6r^2+r\left(r+2\sum_{n+1}^{k-1}b_i+\sum_{n+1}^{k-1}a_i\right)+r\left(r+2\sum_{k}^{s}b_i+\sum_{k}^{s}a_i\right)\\ =& 6r^2+r(2r+2K'''r)+r(2r+2K'''r)\\ =& \left(10+4K'''\right)r^2\end{aligned}$$

此外，　对于以圆锥点为中心的球，其面积下界可表示为

$$\mathrm{Area}(B(\tilde{p},r))>2r^2,$$

因为至少会考虑半球——在粘合之前——。

考虑一个以位于多边形一条边上的锥点为中心的球 $B(\tilde{p},r)$，该边没有 Type W 识别，且该球不与多边形的任何其他边相交。在这种情况下，该球将是有限个半径小于或等于 n_p 的球的并。因此，面积满足以下不等式：

$$2r^2\le\mathrm{Area}(B(\tilde{p},r))\le 2n_pr^2,$$

其中，k 是与该锥点相关联的角度因子。

特别地，如果多边形的一条边上存在有限型 W 识别，设 $B(\tilde{p},r)$ 是一个以锥点 $\tilde{p}$ 为中心、半径为 r 的球。在这种情况下，球 $B(\tilde{p},r)$ 将是有限个半球的并集，每个半球的半径都小于或等于 r。更准确地说，有如下结论：

C1）以该点下方的锥点为中心的球包含点 $\tilde{p}'_{n_F}$。

注意，主球必然包含至少一个角为 3π 的锥点，因此存在一个以某条线段 α'_s 两端点为中心的球，该线段对应于角为 3π 且最接近中心 $\tilde{p}$ 的锥点；或者，当 $\tilde{p}$ 本身是一个角为 3π 的锥点时，球以 3.2 节所述方式以其为中心。设这个对应球以点 $\tilde{p}'_{s+1}$ 为中心，且其下边界与线段 α'_n 相交。

因此，

$$r>\sum_{i=n+1}^{s}a_i\quad\text{and}\quad r>\sum_{i=s+1}^{n_F}a_i.$$

我们知道，

$$B(\tilde{p},r)=\mathrm{SB}(\tilde{p},r)\cup B(\tilde{p}'_{s+1},r_{s+1}),$$

其中

$$B(\tilde{p}'_{s+1},r_{s+1})=\bigcup_{i=n+1}^{s}\mathrm{SB}(\tilde{p}_i,r_i)\cup\bigcup_{i=s+2}^{n_F}\mathrm{SB}(\tilde{q}_i,r_i),$$

且半径由下式给出：

$$r_j = r_{s+1} - \sum_{i=j}^{s} a_i, \quad \text{for } j \in \{n+1, n+2, \ldots, s\},$$

and

$$r_j = r_{s+1} - \sum_{i=s+1}^{j-1} a_i, \quad \text{for } j \in \{k+1, k+2, \ldots, n_F\}.$$

因此，面积为

$$\text{Area}(B(\tilde{p}, r)) = 2r^2 + \sum_{i=n+1}^{s} r_i^2 + r_{s+1}^2 + \sum_{i=s+2}^{n_F} r_i^2 \leq (n_F + 1)r^2.$$

C2) 以点 $\tilde{p}'_{n_F}$ 下方的锥点为中心的球不包含该点。

同样，存在一个以某线段 α'_s 的端点为中心的球，该线段对应于一个角度为 3π 且最接近中心 $\tilde{p}$的锥点；如果 $\tilde{p}$ 本身是一个角度为 3π的锥点，则该球以 $\tilde{p}$ 本身为中心。假设这个对应球以点 $\tilde{p}'_{s+1}$ 为中心，且其下边界与线段 α'_n相交。此外，记 t 为与该球相切的上 α_l 对应的指标。因此，

$$r > \sum_{i=n+1}^{s} a_i \text{ and } r > \sum_{i=s+1}^{t} a_i.$$

适用于情况 C1) 的类似论证同样适用：

$$\text{Area}(B(\tilde{p}, r)) = 2r^2 + \sum_{i=n+1}^{s} r_i^2 + r_{s+1}^2 + \sum_{i=s+2}^{t} r_i^2 \leq (l+1)r^2 \leq (n_F + 1)r^2.$$

现在，设 $B(\tilde{p},\ r)$ 是一个以正则点为中心且不与多边形的任何其他边相交的球。在这种情况下，可以推导出以下面积不等式：

$$2r^2 \leq \text{Area}(B(\tilde{p}, r)) \leq 4r^2.$$

当半径不够小时，也就是说球中包含非正则点时，需要计算球心到每个非正则点的距离。随后，以主球内识别出的锥点为球心构造新球。这些球的半径由主球半径减去相应锥点与初始球心之间的距离确定。

完成这一步后，分析便归结为前文所述的圆锥情形。

因此，以正则点为球心的球的面积，可由不考虑其与边界相交的球的面积（即 $4r^2$），加上完全包含在第一个球内、以锥点为球心的最大球的面积来给出上界。

最后，考虑球与多边形的多条边相交的情形。注意，这种情形实质上需要考虑以多边形每条边上的点为球心的球，因为随着由于各边粘合而显露出球的部分，球的半径会减小。因此，球的面积可以由多边形每条边上以锥点为球心的球的面积之和，加上球的第一部分的面积来给出上界。更准确地说，我们有：

令 B^i 为与边 e_i 相关联的球，这意味着 B^i 是一个以锥点或边 e_i 上的聚点为中心的球。于是，球 $B(\tilde{p}, r)$ 的面积可由以下表达式给出上界：

$$B(\tilde{p}, r) \leq 4r^2 + 2nr^2 + \sum_{i=1}^{n} \max \left\{ \begin{array}{ll} W_i & \text{if } e_i \text{ is a side with Type } W \text{ identification,} \\ BP_i & \text{if } e_i \text{ is a side with basic segment pairings,} \end{array} \right\}$$

其中

$$W_i = \max \left\{ \text{Area}(B^i(\tilde{p}_\infty, r)), \text{Area}(B^i(\tilde{p}_c, r)) \mid \tilde{p}_\infty \in B^i(\tilde{p}_c, r), \right.$$

$$\text{Area}(B^i(\tilde{p}_c, r)) \mid \tilde{p}_\infty \notin B^i(p_c, r), \text{Area}(\tilde{p}_{int}, r)\big\},$$

and

$$BP_i = \max\big\{\text{Area}(B^i(\tilde{p}_c, r)), \text{Area}(B^i(\tilde{p}_{int}, r))\big\}.$$

这里， $\tilde{p}_c$ 指锥点， $\tilde{p}_{int}$ 指多边形一条边上配对线段内部的正则点。

术语 $4r^2$ 适用于 以多边形内部点为中心的球，而 $2nr^2$ 适用于以球心位于
于边的交点处的球，其中 n 是多边形的边数。
最大值 W_i 与 BP_i 之和确保我们考虑了分别与具有 Type W 识别和基本线段配对的边相关联的球所能达到的最大面积。特别地，对于具有基本线段配对的边 e_j，以该边为中心的球的面积小于 $2n_j r^2$，其中 n_j 是该边上的圆锥点数。

总之，请注意，在所有情况下，球的面积下界为

$$\text{Area}(B(\tilde{p}, r)) > 2r^2,$$

因为至少必须考虑半球——在进行粘合之前。

□

3.3.2 线性局部可缩性

为了证明曲面类 $\mathcal{L}$ 的线性局部可缩性，我们需要以下结果。该引理由 Mario Bonk 慷慨提供，证明见附录 A。

引理 3.3。 设 $X, Y \subseteq S^2$ 是满足 $Y \subseteq X$ 的子集。若 Y 是 X 的形变收缩，且 Y^c 连通，则 X^c 连通。

定理 *3.1(b)* 的证明。 现在我们要证明曲面 $\mathcal{L}_\mathcal{P}$ 是 λ-线性局部连通（λ-LLC）。在这种情况下， λ-LLC 条件等价于证明该空间是线性局部可缩的。
记 $B(a,\ r)$ 为 $\mathcal{L}_\mathcal{P}$中以点 a 为中心、半径为 r的球。若取 $\lambda = 4K$，其中 K 是定理3.1(a) 的证明中定义的常数，那么在施加边界识别之前，该球的原像不会与多边形的两条非相邻边相交。

为验证 λ-线性局部连通$_1$ 条件，注意到 $\mathcal{L}_\mathcal{P}$ 是一个紧长度空间。因此，对于任意两点 $x,\ y \in B(a,\ r)$，我们可以取从 x 到 a 以及从 y 到 a的测地线段之并，构造一条连接它们的连续统。
要证明 λ-线性局部连通$_2$ 条件，还需要进一步分析。首先考虑如下情形：设 $B(a,\ r)$ 是一个球的原像，该球的中心为 a 、半径为 r；设 x 和 y 是曲面上位于 $B(a,\ r)$ 之外的点。如果曲面上连接点 x 和 y 的测地线不经过球 $B(a,\ r/\lambda)$，那么连续统 E 可以取为该测地线本身。

如果测地线经过球 $B(a,\ r/\lambda)$，由于曲面上任意两点之间都存在连接路径，因此 E可以取为一条避开该球的路径。例如，可以按如下方式构造一条避开该球的测地线：考虑从 x 和 y 出发并到达球边界上最近点的线段，然后沿球的边界用一条路径连接这些新点。为了确保存在这样的路径，球的补集必须是连通的。

有必要考察不与相对两边相交的球会发生什么。为确立这一条件，需要用到引理3.3。

需要考虑三种情况：

1）以圆锥点为中心的球。2）以聚点为
中心的球。3）以正则点为中心的球。

对于以圆锥点或正则点为中心、半径足够小以排除其他圆锥点的球，可以构造到一点的形变收缩。该过程首先通过线性同伦将球向多边形的一条边变形。一旦到达边界上的一条线段，便沿着这条线段进一步变形

，最终将该集合收缩为一点。相比之下，当一个球包含一个圆锥点并与多边形的边相交时，仍然可以构造形变收缩——这次是收缩到多边形边界上与该球相交的若干线段的并集。

对于以聚点为中心的球，也可以利用线性变形构造一个形变收缩，将其收缩到沿多边形各边的一组线段上。

总之，我们已经证明，取决于球的位置，其形变收缩可能是一个点、一条线段，或沿多边形各边的一组线段。

因此，任意此类球的补集都是连通的，这使我们能够在球外构造一条连续路径，将球外任意两点连接起来，并且该路径完全避开球的内部。因此，根据引理 3.3和定理 2.2，曲面 $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ 是线性局部连通的，因此也是线性局部可缩的。

□

由定理 3.1中的 (a) 和 (b) 两项可推得以下基本结果：曲面类 $\mathcal{L}^*$与标准 2-球面拟对称等价。

这由 Bonk-Kleiner 定理得出，该定理断言，任何与 S^2 同胚的紧致、Ahlfors 2-正则且线性局部连通的度量空间，都与标准 2-球面拟对称等价。

4 紧马蹄

紧马蹄 是定义在拓扑球面上的一种变换，它复现了 Smale 的经典马蹄映射的动力学。然而，与 Smale 的原始构造不同，紧马蹄不包含动力学平凡的点。在这种情况下，该变换的非游荡集就是整个曲面。这一特性使该系统在动力学意义下是极小的，因为每个点在迭代过程中都表现出非平凡的行为。

本节将展示，紧马蹄是一个纸空间的例子，它在某个简单点处不满足 Ahlfors 2-正则条件。因此，不能应用 Bonk–Kleiner 定理来断定紧致马蹄球面与标准 2- 球面拟对称等价。

设 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为一个正实数序列，满足 $a_0 = 1/2$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1/2$。将 P 视为单位正方形，并根据以下构造定义 $\hat{} P = \{\langle \alpha_i, \alpha_i' \rangle\}_{i\in\mathbb{Z}}$：我们采用标准的 Type W 识别方式，但省略所有线段 β_i（即，对所有 i， $b_i = 0$）：

线段 α_0 的长度为 a_0，起点是 P 的右上顶点。线段 α_0' 的长度也为 a_0，起点是 α_0 的端点，将 P 的上边对折。接着， α_1 的长度为 a_1，起点是 α_0' 的端点；随后是长度相同的 α_1'，起点是 α_1 的端点。这个过程不断继续，形成从上到下的一系列折痕，覆盖 P 的左边，但不包括其下方顶点。

对 P的右边也采用类似的过程。线段 α'_{-1} 的长度为 a_0，终止于P的右上顶点；而 α_{-1}的长度也为 a_0，从 α'_{-1}的起点出发，将 P的右边对折。随后， α'_{-2}的长度为 a_1，终止于 α_{-1}的起点；而 α_{-2}的长度也为 a_1，从 α'_{-2}的起点出发。此模式不断延续，形成从右向左的折痕，覆盖 P的下侧，但不包括其最左端点。

紧马蹄不是 Ahlfors 2-正则的，问题出现在聚点处，因为所有折痕的端点都被识别为同一点。此外，随着球的半径减小，这些点处会出现更多的球。

在这种情况下，以聚点为中心的球表示为

$$B(\tilde{p}_\infty, r) = 4 \text{ one-quarter balls of radius } r \cup (2n-2) \text{ semiballs of radius } r \cup \bigcup_{n+1}^{\infty} \text{ pieces of balls of radius } r,$$

其中 n 满足 $\frac{1}{2^n} < r$。

因此，

$$\text{Area}(\bar{B}(\tilde{p}_\infty, r)) = \left[(\pi - 2)r^2 + \left(2\log\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\pi}{2}r^2\right) + \text{ something} \right].$$

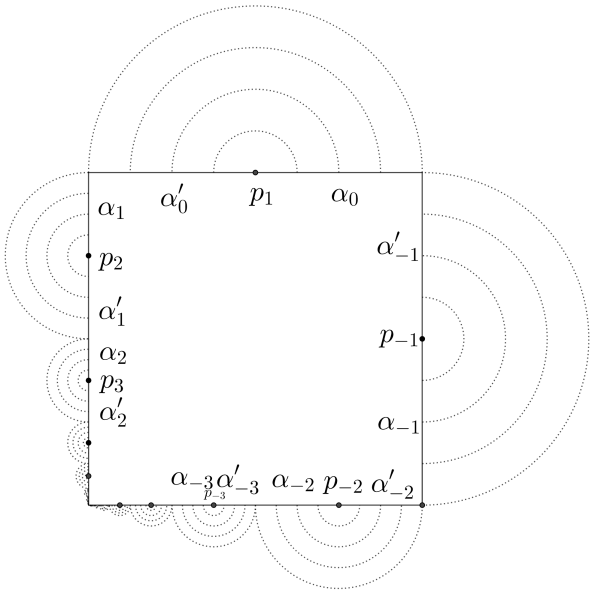


图13：具有所有粘合和折叠点的正方形 P。

尽管如此， [dC05]和 [dCH12]通过不同的技术表明，紧致马蹄球面具有良好定义的共形结构，因此在共形意义上等价于 $\mathbb{C}$。

附录 A

在本附录中，我们讨论如何判定连通可定向流形的开子集 U 是否连通。在这些假设下， X 是连通的当且仅当它是道路连通的，这是标准结论。本节的主要参考文献是 U 中的第3章 [Hat02]。此外，以下结果的证明是 Mario Bonk 告诉我的。

这一拓扑性质可以通过奇异同调群 $H_0(U)$ 来检测，该群编码了 U 的道路连通分支数。更准确地说， $H_0(U)$ 同构于直和 $\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}$，其中指标集 I 中每个道路连通分支对应一个元素。因此， U 连通当且仅当 $H_0(U)\cong\mathbb{Z}$。

~通常，使用约化同调群 $H_0(U)$ 会更方便；它是通过对其中一个 $\sim\mathbb{Z}$ 直和项取商得到的。在这种情况下， U 连通当且仅当 $H_0(U)=0$。由于假设 X 连通，我们还有 $\sim H_0(X)=0$。

利用偶 (X,U) 的长正合列，我们得到：

$$\cdots\to H_1(X)\to H_1(X,U)\to\widetilde{H}_0(U)\to\widetilde{H}_0(X)=0.$$

~由正合性可知，连接映射 $H_1(X,U)\to H_0(U)$ 总是满射。此外，如果$H_1(X)=0$ （例如，当 X 是单连通时），那么该映射是同构。这给出了以下判据。

引理 4.1。 假设 $H_1(X)=0$。那么， 当且仅当 $H_1(X,U)=0$. 时， U 是连通的

~证明。 映射 $H_1(X,U)\to H_0(U)$ 一般是满射；当 $H_1(X)=0$ 时，它是同构。由于$\sim H_0(U)=0$ 当且仅当 U 连通，故结论成立。 □

现在假设 X 是一个紧致、连通、可定向的 n-流形。根据 Alexander 对偶，我们得到一个同构

$$H_1(X,U)\cong\check{H}^{n-1}(X\setminus U),$$

其中 ˇH^{n-1} 表示 ˇCech（或 Alexander–Spanier）上同调。这引出了以下 .

引理 4.2。 设 X 是一个紧致连通可定向的 n-流形， $n \geqslant 2$，且有 $H_1(X) = 0$。设 K、 $L \subseteq X$是同伦等价的紧集。那么， $X \setminus K$ 连通当且仅当 $X \setminus L$ 连通

证明。 假设 $X \setminus K$ 非空且连通。那么：

$$0 = \widetilde{H}_0(X \setminus K) \cong H_1(X, X \setminus K) \cong \check{H}^{n-1}(K) \cong \check{H}^{n-1}(L) \cong H_1(X, X \setminus L) \cong \widetilde{H}_0(X \setminus L).$$

因此， $X \setminus L$ 也连通。 □

我们注意到，假设 H_1（X） $= 0$ 至关重要。例如，若 X 是一个二维环面，且 K， $L \subset X$ 是拓扑圆，那么如果其中一个围成一个圆盘，而另一个在同伦意义下非平凡，结论便不成立。

为了完善前面的引理，我们现在回顾形变收缩的概念。设 $K \subset X$ 为一个子集。若存在一个同伦 H： $X \times [0,1] \to X$，使得 $H_0 = \mathrm{id}_X$、 H_1（X） $\subset K$，且对所有 $x \in K$ 和 $t \in [0,1]$都有H_t（x） $= x$，则称 K是 X的形变收缩。在这种情况下， X 和 K 同伦等价。

引理 4.3。 设 X 为一个拓扑空间，并假设 $K \subseteq X$ 是 X的形变收缩。那么 K 和 X 同伦等价

证明。设 H： $X \times [0,1] \to X$是同伦，如将 X形变收缩到 K的定义所述。映射H_1： $X \to X$ 的取值都在 K 中。因此，我们可以将其视为映射 g： $X \to K$。特别地，对于所有$x \in X$， $g(x) = H_1(x)$；对于所有 $x \in K \subseteq X$， $g(x) = H_1(x) = x$。设 f： $K \to X$ 为包含映射，即对于所有 $x \in K$， $f(x) = x \in X$。

那么对于 $x \in K$，我们有 $(g \circ f)(x) = g(x) = H_1(x) = x$，因此 $g \circ f = \mathrm{id}_K$。另一方面，根据 g的定义， $f \circ g = H_1$，因此 $f \circ g = H_1 \simeq H_0 = \mathrm{id}_X$。结论得证。 □

将这些结果应用于球面的情形，可得如下结论。

定理 4.4. 设 S^n、 $n \geqslant 2$为 n维球面，且 $K \subseteq L$ 是 S^n的紧致子集。若 $K \subseteq L$ 是 L的形变收缩，则 $S^n \setminus L$ 连通当且仅当 $S^n \setminus K$ 连通

证明. 这由前面的讨论以及以下事实推出：当 $n \geqslant 2$时， S^n 是单连通的，因此$H_1(S^n) = 0$。

□

致谢

作者谨此感谢圣保罗州研究基金会（资助编号：2020/06978-6 和 2022/05984-8）以及高等教育人才提升协调局（项目编号：88887.103459/2025-00）提供的经费支持。作者还感谢 André de Carvalho 和 Mario Bonk 提供的宝贵且富有见地的意见。

参考文献

[Ahl54] Lars Ahlfors. 共形不变量与拟共形映射。《数学分析杂志》，3:1–58，1954。[AZ67] Aleksandr D. Aleksandrov 和 Viktor A. Zalgaller。《曲面的内蕴几何》，《数学译丛》卷15。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1967。[BA56] A. Beurling 和 L. Ahlfors。拟共形映射下的边界对应。《数学学报》，96(1):125–142，1956。[BBI01] Dmitri Burago、Yuri Burago 和 Sergei Ivanov。《度量几何教程》，《研究生数学丛书》卷33。美国数学会，2001。[BK02] Mario Bonk 和 Bruce Kleiner。二维度量球面的拟对称参数化。《发明数学》，150(1):127–183，2002。[BK05] Mario Bonk 和 Bruce Kleiner。具有二维球面边界的共形维数与格罗莫夫双曲群。《几何与拓扑》，9:219–246，2005。[CRW19] Lucien Clavier、Anja Randecker 和 Chenxi Wu。无限型平移曲面的旋转分支空间。《几何专论》，201:57–80，2019。[dC05] André de Carvalho。扩张、商空间与广义伪阿诺索夫映射。《数学与理论物理中的图与模式》，73:315–338，2005。

[dCH04] André de Carvalho 和 Toby Hall。单峰广义伪阿诺索夫映射。《几何与拓扑》，8(3):1127–1188，2004。[dCH10] André de Carvalho 和 Toby Hall。纸面与动力学极限。《美国国家科学院院刊》，107(32):14030–14035，2010。[dCH12] André de Carvalho 和 Toby Hall。折纸、黎曼曲面与伪阿诺索夫序列的收敛。《几何与拓扑》，16(4):1881–1966，2012。[dCH14] André de Carvalho 和 Toby Hall。纸造黎曼曲面。《伦敦数学学会会刊》，108(3):541–574，2014。[DS93] Guy David 和 Stephen Semmes。定量可整性与利普希茨映射。《美国数学会汇刊》，337(2):855–889，1993。[DS97] Guy David 和 Stephen Semmes。《破碎的分形与破灭的梦想：度量与测度中的自相似几何》。牛津数学应用讲座丛书。牛津大学出版社，1997。[DS00] Guy David 和 Stephen Semmes。维数间正则映射。《数学出版物》，第369–417页，2000。[Fal04] Kenneth Falconer。《分形几何：数学基础与应用》。约翰·威立父子出版公司，2004。[Fig18] Minoru Enrique Akiyama Figueroa。《有孔纸空间的长度坐标估计》。博士论文，圣保罗大学，2018。[FLP79] A. Fathi、F. Laudenbach 和 V. Poénaru。《瑟斯顿关于曲面的工作》，《星丛》卷66–67。法国数学会，巴黎，1979。[FM22] Martin Fitzi 和 Damaris Meier。高拓扑度量曲面的典范参数化，2022。arXiv预印本。[Hat02] Allen Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，剑桥，2002。[Moo25] R. L. Moore。关于连续统的上半连续族。《美国数学会汇刊》，27(4):416– 428，1925。[MW13] Sergei Merenkov 和 Kevin Wildrick。拟对称科贝均匀化。《伊比利亚美洲数学评论》，29(3):859– 909，2013。[Ran16] Anja Randecker。《野平移曲面的几何与拓扑》。KIT科学出版社，2016。[Sem91] Stephen Semmes。常数较小的弦弧曲面。II. 良好参数化。《数学进展》，88:170–199，1991。[TV80] Pekka Tukia 和 Jussi Väisälä。度量空间的拟对称嵌入。《芬兰科学院数学辑刊》，1980。[Vin12] Marcel Vinhas。《纸空间》。硕士论文，数学与统计研究所，圣保罗大学，巴西，2012。[Wil08] Kevin Wildrick。二维度量平面的拟对称参数化。《伦敦数学学会会刊》，97(3):783–812，2008。[Wil10] Kevin Wildrick。曲面上的拟对称结构。《美国数学会汇刊》，362(2):623–659，2010。[Zor06] Anton Zorich。平坦曲面。载于《数论、物理与几何前沿 I》，第439–585页。施普林格，2006。