arXiv:2602.10853v1 [math.CV] 11 Feb 2026

关于边界多极性集的大小

M ̊ARTEN NILSSON

斯德哥尔摩大学数学系，瑞
典斯德哥尔摩 *106 91*

Abstract. 我们证明了若干关于边界多极性集的大小与传播的结果。这些集合是复 Monge–Amp`ere 方程的狄利克雷问题中的例外集。我们将 Stout 关于严格伪凸域 $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ 上的峰集的拓扑维数必须小于 N 的结果，推广到非传播的边界多极 F_σ 性集。特别是，如果边界多极性集的拓扑维数超过 $N-1$，它们就必须向内部传播。我们还证明，若域存在边界正则性足够好的峰函数，则豪斯多夫维数足够小的集合必定是边界多极性的，且不会传播。最后，我们证明，在任何光滑严格伪凸域上，詹森测度类与表示测度类都不相同。这推广了 Hedenmalm 的一项结果。

1. Introduction

设 Ω 表示 $\mathbb{C}^N$ 中的一个有界域，且 $A \subset \partial\Omega$ 是一个集合，存在定义在 Ω 上的负多重次调和（psh）函数 u （$u \in \mathcal{PSH}^-(\Omega)$），该函数不恒等于 $-\infty$，并且满足

$$\limsup_{z \to A} u(z) = -\infty.$$

此类边界多极极集 （简称 b-多极集）最近被刻画为复 Monge–Amp`ère 算子 [11] 的狄利克雷问题的例外集。更确切地说，在假设 Ω 具有强多重次调和屏障的条件下，也就是说，在每个边界点 $\zeta \in \partial\Omega$ 处，我们都能找到 $u \in \mathcal{PSH}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$，使得

$$u(\zeta) = 0, \quad u < 0 \text{ on } \bar{\Omega} \setminus \{\zeta\},$$

那么狄利克雷问题

$$\begin{cases} u \in L^\infty \cap \mathcal{PSH}(\Omega) \\ \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right) = 0 \\ \lim_{z \to \zeta} u(z) = \varphi(\zeta) \qquad \forall \zeta \in \partial\Omega \setminus E_\varphi \end{cases}$$

当且仅当 E_φ 是 b-多极集时，该问题存在唯一解（在 Bedford–Taylor [2, 3] 的弱意义下）。这里，我们假设 $\varphi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ 有界，并且在.....之外连续

E-mail address: marten.nilsson@math.su.se.2010 *Mathematics Subject Classification.*
主要分类 32U30；次要分类 32E20。本研究得到 Sverker Lerheden 基金会的研究资助。

E_φ。此外，唯一解在.....的闭包之外连续 [12, 定理 5.1]

$$\hat{E}_\varphi \coloneqq \{z \in \bar{\Omega}\,;\, u \in \mathcal{PSH}^-(\Omega), \limsup_{w\to E_\varphi} u(w) = -\infty \implies u(z) = -\infty\},$$

如果边界多极包的 E_φ （如果边界多极包包含内部点，我们就称该集具有传播性）。由于不连续集必然是F_σ，这促使我们研究边界多极性 F_σ 集具有传播性的充要条件。

在本文的第一部分，我们得到以下结果：

定理 A. 设$\Omega \subset \mathbb{C}^N$ 是一个严格伪凸域。那么，每个拓扑维数为 N 的 *b*-多极 F_σ 集都必然传播到内部。

反过来说，非传播的 b-多极集的维数至多为 $N-1$。证明主要改编自 Stout [17]，的一个论证；他证明了峰集的相应结论，即存在 $h_K \in A(\Omega)$（在 Ω 上全纯且在其闭包上连续）的闭集 $K \subset \partial\Omega$，满足

$$h_K = 1 \text{ on } K, \quad |h_K| < 1 \text{ on } \bar{\Omega} \setminus K.$$

粗略地说，这个思路是证明：即使在较弱的假设下，即 K 是非传播且 b-多极的，K 仍然是多项式凸的。Stout 的证明中的最后一步进而表明， K 具有某些拓扑性质，而这些性质与 dim $K \geq N$不相容。

在第 3 节中，我们根据豪斯多夫维数建立 b-多极性的充分判据。给定一个有界域 Ω 和参数 $\beta > 0$，我们考虑集合P_β，它由满足以下条件的 $\zeta \in \partial\Omega$ 构成：存在峰函数 $h_{\{\zeta\}}$，使得

$$|h_{\{\zeta\}}(z) - 1| \leq C_\zeta \|z - \zeta\|^\beta,$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数。我们证明

定理 B。 每个零 β维豪斯多夫测度的集合 $A \subset P_\beta$ 都是非传播且 *b*-多极的。

论证相当初等；我们只需将圆周上弧的调和测度与峰函数复合。

最后，在第 4 节中，我们比较 Ω 上支撑于 ∂Ω 的表示测度与詹森测度，其中 Ω 光滑且严格伪凸。我们证明，这两类测度的紧全零集并不相同；前者是 $A(\Omega)$ 的零集，因此是 b-多极且非传播的；而詹森测度的全零集类则包含所有不会传播到 z_0的 b-多极集。由此，我们推得

定理 C. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, $N > 1$ 为一个光滑严格伪凸域。则总存在不是詹森测度的表示测度。

这推广了 Hedenmalm（[7, 定理 3.7], 另见下文定理 4.1）关于单位球的一个结果。

为便于引用，我们将主要结果标记为定理 A–C；它们分别对应定理 2.5、定理 3.2 和推论 4.4。

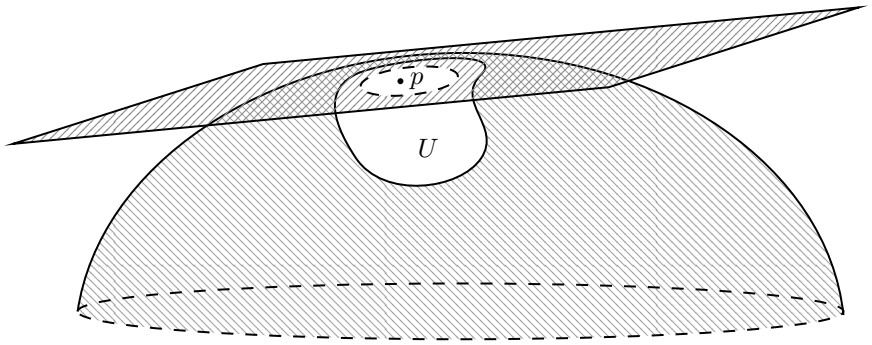
2. Boundary pluripolar sets of dimension N must propagate

本节旨在证明，在 $\mathbb{C}^N$ 中的严格伪凸域上，不可能存在一个维数为 $A \geq N$ 的非传播 b-多极 F_σ 集 A。论证将基于以下结果；该结果是在 [17] 中主要定理的证明过程中通过上同调论证建立的。

引理2.1 (Stout)。 设$\Omega \subset \mathbb{C}^N$ 是一个有界凸域，并假设Ω $A \subset \partial$是一个紧集，使得对于每个包含$p \in A$的邻域 U （位于 $\partial\Omega$中），都存在一个实超平面 Π_U： $L(z) = 0$，满足

$$p \in \{L(z) > 0\} \cap \partial\Omega \subset U.$$

¯如果每个$(A \cap \{L(z) > 0\}) \cup (\Pi_U \cap \Omega)$ 都是多项式凸的，那么维数 $A < N$。



图。 点 $p \in \{L（z） > 0\} \cap \partial\Omega \subset U$。

为了应用这个引理，我们先证明

¯**引理 2.2.** 假设Ω 是凸的。那么，每个 $u \in \mathcal{PSH}(\Omega) \cap C(\Omega)$ 都可以在 ¯Ω 上一致地由 $\mathcal{PSH}(\mathbb{C}^N)$中的元素逼近。

证明. 由于 Ω 是凸的，其边界是 Lipschitz 的，因此我们可以使用 [1] 的主要结果，找到 $\Omega' \ni \Omega$ 和 $u' \in \mathcal{PSH}(\Omega') \cap C(\Omega')$，使得 $|u - u'| < \varepsilon$ 在 Ω 上成立。此外，对 Ω 与一个足够小的球取闵可夫斯基和，我们可以假设 Ω'是凸的。Bremermann 和 Sibony 的一个结果（[15, Th´eor`eme 9]，另见 [18, 定理 1.3.9]）由此推出存在全纯函数 $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(\Omega')$ 和常数$1 \geq c_1, \ldots, c_n > 0$，使得

$$\left|u - \max_j (c_j \log |f_j|)\right| < \varepsilon' \quad \text{on } \Omega.$$

利用凸集是多项式凸的这一性质，冈–韦伊定理使我们可以用全纯多项式 P_j 替换 f_j。由此得到定义在 $\mathbb{C}^N$ 上的逼近函数。□

我们还需要以下结果。回顾一下，如果每个边界点都存在一个强拟次调和屏障，就称 Ω 是 B-正则。

引理 2.3. 设Ω 为凸且 B-正则， $\Pi: L(z) = 0$ 为实超平面，并¯设 $A \subset \partial\Omega$ 为紧 b-多极性集。若 A 不传播，则 $A \cup (\Pi \cap \Omega)$是多项式凸的。

证明. 我们首先证明 A 是多项式凸的。根据 [8, 定理4.3.4], 只需对每个 $z_0 \in \mathbb{C}^N \setminus A$ 找到一个拟次调和函数 $u_{z_0} \in \mathcal{PSH}(\mathbb{C}^N)$，使得

$$u_{z_0}(z_0) \geq \max_{z\in A} u_{z_0}(z).$$

对于 $z_0 \in \mathbb{C}^N \setminus \bar{\Omega}$，我们可以由分隔 z_0 和 $\bar{\Omega}$ 的平面构造出 u_{z_0}，因此不妨假设 $z_0 \in \Omega \setminus A$。于是，由于 A 是 b- 多极且非传播的，存在 $u \in \mathcal{PSH}^-(\Omega)$，使得

$$\limsup_{z\to A} u(z) = -\infty, \quad u(z_0) \neq -\infty,$$

通过缩放，我们还可假设 $u(z_0) > -1$。根据 Wikstr¨om 关于 B-正则域的逼近定理 [19, 定理 4.1],，存在 $u_n \in C(\Omega) \cap \mathcal{PSH}(\Omega)$，满足 $u_n \searrow u$，使得对每个 $C < -1$，在每个 $\zeta \in A$ 处，都存在一个 n_ζ，使得$u_{n_\zeta}(\zeta) < C$。由此得到一个覆盖

$$A \subset \bigcup \{u_{n_\zeta} < C\},$$

因此，由紧致性和单调性可知（取有限子覆盖和最大指标），存在 u_{n_0}，使得

$$u_{n_0}(z_0) > -1, \quad u_{n_0} < C \text{ on } A.$$

由引理 2.2 即可得到所述结论。

为了证明 $A \cup (\Pi \cap \Omega)$ 是多项式凸的，假设 $z_0 \in \Omega \setminus (A \cup \Pi)$。如有必要，乘以一个常数 L，我们可以假设 $L(z_0) > 1$。由前一段可知，我们可以找到 $\tilde{u} \in \mathcal{PSH}(\mathbb{C}^N)$，使得

$$\tilde{u}(z_0) > -1, \quad \tilde{u} < 0 \text{ on } \bar{\Omega}, \quad \tilde{u} < -\max_{\zeta\in A} |L(\zeta)| \text{ on } A.$$

于是，拟次调和函数 $\tilde{u} + L$ 满足

$$\tilde{u}(z_0) + L(z_0) > 0, \quad \tilde{u} + L < 0 \text{ on } A \cup (\Pi \cap \bar{\Omega}),$$

由此完成证明。 □

注。 假设 Ω 是 B-正则的（若 Ω 严格伪凸，则这一条件自动满足），弥补了 Stout 的证明中 A 是一个峰集这一事实。事实上，若 A 是一个峰集，我们可以改为对 $u = \max(C_1 \log |1 - h_A|, C_2)$ 应用引理 2.2，其中常数 $C_2 < 0 < C_1$ 取适当值。

下面这个简单的例子表明逆命题不成立：存在一些多项式凸的 b-多极性集，它们确实会传播到内部。

例 2.4. 令 $\mathbb{B}$ 表示 $\mathbb{C}^2$中的球，并取一条弧 $\gamma \subset \{|z_2| = 1\}$。由于 $\gamma \subset \{\log|z_1| = -\infty\}$，该集合是 b-多极的；根据 [18,推论 3.1.2], 它也是多项式凸的。设 $u \in \mathcal{PSH}^-(\mathbb{B})$ 是一个满足 $\limsup_{w\to\gamma} u(w) = -\infty$ 的函数。由于 γ 具有正弧长，它在圆盘 $\{(0, z_2)$ 上不是 b-（多重）极的； $|z_2| < 1\}$。由此可得 $u(0, z_2) \equiv -\infty$；换言之， γ 沿着 $\{z_1 = 0\} \cap \mathbb{B}$传播。

有了引理 2.3，我们现在可以证明本节的主要结果了。

定理 2.5。 设$\Omega \Subset \mathbb{C}^N$ 是严格伪凸的，且 $A \subset \partial\Omega$ 是一个边界ˆ多重极性 F_σ 集合，其拓扑维数大于 $N - 1$。那么 $A \cap \Omega$ 非空。

证明。 我们先进行一些标准化简。反设存在一个非传播的 b-多极 F_σ 集合 A，其维数 dim 为 $A \geq N$，则

$$A = \bigcup K_j$$

且 K_j 紧。由此可得 [6, 定理 3.1。8] 存在 j_0，使得 $\dim K_{j_0} \geq N$。取一点 $p \in K_{j_0}$，使得每个包含 p 的邻域 U 都满足 $\dim U \cap K_{j_0} \geq N$。由于 Ω 严格伪凸，存在一个包含 p 的开集 V 和一个局部双全纯映射 f，使得 $f(\partial\Omega \cap V)$ 在 K 的某个邻域内严格凸: $= f(U \cap K_{j_0})$。此外，若 A 不传播，则 K 不会传播到 $B(p, \epsilon) \cap f(\Omega \cap V)$。因此，我们不妨假设 b-多极性集 A 是紧的，且 Ω 是凸的并且 B-正则，甚至在 A 的某个邻域内严格凸。

然而， $p \in A$ 的某个邻域内严格凸，这意味着通过用超平面 $\Pi : L(z) = 0$ 截去 Ω 得到的开集¯构成 p 的一个邻域基。根据引理 2.3，每个

$$(A \cap \{L(z) > 0\}) \cup (\Pi \cap \bar{\Omega})$$

是多项式凸的，因此引理2.1意味着 $\dim A \geq N$ 不可能成立。 □

注。条件 $\dim A \geq N$ 充分但非必要。将域平移并缩放，使函数

$$u(z_1, \ldots, z_N) = \log\big(\sum_{j=2}^{N} |z_j|^2\big)$$

满足 $u|_\Omega \leq 0$ 和 $\{u = -\infty\} \cap \Omega \neq \emptyset$。利用映射 $z \mapsto (z, 0, \ldots\ldots, 0)$ 的标准论证随即表明， $\{u = -\infty\} \cap \partial\Omega$ 会传播至 $\{u = -\infty\} \cap \Omega$。因此，在 $\mathbb{C}^N$、 $N > 1$ 中的每个有界域上，都存在维数为 1 的传播型 b- 多极性集。

我们以如下观察结束本节；该观察也可由结合 Wikstr¨om、Oka–Weil 和 Bremermann– Sibony 的逼近定理得出。

命题2.6。设 $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^N$ 表示单位球。那么，对每个 $A \subset \partial\mathbb{B}$，$z_0 \in \mathbb{B} \setminus A$，都存在全纯多项式 P_j 和常数 $c_j > 0$，使得$\sum c_j \log |P_j| \in \mathcal{PSH}^-(\mathbb{B})$，其中

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \log |P_j(z_0)| > -\infty, \quad \limsup_{w \to A} \sum_{j=1}^{\infty} c_j \log |P_j(w)| = -\infty.$$

证明。 如果 $z_0 \in \mathbb{B} \setminus A$，那么根据定义，我们可以找到 $u \in \mathcal{PSH}^-(\mathbb{B})$，使得$u(z_0) > -\infty$，$\limsup_{w \to A} u(w) = -\infty$。仿照引理 2.3 的证明，我们可以从 u 构造连续的拟次调和函数 u_j，满足

$$u_j(z_0) > -1/2^j, \quad \limsup_{w \to A} u_j(w) < -1.$$

根据引理 2.2 的证明， u_j 可以用形如 $\max_{1 \leq k \leq n} c_{j,k} \log|P_{j,k}|$的函数一致逼近；特别地，我们可以找到一个多项式 P_j 和 $c_j > 0$，使得

$$c_j \log |P_j| < 0, \quad c_j \log |P_j(z_0)| > -1/2^j, \quad \limsup_{w \to A} c_j \log |P_j(w)| < -1.$$

由于 $\sum c_j \log |P_j|$ 是一个在 z_0 处有限的 psh 函数递减级数，因此它是拟次调和函数，且不恒等于 $-\infty$。□

3. Sets of small Hausdorff dimension are boundary pluripolar

本节旨在证明，豪斯多夫维数足够小的集合必定是 b-多极且非传播的。为统一记号，给定集合 A，我们用 $\mathcal{H}^\beta(A)$ 表示其 β 维豪斯多夫测度，并用 $\dim_{\mathcal{H}} A$ 表示其豪斯多夫维数。

我们从 Davie–Øksendal 关于峰集的论文 [5] 中提取出以下结果。

定理 3.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ 是一个伪凸域，并设 P 表示点集 $\zeta \in \partial\Omega$，其中对每个点，我们都能找到一个邻域 N 以及一个 C^2 严格拟次调和函数 $\rho \in \mathcal{PSH}(N)$，使得 $\rho(\zeta) = 0$ 且 $\rho \leq 0$ 属于 $N \cap \Omega$。那么，任何豪斯多夫维数为零的一维豪斯多夫测度集都是非传播且 *b*-多极的。

证明。令 $H^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上的有界全纯函数。根据 [5,定理 2], , 对于每个 $K \Subset \Omega$，都存在 $h_A \in H^\infty(\Omega) \cap C(\Omega \cup A)$，使得

$$h_A = 1 \text{ on } A, \quad |h_A| < 1 \text{ on } K.$$

特别地，

$$u := \log|1 - h_A| - \sup_{\Omega} \log|1 - h_A|$$

是一个负拟次调和函数，满足 $\limsup_{w \to A} u(w) = -\infty$ 且 $\sup_{w \in K} u(w) > -\infty$，因此 A 是一个不会传播到 K的 b-多极性集。由于 K 是任意的，我们得出 A 是非传播的。□

注。</style}条件 $\mathcal{H}^1(A) = 0$ 是所能期望的最佳条件，正如定理 2.5 的注所示。另一方面，存在具有“完整”豪斯多夫维数 $2N-1$的非传播 b-多极性集，因为已经存在具有这一性质的峰集 [9, 16]。我们还指出，Davie–Øksendal 的另一项主要结果 [5,定理 1] 允许对上述定理作各向异性版本。粗略地说，如果进一步假设 $N \cap \Omega$ 是严格伪凸的，那么可以考虑在复切方向上二维测度为零、在正交方向（一点处由 i倍法向量张成）上一维测度为零的集合。特别地，在每一点处切线都位于复切空间中的光滑弧是 b-多极的。

我们将提出一种利用峰函数构造 b-多极性集的另一种方法，将 Davie–Øksendal 定理上述多位势内容推广到所有能够为峰函数建立局部 H¨older 估计的域。更确切地说，给定一个有界域 Ω，考虑由满足下述条件的 $\zeta \in \partial\Omega$ 所组成的集合 $P_\beta \subset \partial\Omega$：存在一个峰函数 $h_{\{\zeta\}} \in H^\infty(\Omega)$，使得

$$|h_{\{\zeta\}}(z) - 1| \leq C_\zeta \|z - \zeta\|^\beta.$$

例如，可以在各种有限型伪凸域上构造这样的峰函数，详见 [13] 。我们将证明

定理 3.2。 每个 $A \subset P_\beta$ *Hausdorff* 维数为零的集合都是非传播的，且具有 *b*-多极性。

在进行证明之前，我们先建立复平面位势理论中的以下练习 。

引理 3.3。 弧$(e^{-i\theta}, e^{i\theta})$ 上的调和测度 $\omega(z, \mathbb{D}, (e^{-i\theta}, e^{i\theta}))$ 满足

$$\omega(z, \mathbb{D}, (e^{-i\theta}, e^{i\theta})) \geq \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2\pi} \quad z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{D}(1, |1 - e^{i\theta}|).$$

特别地，

$$-3 \cdot \omega(z, \mathbb{D}, \partial\mathbb{D} \cap \mathbb{D}(1, r)) \leq -1 \quad z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{D}(1, r)$$

当 r 充分小时。

证明。 写作 $\omega(z, \mathbb{D}, (e^{-i\theta}, e^{i\theta})) = \frac{1}{\pi}(\varphi(z) - \theta)$, 其中 φ 是该弧在 z处所张的角，并取 $\zeta \in \mathbb{D} \cap \partial\mathbb{D}(1, |1 - e^{i\theta}|)$。两次应用圆周角定理，可得 $\varphi(\zeta) = \frac{\pi+\theta}{2}$ 。因此

$$\omega(\zeta, \mathbb{D}, (e^{-i\theta}, e^{i\theta})) = \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2\pi}.$$

于是，由最大值原理可得所需的不等式。 □

定理 *3.2* 的证明。 固定 $a \in \Omega$。根据假设，对于每个 $\zeta \in A$ ，我们都可以选取一个峰函数 $h_{\{\zeta\}}$ 和一个常数 $C_\zeta > 0$ ，使得

$$|h_{\{\zeta\}}(z) - 1| \leq C_\zeta \|z - \zeta\|^\beta,$$

并与一个自同构 $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 复合（保持指数不变）后，我们不妨假设 $h_{\{\zeta\}}(a) = 0$。现在将 $A = \bigcup_n A_n$分解，其中

$$A_n \coloneqq \{\zeta \in A \, ; \, 2^{n-1} < C_\zeta \leq 2^n\}.$$

利用 $\mathcal{H}^\beta(A) = 0$，对于每个满足 $\sum \varepsilon_n < \varepsilon$的 $\varepsilon > \varepsilon_n > 0$ ，存在一个覆盖 $A_n \subset \bigcup_j \mathbb{B}(\zeta_{j,\,n},\ r_{j,\,n})$，使得

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_{j,n}^\beta < \frac{\varepsilon_n}{2^n}.$$

利用引理 3.3，我们可以将 ε_n 取得足够小，使得

$$-3 \cdot \omega(z, \mathbb{D}, \partial\mathbb{D} \cap \mathbb{D}(1, \varepsilon_n)) \leq -1, \quad z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{D}(1, \varepsilon_n).$$

定义多重调和函数

$$u_{j,n}(z) \coloneqq -\omega(h_{\{\zeta_{j,n}\}}(z), \partial\mathbb{D} \cap \mathbb{D}(1, 2^n r_{j,n}^\beta)),$$

并注意到，由于 $|\partial\mathbb{D} \cap \mathbb{D}(1,\ r)| < 2\pi r$，有

$$\begin{aligned} u_{j,n}(a) &= -\omega(0, \mathbb{D}, \partial\mathbb{D} \cap \mathbb{D}(1, 2^n r_{j,n}^\beta)) \\ &= -\frac{|\partial\mathbb{D} \cap \mathbb{D}(1, 2^n r_{j,n}^\beta)|}{2\pi} > -2^n r_{j,n}^\beta. \end{aligned}$$

另一方面，对于 z 满足 $\|z - \zeta_{j,\,n}\| < r_{j,\,n}$ 的情况，我们有

$$h_{\{\zeta_{j,n}\}}(z) \in \mathbb{D}(1, 2^n r_{j,n}^\beta) \subset \mathbb{D}(1, \varepsilon_n)$$

由于 $2^n r_{j\ ,n}^\beta < \varepsilon_n$，所以

$$\limsup_{w \to \partial\Omega \cap \mathbb{B}(\zeta_{j,n}, r_{j,n})} u_{j,n}(w) \leq -\frac{1}{3}.$$

因此，对于每个 $\varepsilon > 0$，我们都可以构造一个形式为$u_\varepsilon(z) := \sum_{j,n\in\mathbb{N}} u_{j,n}(z)$ 的多重次调和函数，其 $\limsup_{w\to A} u_\varepsilon(w) \le -\frac{1}{3}$，且不恒等于 $-\infty$，因为

$$u_\varepsilon(a) > -\sum_{i,n\in\mathbb{N}} 2^n r_{j,n}^{\beta} \ge -\varepsilon.$$

特别地，对 $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$ 重复上述论证，我们可以定义

$$u := \sum_k u_{\frac{1}{2^k}}$$

其具有以下性质：$\limsup_{w\to A} u(w) = -\infty$ 且 $u(a) > -\infty$；由于 a 是任意的，我们得出结论： A 是 b-多极且非传播的。□

注。 稍微修改上述论证，便可从 Davie–Øksendal 证明中的初始构造（具有局部 Lipschitz 估计或各向异性估计的峰函数）重新得到定理 3.1（以及其在严格伪凸情形下的相应各向异性版本）。还可以考虑其他连续模，它们由实值递增函数 $h(r)$ 给出，且满足 $\lim_{r\to 0} h(r) = h(0) = 0$。对于这类测量函数，可以定义一个 h- 豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^h$，其零测集正是那些能够用半径为 r_j 且满足$\sum h(r_j) < \varepsilon$的球覆盖的集合。此时，至少要求 $h(r) \le \log(\frac{1}{r})^{-N}$便是自然的，因为 Labutin [10] 证明了，每个满足 $\mathcal{H}^{\log(\frac{1}{r})^{-N}}(A) < \infty$ 的 $A \subset \mathbb{C}^N$都必为多重极性集。他还证明，对于每个满足下列条件的测量函数 h

$$\liminf_{r\to 0^+} h(r) \log\left(\frac{1}{r}\right)^N = 0,$$

可以找到一个非多重极性集合 A_h，使得 $\mathcal{H}^h(A_h) = 0$。这说明，内部多重次调和奇异性的情形截然不同。

注。 Yu [20]给出的一种构造表明，存在一个光滑的 B-正则域 Ω 和一个非空集合 $P \subset \partial\Omega$，使得 P 中的任何点都不存在 $A(\Omega)$ 中的峰函数。目前尚不清楚 P 可以有多大。

4. 詹森测度与表示测度并不相同

在本节中，设 $\Omega \Subset \mathbb{C}^N$ 表示一个光滑严格伪凸域，并设 $M(\partial\Omega)$ 表示 $\partial\Omega$ 上有限博雷尔测度所构成的空间。我们用$M_{z_0}(\partial\Omega) \subset M(\partial\Omega)$ 表示点 $z_0 \in \Omega$ 处的表示测度集合，即满足以下条件的$\mu \in M(\partial\Omega)$：

$$f(z_0) = \int_{\partial\Omega} f \, d\mu, \quad f \in A(\Omega).$$

若 μ 满足

$$\log|f(z_0)| \le \int_{\partial\Omega} \log|f| \, d\mu, \quad f \in A(\Omega),$$

我们记作 $\mu \in J_{z_0}(\partial\Omega)$，并称 μ 是 z_0 处的詹森测度。本节的目标是推广

定理 4.1 (Hedenmalm [7])。 令 $\mathbb{B}$ 表示 $\mathbb{C}^N$, $N > 1$中的单位球，并令$\bar{0} \in \mathbb{B}$ 表示其中心。那么集合 $M_{\bar{0}}(\partial\mathbb{B}) \setminus J_{\bar{0}}(\partial\mathbb{B})$ 非空。

Hedenmalm 的证明是通过构造给出的。我们的策略是以非构造性方法证明存在测度 $\nu \in M_{z_0}(\partial\Omega)$ 和紧集 $K \subset \partial\Omega$，使得 $\nu(K) > 0$，其中 $\mu(K) = 0$ 对每个 $\mu \in J_{z_0}(\partial\Omega)$ 都成立。按照 [14], ，我们将使用以下术语：

定义 4.2. 给定一族测度 $\mathcal{M} \subset M(\partial\Omega)$，若集合 $A \subset \partial\Omega$ 满足对于每个 $\mu \in \mathcal{M}$，都有 $\mu(A) = 0$，则称其相对于 $\mathcal{M}$ 是全零的。

众所周知（利用 Cole–Range 定理和 Bishop定理，参见例如 [14, 第 204–205] 页），紧集 K 相对于$M_{z_0}(\partial\Omega)$是全零的，当且仅当 K 是 $A(\Omega)$ 的零集；换言之，存在 $f \in A(\Omega)^{-}$，使得对于每个 $\zeta \in K$，都有 $f(\zeta) = 0$，并且对于每个 $z \in \Omega \setminus K$，都有 $f(z) \neq 0$。于是我们可以构造

$$u(z) := \log|f(z)| - \max_{w\in\bar{\Omega}} \log|f(w)|$$

这表明 K 是 b-多极且非传播的。特别地，对于任意不传播到 z_0 的˜紧的、具有传播性的 b-多极性集 K （例如取 $K := \partial\Omega \cap \Pi$，其中 Π 是不包含 z_0的复超平面），都存在 $\nu \in M_{z_0}(\partial\Omega)$，使得 $\nu(K) > 0$。因此，要推广定理 4.1，只需证明

定理4.3。 设 $A \subset \partial\Omega$ 是一个不会传播到 z_0的 *b*-多极性集。那么，相对于 $J_{z_0}(\partial\Omega)$，A 是全零的。

证明。 令 $\mathcal{PSH}^b(\Omega) := \mathcal{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{USC}(^{-}\Omega)$ 表示 Ω 上的上有界拟次调和函数（可上半连续延拓至边界）。我们先证明，对于每个 $\mu \in J_{z_0}(\partial\Omega)$，都有

$$u(z_0) \leq \int_{\partial\Omega} u \, d\mu, \quad u \in \mathcal{PSH}^b(\Omega).$$

根据 Wikstr¨om 的逼近定理和单调收敛定理，$^{-}$只需考虑 $u \in \mathcal{PSH}(\Omega) \cap C(\Omega)$。如引理 2.2 的证明所示，我们可以找到 $\Omega_j \Supset \Omega$ 和 $u_j \in \mathcal{PSH}(\Omega_j) \cap C(\Omega_j)$，使得 $|u - u_j| < \frac{1}{j}$ 在 $^{-}\Omega$ 上成立。此外，由于 Ω 是严格伪凸的，我们可以假设 Ω_j 也是严格伪凸的。仿照定理 4.3 的证明， [18, 推论 1.3.10], Bremermann–Sibony 的逼近结果给出 f_1，……， $f_n \in \mathcal{O}(\Omega_j) \subset A(\Omega)$ 以及常数$1 \geq c_1$，……， $c_n > 0$，使得

$$u_j - \frac{1}{j} \leq \max_{k=1,\ldots,n} c_k \log|f_k| \leq u_j$$

$^{-}$在 Ω 上。因此，存在一个 f_{k_0}，使得

$$u_j(z_0) - \frac{1}{j} \leq c_{k_0} \log|f_{k_0}(z_0)| \leq u_j(z_0).$$

因此，

$$u_j(z_0) - \frac{1}{j} \leq c_{k_0} \log|f_{k_0}(z_0)| \leq \int_{\partial\Omega} \max_{k=1,\ldots,n} c_k \log|f_k| \, d\mu \leq \int_{\partial\Omega} u_j \, d\mu,$$

因此，令 $j \to \infty$ 即可得到该断言。在 u_A 是一个负的拟次调和函数，且对于每个 $\zeta \in A$ 都有 $u_A(z_0) > -\infty$ 和 $u_A(\zeta) = -\infty$ 的特殊情形下，

$$-\infty < \int_{\partial\Omega} u_A \, d\mu \leq \int_A u_A \, d\mu.$$

我们得出 $\mu(A) = 0$，从而完成证明。 □

推论 4.4. 设$\Omega \subset \mathbb{C}^N, N > 1$是一个光滑严格伪凸域。则对每个 $z_0 \in \Omega$， $M_{z_0}(\partial\Omega) \setminus J_{z_0}(\partial\Omega)$ 均非空。

注。 Ω 光滑且严格伪凸这一假设可以适当放宽，因为 Cole–Range 定理适用于任何满足 $A(\Omega)$ 紧性的域。更多详情请参见 [4] 及其中的参考文献。

References

1. B. Avelin、L. Hed 和 H. Persson, *Approximation of plurisubharmonic functions*, 《复变函数与椭圆方程》, **61** （2016）, 第 1 期, 23–28。2. E. Bedford 和 B. A. Taylor, *The Dirichlet problem for a complex Monge–Ampère equation*, 《数学发明》, **37** （1976）, 1–44。3. , *A new capacity for plurisubharmonic functions*, 《数学学报》, **149** （1982）, 1–40。4. L. J. Boos, *Totally null sets for A（X）*, 《澳大利亚数学会公报》, **87** （2013）, 第 1 期, 108–114。5. A. M. Davie 和 B. K. Øksendal, *Peak interpolation sets for some algebras of analytic functions*, 《太平洋数学杂志》, **41** （1972）, 第 1 期, 81–87。6. R. Engelking, *Dimension theory*, 北荷兰数学丛书, 第 19 卷, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1978。7. H. Hedenmalm, *Closed ideals of the ball algebra*, 《伦敦数学会会报》, **21** （1989）, 469–474。8. L. H¨ormander, *An introduction to complex analysis in several variables*, 第 3 版, 北荷兰数学丛书, 第 7 卷, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1990。9. P. Kot, *A peak set of Hausdorff dimension $2n-1$ for the algebra A D in the boundary of a domain D with C^2 boundary* ( ), 《复分析与算子理论》 (), 文章编号 **18** 2024 90 。10. D. Labutin, *Pluripolarity of sets with small Hausdorff measure*, 《数学手稿》, **102** （2000）, 163–167。11. M. Nilsson, *Plurisubharmonic functions with discontinuous boundary behavior*, 《印第安纳大学数学杂志》**74** （2025）, 第 2 期, 539–553。12. , *Quasibounded solutions to the complex Monge–Ampère equation*, 预印本, arXiv:2505.09301（2025）。13. A. Noell, *Peak points for pseudoconvex domains: A survey* **18** 2008 4, , 《几何分析杂志》 () , 1058 1087 第 – 期。14. W. Rudin, *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$*, 数学经典丛书, Springer, 柏林和海德堡, 2008。15. N. Sibony, *Prolongement des fonctions holomorphes bornées et métrique de Carathéodory*, 《数学发明》, **29** （1975）, 第 3 期, 205–230。16. B. Stensønes Henriksen, *A peak set of Hausdorff dimension $2n-1$ for the algebra A D in* ( ), 《数学年刊》 *the boundary of a domain D with C^∞-boundary in $\mathbb{C}^n$* **259** 1982 271 277 () , –。17. E. L. Stout, *The dimension of peak-interpolation sets* **86** 1982 3, , 《美国数学会会刊》 () , 413 416 第 – 期。18. , *Polynomial convexity*, 数学进展丛书, 第 261 卷, Birkh¨auser, 马萨诸塞州波士顿, 2007。19. F. Wikstr¨om, *Jensen measures and boundary values of plurisubharmonic functions*, 《阿克数学》, **39** （2001）, 181–200。20. J. Yu, *A counterexample to the existence of peaking functions*, 《美国数学会会刊》**125** （1997）, 第 8 期, 2385–2390。