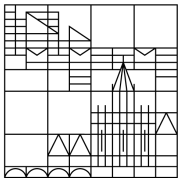
arXiv:2602.10926v1 [math.FA] 11 Feb 2026

Philipp J. di Dio

多项式上的线性算子与 K-正性保持算子

一场从分析走向代数、再回归分析的旅程

2026年2月12日



Universität Konstanz

讲义 – 2025/26冬季学期

前言

Th这是我关于

关于

Linear Operators on Polynomials,
K-Positivity Preserver, and their Generators.

该讲座于2025/26冬季学期在康斯坦茨大学举行。内容主要取自 [dD24], [dDS25], [dDL25],和 [dD25]。

设 $n \in$ 为自然数集，且 $K \subseteq$ 实数集^n 为闭集。实代数几何研究如下锥：

$$\mathrm{Pos}(K) := \left\{ f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \,\middle|\, f(x) \geq 0 \text{ for all } x \in K \right\}$$

由在 K上非负的多项式构成。关于这一仍然活跃的领域，已有大量文献。

因此，线性算子

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

却鲜少受到研究。事实上，迄今人们对这些算子知之甚少，尤其是当它们必须保持 K-正性时，也就是说，

$$T\mathrm{Pos}(K) \subseteq \mathrm{Pos}(K).$$

本讲座旨在介绍这一领域的最新进展，也就是文献 [dD24], [dDS25], [dDL25],和 [dD25]所取得的成果。这里介绍的内容适合一学期的课程，包括每周两次、每次 1.5 小时的讲座，以及每周一次、约 45 分钟的习题课。

本课程面向数学专业的硕士生。除了数学学士学位（尤其是具备分析和线性代数的基础知识）外，建议学生或读者还具备（实）代数几何（即非负多项式）、（偏）微分方程、李群与李代数以及算子理论的基础知识。

康斯坦茨，2026年2月 *Philipp J. di Dio*

目录

前言 .v

第一部分 矩简介

1 矩与矩泛函.3
1.1 矩与矩泛函.3 1.2 表示测度支集的限制.5 1.3 矩锥与 Riesz 泛函.6 1.4 Richter定理.7 习题.10

2 适应空间与肖凯理论.13
2.1 连续函数的适应空间.13 2.2 基本表示定理.14 2.3 经典矩问题.15 习题.20

第二部分 多项式上的线性算子

3 多项式上线性算子的表示. 23
3.1 实数集$[x_1, \ldots, x_n]$上的一般线性算子的表示 . . . . 23 3.2 实数集$[x_1, \ldots, x_n]$ 上的对角算子的表示 .25 习题 .27

4 拓扑向量空间$\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$和$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ .29
4.1 Fréchet 空间 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^n}$ 与 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ .30 习题.33

第三部分 K-正性保持算子

5 K-正性保持算子 .37
5.1 定义.37 5.2 K-正性保持算子的刻画.38 5.3 K-正性保持算子的性质. 42 5.4 常系数保正算子与序列卷积.45 习题.47

第四部分 K-保正半群的生成元

6 有限维与无限维李群.51
6.1 有限维李群.51 6.2 矩阵李群与矩阵指数函数.53 6.3 正则 Fr´echet 李群.56 习题.58

7 常规弗´雷歇李群 $\mathfrak{D}_c$ 常系数线性算子.59
7.1 $\mathfrak{D}_c$ 和 $\mathfrak{d}_c$ 的定义.59 7.2 李群$\mathfrak{D}_{c,\ d}$ .59 7.3 $\mathfrak{D}_{c,\ d}$ 的李代数$\mathfrak{d}_{c,\ d}$ .62 7.4 常规弗雷歇李群 $\mathfrak{D}_c$ 及其常规弗雷歇李代数 $\mathfrak{d}_c$ .64 习题.68

8 生成元：R^n-正性保半群（常系数）.69
8.1 常系数有限阶生成元.69 8.2 无限可分测度.70 8.3 R^n-正性保半群（常系数）的生成元.71 习题.76

9 集合 $\mathfrak{d}$ .77
9.1 $\mathfrak{d}$ 集合及其一些性质 $\mathfrak{d}$.77 9.2 $A \in \mathfrak{d}$ 的有限维不变子空间 V_i . . . . . 82 9.3 $\mathfrak{d}$ 中的李代数 .84 习题 .86

10 K-保正半群的生成元.87
10.1 通过预解式描述.87 10.2 R^n-保正半群的生成元.91 习题.96

11 最终正半群.97
11.1 第一个例子.97 11.2 第二个例子.99 习题.103

附录

参考文献 .107

符号表 .111

索引 .113

第一部分 矩简介

第 1 章
矩与矩泛函

我们的主要目标是研究线性算子

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n],$$

尤其是满足

$$T\mathrm{Pos}(K) \subseteq \mathrm{Pos}(K)$$

对于某些给定的闭 $K \subseteq$ 实数集^n 和 $n \in$ 自然数集。虽然这一表述看起来纯粹是代数问题，但实际上需要用到泛函分析方法。它们是 Pos(K) 的对偶对象，即矩。

1.1 矩与矩泛函

定义 1.1. 设 (X,A) 为一个可测空间，设 μ 是 (X,A) 上的一个测度，且设 f: X $\to$ R 是一个 μ-可积函数。数

$$s_f := \int_X f(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

称为 μ 关于 f的矩。

例子 1.2. (a) 设 (X,A) 为一个可测空间， f: X $\to$ R 是可测的，且 δ_y 是某点 $y \in$ X 处的点测度，即，

$$\int_X f(x)\, \mathrm{d}\delta_y(x) = f(y).$$

那么 $f(y)$ 就是 δ_y 关于 f的矩。

(b) 设 (R, $\mathfrak{B}$(R)) 为带有博雷尔-σ-代数 $\mathfrak{B}$(R) 的 R，设 $f(x) = x^k$ 对于某个$k \in$ 自然数集$_0$, 且设 μ 由 $\mathrm{d}\mu(x) = \chi_{[0,1]}\, \mathrm{d}x$ 给出，其中$\chi_{[0,1]}$ 为单位区间 $[0, 1]$的特征函数。那么

$$s_k := \int_{\mathbb{R}} x^k \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_0^1 x^k \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{k+1}$$

对于所有 $k \in$ 自然数集$_0$，它都是 μ 关于函数 x^k的矩，简写为k-阶矩 μ。

(c) 设 $n \in \mathbb{N}$，且 μ 是 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ 上的一个测度，使得对于所有 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$，$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ 均为 μ- 可积。那么

$$s_\alpha := \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \, \mathrm{d}\mu(x)$$

是 α 阶矩。s_α 是 μ 的经典或多项式矩。此处「矩」这一名称源于：设 $\mathbb{R}^3$ 中有一个物体，其密度分布为 $\rho(x, y, z)$，那么

$$\int_{\mathbb{R}^3} (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

是密度为 ρ 的物体绕 z 轴旋转时的转动惯量。。

定义 1.3。设 (X,A) 为一个可测空间，V 是由可测函数 $f : \mathrm{X} \to \mathrm{R}$ 构成的（有限维或无限维）实向量空间，并设

$$L : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

是 V 上的一个线性泛函。若存在 (X,A) 上的测度 μ，使得

$$L(f) = \int_{\mathcal{X}} f(x) \, \mathrm{d}\mu(x) \tag{1.1}$$

对所有 $f \in \mathrm{V}$。式 (1.1) 中的测度 μ 称为 L 的表示测度 。若式 (1.1) 中的 μ 是唯一的，则称 L 为确定的。否则，称 L 为不确定的。若 V 是有限维的，则称 L 为截断矩泛函。

例子 1.4. (a) 设 (X,A) 为一个可测空间，设 $y \in \mathrm{X}$，并设 V 为可测函数 $f :$ X $\to$ 实数集 的（有限维或无限维）实向量空间。则

$$l_y : \mathcal{V} \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto l_y(f) := f(y)$$

是一个以 δ_y 为表示测度的矩泛函。

(b) 设

$$L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$$

定义为

$$L(x^k) := \frac{1}{k+1}$$

对所有 $k \in$ 自然数集$_0$ 成立，并通过线性扩展到所有实数集$[x]$。那么 L 是一个矩泛函，其表示测度为 μ，其中 $\mathrm{d}\mu(x) = \chi_{[0,1]}\,\mathrm{d}x$。表示测度$\mu$ 是唯一的，且 L 是确定的，正如下一个结果所示。 。

命题 1.5. 设 $n \in$ 自然数集，设 $(\mathcal{X}、\mathcal{A}) =$ (实数集^n, $\mathfrak{B}$(实数集^n))，并设

$$L : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$$

是一个至少有一个表示测度 μ 且支集μ 紧的矩泛函。那么 μ 是唯一的，且 L 是确定的。

证明. 见习题 1.3。 □

命题 1.6. 设 $(\mathcal{X}、\mathcal{A})$ 是一个可测空间，设 $\mathcal{V}$ 是由可测函数构成的实向量空间 f: $\mathcal{X} \to$ 实数集，并设

$$L : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

是不定矩泛函。那么 L 有无穷多个表示测度。

证明。 见习题 1.4。 □

1.2 表示测度支集的限制

对于任意集合 X 上的函数 f: X $\to$ R，我们定义

$$\mathcal{Z}(f) := \{x \in \mathcal{X} \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) \tag{1.2}$$

函数的 f零点集。

定理 1.7。 设 $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ 是一个可测空间，设 $\mathcal{V}$ 是由可测函数 f: $\mathcal{X} \to$ ℝ构成的实向量空间，并设

$$L : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

是一个矩泛函。若存在函数 $g \in \mathcal{V}$ 满足

$$g \geq 0 \quad \textit{and} \quad L(g) = 0,$$

then

$$\mu\big(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}(g)\big) = 0$$

对于每个 L 的表示测度 μ，也就是说，每个 L 的表示测度 μ 都支撑在 $\mathcal{Z}(g)$ 上。

证明。定义

$$A_0 := \{x \in \mathcal{X} \mid g(x) \geq 1\} = g^{-1}([1, \infty))$$

and

$$A_n := \left\{x \in \mathcal{X} \,\middle|\, n^{-1} > g(x) \geq (n+1)^{-1}\right\} = g^{-1}([(n+1)^{-1}, n^{-1}))$$

对所有 $n \in$ 自然数集。由于 g 可测，且 $[1,\infty)$ 和 $[(n+1)^{-1},\ n^{-1})$ 对所有 $n \in$ 自然数集均为博雷尔集，因此对所有 $n \in$ 自然数集，$A_n \in \mathrm{A}$。于是

$$0 \leq \mu(A_n) = \int_{\mathcal{X}} \chi_{A_n}(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \leq (n+1) \int_{A_n} g(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \leq (n+1) \cdot L(g) = 0$$

对所有 $n \in$ 自然数集$_0$, ，即 $\mu(A_n) = 0$ 对所有 $n \in$ 自然数集$_0$。因此,

$$\mu\big(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}(g)\big) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \mu(A_n) = 0. \qquad \square$$

1.3 矩锥与里斯泛函

定义 1.8。 设 (X，A) 是一个可测空间，V 是由可测函数 f： X $\to$ R 构成的实向量空间。定义

$$\mathcal{L}(\mathcal{V}) := \{L : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \text{ linear} \mid L \text{ is a moment functional}\}$$

为 V 上的矩泛函锥 。若 V 是有限维的，则 L(V) 称为截断 矩锥。

引理 1.9。 设 $(\mathcal{X},\ \mathcal{A})$ 是一个可测空间，且 $\mathcal{V}$ 是由可测函数 f： $\mathcal{X}$ $\to \mathbb{R}$构成的实向量空间。则 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ 是一个凸锥。

证明。 见问题 1.5。 $\square$

定义 1.10. 设 (X,A) 为一个可测空间，并设 V 为可测函数 f: X $\to$ 实数集 的实向量空间。若 $v = (v_i)_{i \in I}$ 是 V 的一个基，其指标集为 I，并且若 $s = (s_i)_{i \in I} \in$ 实数集^I 是由 I 索引的实序列，则*Riesz* 泛函

$$L_s : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

s 的定义为

$$L_s(v_i) := s_i$$

对所有 $i \in I$ 成立，并线性延拓到 V。若 L_s 是一个矩泛函，则 s 称为矩序列。若 I 有限，从而 V 是有限维的，则矩序列 s 称为截断的。我们称集合

$$\mathcal{S}(\mathcal{V}, v) := \left\{s \in \mathbb{R}^I \,\middle|\, s \text{ is a momemt sequence}\right\}$$

所有矩序列构成的矩锥。

注1.11。矩锥 S(V, v) 取决于 V 的基 $v = (v_i)_{i \in I}$。锥 L(V) 不依赖于 V 的具体基 $v = (v_i)_{i \in I}$。由于 V 的一组基 v 描述了 V，

$$\mathcal{L}(\mathcal{V}) \cong \mathcal{S}(\mathcal{V}, v) \cong \mathcal{S}(\mathcal{V}, \tilde{v})$$

对于 V 的任意基 $\tilde{v}$。 ∘

例子 1.12. 设 (X, A) $= (\mathrm{R}, \mathfrak{B}(\mathrm{R}))$，且 V $= \mathrm{R}[x]$，其基为 $v = (v_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ 和 $v_i(x) := x^i$ 对所有 $i \in$ 自然数集$_0$ 均成立。

(a) 设 $y \in \mathrm{R}$，并令

$$s := \left(y^i\right)_{i \in \mathbb{N}_0}.$$

那么，根据例 1.4 (a)，s 是一个矩序列。

(b) 设

$$s := \left(\frac{1}{1+i}\right)_{i \in \mathbb{N}_0}.$$

那么，根据例 1.4 (b)，s 是一个矩序列。 ∘

1.4 Richter定理

矩泛函和测度可能很难描述。然而，正如下一个结果所示，截断矩泛函总有非常简单的表示测度。

Richter 定理 1.13 ([Ric57, Satz 4])。设($\mathcal{X}$,$\mathcal{A}$) 为一个可测空间，设$\mathcal{V}$ 为由可测函数构成的有限维实向量空间 $f: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$，并设

$$L : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

为一个矩泛函。那么，L 有一个有限原子表示测度

$$\mu = \sum_{i=0}^{k} c_i \cdot \delta_{x_i}$$

其原子数至多为 $k \leq \dim \mathcal{V}$，也就是说，存在常数 c_1、……、$c_k > 0$ 以及互不相同的点 x_1、……、$x_k \in \mathcal{X}$，使得

$$L(f) = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot f(x_i)$$

对所有 $f \in \mathcal{V}$。

证明。 我们通过对 $n :=$ dim V 进行归纳来证明。

$n = 1$: 若对所有 $f \in \mathrm{V}$ 都有 $L(f) = 0$，则 $\mu = 0$ 是 L 的一个表示测度。因此，不妨设对某个 $f \in \mathrm{V} \setminus \{0\}$，有 $L(f) \neq 0$。固定 $f \in \mathrm{V} \setminus \{0\}$。由于 L 是一个矩泛函，存在一点 $x \in \mathrm{X}$，使得

$$f(x) \neq 0 \quad \text{and} \quad \operatorname{sgn} L(f) = \operatorname{sgn} f(x).$$

Then

$$L(g) = g(x) \cdot \frac{L(f)}{f(x)} = \int_{\mathcal{X}} g(y)\, \mathrm{d}\mu(y) \qquad \text{with} \qquad \mu = \frac{L(f)}{f(x)} \cdot \delta_x$$

对于任意 $g \in \mathrm{V}$，由于 V 是一维的，因此 $g = c \cdot f$ with $c = \frac{g(x)}{f(x)}$。

$n \to n+1$: 假设对所有 $\dim \mathrm{V} = 1, \ldots\ldots, n$，定理均成立。我们需要证明它对 $\dim \mathrm{V} = n+1$ 也成立。设

$$\tilde{\mathcal{L}} := \operatorname{conv} \operatorname{cone} \{l_x \mid x \in \mathcal{X}\}.$$

Then

$$\tilde{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{L}.$$

˜由于 V 是有限维的，L 和 L 都是有限维的，并且具有非空内部，其中

$$\operatorname{int} \tilde{\mathcal{L}} \subseteq \operatorname{int} \mathcal{L}.$$

假设

$$\operatorname{int} \tilde{\mathcal{L}} \neq \operatorname{int} \mathcal{L}$$

并令

$$L \in \operatorname{int} (\operatorname{int} \mathcal{L} \setminus \tilde{\mathcal{L}}) = \operatorname{int} \mathcal{L} \setminus \overline{\tilde{\mathcal{L}}}.$$

那么存在一个 $f \in \mathrm{V} \cong \mathrm{V}^{**}$ 使得

$$f(x) = l_x(f) > 0 \qquad \text{for all } x \in \mathcal{X}$$

and

$$L(f) < 0. \tag{1.3}$$

由于 $L \in \operatorname{int} \mathrm{L} \subseteq \mathrm{L}$ 是一个矩泛函，并且 $f \in (\mathrm{V}_+)$,

$$L(f) \geq 0.$$

˜这与 (1.3) 矛盾，即我们证明了 $\operatorname{int} \mathrm{L} = \operatorname{int} \mathrm{L}$。

现在令

$$L \in \partial \mathcal{L} \cap \mathcal{L}$$

为截断矩锥边界上的一个矩泛函。那么存在一个

$$f \in \mathcal{V}_+ \subseteq \mathcal{V} \cong \mathcal{V}^{**}$$

使得

$$L(f) = 0.$$

由定理 1.7， L 的每个表示测度 μ 均支撑在 Y 上：= Z(f)。设 W 为 V 的一个 n 维子空间，使得

$$\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathbb{R} \cdot f,$$

也就是说， L 仅在 $\mathrm{W}|_{\mathcal{Y}}$ 上取值，因为 $L(f) = 0$。因此，$\dim \mathrm{W}|_{\mathcal{Y}} = n$，由归纳假设可知定理成立。□

前面的证明是 Richter 的原始证明，只是更新了数学表述。

注 1.14（见 [dDS22]）。用有限个点处的求值代替积分，早已由 C. F. Gauß [Gau15]采用并加以研究。因此，Richter 定理 1.13 中的 k-原子表示测度也称为（高斯）求积公式。

Richter 定理 1.13 的历史令人困惑，文献中的说法也常常具有误导性。因此，我们按时间顺序列出此前的版本，以及几乎同时出现的版本。这些版本（包括 Richter 的版本）的条件如下：

(A) A. Wald 1939[1] [Wal39，命题 13]：$\mathrm{X} = \mathrm{R}$，且 $f_i(x) = |x - x_0|^{d_i}$，其中 $d_i \in$ 自然数集$_0, 0 \le d_1 < d_2 < \cdots < d_n$，并且 $x_0 \in \mathrm{X}$。**(B)** P. C. Rosenbloom 1952 [Ros52，推论 38e]：(X，A) 是可测空间，且 f_i有界可测函数。**(C)** H. Richter 1957[2] [Ric57，定理 4]：(X，A) 是可测空间，且 f_i 可测函数。**(D)** M. V. Tchakaloff 1957[3] [Tch57，定理 II]：$\mathrm{X} \subset \mathrm{R}^n$ 是紧的，且 f_i 次数至多为 d的单项式。**(E)** W. W. Rogosinski 1958[4] [Rog58，定理 1]：(X，A) 是可测空间，且 f_i可测函数。

从这份清单可以看出，Tchakaloff 于 1957 年提出的结果 (D) 是 Rosenbloom 于 1952年提出的结果 (E) 的特殊情形，而一般情形则几乎同时由 Richter 和 Rogosinski 证明，确切日期见脚注。阅读 Richter 的论文时，乍看之下可能会以为他只讨论了一维情形，但仔细阅读便会发现，他的命题（Satz）4 实际上涵盖了可测函数的一般情形。Rogosinski 讨论的是一维情形，但在 [Rog58] 引言末尾指出：

[1] 收稿日期：1939年2月25日。出版日期：1939年9月。
[2] 收稿日期：1956年12月27日。出版日期：1957年4月。
[3] 出版日期：1957年7月至9月[4] 收稿日期：1957年8月22日。出版日期：1958年5月6日。

最后，本文将矩问题限制在一维情形，这一点并非至关重要。我们的许多几何论证只需稍作显而易见的修改，便可推广到任意有限维，甚至某些更一般的测度空间。

上述 Richter 定理 1.13 的证明，以及 [Sch17 中的证明，定理 1.24], ，不过是对 Richter 和 Rogosinski 证明的现代表述，并未增加任何论证。需要注意的是，Rogosinki 的论文 [Rog58] 是在 Richter 的论文 [Ric57]发表约半年后提交的。

值得注意的是，Richter 和 Rogosinski 于 1957/58 年得到的一般结果，可以由 Rosenbloom 1952 年的定理推出，参见问题 1.8。从这一更宽广的历史视角来看，将 Richter定理1.13也称为*Richter–Rogosinski–Rosenbloom* 定理或许是合理的。

在关于截断多项式矩问题的现代文献中，Richter 定理 1.13 被忽略了。这个问题可能起源于 1997/98年，当时一篇已发表的论文将其作为一个公开问题提出。[5] 论文 [Ric57] 以及 J. H. B. Kemperman 的大量著作当时均未被纳入。尤其是 [Kem68，其中 Kemperman 完整陈述了一般定理（Richter 定理 1.13），并在其中将其归功于 Richter 和 Rogosinski，但该文献却被遗漏了。后来，在其他几部著作中，这一遗漏也没有得到补正。这个错误在文献中持续了数年，而 Richter 定理 1.13 也在数篇论文中以较弱的形式被重新证明。即使在如今，仍有论文未意识到 Richter 定理 1.13，或不了解 [Ric57]的内容。 。

习题

1.1 设 $t \in [0, \infty)$ 和

$$s(t) := (1, 0, t, 0, t^2, 0, \dots).$$

a) 证明 $s(t)$ 是一个矩序列。表示测度是什么？ **b)** $s(t)$ 是确定的吗?

1.2 对于例 1.4 (a)，证明或反驳以下命题：

a) 如果对于每个 $x \in \mathrm{X} \setminus \{y\}$，都存在一个函数 $f \in \mathrm{V}$，使得 $f(x) \neq f(y)$，那么 δ_y 是唯一的，且 L 是确定的。**b)** 如果存在一点 $x \in \mathrm{X} \setminus \{y\}$，使得 $f(x) = f(y)$，那么 δ_x 和 δ_y 是 L 的两个不同表示测度，即 L 是不确定的。

1.3 证明命题 1.5。提示：使用 Stone–Weierstrass 定理。

1.4 证明命题 1.6。

1.5 证明引理 1.9。

1.6 非闭矩锥和闭矩锥 L (V)。设 V 为有限维的。

[5] 对于这篇以及后续重新证明 Richter 定理 1.13 的论文，我们不提供参考文献。

a) 举出一个不闭的 L 的例子。给出一个显式的 $L \in \partial \mathrm{L} \setminus \mathrm{L}$。**b)** 证明：如果存在一个 $e \in \mathrm{V} \subseteq \mathrm{C(X,R)}$，使得对所有 $x \in \mathrm{X}$ 都有 $e(x) > 0$，且 $\mathrm{X} \subset \mathrm{R}^n$ 为紧集，那么 L 是闭的。

1.7 给出一个有限维 V 的例子，使得 $\mathrm{L(V)} \cong \mathrm{R}^{\dim \mathcal{V}}$。

1.8 证明 Richter 定理 1.13 可由 Rosenbloom 定理推出，即证明可以省略所有 f_i 在可测空间 (X,A) 上有界这一附加假设。

1.9 设 $n \in$ 自然数集。设 $A, B \subseteq$ 实数集^n 为开的且凸的，并满足 $B \subseteq A$。证明要么

$$A = B \qquad \text{or} \qquad \operatorname{int}(A \setminus B) = A \setminus \overline{B} \neq \emptyset.$$

这一论证在 Richter 定理 1.13 的证明中被隐含地使用。关于凸集的更多内容，参见例如 [Roc72] 或 [Sch14]。

第 2 章
适应空间与肖凯理论

上一章我们介绍了矩、矩序列和矩泛函，尤其是它们的截断版本。现在我们将探讨适配空间 和肖凯理论 ，以确定线性函数何时

$$L : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

是矩泛函。适配空间理论以 Gustave Choquet 命名，参见 [Cho69, Phe01]。

2.1 连续函数的适应空间

定义 2.1. 设 X 是一个集合，V 是由函数 f: X $\to$ R 构成的实向量空间。定义

$$\mathcal{V}_+ := \{f \in \mathcal{V} \mid f \geq 0\}.$$

定义2.2。 设 X 为局部紧豪斯多夫空间，且 f， $g \in$ C(X，R)$_+$。若对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在$h_\varepsilon \in$ C$_c$(X，R)，使得

$$g \leq \varepsilon f + h_\varepsilon,$$

则称 f 支配 g。

等价表述如下。

引理2.3（例如参见 [Sch17，第1条引理。4]）。 设$\mathcal{X}$ 为局部紧豪斯多夫空间，且设 $f, g \in C(\mathcal{X}，\mathbb{R})_+$。则以下命题等价：

(i) f 支配 g。*(ii)* 对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个紧集 $K_\varepsilon \subseteq \mathcal{X}$ 使得

$$g(x) \leq \varepsilon \cdot f(x)$$

对于所有 $x \in \mathcal{X} \setminus K_\varepsilon$。

(iii) 对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个 $\eta_\varepsilon \in C_c(\mathcal{X}$，实数集)，满足 $0 \le \eta_\varepsilon \le 1$，使得

$$g \le \varepsilon \cdot f + \eta_\varepsilon \cdot g.$$

证明。 见习题 2.1。 □

定义 2.4。 设 X 是一个局部紧豪斯多夫空间，且设 $E \subseteq$ C(X,实数集) 是一个向量空间。那么，如果满足以下条件，则称 E 为适配空间：

(i) $E = E_+ - E_+$，(ii) 对每个 $x \in$ X，都存在一个 $f \in E_+$，使得 $f(x) > 0$，并且 (iii) 每个 $g \in E_+$ 都受某个 $f \in E_+$ 支配。

由于黎斯表示定理，空间 C_c(X, 实数集)$_+$ 尤其值得关注。以下结果表明，对任意给定的适配空间 $E \subseteq$ C(X,实数集)，任意 $g \in C_c$(X, 实数集)$_+$ 都受某个 $f \in E_+$ 支配（甚至有界）。

引理 2.5。 设$\mathcal{X}$ 是局部紧豪斯多夫空间，$g \in C_c(\mathcal{X}$，实数集)$_+$，且 $E \subseteq C(\mathcal{X}$，实数集) 是一个适配空间。那么存在一个 $f \in E_+$ 使得 $f \ge g$。

证明。 见习题 2.6。 □

例 2.6。 设 $n \in$ 自然数集，且 X $\subseteq$ 实数集^n 是闭集。那么空间

$$E = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

X 上的多项式构成一个适配空间，见习题 2.3。 ∘

2.2 基本表示定理

引入适配空间的一个重要原因，是为了得到以下表示定理。它是 Haviland 定理 2.11 的一般形式，并将用于高效地解决大多数矩问题。

基本表示定理 2.7 （例如参见 [Cho69，第 34 定理。6]）。 设$\mathcal{X}$ 是一个局部紧豪斯多夫空间，设 $E \subseteq C(\mathcal{X},\mathbb{R})$ 是一个适配子空间，并设

$$L : E \to \mathbb{R}$$

是一个线性泛函。那么，以下条件等价：

(i) 泛函 L 是 E_+-正的，即 $L(f) \ge 0$ 对所有 $f \in E_+$均成立。*(ii)* L 是一个矩泛函，即存在一个定义在$\mathcal{X}$ 上的（拉东）测度 μ，使得

(a) 所有 $f \in E$ 都是 μ-可积的，

并且 *(b)* 对所有 $f \in E$，

$$L(f) = \int_{\mathcal{X}} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

这一非常一般的结果的证明超出了本课程可用的时间。包含所有技术细节的完整证明可在我的 T-系统讲义中找到

https://arxiv.org/abs/2403.04548 Thm. 2.9

或参见我主页上修订后的讲义

https://www.uni-konstanz.de/zukunftskolleg/community/philipp-di-dio/.

2.3 经典矩问题

本节介绍几种经典矩问题的解法：施蒂尔切斯矩问题、Hamburger 矩问题、豪斯多夫矩问题，以及哈维兰定理。我们按照时间顺序排列这些结果。

第一个矩问题由 T. J. Stieltjes 在 1894 [Sti94] 中解决。他是第一个完整阐述矩问题并解决第一个矩问题的人，同时也因此创立了以他名字命名的积分理论：斯蒂尔切斯积分。

施蒂尔切斯定理 2.8([施蒂94])。设 $s = (s_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ 是一个实数序列。那么以下条件等价：

(i) s 是一个 $[0,\infty)$-矩序列（斯蒂尔切斯矩序列）。*(ii)* 对所有 $p \in 正([0,\infty))$，$L_s(p) \geq 0$。

证明。见习题 2.7。 □

下一个矩问题由 H. L. Hamburger 解决。

Hamburger 定理 2.9 ([Ham20, SatzX and Existenztheorem(§8, 第 289 页)])。设 $s = (s_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ 是一个实数序列。那么以下条件等价：

(i) s 是一个 实数集-矩序列（*Hamburger* 矩序列或简称矩序列）。*(ii)* 对所有 $p \in 正(实数集)$，$L_s(p) \geq 0$。

证明。 参见问题 2.8。 □

在 Hamburger 之后不久，即 1921 年，F. Hausdorff 解决了 $[0,1]$ 上的矩问题。

Hausdorff 定理 2.10 ([Hau21, SatzII and III])。 设 $s = (s_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ 为一个实数序列。则以下各项等价：

(i) s 是一个 $[0,1]$-矩序列（*Hausdorff* 矩序列）。（*ii*） $L_s(p) \geq 0$ 对所有 $p \in \mathrm{Pos}([0,1]$*}*。

证明。 参见问题 2.9。 □

E. K. Haviland 在 [Hav36, 定理], 中提出了求解任意闭 $K \subseteq \mathbb{R}^n$、$n \in \mathbb{N}$ 上的 K-矩问题的一般方法；关于更早的 $K = \mathbb{R}^n$ 情形，另见 [Hav35, 定理] 。他不再使用连分数，而是采用黎斯表示定理，即通过积分表示线性泛函，并将表示测度的存在性与线性泛函在

$$\mathrm{Pos}(K) := \{f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \mid f \geq 0 \text{ on } K\}. \tag{2.1}$$

Haviland 定理 2.11 ([Hav36, 定理])**.** 设 $n \in$ 自然数集，设 $K \subseteq$ 实数集^n 为闭集，并设 $s = (s_\alpha)^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 为实数序列。则下列各项等价：

(i) s 是 K-矩序列。*(ii)* 对所有 $p \in \mathrm{Pos}(K)$，有 $L_s(p) \geq 0$。

证明。 见习题 2.10。 □

在 [Hav35, 定理] 中，Haviland “仅仅”证明了情形 $K =$ 实数集^n，所用的是 M. Riesz 的延拓方法。在 [Hav36, 定理] 中，该结果被推广到任意闭的 $K \subseteq$ 实数集^n。Haviland 将这一想法归功于 A. Wintner [Hav36, 第 164] 页：

> A. Wintner 随后指出，应当可以将这一结果 [[Hav35, 定理]] 加以推广，即要求求解该问题的分布函数 [测度]具有包含于预先指定集合中的谱 [支集]；这一结果将表明，各种标准特殊矩问题（施蒂尔切斯、赫格洛茨[三角], Hamburger、一维或多维豪斯多夫）的众所周知的判别准则，都是上述一般 n 维矩问题的特例。本注记 [[Hav36]] 的目的即在于完成这一推广。

在 [Hav36] 之后，Haviland 先给出一般定理 2.11，随后逐一讨论所有经典结果（定理 2.8 至 2.10，以及单位圆 T 上的赫格洛茨（三角）矩问题, 本文未予收录），并说明如何从此时已知的非负多项式表示中，重新得到所有这些结果（即关于序列的条件）。

对于汉堡矩问题 （Hamburger 定理 2.9），Haviland 使用

$$\mathrm{Pos}(\mathbb{R}) = \left\{f^2 + g^2 \,\middle|\, f, g \in \mathbb{R}[x]\right\} \tag{2.2}$$

这在此前已为 D. Hilbert [Hil88] 所知。对于 施蒂尔切斯矩问题（施蒂尔切斯定理 2.8），他使用

$$\mathrm{Pos}([0, \infty)) = \left\{f_1^2 + f_2^2 + x \cdot (g_1^2 + g_2^2) \,\middle|\, f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbb{R}[x]\right\} \tag{2.3}$$

参考 G. P´olya 和 G.Szeg¨o（ [PS64、PS70] 的早期版本）。在[PS64 第 82 页例 45] 中，表示式 (2.3) 仍被列出，尽管此前已有人知道这一点，参见例如 [ST43 第 6 页脚注],, 其中指出

$$\mathrm{Pos}([0, \infty)) = \left\{f^2 + x \cdot g^2 \,\middle|\, f, g \in \mathbb{R}[x]\right\} \tag{2.4}$$

已经足够。此外，在 [Sch17 命题 3.2]中，使用的是表示式 (2.3)，而不是更简单的表示式 (2.4)。

对于 $[-1,1]$-矩问题，Haviland 使用

$$\mathrm{Pos}([-1,1]) = \left\{ f^2 + (1-x^2)\cdot g^2 \,\middle|\, f,g \in \mathbb{R}[x] \right\}. \tag{2.5}$$

对于 豪斯多夫矩问题 （Hausdorff 定理 2.10），他利用了这样一个事实：$[0,1]$ 上的任意严格正多项式都可以表示为以下各项的线性组合

$$x^m \cdot (1-x)^p \tag{2.6}$$

其中 $m,\ p \in$ 自然数集$0,\ p \geq m,$ 且系数非负。

Haviland 在此处引用了 [PS70] 的早期版本。但这一结果实际上归功于 S. N. Bernstein [Ber12,Ber15]。

伯恩斯坦定理 2.12 （[Ber12] 对应 (i)， [Ber15]对应 (ii)；另见例如 [Ach56, p.30] 或 [Sch17, 命题 3.4]）。 设 $f \in$ C([0, 1], 实数集) 并设

$$B_{f,d}(x) := \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{d-k} \cdot f\left(\frac{k}{d}\right) \tag{2.7}$$

是次数为 $d \in$ 的 f 伯恩斯坦多项式 。则有以下结论：

(i) 多项式 $B_{f,\ d}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f，即

$$\|f - B_{f,d}\|_\infty \xrightarrow{d\to\infty} 0.$$

(ii) 若进一步有 $f \in$ 实数集$[x]$，且 $f > 0$ 在 $[0,1]$，上，则存在常数$D = D(f) \in$自然数集 及常数 $c_{k,\ l} \geq 0$，使得对所有 k、$l = 0$、……、D，都有

$$f(x) = \sum_{k,l=0}^{D} c_{k,l} \cdot x^k \cdot (1-x)^l.$$

(iii) 对任意 $n \in$ 自然数集，结论 *(i)* 和 *(ii)* 在 $[0,1]^n$ 上也成立。特别地，每个 $f \in$实数集$[x_1, \ldots\ldots,\ x_n]$ 若在 $[0,1]^n$ 上满足 $f > 0$，则可表示为

$$f(x) = \sum_{\alpha_1,\ldots,\beta_n=0}^{D} c_{\alpha_1,\ldots,\beta_n} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \cdot (1-x_1)^{\beta_1} \cdots (1-x_n)^{\beta_n}$$

对某个 $D \in$ 自然数集 及 $c_{\alpha_1,\ldots,\beta_n} \geq 0$。

多维表述 (iii) 可由经典的一维情形 (i) 和 (ii) 推出，参见例如 [HS33], [Sch68], and [Lor86, p. 51]。关于伯恩斯坦多项式及更多内容，参见例如 [Lor86]。实代数几何领域的专家当然会认出，(iii) 是*Schm¨udgen's Theorem* [Sch91, Cor. 3] 的特殊情形。(iii) 早在 [Sch91]首次证明一般情形之前很久就已为人所知。

伯恩斯坦定理 2.12 仅适用于 $f > 0$。允许区间端点处为零是可行的，并可得到以下“当且仅当”命题。

推论 2.13. 设 $f \in$ 实数集$[x] \setminus \{0\}$。则下列条件等价：

(i) $f > 0$ 在(0,1)上。

(ii) 存在某个 $D \in$ 自然数集，

$$f(x) = \sum_{i=0}^{D} c_{k,l} \cdot x^l \cdot (1-x)^k$$

其中 $c_{k,\,l} \geq 0$ 对所有 k、$l = 0$、……、D 以及 $c_{k',\,l'} > 0$ 至少一次。

证明。 见习题 2.11。 □

关于 $[-1, 1]$，Bernstein定理 2.12 (ii) 的一个加强版本被认为出自 F. Luk´acs [Luk18] (*Luk´acs* 定理)。值得注意的是，Luk´acs 在 [Luk18]中重新证明了若干结果/公式，而这些结果/公式早已出现在 M. R. Radau 的一篇著作中 [Rad80]，L. Brickman 也指出了这一点 [Bri59，第 196]页。此外，在 [KN77，第 61 页的脚注中，M. G. Kre˘ın 和 A. A. Nudel’man 指出，A. A. Markov 早在 1906 [Mar06],[1] 中就证明了 Luk´acs 定理的一个更精确版本；另见 [Mar95]。Kre˘ın 和 Nudel’man 称之为*Markov*定理。其内容如下。

卢卡斯–马尔可夫定理 2.14 ´([马尔可夫06] 或例如 [卢卡斯18], [KN77，第 61 页，定理 2。2])。设 $-\infty < a < b < \infty$，且 $p \in$ 实数集$[x]$ 满足 次数 $p = n$，并且 $p \geq 0$ 在 $[a, b]$上成立。则有以下结论：

(i) 若 次数 $p = 2m$，其中某个 $m \in$ 自然数集$_0$，则 p 具有如下形式

$$p(x) = f(x)^2 + (x-a)(b-x) \cdot g(x)^2$$

其中某些 f、$g \in$ 实数集$[x]$ 满足 次数 $f = m$ 且 次数 $g = m - 1$。

(ii) 若 次数 $p = 2m + 1$，其中某个 $m \in$ 自然数集$_0$，则 p 具有如下形式

$$p(x) = (x-a) \cdot f(x)^2 + (b-x) \cdot g(x)^2$$

其中某些 f、$g \in$ 实数集$[x]$ 满足 次数 $f =$ 次数 $g = m$。

对于情形 (i)，注意到关系式

$$(x-a)(b-x) = \frac{1}{b-a}\left[(x-a)^2(b-x) + (x-a)(b-x)^2\right] \tag{2.8}$$

蕴含

$$\mathrm{Pos}([a,b]) = \left\{ f(x)^2 + (x-a) \cdot g(x)^2 + (b-x) \cdot h(x)^2 \,\middle|\, f, g, h \in \mathbb{R}[x] \right\}. \tag{2.9}$$

Luk´acs–马尔可夫定理 2.14 的特殊之处在于多项式 f 与 g 的次数界。公式（2.8）破坏了这些次数界，因为我们必须将次数再提高一阶。

[1] 我们无法查阅 [Mar06]，因此既不能确认也不能否定这一说法。

在 [KN77 第 61 页定理 2.2 以及第 373 页定理 6.4] 中，Luk´acs–马尔可夫定理 2.14 被称为马尔可夫–*Luk´acs* 定理，因为马尔可夫给出更精确的版本远早于 Luk´acs。[2] 在 [Hav36] 中，Haviland 使用了这一结果，却未作任何引用，也未将其归于 Luk´acs 或马尔可夫。

对于二维豪斯多夫矩问题，Haviland 在引用 [HS33] 时指出，任何在 $[0,1]^2$ 上严格为正的多项式 $f \in \mathrm{R}[x,y]$ 都是以下各项的线性组合：

$$x^m \cdot y^n \cdot (1-x)^p \cdot (1-y)^q$$

其中 $n,\ m,\ q,\ p \in \mathrm{N}_0$，且系数非负。实际上，这就是伯恩斯坦定理 2.12 (iii)。

T.H. Hildebrandt 和 I.J. Schoenberg [HS33] 已经求解了 $[0,1]^n$ 上对所有 $n \in \mathrm{N}$ 的矩问题，得到了与 Haviland 相同的结果。因此，使用 Pos(K) 描述来求解矩问题的思路，早在 Haviland 采用之前，就已由 Hildebrandt 和 Schoenberg 在 1933 [HS33], 中使用；Haviland 在 [Hav35] 中采用了这一方法，并在 Wintner 的建议下于 [Hav36] 中将其推广。

结合这些更广泛的历史评论，我们可以看到，当然还有更多人参与了定理 2.11。称定理 2.11 为哈维兰–温特纳或哈维兰–希尔德布兰特–舍恩伯格–温特纳定理也许同样合适。但正如常见的情况一样，贡献者名单很长（甚至可能更长），因此，主要贡献（一般性证明）便以哈维兰定理之名受到认可。

我们想在这份长长的清单中提及的最后一个经典矩问题，由 K. I. Svenco [Sve 39]ˇˇ 解决。

ˇ斯文科定理 2.15 ([ˇSve39])。 设 $s = (s_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ 是一个实数序列。以下条件等价：

(i) s 是一个$(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$-矩序列。*(ii)* 对所有 $p \in$正$((-\infty, 0] \cup [1, \infty))$，$L_s(p) \geq 0$。

ˇ Svenco 定理 2.15 在

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \tag{2.10}$$

对任意 $n \in$ 自然数集以及

$$a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n$$

一般情形由 V. A. Fil’ˇstinskiˇı [Fil64] 证明。式 (2.10) 上所有非负多项式都可以显式写出。更准确地说，如今，闭半代数集 $K \subseteq$ 实数集上的所有矩问题都可以轻易地由 Haviland 定理 2.11 或基本表示定理 2.7，以及实代数几何中的一些成熟结果推出，参见例如 [Mar08,Prop.2.7.3]。

Haviland 定理 2.11 对求解经典矩问题（即主要是一维情形）十分重要。此后，它便不再

[2] 这里我们采用定理命名中通常使用的字母顺序。

被使用，直到关于 $K \subseteq \mathrm{R}^n$ 上 $n \geq 2$ be 的严格正多项式和非负多项式的描述出现后，才再次变得重要。这一进程始于 [Sch91]，并由此复兴了实代数几何。

习题

2.1 证明引理2.3。

2.2 设 X 是一个紧致拓扑豪斯多夫空间，且 $E \subseteq \mathrm{C(X,R)}$ 是一个子空间，并且存在一个 $e \in E$，使得 $e(x) > 0$ 对所有 $x \in \mathrm{X}$ 都成立。证明E 是一个适配空间。

2.3 设 $n \in$ 自然数集，且 $\mathrm{X} \subseteq$ 实数集^n 是闭集。证明 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 在 X 上是一个适配空间。

2.4 设 $n \in$ 自然数集，$\mathrm{X} \subseteq$ 实数集^n 是闭集，且 $E \subseteq$ 实数集$[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个适配空间。证明，若 E 是有限维的，则 X 是紧致的。

2.5 令 $n \in$ 自然数集。

a) 设 $\mathrm{X} = \mathrm{R}^n$，且 $E \subseteq \mathrm{C(X,R)}$ 是一个适配空间。证明 E 是无限维的。
b) 要使任意适配空间$E \subseteq \mathrm{C(X,R)}$ 都是无限维的，对 $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{R}^n$ 的最小要求是什么?

2.6 证明引理 2.5。

2.7 利用基本表示定理 2.7 证明施蒂尔切斯定理 2.8。

2.8 利用基本表示定理 2.7 证明 Hamburger 定理 2.9。

2.9 利用基本表示定理 2.7 证明豪斯多夫定理 2.10。

2.10 用基本表示定理 2.7 证明 Haviland 定理 2.11。

2.11 利用伯恩斯坦定理 2.12 (ii) 证明推论 2.13。

第二部分

多项式上的线性算子

第3章
多项式上线性算子的表示

在本章中，我们终于开始研究线性算子

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n].$$

3.1 实数集$[x_1, \mathbb{R}\ldots, x_n]$上的一般线性算子的表示

为了处理多项式上的线性算子，我们首先给出它们的表示。

定理 3.1 （众所周知，典范表示）。设 $n \in \mathbb{N}$，并设

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

是线性的。那么，对于所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$，存在唯一的多项式 $q_\alpha \in$ 实数集$[x_1, \ldots, x_n]$，使得

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} q_\alpha \cdot \partial^\alpha. \tag{3.1}$$

表示式 (3.1) 称为 T的典范表示 。

证明。 我们对 $d = |\alpha| \in$ 自然数集$_0$ 使用归纳法。

$\underline{d = 0}$: 令

$$q_0 := T1,$$

也就是说， q_0 是唯一的，并且 $T_0 := q_0$ 在 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq 0} = \mathrm{R}$ 上表示 T。

$\underline{d \to d+1}$: 假设对于 $d \in$ 自然数集$_0$, ，我们有唯一的 $q_\alpha \in$ 实数集$[x_1, \ldots, x_n]$ 对于所有$\alpha \in$ 自然数集$_0^n$ 满足 $|\alpha| \leq d$ ，使得

$$T_d := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \leq d} q_\alpha \cdot \partial^\alpha$$

在实数集 $\mathrm{R}[x_1,\ldots,\ x_n]_{\leq d}$上表示 T。令 $\beta \in$ 自然数集$_0^n$满足 $|\beta| = d+1$。则

$$Tx^\beta = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n:|\alpha|\leq d} q_\alpha \cdot \partial^\alpha x^\beta + q_\beta \cdot \partial^\beta x^\beta$$

意味着

$$q_\beta := \frac{1}{\beta!}\cdot\left(Tx^\beta - \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n:|\alpha|\leq d} q_\alpha\cdot\partial^\alpha x^\beta\right),$$

即，q_β 是唯一的，并且

$$T_{d+1} := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n:|\alpha|\leq d+1} q_\alpha\cdot\partial^\alpha$$

在 $\mathrm{R}[x$ 上表示 $T_{\quad 1},\ldots,x_n]_{\leq d+1}$ 具有唯一的 q_α 对所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$，其中 $|\alpha| \leq d+1$。总而言之，(3.1) 在所有实数集$[x_1,\ldots,x_n]$上表示 T，且对所有$\alpha \in$ 自然数集$_0^n$都有唯一的 q_α。□

命题 3.2 ([dDS25, 引理 5.1])。设 $n \in$ 自然数集，并设

$$T:\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]\to\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n] \quad with \quad T=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} q_\alpha\cdot\partial^\alpha$$

对所有 $\alpha \in$自然数集$_0^n$，$q_\alpha \in$实数集$[x_1,\ldots,\ x_n]$是线性的，并具有唯一的。则以下各项等价:

(i) 对所有 $d \in$自然数集$_0$，T实数集$[x_1,\ldots,\ x_n]_{\leq d} \subseteq$实数集$[x_1,\ldots,\ x_n]_{\leq d}$。*(ii)* 对所有 $\alpha \in$自然数集$_0^n$，次数 $q_\alpha \leq |\alpha|$。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii): 设 $p \in$实数集$[x_1,\ldots,x_n]$。由于次数为 $q_\alpha \leq |\alpha|$,

$$\deg(q_\alpha\cdot\partial^\alpha p)\leq \deg p$$

对所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$，即（ii）得证。

（ii）$\Rightarrow$（i）：反设存在一个 $\alpha \in$自然数集$_0^n$，使得 $\deg\ q_\alpha > |\alpha|$。取这些 α 中按字典序最小的一个。于是

$$\deg(Tx^\alpha) = \deg(q_\alpha\cdot\partial^\alpha x^\alpha) = \deg q_\alpha > |\alpha|$$

这与（ii）矛盾。 □

命题 3.3 （[dDL25, Rem. 2.3]）。设 $n \in$ 自然数集并设

$$T:\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]\to\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$$

为线性的。那么，对于所有 $i \in$ 自然数集$_0$, ，存在一些线性泛函

$$l_i:\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]\to\mathbb{R}$$

以及多项式 $p_i \in$ 实数集$[x_1, \ldots\ldots, x_n]$ 使得

$$T = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} l_i \cdot p_i, \quad i.e., \quad Tf = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} l_i(f) \cdot p_i \tag{3.2}$$

对于所有 $f \in$ 实数集$[x_1, \ldots, x_n]$。

证明。 对于每个 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$, 令

$$l_\alpha : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$$

为由下式定义的线性泛函

$$l_\alpha(x^\beta) := \begin{cases} 1 & \text{if } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{if } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

并将其线性延拓至所有实数集 R[$x_1, \ldots, x_n$]。于是

$$Tf = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} l_\alpha(Tf) \cdot x^\alpha$$

对于所有 $f \in$ 实数集 R[$x_1, \ldots, x_n$], 即,

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} (l_\alpha \circ T) \cdot x^\alpha.$$

由于 N_0^n 是可数的, (3.2) 得证。 □

3.2 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 上对角算子的表示

R[$x_1, \ldots, x_n$] 上的一类特殊线性算子是对角算子。

定义 3.4. 设 $n \in \mathrm{N}$。线性算子

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

称为对角的, 如果

$$Tx^\alpha = t_\alpha x^\alpha \quad \text{with} \quad t_\alpha \in \mathbb{R}$$

对所有 $\alpha \in \mathrm{N}_0^n$。序列 $t = (t_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 称为 T 的对角序列 。

显然, 一个对角算子由其对角序列唯一确定, 而每个实数序列 $t = (t_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 都对应一个对角算子。

定理 3.5 ([dDL25, 注 4.2])。 设 $n \in$ 自然数集并设

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

是一个线性算子。则以下各项等价:

(i) T是一个对角算子，即，对于所有 $\alpha \in$自然数集$_0^n$， $Tx^\alpha = t_\alpha x^\alpha$存在唯一的 $t_\alpha \in$实数集。（*ii*）算子 T 具有如下形式

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{c_\alpha}{\alpha!} \cdot x^\alpha \cdot \partial^\alpha \tag{3.3}$$

其中存在唯一的实数序列 $c = (c_\alpha)^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$。

若等价命题 *(i)* 或 *(ii)* 成立，则对角序列$t = (t_\alpha)^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$和系数序列 $c = (c_\alpha)$ $^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$满足以下关系

$$t_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n :\, \beta \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot c_\beta \qquad and \qquad c_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n :\, \beta \preceq \alpha} (-1)^{|\alpha - \beta|} \cdot \binom{\alpha}{\beta} \cdot t_\beta \tag{3.4}$$

对所有 $\alpha \in$自然数集

$^n_0$。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii): 首先，我们对 $d = |\alpha|$ 使用归纳法证明 (3.3)。$d = 0$:
令

$$c_0 := T1 = t_0.$$

那么， T 在 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq 0} = \mathrm{R}$ 上由 $T_0 := c_0 = t_0$ 表示。

$d \to d + 1$: 假设对所有 $\alpha \in$自然数集$_0^n$，若 $|\alpha| \leq d$，则存在唯一的 c_α，使得 T由以下式子表示:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \leq d} \frac{c_\alpha}{\alpha!} \cdot x^\alpha \cdot \partial^\alpha$$

在 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq d}$ 上。设 $\beta \in$自然数集$_0^n$，且 $|\beta| = d + 1$。则

$$t_\beta x^\beta = Tx^\beta = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \leq d} \frac{c_\alpha}{\alpha!} \cdot x^\alpha \cdot \partial^\alpha x^\beta + \frac{c_\beta}{\beta!} \cdot x^\beta \cdot \partial^\beta x^\beta$$

这意味着

$$c_\beta x^\beta = Tx^\beta - \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \leq d} \frac{c_\alpha}{\alpha!} \cdot x^\alpha \cdot \partial^\alpha x^\beta$$

其中 $c_\beta \in \mathrm{R}$ 唯一。

总之，(3.3) 表示了 T 在 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 上的形式。

(ii) $\Rightarrow$ (i): 由 (3.3),

$$Tx^\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{c_\beta}{\beta!} \cdot x^\beta \cdot \partial^\beta x^\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n : \beta \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot x^\alpha = t_\alpha x^\alpha$$

其中 $t_\alpha \in$ 实数集，即我们证明了 (i)。

我们已经在“(ii) $\Rightarrow$ (i)”这一步证明了 (3.4) 的第一个等式。(3.4) 中的第二个等式即问题3.2。□

例3.6([dDL25，例4.3])。设 $n \in$ 自然数集，且

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n], \quad f \mapsto Tf = f(0)$$

是 $x = 0$ 处的求值算子。于是

$$Tx^\alpha = \delta_{0,\alpha} \cdot x^\alpha$$

对所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$，即 T 是一个对角算子，并且

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \cdot x^\alpha \cdot \partial^\alpha,$$

即，

$$t = (\delta_{0,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \qquad \text{and} \qquad c = \left((-1)^{|\alpha|}\right)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}. \qquad \circ$$

例3.7 ([dDL25，例4.3])**.** 令 $n \in$ 自然数集，并令

$$\mathrm{id} : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n], \quad f \mapsto \mathrm{id} f = f$$

是 R[$x_1, \ldots, x_n$] 上的恒等映射。于是

$$Tx^\alpha = x^\alpha \qquad \text{and} \qquad T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\delta_{0,\alpha}}{\alpha!} \cdot x^\alpha \cdot \partial^\alpha,$$

即，$t = (1)^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 和 $c = (\delta_{0,\alpha})^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$。 $\circ$

习题

3.1 设 $n \in$ 自然数集，且

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} q_\alpha \cdot \partial^\alpha$$

其中 $q_\alpha \in$实数集[$x_1, \ldots, x_n$]对所有 $\alpha \in$自然数集$_0^n$都成立。证明或反驳以下命题:

a) 如果只有有限多个 q_α非零，那么 dim T实数集[$x_1, \ldots, x_n$] $< \infty$。
b) 如果 dim T实数集[$x_1, \ldots, x_n$] $< \infty$，那么只有有限多个 q_α非零。

3.2 证明

$$c_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n :\, \beta \preceq \alpha} (-1)^{|\alpha - \beta|} \cdot \binom{\alpha}{\beta} \cdot t_\beta$$

定理 3.5 中的式 (3.4)。

3.3 令 $n \in$ 自然数集，且 $y = (y_1, \ldots\ldots, y_n) \in$实数集^n。定义缩放算子

$$S_y : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

by

$$(S_y f)(x) = f(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$$

对所有 $f \in$ 实数集$[x_1, \ldots\ldots, x_n]$。

a) 证明 S_y 是对角算子。**b)** (3.3) 中的对角序列 $t = (t_\alpha)^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 和系数序列 $c = (c_\alpha)^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 是什么?

3.4 设 K 为一个域。

a) 对于 $\mathrm{K} = \mathrm{C}$, 在一般情形（定理 3.1）和对角情形（定理 3.5）下, T 的典范表示是什么样的? **b)** 对于有限特征的域 K（$\mathrm{charK} < \infty$）, 在一般情形（定理 3.1）和对角情形（定理 3.5）下, T 的典范表示是什么样的?

第4章
拓扑向量空间 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$ 和$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$

我们在上一章中已经看到，需要处理 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 上的算子无穷和。我们还要处理无穷和，因此也要处理 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 和 $\mathrm{R}^{\mathbb{N}_0^n}$ 中的极限。因此，我们来考察 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 和 $\mathrm{R}^{\mathbb{N}_0^n}$ 上合适的拓扑。对此，我们可以毫无问题地转到 $\mathrm{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 和 $\mathrm{C}^{\mathbb{N}_0^n}$。我们推荐阅读 [Tr`e67、 K¨ot69、 K¨ot79、 Pie72 和 SW99]，尤其是 [Tr`e67]。

4.1 Fr´échet 空间$\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$

定义 4.1。 *Fr´*<style id='6}échet 空间是一个拓扑向量空间，它满足

（i）可度量化（特别是豪斯多夫），

（ii）完备，且（iii）局部凸。

例 4.2 ([Tr`e67，第 91 页，例 III])。 设 $n \in$ 自然数集。该空间

$$\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n} := \left\{ s = (s_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \,\middle|\, s_\alpha \in \mathbb{C} \text{ for all } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \right\}$$

所有以自然数集$_0^n$ 为索引的复数列组成的空间，配备半范数

$$\left| (s_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \right|_d := \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \le d} |s_\alpha|$$

对所有 $d \in \mathrm{N}_0$ 而言，它是一个弗雷歇空间。为此，令

$$\iota : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$$

是一个双射。则度量定义为

$$m(s,t) := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{\iota(\alpha)}} \cdot \frac{|s_\alpha - t_\alpha|}{1+|s_\alpha - t_\alpha|}$$

对于任意 $s=(s_\alpha)^{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$和 $t=(t_\alpha)^{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \in \mathrm{C}^{\mathbb{N}_0^n}$。要理解 $\mathrm{C}^{\mathbb{N}_0^n}$的拓扑，只需理解收敛

$$s^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} s$$

对于序列

$$s=(s_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n},\ s^{(k)}=(s_{k,\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}.$$

由半范数 $|\cdot|_d$ 可得

$$\begin{aligned} s^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} s \quad &\Leftrightarrow \quad \left|s-s^{(k)}\right|_d \xrightarrow{k\to\infty} 0 \text{ for all } d\in\mathbb{N}_0 \\ &\Leftrightarrow \quad s_{k,\alpha} \xrightarrow{k\to\infty} s_\alpha \text{ for all } \alpha\in\mathbb{N}_0^n, \end{aligned}$$

也就是说，$\mathrm{C}^{\mathbb{N}_0^n}$的拓扑由逐坐标收敛生成。 ∘

注 4.3. 设 $n\in\mathrm{N}$。那么

$$\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n} \cong \mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]].$$ ∘

例 4.4. 每个巴拿赫空间都是弗雷歇空间。 ∘

注记 4.5. $\mathrm{C}^{\mathbb{N}_0^n}$是一个非巴拿赫空间的弗雷歇空间。 ∘

引理 4.6([dD24, 推论 3.7 (i)])**.** 设 $n\in$ 自然数集 且 $K\subseteq$ 实数集^n 是闭集。那么锥

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n] : K\to\mathbb{R}, \{x^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n})$$

由 K-矩序列组成的集合在$\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$的弗雷歇拓扑中是闭的。

证明。 设 $s^{(k)}, s\in\mathrm{S}$，其中 $s^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} s$ 属于 $\mathrm{C}^{\mathbb{N}_0^n}$。那么

$$\underbrace{L_{s^{(k)}}(p)}_{\geq 0} \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad L_s(p)\geq 0$$

对所有 $p\in\mathrm{Pos}(K)$ 都成立，因为 $\deg\ p<\infty$。因此，根据哈维兰定理 2.11，$s\in\mathrm{S}$。 □

4.2 LF空间 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$

定义 4.7。 设 E 是一个复向量空间，使得

$$E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

对所有 $n \in$ 自然数集中的元素， E_n 都是 Fr´echet 空间，且自然嵌入 $E_n \hookrightarrow E_{n+1}$（即 $E_n \subseteq E_{n+1}$）是同构。如果 E 赋予如下拓扑：当且仅当对于所有 $n \in$ 自然数集中的元素，V 在 E 中是零的邻域时， $V \cap E_n$ 在 E_n 中是零的邻域，那么称 E 为一个 *LF*空间。集合 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 E的定义序列。

LF表示*Fr´échet*空间的极限。

例 4.8. 设 $n \in \mathbb{N}$ 并令

$$E_d := \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_{\leq d}$$

对 $d \in \mathrm{N}_0$。由于 E_d 是有限维的，因此 E_d 是 Fr´échet空间。由于

$$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n] = \bigcup_{d\in\mathbb{N}_0} E_d,$$

我们可以根据定义 4.7 为 $\mathrm{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 赋予该拓扑。于是 $\mathrm{C}[x_1,\ldots,x_n]$是一个 LF空间。。

我们将介绍一种更简单的方式来理解 $\mathrm{C}[x_1,\ldots,x_n]$的拓扑。

命题 4.9 ([Tr`e67，命题 13。1])。 设 E 是一个 *LF*空间，设 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 E 的定义序列，设 F 是任意一个局部凸拓扑向量空间，并且令

$$l : E \to F$$

为线性的。那么下列条件等价:

(i) l : $E \to F$ 连续。

(ii) 对所有 $n \in$ 自然数集，

$$l|_{E_n} : E_n \to F$$

连续。

例 4.10。 设 $s \in \mathrm{C}^{\mathbb{N}_0^n}$。那么里斯泛函

$$L_s : \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n] \to \mathbb{C}$$

是连续的，因为

$$E_d = \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_{\leq d}$$

是有限维的，并且有限维空间上的每个线性泛函都是连续的。

另一方面，每个线性泛函

$$l : \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n] \to \mathbb{C}$$

由.....唯一确定

$$s_\alpha := l(x^\alpha)$$

对于所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$，
即，

$$L_\cdot : \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n} \to \big(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]\big)^*, \quad s \mapsto L_s$$

是一个同构，其中 E^* 是 E的对偶，即拓扑向量空间 E上的所有连续线性泛函的集合。因此，里斯泛函 L_s 是对偶配对映射

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E^* \times E, \quad (s, p) \mapsto \langle s, p \rangle := L_s(p)$$

之间

$$E^* = \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n} \qquad \text{and} \qquad E = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]. \qquad \circ$$

定理 4.11 ([Tr`e67, 定理 13。1])。 任何 *LF*空间都是完备的。

在例 4.8 的后续内容中，我们将对 LF空间 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 的拓扑给出一种更简单的解释。

例 4.12（例 4.8 续）。 设 $n \in$ 自然数集，并令

$$p = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} p_\alpha \cdot x^\alpha, \quad p_k = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} p_{k,\alpha} \cdot x^\alpha \quad \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$$

对所有 $k \in$ 自然数集均成立。于是

$$p_k \xrightarrow{k \to \infty} p \quad \text{in } \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$$

当且仅当

$$\langle s, p_k \rangle \xrightarrow{k \to \infty} \langle s, p \rangle \quad \text{for all } s \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n} \tag{4.1}$$

由例 4.10 可知。对于

$$\delta_\alpha := (\delta_{\alpha,\beta})_{\beta \in \mathbb{N}_0^n} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$$

对于 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$，(4.1) 推出

$$p_{k,\alpha} = \langle \delta_\alpha, p_k \rangle \xrightarrow{k \to \infty} \langle \delta_\alpha, p \rangle = p_\alpha$$

对于所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$，也就是说，我们在 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 中有逐坐标收敛。

现在我们证明 (4.1) 也推出

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \deg p_k < \infty.$$

为证明这一点，假设

$$\deg p_k \xrightarrow{k \to \infty} \infty,$$

即，不失一般性，$\deg p_k = k$。对每个 $k \in$ 自然数集，让 $\alpha_k \in$ 自然数集$_0^n$ 满足

$$p_{k,\alpha} = \langle p_k, \delta_{\alpha_k} \rangle \neq 0.$$

因此，存在一个 $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$，使得

$$\langle s, p_k \rangle = k \to \infty.$$

但这与(4.1)矛盾，即我们有

$$p_k \xrightarrow{k\to\infty} p \quad \text{in } \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$$

当且仅当

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \deg p_k \le D < \infty \quad \text{and} \quad p_k \to p \text{ in } \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_{\le D}.$$

总之，我们证明了，要理解 $\mathsf{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 的 LF 拓扑，只需理解其中的收敛。与 $\mathsf{C}^{\mathbb{N}_0^n}$ 类似，在 $\mathsf{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 中，我们有逐坐标收敛，并且 p_k 具有额外的一致次数界。 ◦

引理 4.13。 设 $n \in$ 自然数集，且 $K \subseteq$ 实数集^n 为闭集。那么

$$\mathrm{Pos}(K)$$

在$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 的 LF 拓扑中是闭的。

证明。 设 $p_k, p \in$ 实数集$[x_1,\ldots,x_n]$ 满足

$$p_k \xrightarrow{k\to\infty} p \quad \text{in } \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n].$$

Then

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \deg p_k \le D < \infty$$

对于某个 $D \in$ 自然数集,

$$p_k \to p \quad \text{in } \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n],$$

因此

$$\underbrace{p_k(x)}_{\ge 0} \xrightarrow{k\to\infty} p(x) \ge 0$$

对于所有 $x \in K$，即 $p \in \mathrm{Pos}(K)$。 □

习题

4.1 ([dDS25, 引理 2.8]或 引理 5.13) 证明

$$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^\sharp[[\partial_1,\ldots,\partial_n]] := \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} p_\alpha \cdot \partial^\alpha \,\middle|\, p_\alpha \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_{\le|\alpha|}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n \right\}.$$

是一个具有逐坐标收敛的 Fr´echet 空间。

4.2（[dDS25，注 2.9]）证明

$$\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]][[\partial_1,\ldots,\partial_n]] := \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} p_\alpha\cdot\partial^\alpha \,\middle|\, p_\alpha\in\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]], \alpha\in\mathbb{N}_0^n \right\}$$

在逐坐标收敛下是 Fr´échet 空间。

4.3 设

$$\mathcal{T} := \{T:\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]\to\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n] \text{ linear}\} = \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} q_\alpha\cdot\partial^\alpha \,\middle|\, q_\alpha\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n] \text{ for all } \alpha\in\mathbb{N}_0^n \right\}.$$

a) 是否存在一种拓扑，使得 T 是 Fr´échet 空间?
b) 是否存在一种拓扑，使得 T 是 LF空间?

4.4 设 $n\in$ 自然数集，并设

$$S:\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}\to\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$$

是线性的。

a) 证明：对于每个 $\alpha\in$自然数集$_0^n$，存在一个多项式 $p_\alpha\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$使得 α-th 个坐标 $(Ss)_\alpha$ of Ss with $s\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$具有如下形式

$$(Ss)_\alpha = \langle p_\alpha, s\rangle = L_s(p_\alpha).$$

b) 取 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$中的标准基

$$\mathcal{B} := \{\delta_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \qquad \text{with} \qquad \delta_\alpha := (\delta_{\alpha,\beta})_{\beta\in\mathbb{N}_0^n}.$$

证明：相对于基 B，算子 S 由一个˜ ˜无限维矩阵 S 表示，并且在 S 的每一行中只有有限个非零项。

c) 每列中最多可以有多少个非零项 S?

提示：由于 $|\mathbb{N}_0^n| = |\mathbb{N}_0|$，因此只需证明 (a) 和 (b) 在 $n=1$ 的情形下成立。

4.5 设 $n\in\mathbb{N}$，令 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$ 取 Fr´echet 拓扑，令 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 取 LF 拓扑。对偶配对定义为

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}\times\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]\to\mathbb{C},\quad (s,p)\mapsto\langle s,p\rangle := L_s(p).$$

设 $S:\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}\to\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$ 为线性的。

a) 对偶 $S^*:\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]\to\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 如何定义?
b) 证明 $S^{**}=S$。

第三部分K-正性保持算子

第 5 章
K-正性保持算子

我们已经收集了足够多关于线性算子

$$T : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$$

以及关于矩的知识，足以刻画所有满足 T

$$T\mathrm{Pos}(K) \subseteq \mathrm{Pos}(K)$$

对于闭的 $K \subseteq \mathrm{R}^n$。本章的结果发表于 [GS08、Bor11、dD24]，尤其是 [dDS 25]。

5.1 定义

对于闭集 $K \subseteq$ 实数集^n，我们提醒读者

$$\mathrm{Pos}(K) := \left\{ f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \,\middle|\, f \geq 0 \text{ on } K \right\}.$$

关于特殊情形 $K = \emptyset$，请参见问题 5.7。因此，此处我们只考察非平凡情形 $K \neq \emptyset$。

定义 5.1. 设 $n \in$ 自然数集，$K \subseteq$ 实数集^n 是闭且非空的，并且

$$T : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$$

是线性的。如果

$$T\mathrm{Pos}(K) \subseteq \mathrm{Pos}(K),$$

那么我们称 T 为一个 K-正性保持算子。如果 $K =$ 实数集^n，那么，简而言之，我们称 T 为一个正性保持算子。

首先，我们在以下例子中看到，对于每个满足 $K \neq \emptyset$ 的 $K \subseteq \mathrm{R}^n$，都存在非平凡的 K-正性保持算子。

例 5.2. 设 $n \in$ 自然数集，设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 为闭且非空的集合，设 $p \in \mathrm{Pos}(K)$，并设

$$L : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$$

是一个 K-矩泛函。则

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n], \quad f \mapsto Tf := L(f) \cdot p$$

是一个 K-正性保持算子。 ∘

定义 5.3。 设 $q_\alpha \in$ 实数集$[x_1, \text{。} \ldots, x_n]$ 对所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$，并设

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} q_\alpha \cdot \partial^\alpha$$

是一个线性算子。对于 $y \in$ 实数集^n，我们定义线性映射

$$T_y : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

by

$$T_y := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} q_\alpha(y) \cdot \partial^\alpha. \tag{5.1}$$

显然，

$$(Tf)(x) \;=\; \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} q_\alpha(x) \cdot (\partial^\alpha f)(x) \;=\; (T_x f)(x)$$

对所有 $f \in \mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 以及 $x \in \mathrm{R}^n$。

5.2 K-正性保持算子的刻画

引理 5.4 ([dDS25，引理 3。3])。 设 $q_\alpha \in$ 实数集$[x_1, \ldots, x_n]$ 对所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$ 成立，并设$K \subseteq$ 实数集^n 是闭且非空的。若

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} q_\alpha \cdot \partial^\alpha$$

是一个 K-正性保持算子，则

$$(\alpha! \cdot q_\alpha(y))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$$

对所有 $y \in K$，都是一个$(K - y)$-矩序列。

证明。 令 $y \in K$ 并定义

$$L_y : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto L_y(f) := (T_y f)(y).$$

由于 T 是 K-正性保持算子，

$$L_y(f) = (T_y f)(y) \geq 0$$

对所有 $f \in \mathrm{Pos}(K)$ 均成立。因此，根据 Haviland 定理 2.11，L_y 是一个 K-矩泛函，即存在一个（Radon）测度 μ_y，其支集为 $\operatorname{supp}\mu_y \subseteq K$，使得

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} q_\alpha(y)\cdot f^{(\alpha)}(y) = (T_y f)(y) = L_y(f) = \int_K f(x)\,\mathrm{d}\mu_y(x)$$

对所有 $f \in \mathrm{R}[x_1,\ldots,x_n]$ 均成立。利用泰勒公式

$$f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{f^{(\alpha)}(y)}{\alpha!}\cdot(x-y)^\alpha$$

我们得到

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} q_\alpha(y)\cdot f^{(\alpha)}(y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{f^{(\alpha)}(y)}{\alpha!}\cdot\int (x-y)^\alpha\,\mathrm{d}\mu_y(x) \tag{5.2}$$

对所有 $f \in \mathrm{R}[x_1,\ldots,x_n]$ 均成立。对于 $\beta\in\mathrm{N}_0^n$，令

$$f_\beta(x) := (x-y)^\beta.$$

Then

$$f_\beta^{(\alpha)}(y) = \beta!\cdot\delta_{\alpha,\beta}.$$

因此，由公式 (5.2) 可得，

$$\beta!\cdot q_\beta(y) = \int_K (x-y)^\beta\,\mathrm{d}\mu_y(x) = \int_{K-y} z^\beta\,\mathrm{d}\mu_y(z+y),$$

即，

$$(\alpha!\cdot q_\alpha(y))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$$

是一个 $(K-y)$-矩序列，其表示测度为 $\nu_y(\,\cdot\,) := \mu_y(\,\cdot\,+y)$。 □

引理 5.5([dDS25，引理 3.4])**.** 设

$$T = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} q_\alpha\cdot\partial^\alpha$$

满足 $q_\alpha \in$ 实数集$[x_1,\ldots,x_n]$ 对 $\alpha\in$ 自然数集$_0^n$ 成立，并设 $K\subseteq$ 实数集^n 为闭且非空。若$y\in K$ 满足

$$(\alpha!\cdot q_\alpha(y))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$$

是一个矩序列，其表示测度为 μ_y，那么

$$(T_y f)(y) = \int f(x+y)\,\mathrm{d}\mu_y(x)$$

对于所有 $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots\ldots, x_n]$。

证明。 由于 μ_y 是 $(\alpha! \cdot q_\alpha(y))^{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ 的表示测度，

$$\alpha! \cdot q_\alpha(y) = \int x^\alpha\,\mathrm{d}\mu_y(x)$$

对所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$。根据泰勒公式

$$f(x+y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{f^{(\alpha)}(y)}{\alpha!} \cdot x^\alpha$$

我们得到

$$\begin{aligned}\int f(x+y)\,\mathrm{d}\mu_y(x) &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{f^{(\alpha)}(y)}{\alpha!} \cdot \int x^\alpha\,\mathrm{d}\mu_y(x) \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} f^{(\alpha)}(y) \cdot q_\alpha(y) = (T_y f)(y). \quad \square\end{aligned}$$

结合引理 5.4 和引理 5.5，我们得到如下结论。

定理 5.6 ([dDS25，主要定理 3。5])。 设 $n \in$ 自然数集且 $K \subseteq$ 实数集^n 是闭且非空的。令

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \quad \textit{with} \quad T = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} q_\alpha \cdot \partial^\alpha$$

且 $q_\alpha \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 对所有 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ 均为线性。则以下条件等价：

(i) T 是一个 K-正性保持算子。*(ii)* 对所有 $y \in K$，序列 $(\alpha! \cdot q_\alpha(y))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ 是一个 $(K-y)$-矩序列。

若等价条件 *(i)* 或 *(ii)* 之一成立，则对任意 $y \in K$，

$$(T_y f)(y) = \int f(x+y)\,\mathrm{d}\mu_y(x)$$

对所有 $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$，其中 μ_y 是 $(K-y)$-矩序列 $(\alpha! \cdot q_\alpha(y))^{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ 的表示测度。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii)：这是引理 5.4。

(ii) $\Rightarrow$ (i)：令 $y \in K$ 并假设 $(\alpha! \cdot q_\alpha(y))^{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ 是一个 $(K-y)$-矩序列，其表示测度为 μ_y，且支集 $\operatorname{supp}\mu_y \subseteq K - y$。令 $f \in \operatorname{Pos}(K)$。那么，根据引理 5.5，

$$(Tf)(y) = (T_y f)(y) = \int_{K-y} f(x+y)\,\mathrm{d}\mu_y(x) = \int_K f(z)\,\mathrm{d}\mu_y(z-y) \geq 0,$$

因为 $f \geq 0$ 在 K 上，且 $\operatorname{supp}\mu_y(\cdot - y) \subseteq K$。由于 $f \in \mathrm{Pos}(K)$ 和 $y \in K$ 是任意的，因此我们有 $T\mathrm{Pos}(K) \subseteq \mathrm{Pos}(K)$。因此，(i) 得证。□

对角线实数集^n-正性保持算子的特殊情形可以（且必须）单独证明。

定理 5.7 ([Bor11，推论 4.3])。设 $n \in$ 自然数集且

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \quad with \quad Tx^\alpha = t_\alpha x^\alpha$$

对 $t = (t_\alpha)^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 以及 $t_\alpha \in$ 实数集 对所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$成立。则下列各项等价:

(i) T 是正性保持算子。*(ii)* $t = (t_\alpha)^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 是矩序列。

若陈述 *(i)* 或 *(ii)* 之一成立，且 μ 是 t的表示测度，则

$$(Tf)(x) = \int f(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)\,\mathrm{d}\mu(y_1, \ldots, y_n) \tag{5.3}$$

对所有 $f \in$实数集$[x_1, 。\ \ldots,\ x_n]$ 以及 $x \in$实数集^n。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii): 定义

$$L : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto L(f) = (Tf)(\mathbb{1})$$

因此,

$$L(x^\alpha) = (Tx^\alpha)(\mathbb{1}) = (t_\alpha x^\alpha)(\mathbb{1}) = t_\alpha$$

对所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$ 以及

$$L(f) = (Tf)(\mathbb{1}) \geq 0$$

对所有 $f \in \mathrm{Pos}(\mathrm{R}^n)$，即由哈维兰定理 2.11， L 是一个矩泛函，且t 是一个矩序列。设 μ 是 t的一个表示测度。则

$$Tx^\alpha = t_\alpha x^\alpha = \int y^\alpha\,\mathrm{d}\mu(y) \cdot x^\alpha = \int (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)^\alpha\,\mathrm{d}\mu(y)$$

对所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$。由 T的线性性，(5.3)得证。

（ii） $\Rightarrow$ （i）：设 t 为具有表示测度 μ 的矩序列，且满足（5.3）。设 $f \in \mathrm{Pos}(\mathrm{R}^n)$。则

$$(Tf)(x) = \int \underbrace{f(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}\mu(x) \geq 0$$

对所有 $x \in \mathrm{R}^n$，即， $Tf \in \mathrm{Pos}(\mathrm{R}^n)$ ，且 T 是正性保持算子。 □

推论 5.8 ([dDL25，定理 5.2])。设 $n \in$ 自然数集并设

$$s = (s_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \quad and \quad t = (t_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$$

为两个矩序列，其表示测度分别为 ν 和 μ。那么，Hadamard 积

$$s \odot t := (s_\alpha \cdot t_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$$

s 和 t 的乘积是一个矩序列，其表示测度为 $\nu \odot \mu$，其中 $\nu \odot \mu$ 定义为

$$\nu \odot \mu = (\nu \times \mu) \circ m^{-1},$$

即，

$$(\nu \odot \mu)(A) = (\nu \times \mu)(m^{-1}(A))$$

对于所有博雷尔集 $A \in \mathfrak{B}$(实数集^n) 以及

$$m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto m(x, y) := (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n).$$

证明。 参见问题 5.2。 □

对于 $K = \mathbb{R}^n$，对角正性保持算子的刻画问题已得到解决。对于$K \subsetneq \mathbb{R}^n$，该问题尚未解决。

开放问题 5.9。 设 $n \in$ 自然数集、 $K \subseteq$ 实数集^n 为闭且非空，并设

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \quad with \quad Tx^\alpha = t_\alpha x^\alpha$$

对所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$均成立。使

$$t = (t_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0^n}$$

满足 T 是一个 K-正性保持算子?

5.3 K-正性保持算子的性质

我们已经在例 5.2 中见过一个非平凡的 K-正性保持算子。通过以下方法，我们可以从已知的K-正性保持算子得到新的 K-正性保持算子。

例 5.10 ([dDS25，例 3.1])。 设$n \in$ 自然数集， $p = (p_1, \ldots\ldots, p_n) \in$实数集$[x_1, \ldots\ldots, x_n]^n$，且 $s = (s_\alpha)^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 为一个矩序列。则

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{p^\alpha \cdot s_\alpha}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha$$

是具有非常数系数的正性保持算子。 ∘

证明。 对于任意 $y \in \mathrm{R}^n$，我们有 $p_y := (p^\alpha(y))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$是一个矩序列，其表示测度为 $\delta_{p(y)}$。因此，根据推论 5.8，对于每个 $y \in \mathrm{R}^n$，我们有

$$p_y \odot s = (p^\alpha(y) \cdot s_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$$

是一个矩序列。由定理 5.6 可知， T 是一个正性保持算子。□

从前面的例子可以看出,

$$q_\alpha = \frac{p_\alpha \cdot s_\alpha}{\alpha!}$$

的次数可以远大于 $|\alpha|$。下面的结果表明，正性保持算子的多项式系数 q_α 的次数甚至可以任意增大。只需证明 $n = 1$的情形即可。

命题 5.11 ([dDS25, 命题 3。2])。 设$(r_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ 是自然数集中的一个序列。那么存在一个序列 $(c_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$， 其取值属于$(0,\infty)$， 以及一个序列$(k_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$， 其取值属于自然数集 ，使得

$$T = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \frac{p_i}{i!} \cdot \partial_x^i$$

是一个正性保持算子，且

$$p_{2i}(x) = c_i + x^{2k_i r_i} \qquad \textit{and} \qquad p_{2i+1}(x) = 0$$

对所有 $i \in$ 自然数集

0。

证明。 根据定理 5.6，只需证明对所有 $y \in \mathrm{R}$， $p(y) := (p_i(y))_{i\in\mathbb{N}_0}$是一个实数集上的矩序列。由于我们处于一维情形，这等价于对所有 Hankel矩阵 $\mathrm{H}_i(p(y)) := (p_{j+l}(y))_{j,\ l=0}^{i}, i \in \mathrm{N}_0$, 都有 $\mathrm{H}_i(p(y)) \succeq 0$；例如参见 Sch17，定理 3.8 和命题 3.，或 Hamburger 定理 2.9。但为此，只需确保

$$\det \mathcal{H}_i(p(y)) > 0 \tag{5.4}$$

对所有 $i \in$ 自然数集$_0$ 和 $y \in$ 实数集。我们通过归纳法由 (5.4) 构造序列 $(c_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(k_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$：

$\underline{i = 0:}$ 我们有

$$\det \mathcal{H}_0(p(y)) = p_0(y) = c_0 + y^{2k_0 r_0} \geq 1$$

对于 $c_0 = 1$和 $k_0 = 1$。

$\underline{i \to i+1:}$ 假设我们有 $(c_j)_{j=0}^{i}$和 $(k_j)_{j=0}^{i}$，使得

$$\det \mathcal{H}_j(p(y)) \geq 1$$

对于 $j = 0, \ldots, i$ 以及 $y \in$ 实数集。由于 $p_{2i+1} = 0$ 对于 $i \in$ 自然数集$_0$,，我们得到

$$\det \mathcal{H}_{i+1}(p(y)) = p_{2i+2}(y) \cdot \det \mathcal{H}_i(p(y)) + q_i(p_0(y), p_2(y), \ldots, p_{2i}(y))$$

对于某个 $q_i \in$实数集$[x_1, \ldots, x_n]$通过展开行列式 $\det \mathrm{H}_{i+1}(p(y))$。因此，我们可以选择 $c_{i+1} \gg 1$ 和 $k_{i+1} \gg 1$，使得

$$c_{i+1} \geq 1 + \max_{x \in [-2,2]} |q_i(p_0(x), p_2(x), \ldots, p_{2i}(x))|$$

and

$$x^{2k_{i+1} r_{i+1}} \geq 1 + |q_i(p_0(x), p_2(x), \ldots, p_{2i}(x)|$$

对所有 $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$，因为 $\det \mathrm{H}_i(p(y)) \geq 1$。 □

定义 5.12. 令 $n \in$ 自然数集。我们定义

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^\sharp[[\partial_1, \ldots, \partial_n]] := \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} p_\alpha \cdot \partial^\alpha \,\middle|\, p_\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq |\alpha|}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n \right\}.$$

以下内容已作为问题 4.1 提出。

引理 5.13 ([dDS25，引理 2。8])。 令 $n \in$ 自然数集。该向量空间

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^\sharp[[\partial_1, \ldots, \partial_n]]$$

在逐坐标收敛下是 *Fr´echet* 空间。

证明。我们有

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^\sharp[[\partial_1, \ldots, \partial_n]] = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n : |\beta| \leq |\alpha|} c_{\alpha,\beta} \cdot x^\beta \cdot \partial^\alpha \,\middle|\, c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C} \text{ for } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \text{ with } |\beta| \leq |\alpha| \right\},$$

也就是说，$\mathrm{C}[x_1, \ldots, x_n]^\sharp[[\partial_1, \ldots, \partial_n]]$ 作为向量空间同构于序列空间

$$\mathcal{S} := \left\{ (c_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n : |\beta| \leq |\alpha|} \,\middle|\, c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C} \text{ for } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \text{ with } |\beta| \leq |\alpha| \right\}.$$

But

$$\mathcal{S} \cong \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]] \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n} \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$$

是一个 Fr´echet 空间。因此，当赋予逐坐标收敛拓扑时，$\mathrm{C}[x_1, \ldots, x_n]^\sharp[[\partial_1, \ldots, \partial_n]]$ 也是如此。□

注记 5.14（[dDS25，注记 2.9] 与问题 4.2）。 由与引理 5.13 的证明相同的论证，我们有

$$\mathbb{C}[[x_1,\dots,x_n]][[\partial_1,\dots,\partial_n]] := \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} p_\alpha\cdot\partial^\alpha \,\middle|\, p_\alpha\in\mathbb{C}[[x_1,\dots,x_n]], \alpha\in\mathbb{N}_0^n \right\}$$

在逐坐标收敛下是一个 Fr´echet 空间。 ∘

引理 5.15 ([dDS25, 引理 3.6 (ii)])。 设 $K \subseteq$ 实数集^n 为闭集。则满足以下条件的K保正算子 T 构成的集合

$$T\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]_{\le d} \subseteq \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]_{\le d} \qquad \textit{for all } d\in\mathbb{N}_0$$

在 *Fr´échet* 拓扑下是闭的，其中 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^\sharp[[\partial_1,\dots,\partial_n]]$。

证明。设

$$T_k = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} q_{k,\alpha}\cdot\partial^\alpha$$

对所有满足条件的 $k\in$ 自然数集 N，均为 K-保正算子

$$T_k \to T_0 \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^\sharp[[\partial_1,\dots,\partial_n]]. \tag{5.5}$$

那么，对所有 $y\in K$,

$$s_k(y) = (s_{k,\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} := (\alpha!\cdot q_{k,\alpha}(y))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$$

根据定理 5.6，它是一个 $(K-y)$-矩序列。由 (5.5),

$$s_{k,\alpha}(y) \to s_{0,\alpha}$$

对所有 $\alpha\in$ 自然数集$_0^n$，并且由引理 4.6， $s_0 := (s_{0,\alpha})^{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ 是一个 $(K-y)$-矩序列。由于 $y\in K$ 是任意的，由定理 5.6 可知 T_0 是一个 K-正性保持算子。 □

5.4 常系数保正算子与序列卷积

我们已在定理 5.6 中刻画了一般的 K-正性保持算子，即具有多项式系数 $q_\alpha\in$实数集$[x_1,\dots,x_n]$。为了进一步了解，我们考察常系数 $q_\alpha\in$ 实数集的简单情形。

例 5.16. 设 $n=1$ 且 $t\in$ 实数集。则

$$e^{t\partial_x} = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{t^k}{k!}\cdot\partial_x^k$$

根据定理 5.6，是正性保持算子，因为

$$(t^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$$

是一个矩序列，其表示测度为 δ_t。 ∘

例 5.17。设 $n = 1$。那么

$$\exp(t\cdot\partial_x^2) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0}\frac{t^j\cdot\partial_x^{2j}}{j!}$$

对于所有 $t \geq 0$，都是正性保持算子。 ∘

证明。 见问题 5.4。 □

下面给出一个线性算子 T，它不是正性保持算子。

例 5.18 ([dD24，例 1.4])。 设 $k \geq 3$ 和 $a \in$ 实数集 $\setminus \{0\}$。那么

$$\exp(a\partial_x^k) := \sum_{j\in\mathbb{N}_0}\frac{a^j\cdot\partial_x^{j\cdot k}}{j!}$$

不是正性保持算子，因为

$$q_{2k} = \frac{a^2}{2} \neq 0 \qquad \text{but} \qquad q_{2k+2} = 0,$$

也就是说，$(j!\cdot q_j)_{j\in\text{自然数集}_0}$不是矩序列。 ∘

由于实数集 $\mathrm{R}[x_1,\ldots,x_n]$ 上的线性算子由（多项式）系数 q_α （定理 3.1）决定，因此我们只需考察

$$(q_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}.$$

根据定理 5.6， K-正性保持算子由以下条件刻画：

$$(\alpha!\cdot q_\alpha(y))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$$

对于固定的 $y \in K$。因此，考察常系数是很自然的一步，以下定义中我们也纳入了 $\alpha!$系数。

定义 5.19。 设 $s = (s_\alpha)^{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ 是一个实数序列。我们定义

$$D : \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0^n} \to \mathbb{R}[[\partial_1,\ldots,\partial_n]], \quad s \mapsto D(s) := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\frac{s_\alpha}{\alpha!}\cdot\partial^\alpha.$$

定义 5.20。 设 $s = (s_\alpha)^{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ 和 $t = (t_\alpha)^{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ 是两个实数序列。我们定义卷积

$$s * t = (u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$$

关于 s 和 t 由

$$u_\alpha := \sum_{\beta \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot s_\beta \cdot t_{\alpha-\beta}. \tag{5.6}$$

下面的引理由前面两个定义直接得出。

引理 5.21。 设 $s = (s_\alpha)^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 和 $t = (t_\alpha)^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 是两个实数序列。那么

$$D(s)D(t) = D(t)D(s) = D(s * t).$$

证明。 参见问题 5.5。 □

定义 5.22 （例如参见 [Bog07，第 3.9] 节）。 设 $n \in$ 为自然数集， μ 和 ν 是实数集 R^n 上的测度，并且

$$a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto x + y.$$

我们将加法卷积 $\mu * \nu$ 定义为

$$\mu * \nu := (\mu \times \nu) \circ a^{-1}.$$

我们定义

$$\mu^{*0} := \delta_0 \quad \text{and} \quad \mu^{*k} := \underbrace{\mu * \cdots * \mu}_{k\text{-times}}$$

对所有 $k \in$ 自然数集。

定理 5.23([dD24, 推论 3.4])。 设 $n \in$ 自然数集，设 $s \in$ 实数集$^{\mathbb{N}_0^n}$ 是一个矩序列，其表示测度为 μ，且 $t \in$ 实数集$^{\mathbb{N}_0^n}$ 是一个矩序列，其表示测度为 ν。那么 $s * t$ 由测度 $\mu * \nu$表示。

证明。 参见问题 5.6。 □

习题

5.1 证明推论 5.8。

5.2 设 $n \in$ 自然数集，设 $\nu = \delta_x$ 和 $\mu = \delta_y$ 满足 x， $y \in$ 推论 5.8 中的实数集^n 。测度 $\nu \odot \mu$ 是什么?

5.3 在例 5.16 中，证明

$$(e^{t\partial_x} p)(x) = p(x + t)$$

对所有 $p \in \mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 以及 $t \in \mathrm{R}$。

5.4 证明例 5.17 是正性保持算子。常数系数序列的表示测度是什么?

提示：对于固定的方差 σ，高斯分布有哪些矩?

5.5 证明引理 5.21。

5.6 证明定理 5.23。

5.7 当 $K = \emptyset$ 时，本章第 5 章中的结果会怎样?

第四部分 K-正性保正半群的生成元

第6章
有限维与无限维李群

李群是数学中的基本结构，受到广泛研究和讲授。有关文献，参见例如 [War83] 和 [Hal04]。

遗憾的是，这只适用于通常意义上的有限维李群。在我们的研究中，需要考虑无限维的版本，因为我们研究的是无限维空间 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$。我们已将 $\mathrm{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 确定为一个 LF空间，并将 $\mathrm{C}^{\mathbb{N}_0^n}$ 确定为一个 Fr´echet 空间。这些拓扑也正是无限维李群版本所需的拓扑。因此，我们重述研究所需的有限维结果，并介绍（正则）Fr´echet 李群。关于这一主题的更多文献，参见例如 [Les67], [Omo74], [Omo97], [Sch23]。

6.1 有限维李群

定义6.1。设 $n \in \mathrm{N}$。李群 G 是一个可微流形，同时赋有群结构，使得映射

$$G \times G \to G, \quad (\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$$

是 C^∞。

例6.2。令 $n \in$ 自然数集。

(a) 配备向量加法的实数集^n 是一个李群。**(b)** $\mathrm{C}^* := \mathrm{C}\setminus\{0\}$配备乘法后是一个李群。**(c)** 两个李群 G 和 H 的乘积 $G \times H$ 本身也是一个李群，其乘积流形结构和直积群结构为:

$$(\sigma_1, \tau_1) \cdot (\sigma_2, \tau_2) = (\sigma_1\sigma_2, \tau_1\tau_2).$$

(d) 由实数元素构成的所有非奇异 $n \times n$ 矩阵组成的流形 Gl(n,R)，在矩阵乘法下构成一个李群。。

定义 6.3。 R 上的李代数是一个实向量空间 $\mathfrak{g}$ ，并配备一个双线性算子

$$[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g},$$

称为括号，使得

(i) $[x,y]=-[y,x]$ 和 (ii)

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$$

对所有 x， y， $z\in\mathfrak{g}$。

注 6.4。 我们看到李群是有限维的。然而，我们对李代数的定义也涵盖无限维情形。 。

例 6.5。设 $n\in$ 自然数集。

(a) 任意（有限维或无限维）向量空间都可以在将所有括号设为零的情况下成为李代数。这样的李代数称为阿贝尔李代数。**(b)** 所有 $n\times n$-矩阵构成的向量空间 $\mathfrak{gl}(n,\mathrm{R})$ 在规定

$$[A,B]:=AB-BA$$

对所有 $A,B\in\mathfrak{gl}(n,\mathrm{R})$ 都成立。

(c) 以 x、 y 为基的二维向量空间，在规定

$$[x,x]=[y,y]=0\qquad\text{and}\qquad[x,y]=y$$

并利用 $[y,x]=-y$ 将其双线性延拓后，成为李代数。

(d) 向量空间 R^3 配备向量叉积的双线性运算 $x\times y$ 后，是一个李代数。 。

命题 6.6 （例如参见 [War83，命题 3。7]）。 设 G 是一个李群。那么， G 在单位元 $e\in G$ 处的切空间 T_eG 是一个有限维李代数，并且

$$\dim G=\dim T_e.$$

定义 6.7. 设 G 为李群。我们将李群G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 定义为 $\mathfrak{g}:=T_eG$ G 在单位元 $e\in G$处的切空间。

注 6.8. 或者，也可以将李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 定义为 G上的左不变向量场构成的（李）代数，参见例如 [War83]。 。

注 6.9. 伊戈尔·德米特里耶维奇·阿多证明了一个极其重要的定理，即所谓的阿多定理，该定理指出，每个有限维李代数都在 $\mathfrak{gl}(n,\mathrm{R})$ 中有一个忠实的（1 : 1）表示；也就是说，对于任意李代数 $\mathfrak{g}$ ，都存在一个足够大的 n ，使得 $\mathfrak{g}$ 同构于 $\mathfrak{gl}(n,\mathrm{R})$ 的一个李子代数。 。

定理 6.10 （例如参见 [War83, 定理 3。19]）。 设 G 是一个李群，其李代数为$\mathfrak{g}$。那么， G 的连通李子群与 $\mathfrak{g}$的子代数之间存在一一对应关系。

6.2 矩阵李群与矩阵指数函数

抽象李群形形色色，而更简单的例子是矩阵李群。对于我们的研究而言，矩阵李群甚至已经足够。

定义6.11. 令 $n \in$ 自然数集。我们定义矩阵指数函数

$$\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A \mapsto \exp A := \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{A^k}{k!}.$$

备注 6.12。 简而言之，我们也写作

$$e^A := \exp A.$$ ∘

引理 6.13. 矩阵指数是良定义的，即

$$\exp A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

对于所有 $A \in$ 实数集$^{n\times n}$。

证明。 令 $\|\cdot\|$ 为 $\mathrm{R}^{n\times n}$ 上的谱范数:

$$\|A\| := \max_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

显然,

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\| \qquad \text{and} \qquad \|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|$$

对所有 $A,\ B \in \mathrm{R}^{n\times n}$ 均成立。因此,

$$\|\exp A\| \le \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < \infty$$

对所有 $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ 均成立。因此，在 exp 的定义中，我们有有界控制，故在 R$^{n\times n}$ 中收敛。□

命题 6.14。 令 $n \in$ 自然数集。则以下结论成立:

(i) $\exp 0 = \mathrm{id}$。 *(ii)* $(\exp X)^T = \exp(X^T)$ 对所有 $X \in \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{R})$ 均成立。*(iii)* 对所有满足 $[X,Y] = 0$ 的 X、$Y \in \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{R})$,

$$\exp(X+Y) = \exp X \cdot \exp Y.$$

(iv) 对所有 $X \in \mathfrak{gl}(n,$实数集$)$ 以及 $a, b \in$ 实数集,

$$\exp((a+b)X) = \exp(aX)\cdot\exp(bX).$$

(v) 对所有 $X \in \mathfrak{gl}(n,$实数集$)$，$\exp X$ 可逆且

$$(\exp X)^{-1} = \exp(-X).$$

(vi) 对所有 $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 和 $C \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$，

$$\exp(CXC^{-1}) = C \cdot \exp X \cdot C^{-1}.$$

(vii) 令

$$\mathrm{tr}X := X_{1,1} + X_{2,2} + \cdots + X_{n,n}$$

为 $X = (X_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 的迹 $\mathrm{tr}X$。则

$$\det(\exp X) = e^{\mathrm{tr}X}$$

对所有 $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$。

(viii) 对所有 $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 和 $Y \in \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$，

$$\exp(X \oplus Y) = \exp X \oplus \exp Y.$$

(ix) 对于 $X \in \mathfrak{gl}(n,$实数集$)$，

$$\exp X = \lim_{k\to\infty} \left(\mathrm{id} + \frac{X}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(\mathrm{id} - \frac{X}{k}\right)^{-k}.$$

证明。 见问题 6.2。 □

定理 6.15。 设 $n \in$ 自然数集。则以下结论成立：

(i) 对于 $X \in \mathfrak{gl}(n,$实数集$)$，函数

$$\mathbb{R} \to \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}), \quad t \mapsto \exp(tX)$$

属于 C^∞ $t \in$ 实数集，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tX)\Big|_{t=0} = X.$$

(ii) $\mathfrak{gl}(n,$ 实数集$)$ 是李群 $\mathrm{Gl}(n,$实数集$)$的李代数，即

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = T_{\mathrm{id}}\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}).$$

证明。 (i)：由于 $\exp X$ 的定义中的级数绝对收敛，因此可以交换求导与无穷求和的顺序：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tX) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{t^k \cdot X^k}{k!} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^{k-1} \cdot X^k}{(k-1)!} = X \cdot \exp(tX).$$

这就证明了该结论，因为 $\exp 0 = \mathrm{id}$。

(ii)：设 $X \in \mathfrak{gl}(n,$ 实数集$)$。那么，由 (i) 和命题 6.14,

$$g_X : \mathbb{R} \to \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}), \quad t \mapsto \exp(tX)$$

是 Gl(n，实数集) 中的一条光滑曲线，且

$$g(0) = \mathrm{id} \quad \text{and} \quad g'(0) = X,$$

即， $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \subseteq T_{\mathrm{id}}\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$。但是由于

$$\dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = n^2 = \dim \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}),$$

我们有 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = T_{\mathrm{id}}\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$。 □

例 6.16。令 $n \in$ 自然数集，并令

$$\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) := \{X \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \mid \det X = 1\}$$

为特殊线性群。显然，Sl(n, R) 是 Gl(n, R) 的真子群，且

$$\dim \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1.$$

它也是连通的。我们希望计算李子群 Sl(n, R) 对应的李子代数 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$。根据命题 6.14（vii），我们有 $\det \exp X = e^{\mathrm{tr}X}$，即，

$$X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tr}X = 0.$$

但是由于

$$\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1 = \dim\{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}X = 0\},$$

我们有

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}X = 0\}.$$ ○

定理 6.17。设 $n \in$ 自然数集，设

$$\|X\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} x_{i,j}^2}$$

为 $X = (x_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathfrak{gl}(n,$ 实数集) 的希尔伯特–施密特范数，并设

$$\log X := \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^{k+1} \cdot \frac{(X - \mathrm{id})^k}{k}.$$

则以下结论成立：

(i) 对所有满足 $X \in \mathfrak{gl}(n,$ 实数集) 且 $\|X -$ 恒等映射$\| < 1$ 的情形，对数 X 是良定义的，并且

$$\exp(\log X) = X.$$

(ii) 若 $X = \mathrm{id} + N$ 对某个幂零 $N \in \mathfrak{gl}(n,$实数集)成立，即 $N^n = 0$，则

$$\log X = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \cdot \frac{N^k}{k} \quad \textit{and} \quad \exp(\log X) = X.$$

(iii) 若 $X \in \mathfrak{gl}(n, \text{实数集})$ 满足 $\|X\| < \log 2$ 且 $\|\mathrm{id} - \exp X\| < 1$，则

$$\log(\exp X) = X.$$

证明。 由收敛半径内对数级数的绝对收敛性，经直接计算即可得出，这与分析中的情形 $n = 1$ 类似。□

推论 6.18。 设 $n \in$ 自然数集 且 $X \in \mathrm{Gl}(n,$实数集$)$。则存在一个 $A \in \mathfrak{gl}(n, \text{实数集})$，使得 $X = \exp A$，也就是说，每个可逆的 X 都具有形式 $\exp A$。

证明。 参见问题 6.6。 □

6.3 正则 Fr´échet 李群

Hideki Omori 早已陈述如下结论，参见 [Omo74，第 III–IV 页]:

> *[G]*一般弗雷歇流形很难处理。例如，切丛的定义存在一些困难，因此映射概念 C^∞ 的定义也有困难。当然，一般而言，既没有隐函数定理，也没有弗罗贝尼乌斯定理。因此，建立一般弗雷歇李群的理论并非易事。

Omori 在 [Omo97] 中进行了更详尽的研究，此后该理论不断发展，参见例如 [Omo74, Kac85,Omo97,SHNW02, Wur04,Sch23] 及其中的参考文献。这里我们只给出本研究所需的基本定义。

定义6.19 ([Omo97, 第9页，定义3.1])**.** 由度量群 G 和完备局部凸拓扑向量空间 $\mathfrak{g}$ 构成的一对 $(G, \mathfrak{g})$，称为指数型拓扑群，如果存在一个连续映射

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$

使得以下条件成立:

(i) 对每个 $X \in \mathfrak{g}$，$\{\exp(sX)\}_{s\in\mathbb{R}}$ 是 G的单参数子群。(ii) 对于 X, $Y \in \mathfrak{g}$, $X = Y$ 当且仅当

$$\exp(sX) = \exp(sY)$$

对每个 $s \in \mathrm{R}$。

（iii）对于一个取值于 $\mathfrak{g}$ 的序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$，

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \in \mathfrak{g}$$

当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \exp(sX_n) = \exp(sX)$$

在每个满足 $-\infty < a < b < \infty$ 的 $[a,b]$ 上关于 s 一致。

(iv) 存在一个连续映射 Ad: $G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，使得

$$h \cdot \exp(sX) \cdot h^{-1} = \exp(s\mathrm{Ad}(h)X)$$

对每个 $s \in \mathrm{R}$、$h \in G$ 和 $X \in \mathfrak{g}$。

定义 6.20 ([Omo97，第 10] 页)。设 $(G,\mathfrak{g})$ 是一个指数型拓扑群。一个连续映射

$$c : \mathbb{R} \to G$$

当且仅当满足以下条件时，称其在 $t_0 \in \mathrm{R}$处可微

$$\lim_{n\to\infty} \left(c(t_0 + s/n) \cdot c(t_0)^{-1}\right)^n$$

在每个紧区间 $[a,b]$ 上，s 以 $-\infty < a < b < \infty$ 一致收敛到一个单参数子群

$$\exp(sX(t_0)), \qquad \text{where } X(t_0) \in \mathfrak{g}.$$

$X(t_0)$称为 c 在 t_0 处的导数，记作

$$X(t_0) = \dot{c}(t_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(t)\bigg|_{t=t_0}.$$

c 称为一条 C^1曲线，如果 c 在每个 $t_0 \in \mathrm{R}$ 处都可微，并且 $\dot{c}$ 关于 $t \in \mathrm{R}$ 连续。我们用 $C^1(G,\mathfrak{g})$ 表示 G中所有 C^1曲线构成的空间。

定义 6.21（例如参见 [Omo97，第 63 页，定义 1.1]）。若满足以下条件，我们称 $(G,\cdot)$ 为一个（正则）*Fr´*谢费尔李群:

（i） G 是一个无限维光滑 Fr´谢费尔流形。（ii）$(G,\cdot)$ 是一个群。（iii）映射 $G \times G \to G$，$(A,B) \mapsto A \cdot B^{-1}$ 是光滑的。（iv） G 的*Fr´*谢费尔李代数 $\mathfrak{g}$ 与切空间 T_eG 同构，其中切空间 T_eG 是 G 在单位元 $e \in G$处的切空间。

(v) exp: $\mathfrak{g} \to G$ 是一个光滑映射，满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tu)\bigg|_{t=0} = u$$

对所有 $u \in \mathfrak{g}$均成立。

(vi) 在 Fr´echet 拓扑下，G 中的 C^1-曲线构成的空间 $C^1(G,\mathfrak{g})$ 与 G 中所有 C^1-曲线的集合相同。

这里仅给出正则 Fr´echet 李群的定义。接下来的两章中，我们将在研究线性算子时进一步熟悉这一结构。

$$T : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$$

具有常系数。结果将表明，它们构成一个（交换的）正则 Fr´echet 李群。

有关无限维流形、微分学、李群和李代数的更多内容，参见例如 [Les67、Omo97、Sch23]。

习题

6.1 验证例 6.5 确实是李代数。

6.2 证明命题 6.14。

6.3 利用若尔当分解，给出计算实$n \times n$矩阵 X的 $\exp X$ 的方法。

6.4 设 $n \in$ 为自然数集，且

$$\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) := \left\{ X \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \,\middle|\, X^T = X^{-1} \right\}$$

为 正交群。

a) O(n,R) 是李群吗？ **b)** O(n,R) 是连通的吗？ **c)** 计算 $\mathfrak{o}(n,\mathrm{R}) = T_{\mathrm{id}}\mathrm{O}(n,\mathrm{R})$。

6.5 设 $n \in$ 为自然数集，且

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) := \left\{ X \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \,\middle|\, X^T = X^{-1} \text{ and } \det X = 1 \right\}$$

为特殊正交群。

a) SO(n,R) 是李群吗？
b) 计算 SO(n,R) 的李代数 $\mathfrak{so}(n, \mathrm{R})$。

6.6 证明推论 6.18。

6.7 设 $a \in \mathrm{R}$，并令

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

a) 计算 $\exp A$。
b) $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathrm{R}) \to \mathrm{Gl}(n,\mathrm{R})$ 是否为双射？

第7章
常系数线性算子的正则 Fr´echet 李群 $\mathfrak{D}_c$

我们现在要研究保正半群的生成元。我们从常系数开始。这最早发表于 [dD24]。

7.1 $\mathfrak{D}_c$ 与 $\mathfrak{d}_c$的定义

定义 7.1. 设 $n \in$ 自然数集。我们定义

$$\mathfrak{D}_c := \left\{ T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} q_\alpha \cdot \partial^\alpha \in \mathbb{R}[[\partial_1, \ldots, \partial_n]] \;\middle|\; q_0 = 1 \right\}$$

and

$$\mathfrak{d}_c := \left\{ A = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha \cdot \partial^\alpha \in \mathbb{R}[[\partial_1, \ldots, \partial_n]] \;\middle|\; a_0 = 0 \right\}.$$

7.2 李群$\mathfrak{D}_{c,\ d}$

定义 7.2. 设 $n \in$ 自然数集且 $d \in$ 自然数集$_0$。我们定义

$$\mathfrak{D}_{c,d} := \mathfrak{D}_c|_{\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]_{\leq d}} \quad \text{and} \quad \mathfrak{d}_{c,d} := \mathfrak{d}_c|_{\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]_{\leq d}}.$$

注记 7.3 ([dD24, 第 888] 页)。 由于

$$A\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq d} \subseteq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq d}$$

对于所有 $d \in$ 自然数集$_0$ 和 $A \in \mathfrak{D}_c$，集合$\mathfrak{D}_{c,d}$ 是良定义的。从定义 7.2可知，$\mathfrak{D}_{c,\ d}$ 仅由如下形式的算子组成

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n:|\alpha|\le d} c_\alpha\cdot\partial^\alpha$$

其中 $c_\alpha\in$实数集且 $c_0=1$，因为在实数集上$[x_1,\dots,x_n]_{\le d}$每个满足 $|\beta|>d$的算子 ∂^β 都符合

$$\partial^\beta p=0$$

对于所有 $p\in$实数集$[x_1,\dots,\ x_n]_{\le d}$，即，

$$\partial^\beta=0$$

在 实数集$[x_1,\dots,\ x_n]_{\le d}$。 ∘

注 7.4 ([dD24, 注 2.7])。 我们也可以如下定义 $\mathfrak{D}_{c,\ d}$

$$\mathfrak{D}_c/\langle\partial^\alpha\,|\,|\alpha|=d+1\rangle.$$

这两种定义几乎相同。然而，定义 7.2 具有以下优点。在 $\mathfrak{D}/\partial^\alpha\,|\,|\alpha|=d+1$ 中，问题在于我们处理的是等价类，因此无法对 $A\in\mathfrak{D}_d$ 计算 $A+B$，也无法对 $d\neq e$ 计算 $B\in\mathfrak{D}_e$。利用定义 7.2，我们可以对 $A\in\mathfrak{D}_d$ 计算 $A+B$，并对带有$d\neq e$ 的 $B\in\mathfrak{D}_e$ 进行计算，因为 $A+B$ 定义在

$$\operatorname{dom}(A+B)=\operatorname{dom}A\cap\operatorname{dom}B=\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]_{\le\min\{d,e\}}$$

正如对（无界）算子 [Sch12] 通常所做的那样。于是，定义 7.2 甚至可用于对实数集$[x_1,\dots,\ x_n]_{\le d}$ 上的 A 计算 $A+B$，并对实数集 $[x_1,\dots,\ x_m]_{\le e}$ 上的 B 进行计算，对于 $n\neq m$ 和$d\neq e$ 在

$$\operatorname{dom}(A+B)=\mathbb{R}[x_1,\dots,x_{\min\{n,m\}}]_{\le\min\{d,e\}}.$$ ∘

例 7.5 ([dD24，例 2.8])。 设 $n=1$ 和 $d=3$。则

$$\mathfrak{D}_3=\left\{1+c_1\partial_x+c_2\partial_x^2+c_3\partial_x^3\;\middle|\;c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R},\ c_0>0\right\}\quad\text{on}\quad\mathbb{R}[x]_{\le3}.$$

Let

$$A=1+a_1\partial_x+a_2\partial_x^2+a_3\partial_x^3\quad\text{and}\quad B=1+b_1\partial_x+b_2\partial_x^2+b_3\partial_x^3$$

属于 $\mathfrak{D}_3$。则 $AB=BA$ 和

$$\begin{aligned}AB&=(1+a_1\partial_x+a_2\partial_x^2+a_3\partial_x^3)\cdot(1+b_1\partial_x+b_2\partial_x^2+b_3\partial_x^3)\\&=1+(a_1+b_1)\partial_x+(a_2+a_1b_1+b_2)\partial_x^2+(a_3+a_2b_1+a_1b_2+b_3)\partial_x^3,\end{aligned}\tag{7.1}$$

因为导数 ∂^i 与 $i\ge4$ 是 $\mathrm{R}[x]_{\le3}$ 上的零算子。因此，$(\mathfrak{D}_3,\ \cdot)$ 是一个带单位元 $\mathbb{1}=1$ 的交换半群。

现在我们将看到，$\mathfrak{D}_3$ 甚至是一个交换群。为此，只需对任意 $A\in\mathfrak{D}_3$ 找到一个满足 $AB=\mathbb{1}$ 的 $B\in\mathfrak{D}_3$。根据 (7.1)，$AB=\mathbb{1}$ 等价于

$$\begin{aligned}0&=a_1+b_1&&\Rightarrow\quad b_1=-a_1\\0&=a_2+a_1b_1+b_2&&\Rightarrow\quad b_2=-a_2+a_1^2\end{aligned}$$

$$0 = a_3 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + b_3 \qquad \Rightarrow \quad b_3 = -a_3 + 2a_2 a_1 - a_1^3,$$

也就是说，每个 $A \in \mathfrak{D}_3$ 都有唯一的逆映射

$$A^{-1} = 1 - a_1\partial_x + (-a_2 + a_1^2)\partial_x^2 + (-a_3 + 2a_2 a_1 - a_1^3)\partial_x^3 \quad \in \mathfrak{D}_3.$$

因此，$(\mathfrak{D}_3, \cdot)$ 是一个交换群。 ∘

我们在前一个例子中已经看到，对于 $n = 1$ 和 $d = 3$，$(\mathfrak{D}_d, \cdot)$ 是一个交换群。对所有 $n \in$ 自然数集和 $d \in$ 自然数集$_0$，这一结论都成立。

引理 7.6 ([dD24, 引理 2.9])**.** 设 $n \in$ 自然数集 且 $d \in$ 自然数集$_0$。那么 $(\mathfrak{D}_{c,d}, \cdot)$ 是一个交换群。

证明。设

$$A = \sum_{\alpha:|\alpha|\le d} a_\alpha \partial^\alpha \quad \text{and} \quad B = \sum_{\beta:|\beta|\le d} b_\beta \partial^\beta \quad \in \mathfrak{D}_{c,d},$$

即，$a_0 = b_0 = 1$。那么

$$AB = C = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^n:|\gamma|\le d} c_\gamma \cdot \partial^\gamma$$

with

$$c_\gamma = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n:\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta. \tag{7.2}$$

当且仅当对所有 $\alpha_i \ge \beta_i, \ldots, n$，$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \succeq \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 在自然数集 N_0^n 上成立时，(7.2) 可通过对 $|\gamma|$ 使用归纳法求解。对于 $|\gamma| = 0$，我们有

$$c_0 = a_0 \cdot b_0 \quad \text{and} \quad a_0 = c_0 = 1,$$

也就是说，

$$b_0 = 1.$$

因此，假设对于某个 $k = 0,1,\ldots, d-1$，所有满足 $|\gamma| \le k-1$ 的 c_γ 都已求得 (7.2) 的解。那么，对于任意满足 $|\gamma| = k$ 的 $\gamma \in \mathrm{N}_0$，我们有

$$b_\gamma = a_0 b_\gamma = -\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\setminus\{0\}:\gamma\succeq\alpha} a_\alpha \cdot b_{\gamma-\alpha}, \tag{7.3}$$

也就是说，方程组 (7.2) 通过归纳法得到唯一解。因此，对每个 $A \in \mathfrak{D}_{c,d}$，都存在唯一的 $B \in \mathfrak{D}_{c,d}$ 满足 $AB = BA = \mathbb{1}$。□

由引理 7.6 可知，对于任意 $n \in$ 自然数集 和 $d \in$ 自然数集$_0$，$(\mathfrak{D}_{c,d}, \cdot)$ 是一个交换群。令

$$\iota_d : \{1\} \times \mathbb{R}^{\binom{n+d}{n}-1} \to \mathfrak{D}_d, \quad (a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n:|\alpha|\le d} \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n:|\alpha|\le d} a_\alpha \cdot \partial^\alpha \tag{7.4}$$

为一个仿射线性映射。那么 (7.4) 中的 ι_d 是一个微分同胚，并且是 $\mathfrak{D}_{c,d}$ 的坐标映射。光滑流形

$$\{1\} \times \mathbb{R}^{\binom{n+d}{n}-1}$$

继承了 $\mathfrak{D}_{c,d}$ 的群结构，通过 ι_d，即，

$$(\mathfrak{D}_d, \cdot) \overset{\iota_d}{\cong} \left(\{1\} \times \mathbb{R}^{\binom{n+d}{n}-1}, \odot\right) \tag{7.5}$$

因此，映射 ι_d 给出如下结果。

定理 7.7 ([dD24, 定理 2.10])。 设 $n \in$ 自然数集 和 $d \in$ 自然数集$_0$。那么 $(\mathfrak{D}_{c,d}, \cdot)$ 是一个李群。

证明。 (7.4) 中的映射 ι_d 是 $\mathfrak{D}_{c,d}$ 与 $\{1\}$ ×实数集$(\binom{n+d}{n})_{-1}$ 之间的微分同胚。因此，$\mathfrak{D}_{c,d}$ 是一个可微流形，并具有群结构 $(\mathfrak{D}_{c,d}, \cdot)$。由 (7.2) 和 (7.3)，映射

$$\mathfrak{D}_{c,d} \times \mathfrak{D}_{c,d} \to \mathfrak{D}_{c,d}, \quad (A, B) \mapsto AB^{-1}$$

是光滑的。因此，$(\mathfrak{D}_{c,d}, \cdot)$ 是一个交换李群。 □

7.3 $\mathfrak{d}_{c,\ d}$ $\mathfrak{D}_c$的d李代数

由于每个 Dc,d 都是线性映射

$$A : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\le d} \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\le d}$$

在有限维向量空间 R 上，我们可以为 R 选取一组基，并得到 Dc,d 的矩阵表示。取 R 的单项式基。则 Dc,d 是一个对角元均为 1 的上三角矩阵。

例 7.8 （例 7.5 续，dD24，例 2.）。设.....则每个

$$A = 1 + a_1\partial_x + a_2\partial_x^2 + a_3\partial_x^3 \quad \in \mathfrak{D}_{c,3}$$

相对于 R 的单项式基 {1，...，...，...}，其矩阵表示为

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 2a_2 & 6a_3 \\ 0 & 1 & 2a_1 & 6a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此，我们令

$$\tilde{\mathfrak{D}}_{c,3} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 2a_2 & 6a_3 \\ 0 & 1 & 2a_1 & 6a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

因此，

$$(\tilde{A} - \mathrm{id})^4 = 0$$

作为矩阵，同时也

$$(A - \mathbb{1})^4 = 0$$

作为作用于 $\mathrm{R}[x]_{\leq 3}$ 上的算子。由定理 6.17 可知，矩阵值指数映射

$$\exp : \mathrm{gl}(4, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(4, \mathbb{C}), \quad \tilde{A} \mapsto \exp(\tilde{A}) := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\tilde{A}^k}{k!}$$

是满射，且对数

$$\tilde{A} \mapsto \log \tilde{A} := - \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(\mathrm{id} - \tilde{A})^k}{k}$$

对于所有幂零的 $\mathrm{id} + N \in \mathrm{Gl}(4,\mathbb{C})$，对数都有良定义，见定理 6.17 (ii)。由于 $\tilde{\mathfrak{D}}_{c,3} \subseteq \mathrm{Gl}(4,\mathbb{C})$，且对所有 $\tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{c,3}$ 都有 $(\mathrm{id} - \tilde{A})^4 = 0$，因此我们有

$$\log : \tilde{\mathfrak{D}}_3 \to \mathrm{gl}(4, \mathbb{C}), \quad \tilde{A} \mapsto \log \tilde{A} = - \sum_{k=1}^{3} \frac{(\mathrm{id} - \tilde{A})^k}{k}. \tag{7.6}$$

此外，由于对所有 $A \in \mathfrak{D}_{c,3}$ 都有 $(A - \mathbb{1})^4 = 0$，我们也可以将 (7.6) 用于 $\mathfrak{D}_{c,3}$ 中的微分算子：

对数映射：$\mathfrak{D}_{c,3} \to \left\{ d_0 + d_1\partial_x + d_2\partial_x^2 + d_3\partial_x^3 \middle| d_0, \ldots, d_3 \in \mathbb{R} \right\}$，$A \mapsto - \sum_{k=1}^{3} (\mathbb{1} - A)^k$。

为确定像 $\log\mathfrak{D}_{c,3}$，回想一下，根据定理 6.17 (ii)，log 也是单射，因此 $\log\mathfrak{D}_{c,3}$ 是 3 维的，且 $d_0 = 0$，即我们有

$$\log \mathfrak{D}_{c,3} = \left\{ d_1\partial_x + d_2\partial_x^2 + d_3\partial_x^3 \middle| d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R} \right\} =: \mathfrak{d}_{c,3}.$$

总之，由于对所有 $A \in \mathfrak{d}_{c,3}$ 都有 $A^4 = 0$，我们得到

$$\exp : \mathfrak{d}_{c,3} \to \mathfrak{D}_{c,3}, \quad A \mapsto \sum_{k=0}^{3} \frac{A^k}{k!} \tag{7.7}$$

是满射，且其逆映射为

$$\log : \mathfrak{D}_{c,3} \to \mathfrak{d}_{c,3}, \quad A \mapsto -\sum_{k=1}^{3} \frac{(\mathbb{1} - A)^k}{k}. \tag{7.8}$$

因此，$\mathfrak{d}_{c,\ 3}$ 是 $\mathfrak{D}_{c,\ 3}$ 的李代数，而式 (7.7) 中的 exp 是李代数 $\mathfrak{d}_{c,\ 3}$ 与其李群 $\mathfrak{D}_{c,\ 3}$ 之间的指数映射，其逆映射为式 (7.8) 中的 log。 ◦

李群 $\mathfrak{D}_{c,3}$ 的前一个李代数 $\mathfrak{d}_{c,3}$ 的例子对所有$n \in \mathrm{N}$ 和 $d \in \mathrm{N}_0$ 都成立。显然，$(\mathfrak{d}_{c,d}, \cdot\,, +)$ 是 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq d}$ 上的代数。代数$\mathfrak{d}_{c,d}$ 是李代数，其括号为

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : \mathfrak{d}_{c,d} \times \mathfrak{d}_{c,d}, \quad (A, B) \mapsto [A, B] := AB - BA,$$

由于$\mathfrak{d}_{c,d}$ 是交换的，因此该式恒等于零。我们有如下结论。

定理 7.9 ([dD24，定理 2。13])。 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $d \in \mathbb{N}_0$。则 $(\mathfrak{d}_{c,d}, \cdot, +)$ 是李群 $(\mathfrak{D}_{c,d}, \cdot)$ 的李代数，其指数映射为

$$\exp : \mathfrak{d}_{c,d} \to \mathfrak{D}_{c,d}, \quad A \mapsto \sum_{k=0}^{d} \frac{A^k}{k!}$$

及其逆映射

$$\log : \mathfrak{D}_{c,d} \to \mathfrak{d}_{c,d}, \quad A \mapsto -\sum_{k=1}^{d} \frac{(\mathbb{1} - A)^k}{k}.$$

证明。 由定理 6.17，类似于例 7.8，结论可得。 □

7.4 正则 Fr´échet 李群 $\mathfrak{D}_c$ 及其正则 Fr´échet 李代数 $\mathfrak{d}_c$

我们将（有限维）李群论证应用于次数有界的情形。在没有次数界的情况下，我们得到如下结论。

定理 7.10 （[dD24，定理 2。15]）。令 $n \in$ 自然数集。则有以下结论：

（i）（$\mathfrak{d}_c$、·、 +）是交换代数。

（ii）（$\mathfrak{D}_c$、·）是交换群。（iii）映射

$$\exp : \mathfrak{d}_c \to \mathfrak{D}_c, \quad A \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{A^k}{k!}$$

是双射。

（iv）映射

$$\log : \mathfrak{D}_c \to \mathfrak{d}_c, \quad A \mapsto -\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(\mathbb{1} - A)^k}{k}$$

是双射。

(v) 映射

$$\exp : \mathfrak{d}_c \to \mathfrak{D}_c \qquad \textit{and} \qquad \log : \mathfrak{D}_c \to \mathfrak{d}_c$$

互为逆映射。

证明。 (i)：这是显然的。

(ii)：这

$$A \cdot B = B \cdot A$$

对所有 $A,\ B \in \mathfrak{D}_c$ 都显然。通过求解 (7.2) 得到 (7.3)，即可唯一确定 $A \in \mathfrak{D}_c$ 的逆映射，对所有 $\gamma \in$ 自然数集$_0^n$ 均成立。这是一个形式幂级数论证，采用逐坐标收敛（即在 Fr´echet 拓扑中，参见例 4.2）。

(iii)：首先我们证明

$$\exp : \mathfrak{d}_c \to \mathfrak{D}_c$$

是良定义的。为此，注意对任意 $A \in \mathfrak{d}_c$，我们有

$$A^k = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \geq k} c_\alpha \cdot \partial^\alpha,$$

也就是说， A^k 不含阶为 $\leq k-1$ 的微分算子。因此，级数

$$\sum_{k=0}^{K} \frac{A^k}{k!} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_{K,\alpha} \cdot \partial^\alpha$$

按系数收敛到

$$\exp A = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{A^k}{k!} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha \cdot \partial^\alpha,$$

也就是说，在 ´的 Fréchet 拓扑中

$$\mathfrak{D}_c \subsetneq \mathbb{R}[[\partial_1, \ldots, \partial_n]] \cong \mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_n]],$$

参见例 4.2。换言之，对 k =0、.....、 $|\alpha|$, 系数 c_α 仅取决于 A^k 。因此我们有

$$c_{K,\alpha} = c_\alpha$$

对所有 $K > |\alpha|$ 都成立，因此 $\exp A \in \mathfrak{D}_c$ 是良定义的。由此我们有

$$\exp \mathfrak{d}_c \subseteq \mathfrak{D}_c.$$

对于等式，我们在 (v) 中给出逆映射。

(iv)：为证明

$$\log : \mathfrak{D}_c \to \mathfrak{d}_c$$

是良定义的；对 $(\mathbb{1} - A)^k$，取 $A \in \mathfrak{D}_c$, 同样的论证如 (iii) 中所示成立。这表明

$$\log A \in \mathfrak{d}_c$$

对所有 $A \in \mathfrak{D}_c$ 都是良定义的，并且有

$$\log \mathfrak{D}_c \subseteq \mathfrak{d}_c .$$

(v)：为证明 exp 与 log 互为逆映射，我们指出

$$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] = \bigcup_{d \in \mathbb{N}_0} \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]_{\le d}.$$

对于 $d \in$ 自然数集$_0$，定义

$$\exp_d A := \sum_{k=0}^{d} \frac{A^k}{k!} \quad \text{and} \quad \log_d A := -\sum_{k=1}^{d} \frac{(\mathbb{1} - A)^k}{k}.$$

于是，对每个 $p \in$ 实数集$[x_1, \dots\dots, x_n]$ 且 $d = \deg p$,

$$\exp(\log A)p = \exp_d(\log_d A)p = Ap$$

对所有 $A \in \mathfrak{d}_c$，由定理 7.9，即,

$$\exp(\log A) = A$$

对所有 $A \in \mathfrak{D}_c$。类似地,

$$\log(\exp A)p = Ap$$

对所有 $A \in \mathfrak{d}_c$ 均成立。这也表明其余断言

$$\exp(\mathfrak{d}_c) = \mathfrak{D}_c \qquad \text{and} \qquad \log \mathfrak{D}_c = \mathfrak{d}_c$$

由 (iii) 和 (iv) 得出。 □

推论 7.11 ([dD24, 推论 2。16])。 设 $n \in$ 自然数集 且 $\mathfrak{d}_c, \mathfrak{D}_c \subseteq$ 实数集$[[\partial_1, \dots, \partial_n]]$ 是 *Fr´echet* 空间（赋予逐坐标收敛拓扑）。则有以下结论：

(i) $\mathfrak{D}_c \times \mathfrak{D}_c \to \mathfrak{D}_c$, $(A, B) \mapsto AB^{-1}$ 是光滑的。*(ii)* $\exp : \mathfrak{d}_c \to \mathfrak{D}_c$ 是光滑的，并且

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(tu) = u$$

对所有 $u \in \mathfrak{d}_c$均成立。

(iii) $\log : \mathfrak{d}_c \to \mathfrak{D}_c$ 是光滑的。

证明。(i)：设

$$A = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha \partial^\alpha \qquad \text{and} \qquad B = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} b_\alpha \partial^\alpha$$

其中 $a_0 = b_0 = 1$。由 (7.2) 可知，乘法是光滑的，因为乘积的每个坐标 c_γ

$$AB = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} c_\alpha \partial^\alpha$$

是关于 a_α 和 b_α 的多项式，其系数为 $|\alpha| \le |\gamma|$。逆映射

$$B^{-1} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} d_\alpha \partial^\alpha$$

根据 (7.3)，其为光滑的；也就是说，逆映射的系数 d_γ 也关于系数 b_α 呈多项式依赖，其系数为 $|\alpha| \le |\gamma|$。

(ii)：在定理 7.10 (iii) 的证明中，我们已经看到，系数c_γ

$$\exp A = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} c_\alpha \partial^\alpha$$

呈多项式依赖，其所对应的系数为 a_α

$$A = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\setminus\{0\}} a_\alpha \partial^\alpha$$

其系数为 $|\alpha| \le |\gamma|$。

条件

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(tu) = u$$

由直接计算即可得出。

(iii)：与 (ii) 类似，由定理 7.10 (iv) 可得。 □

容易看出， $\mathfrak{d}_c$ 和 $\mathfrak{D}_c$ 都是无限维光滑（Fr´echet）流形。因此，综上所述，我们得到以下结论。

定理 7.12 ([dD24, 定理 2.17])。 令 $n \in$ 自然数集。那么，$(\mathfrak{D}_c, \cdot)$ 作为 *Fr´echet* 空间，是一个交换的正则 *Fr´echet* 李群，其对应的交换 *Fr´echet* 李代数为$(\mathfrak{d}_c, \cdot, +)$。指数映射

$$\exp : \mathfrak{d}_c \to \mathfrak{D}_c, \quad A \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{A^k}{k!}$$

是光滑的双射，其逆映射也光滑且为双射

$$\log : \mathfrak{D}_c \to \mathfrak{d}_c, \quad A \mapsto -\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(\mathbb{1} - A)^k}{k}.$$

证明。 我们知道， $\mathfrak{D}_c$ 是一个无限维光滑流形， $\mathfrak{D}_c$ 是一个 Fr´echet 空间（赋予按系数收敛拓扑，见例 4.2），并且根据

定理 7.10 (ii)，我们还知道 $(\mathfrak{D}_c, \cdot)$ 是一个交换群。根据推论 7.11 (i)，我们有

$$(A, B) \mapsto AB^{-1}$$

在 Fr´echet 拓扑中连续。因此，$(\mathfrak{D}_c, \cdot)$ 是一个无限维交换 Fr´echet 李群。

关于 exp 和 log 的性质见定理 7.10 (iii)–(v)。

现在我们证明定义 6.21 中的正则性条件 (vi)。设 $F : \mathrm{R} \to \mathfrak{D}_c$ 是一个 C^1-可微函数，即，

$$\lim_{n\to\infty} \left(F\left(t + \frac{s}{n}\right) \cdot F(t)^{-1} \right)^n \tag{7.9}$$

在每个紧区间上一致收敛到一个单参数子群

$$\exp(s f(t))$$

其中 $f: \mathrm{R} \to \mathfrak{d}$ 是 $F(t)$ 在 $t \in \mathrm{R}$ 处的导数 $\dot{F}(t)$，参见 [Omo97，第 10] 页。但我们可以对 F 取对数

$$\tilde{f}(t) := \log F(t)$$

对所有 $t \in$ 实数集，可见 $\tilde{f}$ 是 C^1，因为由推论 7.11 (iii) 可知 log 是光滑的。由推论 7.11 (ii)，我们有 $f = \tilde{f}$。因此，$C^1(\mathfrak{D}_c, \mathfrak{d}_c)$与 $\mathfrak{D}_c$ 中在 $\mathfrak{D}_c$的 Fr´echet 拓扑下的所有C^1-曲线的集合重合。□

在前面的证明中，我们也可以用如下事实来替换 (7.9)：一个函数

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}[[\partial_1, \ldots, \partial_n]], \quad t \mapsto F(t) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} F_\alpha(t) \cdot \partial^\alpha$$

对某个 $m \in$ 自然数集$_0$ 是 C^m，当且仅当每个坐标函数 F_α 是 C^m。

习题

7.1 设 $n = 1$、$d = 3$，并设

$$A = 2\partial_x - \partial_x^2 + \partial_x^3 \quad \in \mathfrak{d}_{c,3}.$$

计算 $\exp A \in \mathfrak{D}_{c,\ 3}$。

7.2 设 $n = 1$、$d = 3$，并令

$$T = 1 - \partial_x + \partial_x^2 + \partial_x^3 \quad \in \mathfrak{D}_{c,3}.$$

计算 $\log T \in \mathfrak{d}_{c,\ 3}$。

第8章
具有常系数的$\mathbb{R}^n$-保正半群的生成元

在上一章中，我们确立了如何计算和处理

$$\exp A$$

when

$$A : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

具有常系数。因此，我们现在可以考察满足以下条件的映射 A

$$(\exp(t \cdot A))_{t \geq 0}$$

是一个保正半群。本章的结果发表于[dD24]。

8.1 常系数有限阶生成元

定义8.1。令 $n \in \mathrm{N}$。我们定义集合

$$\mathfrak{D}_{c,+} := \{A \in \mathfrak{D}_c \mid A \text{ is a positivity preserver}\}$$

所有具有常系数的保正算子，并定义集合

$$\mathfrak{d}_{c,+} := \left\{A \in \mathfrak{d}_c \,\middle|\, \exp(tA) \in \mathfrak{D}_{c,+} \text{ for all } t \geq 0\right\}$$

所有具有常系数的保正算子的生成元。

在例 5.16（以及习题5.3）中，我们已经看到

$$(e^{t\partial_x} f)(x) = f(x + t)$$

对所有 x，$t \in$ 实数集。因此，

$$e^{t\partial_x}$$

对于所有 $t \in$ 实数集以及 $\partial_x \in \mathfrak{d}_{c,\ +}$，它都是一个常系数正性保持算子。

在例 5.17 中，我们已经看到

$$e^{t\partial_x^2}$$

对所有 $t \geq 0$，它都是一个常系数正性保持算子。因此，$\partial_x^2 \in \mathfrak{d}_{c,\ +}$。

在例 5.18 中，我们还看到 $\partial_x^k \notin \mathfrak{d}_{c,\ +}$ 对所有 $k \geq 3$都成立。

以下结果表明，例 5.16 和例 5.17 中的情形是有限秩正性保持算子的唯一生成元。

引理 8.2([dD24，引理 4.4])。 设

$$A = \sum_{j=1}^{k} a_j \partial_x^j \quad \in \mathfrak{d}_{c,+}.$$

那么 $k \leq 2$。

证明。 设 $k \geq 3$ 和 $a_k = 1$。根据例 5.18，我们有 $\exp(\partial_x^k) \notin \mathfrak{D}_{c,+}$，即它不是正性保持算子。因此，存在一个 $f_0 \in$ 实数集$[x]$，满足 $f_0 \geq 0$ 且 $x_0 \in$ 实数集，使得 $[\exp(\partial_x^k)\ f_0](x_0) = -1$。

反设 $A \in \mathfrak{d}_{c,+}$。通过缩放 x 和 A，我们有

$$A_\lambda := \sum_{j=1}^{k} \lambda^{k-j} a_j \partial_x^j \quad \in \mathfrak{d}_+ \tag{8.1}$$

对所有 $\lambda > 0$均成立。根据定理 7.12,

$$[\exp(A_\lambda) f_0](x_0)$$

在 λ 中连续。由于 $(\exp(A_0)\ f_0)(x_0) = -1$，存在一个 $\lambda_0 > 0$ 使得

$$[\exp(A_{\lambda_0}) f_0](x_0) < 0,$$

即，$A \notin \mathfrak{d}_{c,+}$，因此我们有 $k \leq 2$。 □

容易看出，前一个结果对 $n \geq 2$ 也成立。为此，令 $\alpha \in \mathrm{N}_0^n$ 满足 $|\alpha| \geq 3$。那么由定理 5.6 可得

$$\exp(\partial^\alpha) \notin \mathfrak{D}_{c,+}.$$

采用相同的缩放论证（8.1），我们得到 $\partial^\alpha \notin \mathfrak{d}_{c,\ +}$。

8.2 无限可分测度

定义 8.3. 设 $n \in$ 自然数集。若存在一个测度 ν 使得

$$\mu = \nu^{*k},$$

那么， μ 在 R^n 上的测度称为可被 $k \in$ 自然数集整除。若它可被任意 $k \in$ 自然数集中的元素整除，那么， μ 在 R^n 上的测度称为无限可分。

无限可分测度可由*L´évy–Khinchin* 公式完全刻画。

定理 8.4 (L´évy–Khinchin，参见例如 [Kal02，推论 15。8] 或 [Kle06，命题 16。17])。设 $n \in \mathbb{N}$，且 μ 是$\mathbb{R}^n$上的测度。那么以下条件等价：

(i) μ 是无限可分的。*(ii)* 存在一个向量 $b \in \mathbb{R}^n$、一个对称矩阵 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$，满足 $\Sigma \succeq 0$，以及一个测度 ν，定义在$\mathbb{R}^n$ 上并满足 $\nu(\{0\}) = 0$，使得

$$\log \int e^{itx} \,\mathrm{d}\mu(x) = itb - \frac{1}{2} t^T \Sigma t + \int (e^{itx} - 1 - itx \cdot \chi_{\|x\|_2<1}) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

μ的特征函数。

8.3 具有常系数的$\mathbb{R}^n$-正性保留半群的生成元

对于$\mathfrak{D}_{c,\ +}$和$\mathfrak{d}_{c,\ +}$，以下结论成立。

推论 8.5 ([dD24，推论 4。5])。设 $n \in$ 自然数集。则以下结论成立：

(i) $\mathfrak{D}_{c,\ +}$ 是一个闭凸集。*(ii)* $\mathfrak{d}_{c,\ +}$ 是一个非平凡的、闭的凸锥。

推论 8.6 ([dD24，推论 4。6])。设 $n \in$ 自然数集 且 $A \in \mathfrak{d}_c$。则以下各项等价：

(i) $A \in \mathfrak{d}_{c,\ +}$。*(ii)* p_t 的唯一解为

$$\partial_t p = Ap \tag{8.2}$$

对于任意初始值 $p_0 \in \mathrm{Pos}(\text{实数集}^n)$，满足 $p_t \in \mathrm{Pos}(\text{实数集}^n)$ 对所有 $t \geq 0$均成立。

证明。 由于 $p_t = \exp(tA)p_0$ 是时间演化 (8.2) 的唯一解，因此我们有：(i) 对所有 $t \geq 0 \Leftrightarrow$， $\Leftrightarrow \exp(tA)$ 都是正性保持算子；(ii) □

尽管我们有

$$\mathfrak{d}_{c,+} \subseteq \log \mathfrak{D}_{c,+},$$

但等号并不成立，正如我们将在推论 8.10 中看到的那样。正性保持算子的存在等价于存在一个无限可分的表示测度，以下结果将说明这一点。

定理 8.7 ([dD24，主定理 4。7])。设 $n \in$ 自然数集。以下条件等价：

(i) $A \in \mathfrak{d}_{c,\ +}$。*(ii)* $\exp A$ 具有一个无限可分表示测度。*(iii)* $\exp(tA)$ 对某个 $t > 0$ 具有一个无限可分表示测度。*(iv)* $\exp(tA)$ 对所有 $t > 0$ 都具有一个无限可分表示测度。

证明。(i) $\Rightarrow$ (ii)：令 $A \in \mathfrak{d}_{c,+}$，即，

$$\exp(tA) \in \mathfrak{D}_{c,+}$$

对所有 $t \in [0,\infty)$ 都有表示测度 μ_t。令

$$\nu_k := (\mu_{1/k!})^{*k!}.$$

那么，对所有 $k \in$ 自然数集，ν_k 都是 $\exp\ A$ 的表示测度。由于实数集 $[x_1,\ldots,x_n]$ 是一个适配空间，根据 [Sch17 定理 1，$(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是模糊紧的，且存在一个子序列 $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $\nu_{k_i} \to \nu$，并且 ν 是 $\exp A$ 的表示测度。

剩下要证明的是，ν 是无限可分的，即对每个 $l \in$ 自然数集，都存在一个测度 ω_l，使得 $\omega_l^{*l} = \nu$。

令 $l \in$ 自然数集。对于 $i \geq l$，我们定义

$$\omega_{l,i} := (\mu_{1/k_i!})^{*k_i!/l}$$

即，$\omega_{l,i}$ 是 $\exp(A/l)$ 的表示测度。此外，由于实数集$[x_1,\ldots,\ x_n]$ 根据 [Sch17，定理 1.19] 是一个适配空间，故存在子序列 $(i_j)_{\ j\in\text{自然数集}}$ 使得ω_{l,i_j} 收敛于某个 ω_l，即$\omega_{l,i_j} \xrightarrow{j\to\infty} \omega_l$。因此，

$$(\omega_l)^{*l} = \lim_{j\to\infty} (\omega_{l,i_j})^{*l} = \lim_{j\to\infty} \nu_{k_{i_j}} = \nu,$$

即，ν 可被所有 $l \in$ 自然数集整除，因此 ν 是 $\exp A$ 的无限可分表示测度。

（ii）$\Rightarrow$（i）：设 μ_1 是 $\exp A$ 的无限可分表示测度。则

$$\mu_q := \mu_1^{*q}$$

对所有 $q \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$ 存在，且它是 $\exp(qA)$ 的表示测度，即，

$$\exp(qA) \in \mathfrak{D}_{c,+}$$

对所有 $q \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q}$。由于根据定理 7.12，

$$\exp : \mathfrak{d}_c \to \mathfrak{D}_c$$

是连续的，并且根据推论 8.5 (i)$\mathfrak{D}_{c,+}$ 是闭的，我们有

$$\exp(qA) \in \mathfrak{D}_{c,+}$$

对所有 $q \geq 0$ 均成立。因此，我们有 $A \in \mathfrak{d}_{c,\ +}$。

(iv) $\Rightarrow$ (iii)：显然。(iii) $\Rightarrow$ (i)：由“
(ii) $\Leftrightarrow$ (i)”可知

$$qtA \in \mathfrak{d}_{c,+}$$

对于 $t > 0$ 以及所有 $q \in [0,\infty) \cap \mathrm{Q}$。由于 $\mathfrak{d}_{c,+}$ 由推论 8.5 (ii) 可知是闭的，因此我们有

$$q_i tA \to A \in \mathfrak{d}_{c,+}$$

对于满足 $q_i \to t^{-1}$ 为 $i \to \infty$的 $q_i \in \mathrm{Q}$。

(i) $\Rightarrow$ (iv)：由于 $A \in \mathfrak{d}_+$ 且 $\mathfrak{d}_{c,+}$ 由推论 8.5 (ii) 可知是一个闭凸锥，因此我们有

$$tA \in \mathfrak{d}_{c,+}$$

对于所有 $t > 0$，因此由“(i) $\Leftrightarrow$ (ii)”可知，对所有 $t > 0$，$\exp(tA)$ 都有一个无限可分表示测度。□

例 8.8（例 5.16 续，[[dD24，例 4.8]）。设 $n = 1$ 且 $a \in \mathrm{R}$。于是

$$\exp(a\partial_x) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{a^k}{k!} \cdot \partial_x^k$$

由 $\mu = \delta_a$ 表示，因为 δ_a 是矩序列 $(a^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$的表示测度。对于任意 $r > 0$，我们有

$$\delta_{a/r}^{*r} = \delta_a,$$

即，δ_a 是无限可分的。事实上，δ_a 是唯一的紧支撑无限可分测度，参见例如 [Kle06, p. 316]。因此，由定理 8.7，$\partial_x \in \mathfrak{d}_{c,+}$。 。

例 8.9([dD24, 例 4.9])。令

$$A \in \mathfrak{D}_{c,+}$$

为由测度表示的正性保持算子

$$\mathrm{d}\mu = \chi_{[0,1]^n}\, \mathrm{d}\lambda$$

其中 λ 是 n维勒贝格测度，$\chi_{[0,1]^n}$ 是 $[0,1]^n$的特征函数。由于 $\operatorname{supp}\mu$ 是紧的，μ 是唯一的。

众所周知，具有紧支撑的唯一无限可分测度是δ_x，其中 $x \in \mathrm{R}^n$，参见例如 [Kle06, p. 316]。因此，我们有 μ 不是无限可分的，故 $\log A \notin \mathfrak{d}_{c,+}$。 。

前面的例子表明，以下包含关系

$$\mathfrak{d}_+ \subseteq \log \mathfrak{D}_+$$

是适当的。

推论 8.10 （[dD24，推论 4。10]）。设 $n \in$ 自然数集。那么

$$\mathfrak{d}_{c,+} \subsetneq \log \mathfrak{D}_{c,+}.$$

证明。 根据例 8.9，我们有 $\log \mathfrak{D}_{c,+} \setminus \mathfrak{d}_{c,+} \neq \emptyset$。 □

我们在定理 8.7 中看到，具有无限可分表示测度的正性保持算子与

$$e^A$$

with

$$A \in \mathfrak{D}_{c,+}$$

作为生成元

$$A \in \mathfrak{D}_{c,+}$$

之间存在一一对应。无限可分测度由 Lévy–Khintchine 公式完全刻画，参见定理 8.4。Lévy–Khintchine 公式用于以下结果，以完全刻画正性保持算子$\mathfrak{d}_{c,+}$的生成元$\mathfrak{D}_{c,+}$。

定理 8.11 （[dD24，主要定理 4。11]）。 设 $n \in$ 自然数集。则以下条件等价：

(i) $A = \sum_{\alpha \in \text{自然数集}_0^n \setminus \{0\}} a_\alpha \, !\cdot \partial^\alpha \in \mathfrak{d}_{c,+}$。 *(ii)* 存在一个对称矩阵 $\Sigma = (\sigma_{i,j})_{i,j=1}^n \in$ 实数集^n，满足 $\Sigma \succeq 0$；一个向量$b = (b_1, \ldots\ldots, b_n)^T \in$ 实数集^n；以及一个测度 ν，定义在实数集^n 上，满足

$$\nu(\{0\}) = 0 \qquad \textit{and} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha| \, \mathrm{d}\nu(x) < \infty$$

对于所有满足 $|\alpha| \geq 2$ 的 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$，使得

$$a_{e_i} = b_i + \int_{\|x\|_2 \geq 1} x_i \, \mathrm{d}\nu(x) \qquad \textit{for all } i = 1, \ldots, n,$$

$$a_{e_i + e_j} = \sigma_{i,j} + \int_{\mathbb{R}^n} x^{e_i + e_j} \, \mathrm{d}\nu(x) \qquad \textit{for all } i, j = 1, \ldots, n,$$

and

$$a_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \, \mathrm{d}\nu(x) \qquad \textit{for all } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \textit{ with } |\alpha| \geq 3.$$

证明。 根据定理 8.7“(i) $\Leftrightarrow$ (ii)”，我们有：(i) $A \in \mathfrak{d}_{c,+}$ 当且仅当 $\exp A$具有无限可分表示测度 μ，即根据定理 5.6，我们有

$$\exp A = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!}\cdot\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \,\mathrm{d}\mu(x)\cdot\partial^\alpha. \tag{8.3}$$

根据定理 7.12，我们可以取对数，因此 (8.3) 等价于

$$A = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\setminus\{0\}} \frac{a_\alpha}{\alpha!}\cdot\partial^\alpha = \log\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\frac{1}{\alpha!}\cdot\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha\,\mathrm{d}\mu(x)\cdot\partial^\alpha\right). \tag{8.4}$$

通过同构

$$\mathbb{C}[[\partial_1,\dots,\partial_n]]\to\mathbb{C}[[t_1,\dots,t_n]],\quad \partial_1\mapsto it_1,\ \dots,\ \partial_n\mapsto it_n$$

我们得到 (8.4) 等价于

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\setminus\{0\}} \frac{a_\alpha}{\alpha!}\cdot(it)^\alpha = \log\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\frac{1}{\alpha!}\cdot\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha\,\mathrm{d}\mu(x)\cdot(it)^\alpha\right). \tag{8.5}$$

但现在 (8.5) 的右侧是特征函数

$$= \log\int e^{itx}\,\mathrm{d}\mu(x)$$

属于 μ。因此，根据列维–欣钦公式（见定理 8.4），我们有

$$= ibt - \frac{1}{2}t^T\Sigma t + \int (e^{itx} - 1 - itx\cdot\chi_{\|x\|_2<1})\,\mathrm{d}\nu(x). \tag{8.6}$$

对.....进行幂级数展开后

$$e^{itx}$$

在.....的 Fr´echet 拓扑中

$$\mathbb{C}[[x_1,\dots,x_n]],$$

参见例 4.2，通过比较系数可知，(8.6) 等价于 (ii)，由此证明结束。□

由前面的结果可知，.....之间的差

$$\mathfrak{d}_{c,+}$$

而矩序列的一个特点是，式 (8.6) 中的表示测度（L´evy） ν 在原点可以具有 ≤ 2 阶奇异性。

习题

8.1 证明

$$e^{t\cdot\partial_x^2}$$

对于任何 $t<0$，都不是正性保持算子。

8.2 设 $n\in$ 自然数集，且 $a,\ b\in$ 实数集^n。证明

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}.$$

第9章 集合 ɔ

我们已经看过线性映射的几个例子

$$A : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

使得对于每个 $t \geq 0$，映射

$$\exp(t \cdot A) : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

是良定义的，即

$$\deg \exp(t \cdot A)p < \infty$$

对于所有 $p \in \mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 以及 $t \geq 0$。对于具有常系数的 A，以及对于具有

$$A\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq d} \subseteq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq d}$$

情况确实如此。我们现在要探讨的问题是，描述所有满足条件的线性算子 A，使得 $\exp(t \cdot A)$ 有良定义，即映射到 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$。本章所呈现的结果来自 [dD25]。

9.1 集合 ɔ 及 ɔ 的一些性质

定义 9.1。设

$$A : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

为线性且 $f_0 \in \mathrm{R}[x_1, \ldots\ldots, x_n]$。其唯一解为

$$\partial_t f = Af$$

初值 $t_0 = 0$ 和 $f(\cdot, 0) = f_0$ 是

$$f(\cdot, t) = e^{tA} f_0.$$

$(e^{tA})_{t\in\mathbb{R}}$称为良定义，如果

$$e^{tA} : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

对于所有 $t \in$ 实数集和

$$f(x, t) = (e^{tA} f_0)(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} c_\alpha(t) \cdot x^\alpha$$

在 t 中是解析的，即，对于所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$， c_α 都是解析的。

定义 9.2. 令 $n \in$ 自然数集。我们定义

$$\mathfrak{d} := \Big\{ A : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \text{ linear} \Big| \\ e^{tA} : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \text{ well-defined for all } t \in \mathbb{R} \Big\}.$$

由的良定义性

$$(e^{tA})_{t\in\mathbb{R}}$$

显然，只需对每个 $f_0 \in$实数集$[x_1, \ldots, x_n]$要求存在一个$\varepsilon = \varepsilon(f_0) > 0$使得

$$(e^{tA} f_0)_{t\in[0,\varepsilon(f_0))}$$

是良定义的，即系数是可分析的 tic.

显然，

$$\mathfrak{d} = \mathbb{R} \cdot \mathfrak{d},$$

即， $\mathfrak{d}$是一个锥，并且

$$\mathfrak{d} = -\mathfrak{d}.$$

下面的定理给出了 $\mathfrak{d}$的一个刻画。

定理 9.3([dD25，定理 4.4])。 设 $n \in$ 自然数集 并设

$$A : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

是线性的。则以下条件等价：

(i) $A \in \mathfrak{d}$。*(ii)* 对所有 $\alpha \in$自然数集$_0^n$，上确界 $k\in$自然数集$_0$次数 $A^k x^\alpha < \infty$。*(iii)* 对所有 $i \in$自然数集$_0$，存在子空间 $V_i \subseteq$实数集$[x_1, 。。, x_n]$，满足

(a) 维数$V_i < \infty$，*(b)* $\bigcup V_i =$ 实数集$[x_1, 。。, x_n]$，以及$i\in$自然数集$_0$*(c)* 对所有 $i \in$ 自然数集$_0$。

证明。 蕴含关系“(ii) ~~(i)~~”与“(iii) $\Rightarrow$ (i)”是显然的。

(i) $\Rightarrow$(ii)：由于 e^{tA} 是良定义的，对每个 $\alpha \in$自然数集$_0^n$，存在一个次数$D = D(\alpha) \in$自然数集$_0^n$，使得

$$e^{tA}x^\alpha \subseteq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq D}$$

对所有 $t \in$ 实数集，见问题 9.1。因此，

$$A^k x^\alpha = \partial_t^k e^{tA}x^\alpha\Big|_{t=0} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq D}$$

对所有 $k \in$自然数集$_0$, ，这证明了 (ii)。

[(i) $\Leftrightarrow$(ii)] $\Rightarrow$(iii)：设 $\alpha \in$自然数集$_0^n$。由 (i) 和 (ii)，存在一个 $D = D(\alpha) \in$自然数集$_0$, 使得

$$e^{tA}x^\alpha,\ A^k x^\alpha \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq D}$$

对所有 $k \in$自然数集$_0$ 以及所有 $t \in$ 实数集。
令

$$V_{\alpha,0} := \mathbb{R} \cdot x^\alpha.$$

由 (ii),

$$AV_{\alpha,0} \subseteq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq D}.$$

对所有 $i \in \mathrm{N}_0$, ，定义

$$V_{\alpha,i+1} := V_{\alpha,i} + AV_{\alpha,i},$$

即，

$$V_{\alpha,k} = \mathbb{R} \cdot x^\alpha + \mathbb{R} \cdot Ax^\alpha + \cdots + \mathbb{R} \cdot A^k x^\alpha$$

对所有 $k \in \mathrm{N}_0$。根据 (ii) 以及V_α的定义，i+1

$$V_{\alpha,i} \subseteq V_{\alpha,i+1} \subseteq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq D}$$

从而

$$V_{\alpha,0} \subseteq V_{\alpha,1} \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq D}. \tag{9.1}$$

由于 (9.1) 是一个递增的有限维向量空间序列$V_{\alpha,\ i}$且被有限维向量空间 R $[x_1, \ldots, x_n]_{\leq D}$从上方界定，因此存在一个索引 $I(\alpha) \in \mathrm{N}_0$，使得

$$V_{\alpha,I(\alpha)} = V_{\alpha,I(\alpha)+1},$$

即，

$$\dim V_{\alpha,I(\alpha)} < \infty \qquad \text{and} \qquad AV_{\alpha,I(\alpha)} \subseteq V_{\alpha,I(\alpha)}.$$

由于 $\alpha \in$自然数集$_0^n$是任意的，且$x^\alpha \in V_{\alpha,\ I\ (\alpha)}$，

$$\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} V_{\alpha,I(\alpha)}.$$

由于自然数集$_0^n$是可数的，我们证明了 (iii) (a)–(c)。 □

定理 9.3 告诉我们

$$e^{tA}$$

仅是矩阵指数函数，因为对于算子 $A \in \mathfrak{d}$，我们只需知道它在每个有限维不变子空间 V_i上的 A，也就是说，只要已知 A 的 V_i，其计算就很容易。用于计算这些V_i 的算法已在定理 9.3 的证明中明确给出。因此我们有以下推论。

推论 9.4 ([dD25，定理 4.4])。设 $n \in$ 自然数集且 $A \in \mathfrak{d}$。则

$$e^{tA} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{t^k \cdot A^k}{k!} = \lim_{k\to\infty} \left(\mathrm{id} + \frac{A}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(\mathrm{id} - \frac{A}{k}\right)^{-k}$$

对于所有 $t \in$ 实数集。

证明。 参见习题 9.2。 □

虽然 $\mathfrak{d}$ 是一个锥，但它不是凸集。

命题 9.5. 设 $n \in$ 自然数集。 $\mathfrak{d}$ 是一个锥，且不是凸的。

锥的性质直接由定义 9.2 得出。 $\mathfrak{d}$ 的非凸性由以下例子说明。只需对 $n = 1$ 证明即可。

例 9.6 ([dD25，例 4.2])。 设 $n = 1$。定义线性算子

$$A : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] \qquad \text{and} \qquad B : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$

by

$$Ax^k := \begin{cases} x^k & \text{for } k = 2m \text{ with } m \in \mathbb{N}_0, \\ x^{k+1} & \text{for } k = 2m-1 \text{ with } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

and

$$Bx^k := \begin{cases} x^{k+1} & \text{for } k = 2m \text{ with } m \in \mathbb{N}_0, \\ x^k & \text{for } k = 2m-1 \text{ with } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

对所有 $k \in$ 自然数集$_0$ 成立，并线性延拓至所有实数集$[x]$。于是

$$A\mathbb{R}[x]_{\leq 2m} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 2m} \qquad \text{and} \qquad B\mathbb{R}[x]_{\leq 2m+1} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 2m+1}$$

对所有 $m \in$ 自然数集$_0$成立。
由于

$$A|_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2m}} \qquad \text{and} \qquad B|_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2m+1}}$$

是有限维空间上的线性算子，即矩阵，

$$e^{tA} \qquad \text{and} \qquad e^{tB}$$

对每个 $p \in \mathrm{R}[x]$ 都是良定义的。因此，它们是良定义的线性映射

$$\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$

因此 $A,\ B \in \mathfrak{d}$。

然而,

$$(A+B)x^k \quad = \quad \begin{cases} x^k + x^{k+1} & \text{for } k = 2m \text{ with } m \in \mathbb{N}_0, \\ x^{k+1} + x^k & \text{for } k = 2m-1 \text{ with } m \in \mathbb{N} \end{cases} \quad = \quad x^k + x^{k+1}$$

对所有 $k \in$ 自然数集$_0$, ,
即,

$$\deg\left(\sum_{i=0}^{d} \frac{t^i}{i!} \cdot (A+B)^i 1\right) = d \quad \xrightarrow{d\to\infty} \quad \infty$$

对所有 $t \neq 0$。因此，由定理 9.3 (ii),

$$e^{(A+B)}$$

不是一个映射

$$\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$

且 $A+B \notin \mathfrak{d}$。 ∘

我们在例 9.6 中看到， $\mathfrak{d}$ 在加法下不闭。下面的例子表明， $\mathfrak{d}$ 在乘法下也不闭。

例 9.7 （例 9.6 续， [dD25，例 4.6]）。设

$$A, B : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$

如例 9.6 中所给。则

$$ABx^{2m} = x^{2m+2}, \qquad ABx^{2m+1} = x^{2m+2}, \tag{9.2}$$

and

$$BAx^{2m} = x^{2m+1}, \qquad BAx^{2m+1} = x^{2m+3}, \tag{9.3}$$

对所有 $m \in \mathrm{N}_0$, ，即由定理 9.3 (ii)， $AB \notin \mathfrak{d}$ 以及 $BA \notin \mathfrak{d}$。 ∘

若两个算子 $A, B \in \mathfrak{d}$ 拥有一个公共族

$$\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$$

的不变有限维子空间 V_i ，如定理 9.3 (iii) 所述，则

$$A+B \in \mathfrak{d}, \quad AB \in \mathfrak{d}, \quad \text{and} \quad BA \in \mathfrak{d}$$

李括号 $[\cdot,\ \cdot]$ 定义为

$$[A,B] := AB - BA \ \in \mathfrak{d}.$$

一般而言， $\mathfrak{d}$ 在此李括号下并不闭。例 9.6 中的算子 $A,\ B \in \mathfrak{d}$ 就是 $[A,B] \notin \mathfrak{d}$的一个例子。

例 9.8 （例 9.6 和 9.7 的续篇， [dD25，例 4.7]）。设

$$A : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] \qquad \text{and} \qquad B : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$

定义如例 9.6。根据例 9.7 中的 (9.2) 和 (9.3),

$$[A,B]x^{2m} = x^{2m+2} - x^{2m+1} \qquad \text{and} \qquad [A,B]x^{2m+1} = x^{2m+2} - x^{2m+3}$$

对所有 $m \in$ 自然数集$_0$, ,
即,

$$[A,B] \notin \mathfrak{d}$$

由定理 9.3 (ii) 可知。 ∘

总之，对于 $A,\ B \in \mathfrak{d}$，为了使

$$A + B \in \mathfrak{d}, \quad AB \in \mathfrak{d}, \quad BA \in \mathfrak{d}, \quad \text{and} \quad [A,B] \in \mathfrak{d}$$

算子 A 和 B 具有一个公共族

$$\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$$

不变有限维子空间 V_i，这对于定理 9.3 (iii) 已足够。

9.2 $A \in \mathfrak{d}$的有限维不变子空间 V_i

例 9.6 和定理 9.3 (iii) 表明，若某个线性算子

$$A : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

存在

$$d_0 < d_1 < d_2 < \ldots$$

属于自然数集
$\mathbb{N}_0$，且

$$A\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\le d_i} \ \subseteq\ \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\le d_i} \tag{9.4}$$

对所有 $i \in$ 自然数集$_0$, ，则 $A \in \mathfrak{d}$。这就是 [dD24, dDS25] 中采用的性质。

下一个例子表明 (9.4) 是充分条件，但由定理 9.3 (ii) 和 (iii) 可见，(9.4) 并非必要条件。

例 9.9([dD25, 例 4.3])。 设 $n = 1$ 并令

$$(p_i)_{i \in \mathbb{N}} = (2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$$

为所有素数组成的列表。定义线性映射

$$A : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$

by

$$Ax^k := \begin{cases} x^{p_{m+1}} & \text{for } k = 2m \text{ with } m \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Then

$$A\mathbb{R}[x]_{\leq d} \not\subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq d}$$

对于所有满足 $d \geq 8$ 的 $d \in$ 自然数集。然而，

$$A1 = 0, \quad Ax = 0, \quad Ax^2 = x^{p_2} = x^3, \quad Ax^3 = 0, \quad Ax^4 = x^{p_3} = x^5, \quad \dots$$

因此

$$A^2 x^k = 0$$

对于所有 $k \in \mathrm{N}_0,$，即，

$$e^{tA} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$

根据定理 9.3 (ii)，对所有 $t \in \mathrm{R}$ 和 $A \in \mathfrak{d}$，它都是良定义的。 ∘

一般而言，在定理 9.3 中，我们只能有

$$V_i \subseteq V_{i+1}$$

对于算子 $A \in \mathfrak{d}$ 的不变子空间 V_i。这说明了下一个例子。

例 9.10([dD25])。设 $n = 1$ 和 $\partial_x \in \mathfrak{d}$。那么，每个有限维不变子空间

$$V \subseteq \mathbb{R}[x]$$

∂_x 的形式都是

$$\mathbb{R}[x]_{\leq d}$$

其中 $d \in \mathrm{N}_0$属于自然数集。

为此，设 V 是 ∂_x 的一个不变子空间，且

$$\dim V < \infty.$$

设 $p \in V$ 的次数最高，即

$$\deg q \leq \deg p =: d$$

对所有 $q \in V$ 都成立，因此

$$V \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq d}.$$

Then

$$\partial_x^k p \in V \qquad \text{and} \qquad \deg(\partial_x^k p) = d - k$$

对所有 $k = 1, \dots, d$。由于

$$\deg(\partial_x^k p) = d - k,$$

the

$$\{\partial_x^k p\}_{k=0}^{d}$$

线性无关且张成 $\mathrm{R}[x]_{\leq d}$，即，

$$\mathbb{R}[x]_{\leq d} \subseteq V.$$

总之，

$$V = \mathbb{R}[x]_{\leq d}$$

对于某个 $d \in$ 自然数集$_0$。 ∘

因此，算子 ∂_x 是一个无限大小的Jordan块，一般而言，我们不能指望将实数集$[x_1, \ldots\ldots, x_n]$ 分解为互不相交的不变子空间 V_i，从而得到

$$\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots.$$

即使我们允许

$$\dim V_i = \infty$$

在分解中，那么例 9.10 表明，对于 ∂_x，只有平凡的分解

$$\mathbb{R}[x] = V_1$$

存在。

此外，对于 $A \in \mathfrak{d}$ 的 V_i，我们有如下结论。

推论9.11 ([dD25, 推论4。5])。 设 $n \in$ 自然数集，设 $A \in \mathfrak{d}$，并设

$$V \subseteq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

是一个有限维或无限维子空间。则以下条件等价:

(i) $AV \subseteq V$。*(ii)* 对所有 $t \in$ 实数集，$e^{tA}V \subseteq V$。

证明。 方向“(i) $\Rightarrow$ (ii)”由此可得

$$e^{tA} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{t^k \cdot A^k}{k!}$$

且方向“（ii） $\Rightarrow$ （i）”由此可得

$$A = \partial_t e^{tA}\big|_{t=0}.$$ □

9.3 $\mathfrak{d}$中的李代数

推论 9.12 ([dD25, 推论 4.8]). 令 $n \in$ 自然数集，并设 $\mathcal{V} := \{V_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ 为一族子空间

$$V_i \subseteq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

使得

$$\dim V_i < \infty \qquad \textit{and} \qquad \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} V_i.$$

Then

$$\mathfrak{d}_{\mathcal{V}} := \left\{ A \in \mathfrak{d} \,\middle|\, AV_i \subseteq V_i \textit{ for all } i \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

是 $\mathfrak{d}$ 中的一个正则 *Fr´echet* 李代数，其李括号为

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : \mathfrak{d}_{\mathcal{V}} \times \mathfrak{d}_{\mathcal{V}} \to \mathfrak{d}_{\mathcal{V}}, \quad (A, B) \mapsto [A, B] := AB - BA.$$

集合

$$G_{\mathcal{V}} := \exp(\mathfrak{d}_{\mathcal{V}})$$

是相应的正则 *Fr´echet* 李群。

证明。 由定理 9.3 (iii) 立即得出。 □

问题是， $\mathfrak{d}$ 中的所有正则 Fr´echet 李代数是否都包含在某个 $\mathfrak{d}_{\mathcal{V}}$中？对于有限维李代数，答案是肯定的。

˜**推论 9.13** ([dD25, 推论 4.9])。 令 $n \in$ 自然数集，并令 $\mathfrak{d}$ 为 $\mathfrak{d}$ 中的有限维正则 *Fr´échet* 李代数。则存在一个族

$$\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$$

子空间 $V_i \subseteq$ 实数集$[x_1, 。 。 。, x_n]$ 满足

$$\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} V_i \qquad \textit{and} \qquad \dim V_i < \infty$$

˜对所有 $i \in$ 自然数集$_0$ 均成立，使得
$\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{d}_{\mathcal{V}}$。

˜证明。 令 g_1， 。 。 。 ， g_N为 $\mathfrak{d}$的向量空间基，即

$$\dim \tilde{\mathfrak{d}} = N \in \mathbb{N}.$$

Let

$$a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R} \quad \text{with} \quad a_1^2 + \cdots + a_N^2 = 1. \tag{9.5}$$

于是对于任意 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$，存在一个 $D = D(\alpha) \in$ 自然数集，使得

$$(a_1 g_1 + \cdots + a_N g_N)^k x^\alpha \quad \subseteq \quad \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq D}$$

对于所有 a_1， 。 。 ， a_N，由（9.5）可知，
因为

$$(a_1 g_1 + \cdots + a_N g_N)^k$$

在 $a_1, \ldots, a_N$ 上连续，且集合 (9.5) 是紧的。接下来，按照定理 9.3 证明中的步骤“[(i) ⇔(ii)] ~~⇔~~(iii)”继续。□

如下例所示，无限维正则 Fr´echet 李代数 $\mathfrak{d}$ 不必包含在某个 $\mathfrak{d}_{\mathcal{V}}$ 中。

例 9.14 ([dD25，例 4.10])。设 $n \in \mathrm{N}$，设 $y \in \mathrm{R}^n$，并设

$$l_y : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto l_y(f) := f(y)$$

为在 y 处的点求值。定义

$$\mathfrak{d}_y := \left\{ l_y \cdot p \,\middle|\, p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \right\}.$$

Then

(i) $\mathfrak{d}_y \subseteq \mathfrak{d}$, (ii) 对所有 A, $B \in \mathfrak{d}_y$ 和 α, $\beta \in \mathrm{R}$, (iii) 对所有 A, $B \in \mathfrak{d}_y$, (iv) 对所有 A, $B \in \mathfrak{d}_y$, 以及 (v) $\mathfrak{d}_y$ 是闭的,

也就是说，$\mathfrak{d}_y$ 是 $\mathfrak{d}$ 中的正则 Fr´echet 李代数，因为

$$\alpha A + \beta B = l_y \cdot (\alpha p + \beta q) \qquad \text{and} \qquad AB = q(y) \cdot l_y \cdot p$$

其中 $Af = f(y) \cdot p$, $Bf = f(y) \cdot q$, 且 α, $\beta \in \mathrm{R}$。为证明 $\mathfrak{d}_y$ 是闭的，设

$$A_k = l_y \cdot p_k \qquad \text{with} \qquad A_k \xrightarrow{k\to\infty} \left[A : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \right].$$

因此,

$$A_k 1 = p_k \xrightarrow{k\to\infty} p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

且 $A = l_y \cdot p \in \mathfrak{d}_y$。但由于 $\deg p \text{ in } A = l_y \cdot p$ 无界，$\mathfrak{d}_y$ 不包含于任何 $\mathfrak{d}_{\mathcal{V}}$。 ◦

习题

9.1 设 $n \in$ 自然数集, a, b 满足 $-\infty \le a < b \le \infty$，并设

$$A : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

为线性映射，使得 e^{tA}：实数集$[x_1, \ldots, x_n] \to$ 实数集$[x_1, \ldots, x_n]$ 是良定义的。证明存在一个 $D \in$ 自然数集$_0$，使得

$$\sup_{t \in [a,b]} \deg e^{tA} f_0 \le D.$$

9.2 证明推论 9.4。

第10章
K-保正半群的生成元

现在我们来描述线性算子

$$A : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

使得

$$e^{tA} C \subseteq C$$

对于闭凸锥 $\mathsf{C} \subseteq \mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$。在特殊情形 $\mathsf{C} = \mathrm{Pos}(K)$ 下，我们得到 K-保正半群的生成元。

10.1 通过预解式描述

定义10.1. 设 C 是 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 的一个凸子集，它在 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 的 LF 拓扑中是闭的。我们用

$$\mathfrak{D}_C := \{T \in \mathfrak{D} \mid TC \subseteq C\}$$

所有 C保持算子的集合，以及由

$$\mathfrak{d}_C := \left\{A \in \mathfrak{d} \,\middle|\, e^{tA} \in \mathfrak{D}_C \text{ for all } t \geq 0\right\}$$

所有 C生成元的C保持半群的集合。如果 $\mathsf{C} = \mathrm{Pos}(\mathrm{R}^n)$，则我们将其简写为

$$\mathfrak{D}_+ := \mathfrak{D}_{\mathrm{Pos}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{and} \quad \mathfrak{d}_+ := \mathfrak{d}_{\mathrm{Pos}(\mathbb{R}^n)}.$$

Banach格上的正半群可以用其预解式来刻画。LF空间 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 在文献中似乎很少被考虑。[dD24、dDS25] 是这一主题为数不多的研究成果中的两项，尤其是关于 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$上的半群。沿用 [Ouh05, 命题 2.3], 的证明思路，我们得到以下通过预解式对 $\mathfrak{d}_C$ 的描述。注意，我们只假设 C 是凸且闭的。它不需要是一个锥。

命题 10.2 ([dDS25, 命题 6.2])。令 $n \in$ 自然数集，令

$$C \subseteq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

在 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 的 LF 拓扑中非空、凸且闭。令

$$A \in \mathfrak{d}$$

并记

$$\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$$

为定理 *9.3 (iii)* 中的有限维不变子空间族。对于$i \in \mathbb{N}_0$, ，我们设

$$A_i := A|_{V_i} \qquad \textit{and} \qquad C_i := C \cap V_i.$$

则下列条件等价:

(i) $A \in \mathfrak{d}_C$。*(ii)* 对每个 $i \in \mathbb{N}_0$, ，都存在一个 $\varepsilon_i > 0$，使得

$$(\mathbb{1} - \lambda A_i)^{-1} C_i \subseteq C_i$$

对所有 $\lambda \in [0, \varepsilon_i)$。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii): 令 $i \in \mathbb{N}_0$ 且 $p \in \mathsf{C}_i$。令 $\|\cdot\|_i$ 为 V_i上的欧几里得范数。我们用 $\|\cdot\|_i$ 表示算子 $V_i \to V_i$对应的算子范数。对于

$$\gamma > \|A_i\|_i$$

并且对所有 $t \geq 0$，我们有

$$\left\| e^{-\gamma t} \cdot e^{tA_i} p \right\|_d \leq \|p\|_d \cdot e^{(\|A_i\|_i - \gamma) \cdot t}$$

因此

$$\gamma(\gamma \mathbb{1} - A_i)^{-1} \, p = \gamma \cdot \int_0^\infty e^{-\gamma t} \cdot e^{tA_i} p \, \mathrm{d}t.$$

因此，由于

$$\gamma \int_0^\infty e^{-\gamma t} \, \mathrm{d}t = 1$$

且 $e^{-\gamma t}$ 可以用阶梯函数逼近，我们得出

$$\gamma \cdot (\gamma \mathbb{1} - A_i)^{-1} p$$

是元素的凸线性组合

$$e^{tA_i} p$$

在闭凸集 C_i 中，即,

$$\gamma \cdot (\gamma \mathbb{1} - A_i)^{-1} C_i \subseteq C_i$$

对所有 $\gamma > \|A_i\|_i$。利用

$$\varepsilon_d := \|A_i\|_i^{-1}$$

因此

$$\lambda := \gamma^{-1} \in [0, \varepsilon_d)$$

我们得到对每个 $i \in$ 自然数集$_0$成立的断言 (ii)。

(ii) $\Rightarrow$ (i): 令 $t \geq 0$ 和 $p \in \mathsf{C}$。令 $i \in$ 自然数集$_0$ 使得 $p \in V_i$。那么 $p \in \mathsf{C}_i$ 并且

$$e^{tA} p \quad = \quad e^{tA_i} p \quad \overset{\text{Cor. 9.4}}{=} \quad \lim_{k \to \infty} \left(\mathbb{1} - \frac{tA_i}{k} \right)^{-k} p \quad \in C_i$$

因为

$$\left(\mathbb{1} - \frac{tA_i}{k} \right)^{-1} C_i \quad \subseteq \quad C_i$$

根据假设，对所有$k > \varepsilon_i^{-1}$都成立。 $k \to \infty$的极限

$$\left(\mathbb{1} - \frac{tA_i}{k} \right)^{-k} p$$

属于 C_i，因为 C_i 是闭的。由于 $t \geq 0$ 和 $p \in \mathsf{C}$ 是任意的，我们有

$$e^{tA} C \subseteq C$$

对所有 $t \geq 0$，即 $A \in \mathfrak{d}_C$。 □

例子 10.3 ([dDS25，例 6.3])。设 $n = 1, V_i = \mathrm{R}[x]_{\leq i}$，且 $\mathsf{C} = \mathrm{Pos}(\mathrm{R})$。

(a) 对于 $A = a \in \mathrm{R}$，我们有

$$(\mathbb{1} - \lambda a)^{-1} > 0$$

对所有 $\lambda \in (-\infty, a^{-1})$。那么 A 的作用相当于乘以一个正实常数，即它保持所有满足 $\varepsilon_d = a^{-1}$ 的锥 C_d。

(b) 对于 $A = \partial_x$，

$$(\mathbb{1} - \lambda \partial_x)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \lambda^k \cdot \partial_x^k \quad \in \mathfrak{D}_C$$

对所有 $\lambda \in \mathrm{R}$。由于

$$s_\lambda := (\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$$

是其表示测度为.....的矩序列

$$\mu_\lambda := \delta_\lambda$$

并且 $(k!)_{k \in \mathbb{N}_0}$ 是一个矩序列，由

$$k! = \int_0^\infty x^k \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t,$$

我们有

$$(k! \cdot \lambda^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$$

根据推论 5.8，这是一个矩序列。因此，由定理 5.6 可得

$$\pm\partial_x \in \mathfrak{d}_C.$$

(c) 对于 $A = \partial_x^2$,

$$(\mathbb{1} - \lambda\partial_x^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \cdot \partial_x^{2k} \quad \in \mathfrak{D}_C$$

对所有 $\lambda \in [0,\infty)$，因为

$$s_\lambda = (1, 0, \lambda, 0, \lambda^2, 0, \lambda^3, \dots)$$

是由测度表示的矩序列

$$\mu_\lambda = \frac{1}{2}\delta_{-\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2}\delta_{\sqrt{\lambda}},$$

参见问题 1.1，即 $\partial_x^2 \in \mathfrak{d}_C$。

(d) 令 $A = x\partial_x$。由于

$$(e^{tA}p)(x) = p(e^t x),$$

我们有 $\pm A \in \mathfrak{d}_C$。于是

$$Ax^d = dx^d$$

对所有 $d \in$ 自然数集$_0$, ,
即

$$(\mathbb{1} - \lambda x\partial_x)^{-1} x^d = (1 - \lambda d)^{-1} x^d$$

对所有 $d \in$ 自然数集$_0$，以及满足 $0^{-1} = +\infty$ 的 $\lambda \in (-\infty, d^{-1})$。这里，$\varepsilon_d = d^{-1}$ 显式依赖于限制 C_d 的次数 $d \in$ 自然数集$_0$。。

注 10.4 ([dDS25，注 6.4])。在前面的例子中，出现了以下关于 $[0,\varepsilon_d)$ 的情形:

(a) 在例 10.3 (a) 中，区间

$$[0,\varepsilon_d)$$

不能延伸至 a^{-1} 或更远至 a^{-1}。

(b) 在例 10.3 (c) 中，区间

$$[0,\varepsilon_d)$$

下界为 0，且不能扩展到 0 以下。为此，令

$$p(x) = x^2 \in \mathrm{Pos}(\mathbb{R}).$$

Then

$$(\mathbb{1} - \lambda\partial_x^2)^{-1} x^2 = (1 + \lambda\partial_x^2)\, x^2 = x^2 + 2\lambda$$

在 $x = 0$ 对任意 $\lambda < 0$ 都为负，即，

$$(\mathbb{1} - \lambda\partial_x^2)^{-1} x^2 \notin \mathrm{Pos}(\mathbb{R})$$

对任意 $\lambda < 0$。

(c) 在例 10.3 (d) 中，我们有 $\varepsilon_d = d^{-1} \to 0 \text{as } d \to \infty$。

因此，在命题 10.2 中，我们只能有 $\lambda \in [0, \varepsilon_d)$，且 $\lim_{d\to\infty} \varepsilon_d = 0$。 ∘

10.2实数集^n-保正半群的生成元

通过预解式对生成元的描述是完备的，但无法妥善处理。例子表明，即使在最简单的情形下，验证也并不容易，因为我们必须检查无穷多个条件。

对于常系数情形，利用 Lévy–Khintchin 公式更容易进行描述，见定理 8.11。我们希望将这一方法也应用于非常系数生成元。

我们将范围限制在次数保持情形，即

$$A\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\le d} \subseteq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\le d}$$

对所有 $d \in$ 自然数集$_0$。

定理 10.5 ([dDS25, 定理 6.11])。 设 $n \in$ 自然数集，设 $K \subseteq$ 实数集^n 为闭集，并且

$$A = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{a_\alpha}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha$$

为且满足

$$a_\alpha \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\le |\alpha|}$$

对所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$。若

(i) 对所有 $y \in K$， 该算子

$$A_y := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{a_\alpha(y)}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha$$

都是 K-正性保持保正半群的生成元，

then

(ii) 对所有 $t \ge 0$， e^{tA} 都是 K-正性保持算子。

证明。 我们引入 $y = (y_1, \ldots\ldots, y_n) \in K$ 作为新变量。于是

$$e^{tA_y} = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{t^k}{k!} A_y^k$$

对所有 $t \in \mathrm{R}$，由推论 9.4 可知，即我们有

$$e^{tA_y} = \mathbb{1} + tA_y + t^2 R_y(t)$$

对于某个误差项 $R_y(t)$，使得 $R_y(t)$ 在 $\mathrm{R}[x_1, \ldots\ldots, x_n]_{\leq d}$ 对所有 $t \in [0,1]$ 以及固定的 $d \in$ 自然数集$_0$均一致有界。

设 $f \in$ 实数集$[x_1, \ldots\ldots, x_n]$。由于

$$\deg a_\alpha \leq |\alpha|$$

对所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$，我们有

$$g(x, y, t, f) := e^{tA_y} f = (\mathbb{1} + tA_y + t^2 R_y(t)) f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]_{\leq \deg f}$$

对所有 $t \in$ 实数集。由 (i) 可知，A_y 是一个具有常系数的 K-正性保持算子的生成元，即

$$g(x, y, t, f) \geq 0$$

对所有 $f \in \mathrm{Pos}(K)$，x，$y \in K$，以及 $t \geq 0$。因此，利用 $x = y$，我们得到

$$g(x, x, t, f) \geq 0 \tag{10.1}$$

对所有 $f \in \mathrm{Pos}(K)$、$x \in K$ 以及 $t \geq 0$。对于 $t \in \mathrm{R}$，我们定义

$$G_t : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

by

$$(G_t f)(x) := (e^{tA_y} f)(x, x) = g(x, x, t, f),$$

即，

$$G_t f = (\mathbb{1} + tA + t^2 R(t)) f$$

对于某个误差项 $R(t)$，其在 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq d}, d \in \mathrm{N}_0$，上关于 $t \in [0,1]$ 一致有界。根据（10.1），G_t 对所有 $t \geq 0$ 都是 K-正性保持算子。因此，

$$e^{tA} \overset{\text{Cor. 9.4}}{=} \lim_{k\to\infty} \left(\mathbb{1} + \frac{tA}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(\mathbb{1} + \frac{tA + k^{-1} \cdot t^2 R(k^{-1} \cdot t)}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty} G_{t/k}^k$$

并且由于所有

$$G_{t/k}$$

都是 K-正性保持算子，所以也有

$$G_{t/k}^k$$

也都是 K-正性保持算子。因此，由引理 5.15 (ii)，K-正性保持算子集合是闭的，

$$e^{tA}$$

是一个 K-正性保持算子。由于 $t \geq 0$ 是任意的，(ii) 得证。 □

现在，对于非常系数情形，我们给出与定理 8.11 中常系数情形相对应的等价刻画，即使用 L´évy–Khinchin 公式。

定理 10.6 ([dDS25，主要定理 6.12])。 设 $n \in$ 自然数集 且设

$$A = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{a_\alpha}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha$$

为带有

$$a_\alpha \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq |\alpha|}$$

对所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$ 都成立。那么以下条件等价:

(i) $A \in \mathfrak{d}_+$，即

$$e^{tA}$$

是对所有 $t \geq 0$的正性保持算子。

(ii) 对于每个 $y \in \mathbb{R}^n$，存在一个对称矩阵

$$\Sigma(y) = (\sigma_{i,j}(y))_{i,j=1}^n$$

其元素为实数，使得 $\Sigma(y) \succeq 0$，一个向量

$$b(y) = (b_1(y), \ldots, b_n(y))^T \in \mathbb{R}^n,$$

一个常数

$$a_0 \in \mathbb{R},$$

以及一个 σ-有限测度 ν_y 在 $\mathbb{R}^n$ 上具有

$$\nu_y(\{0\}) = 0 \qquad \textit{and} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha| \, \mathrm{d}\nu_y(x) < \infty$$

对所有 $\alpha \in$ 自然数集$_0^n$，其中 $|\alpha| \geq 2$ 使得

$$a_{e_i}(y) = b_i(y) + \int_{\|x\|_2 \geq 1} x_i \, \mathrm{d}\nu_y(x) \qquad \textit{for } i = 1, \ldots, n,$$

$$a_{e_i+e_j}(y) = \sigma_{i,j}(y) + \int_{\mathbb{R}^n} x^{e_i+e_j} \, \mathrm{d}\nu_y(x) \qquad \textit{for all } i, j = 1, \ldots, n,$$

and

$$a_\alpha(y) = \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \, \mathrm{d}\nu_y(x) \qquad \textit{for } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \textit{ with } |\alpha| \geq 3.$$

证明。 根据定理 8.11，（ii）等价于如下事实：

$$A_y = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{a_\alpha(y)}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha$$

对于所有 $y \in \mathrm{R}^n$，都是一个具有常系数的正性保持半群的生成元。

(ii) ⇒ (i)：这就是定理 10.5。(i)
⇒ (ii)：设 $y \in \mathrm{R}^n$。由 (i) 可得，

$$A \in \mathfrak{d}_+,$$

即，

$$T_t := e^{tA}$$

对所有 $t \geq 0$都是正性保持算子。因此，

$$(T_{t,y} f)(y) = (T_t f)(y) \geq 0 \tag{10.2}$$

对于 $t \geq 0$ 和 $f \in \mathrm{Pos}(\mathrm{R}^n)$，即线性映射

$$T_{t,y}$$

具有常系数的算子在 $x = y$ 处保持 $f \in \mathrm{Pos}(\mathrm{R}^n)$ 的正性。

由于$T_{t,\ y}$是一个具有常系数的线性算子，因此它与 ∂_i 对于$i = 1, \ldots, n$可交换，因而也与

$$e^{z \cdot \nabla}$$

它是平移

$$(e^{z \cdot \nabla} f)(y) = f(y + z)$$

对于任意 $z \in \mathrm{R}^n$。因此，对于 $x \in \mathrm{R}^n$，我们有

$$(T_{t,y} f)(x) = (T_{t,y} f)(y + x - y) = (T_{t,y} e^{(x-y)\cdot\nabla} f)(y) = e^{(x-y)\cdot\nabla} (T_{t,y} f)(y) \geq 0,$$

根据（10.2），即$T_{t,\ y}$是一个正性保持算子。

根据推论 9.4,

$$T_t = e^{tA} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{t^k A^k}{k!} = \mathbb{1} + tA + t^2 R(t)$$

带有某个误差项 $R(t)$，该误差项对所有 $t \in [0, 1]$ 在 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq d}$且所有固定的 $d \in$ 自然数集$_0$ 上均一致有界。因此，

$$e^{tA_y} \overset{\text{Cor. 9.4}}{=} \lim_{k\to\infty} \left(\mathbb{1} + \frac{tA_y}{k}\right)^k$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\mathbb{1} + \frac{tA_y + k^{-1} \cdot t^2 R_y(k^{-1} \cdot t)}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty} T_{t/k,y}^k.$$

由于

$$T_{t/k,y}$$

是一个正性保持算子，因此

$$T_{t/k,y}^k$$

并且根据引理 5.15 (ii)，我们有

$$e^{tA_y}$$

对于 $t \geq 0$而言也是一个正性保持算子。总之， A_y 是一个具有常系数的正性保持半群的生成元。由于 $y \in$ 实数集^n 是任意的，我们根据定理 8.11 得到了命题 (ii)。□

注 10.7 ([dDS25，注 6.13])。 设

$$A = ax\partial_x.$$

Then

$$A^k x^m = (am)^k x^m$$

因此

$$e^{tA}x^m = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{t^k A^k}{k!}x^m = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{(atm)^k}{k!}x^m = e^{atm}x^m = (e^{at}x)^m,$$

即，

$$(e^{tA}f)(x) = f(e^{at}x)$$

是缩放，它对所有 $a \in \mathrm{R}$ 都是一个 $[0,\infty)$-正性保持算子。但对于 $a = -1$ 和 $y = 1$，我们有

$$A_1 = -\partial_x$$

它不是一个具有常系数的 $[0,\infty)$-保正半群的生成元。也就是说，我们无法描述所有生成元，因为算子

$$ax\partial_x$$

其中 $a < 0$ 未涵盖。失败的原因是，在定理 10.6 的证明中，任意 $x \in \mathrm{R}^n$ 处的正性是由 $x = y$ 处的正性通过应用平移而推出的

$$e^{c\partial_x}$$

它与.....可交换

$$e^{A_y}.$$

对于 $[0,\infty)$，这种推理不成立，因为 $[0,\infty)$ 不是平移不变的。 ∘

习题

10.1 类似于注 10.7，给出一个闭集 $K \subseteq \mathrm{R}^n$ 和一个算子的第二个例子

$$A : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

在 $\mathfrak{d}$ 中，使得 A 是一个 K-保正半群的生成元，但不属于定理 10.6 的涵盖范围。

第11章
最终正半群

既然我们已经刻画了 $K = \mathrm{R}^n$ 上正半群的生成元，接下来想考察一些 A 算子，它们 似乎 能够生成正半群。

定义11.1 （例如参见 [DG18]或 [GH23]）。 半群

$$(e^{tA})_{t\geq 0}$$

使得

$$e^{tA}$$

对所有 $t \geq \tau$，当某个 $\tau > 0$ 时为正，但对 $t \in (0, \tau)$ 并非如此的半群称为（统一）最终正 （或非负）半群。

11.1 第一个例子

命题 11.2 ([dDS25, 命题 7。1])。设 $t \geq 0$ 且

$$T_t := e^{t\cdot(x\partial_x)^3} : \mathbb{R}[x]_{\leq 4} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 4},$$

也就是说，

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \;\mapsto\; a_0 + a_1e^t x + a_2e^{8t}x^2 + a_3e^{27t}x^3 + a_4e^{64t}x^4.$$

则存在常数 $\tau \in \mathbb{R}$，使得

$$1.19688 \cdot 10^{-2} \;<\; \tau \;<\; 1.19689 \cdot 10^{-2}$$

使得

(i) T_t 对任何 $t \in (0, \tau)$ 都不是正性保持算子，且

(ii) T_t 是正性保持算子，适用于 $t = 0$ 和所有 $t \geq \tau$，

也就是说，

$$\left(e^{t\cdot(x\partial_x)^3}\right)_{t\geq 0} \quad on\ \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$$

是一个最终正半群。

证明。我们有

$$T_t x^k = \lambda_k(t)\cdot x^k$$

with

$$\lambda_k(t) = e^{t\cdot k^3}$$

对所有 $k = 0,$ ....., 4。因此，我们有

$$\mathcal{H}(\lambda(t))_0 = (1) \succeq 0$$

因为 $\det \mathrm{H}(\lambda(t))_0 = 1 \geq 0$ 且

$$\mathcal{H}(\lambda(t))_1 = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ e^t & e^{8t} \end{pmatrix} \succeq 0$$

因为

$$\det \mathcal{H}(\lambda(t))_1 = e^{8t} - e^{2t} = e^{2t}\cdot(e^{6t}-1) \geq 0$$

对所有满足 $\det \mathrm{H}(\lambda(t))_1 > 0$ 的 $t \geq 0$，其中 $t > 0$。$\mathrm{H}(\cdot)_i$ 是 i 阶 Hankel矩阵。因此，只需考察 $\det \mathrm{H}(\lambda(t))_2,$，它等于

$$h_2(t) := \det \mathcal{H}(\lambda(t))_2 = e^{72t} - e^{66t} - e^{54t} + 2e^{36t} - e^{24t}.$$

From

$$h_2(0) = 0, \quad h_2'(0) = 0, \quad \text{and} \quad h_2''(0) = -72$$

我们得到

$$h(t) < 0$$

对于某个 $\varepsilon > 0$，当 $t \in (0, \varepsilon)$ 时。根据 Mathematica [Wol21], 的计算，我们得到最小特征值 $\sigma_3(t)$ 满足

$$\sigma_3(0.0119688) \approx -3.39928\cdot 10^{-8} \quad \text{and} \quad \sigma_3(0.0119689) \approx 1.7888\cdot 10^{-8},$$

也就是说，$\mathrm{H}(\lambda(t))_2$ 在.....之间变为半正定

$$t = 0.0119688 \qquad \text{and} \qquad t = 0.0119689.$$

$\mathrm{H}(\lambda(t))_2$ 的最小特征值 $\sigma_3(t)$ 如图 11.1 所示，其中 $t \in$[0, 0。015]、$t \in [0,1]$ 和 $t \in [0,10]$。我们有

$$h_2(t) < 0$$

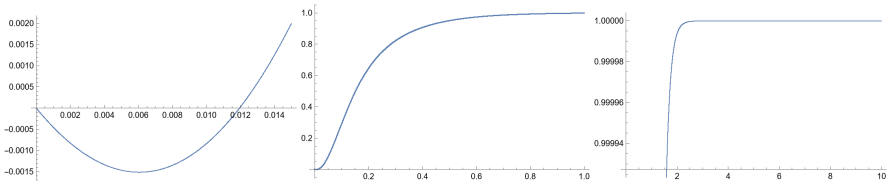
当 $t \in (0,\tau)$ 时，其中

$$\tau \in (0.0119688, 0.0119689)$$

这就证明了 (i)。由于我们知道对于 $t \in [0,1]$，$\sigma_3(t)$，见图 11.1 (b)，并且

$$h_3'(t) > 0$$

对于所有 $t \geq 1$，我们有 (ii)。 □



(a) $t \in [0, 0。015]$ (b) $t \in [0, 1]$ (c) $t \in [0, 10]$

图 11.1：命题 11.2 中的最小特征值 $\sigma_3(t)$，对应于 $t \in [0, 10]$。这三幅图均由 [Wol21] 生成。最初发表于 [dDS25，图 1]。

注 11.3 ([dDS25，注 7.2])。 注意

$$T_t = e^{t(x\partial_x)^3}$$

在 $\mathrm{R}[x]$ 上，而不只是 $\mathrm{R}[x]_{\leq 4}$ 上，满足以下条件。对于任意 $p \in \mathrm{Pos}(\mathrm{R})$，存在一个 $\tau_p > 0$，使得

$$T_t p \in \mathrm{Pos}(\mathbb{R})$$

对所有 $t \geq \tau_p$。 ○

关于最终正半群，参见例如 [DG18、DKP21、GH23]。我们的例子

$$A = (x\partial_x)^3 \quad \text{on} \quad \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$$

命题 11.2 中的例子仅作用于五维（希尔伯特）空间

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$$

因此是一个最终正半群的矩阵例子，参见 [DGK16]及其中关于矩阵情形的文献。请注意，在矩阵情形中，不变锥通常是 $[0, \infty)^n$。而在我们的例子中，它是 $\mathrm{Pos}(\mathrm{R})_{\leq 4}$。因此两者略有不同。

11.2 第二个例子

最终正半群是一个活跃的研究领域，需要在低维（希尔伯特）空间中提供可计算、可研究的例子 [GH23]。因此，我们在此框架中给出最小可能情形的最终正半群：实数集 $\mathrm{R}[x]_{\leq 2}$ 上的二次算子

命题 11.4 ([dDS25, 命题 7。3])。 设 $a \in$ 实数集为实数，满足 $|a| > \frac{1}{\sqrt{5}}$ 并设

$$A = a \cdot \partial + \frac{1}{2}(x^2 - 1) \cdot \partial^2$$

是3维希尔伯特空间 $\mathcal{H} = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ 上的一个算子。那么

$$\left(e^{tA}\right)_{t \geq 0}$$

是 $\mathcal{H}$ 上的最终正半群，即存在常数 $\tau_a > 0$ 使得，

(i) 对所有 $t \in (0, \tau_a)$，

$$e^{tA}\mathrm{Pos}(\mathbb{R})_{\leq 2} \quad \not\subseteq \quad \mathrm{Pos}(\mathbb{R})_{\leq 2}$$

and,

(ii) 对所有 $t = 0$ 和 $t \geq \tau_a$，

$$e^{tA}\mathrm{Pos}(\mathbb{R})_{\leq 2} \quad \subseteq \quad \mathrm{Pos}(\mathbb{R})_{\leq 2}.$$

对于 $a \in \mathbb{R}$ 且满足 $|a| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$，有

$$e^{tA}\mathrm{Pos}(\mathbb{R})_{\leq 2} \quad \not\subseteq \quad \mathrm{Pos}(\mathbb{R})_{\leq 2}$$

对所有 $t \in (0, \infty)$。

证明。 设 $\{1, x, x^2\}$ 是 H 的单项式基。由

$$A1 = 0, \quad Ax = a, \quad \text{and} \quad Ax^2 = -1 + 2ax + x^2$$

我们得到矩阵表示

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A 在 H 上关于单项式基的矩阵表示。因此，

$$\tilde{B} = \exp(t\tilde{A}) = \begin{pmatrix} 1 & at & (2a^2 - 1) \cdot (e^t - 1) - 2a^2 t \\ 0 & 1 & 2a \cdot (e^t - 1) \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & at & f(a,t) \\ 0 & 1 & g(a,t) \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

˜对所有 $t \in$ 实数集 R，例如使用 [Wol21]。 B 是.....的矩阵表示

$$B = b_0 + b_1 \cdot \partial + \frac{b_2}{2} \cdot \partial^2$$

with

$$B1 = 1 = b_0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = 1,$$

$$Bx = at + x = b_0 x + b_1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = at,$$

最后

$$Bx^2 = f(a,t) + g(a,t) \cdot x + e^t \cdot x^2 = b_0 x^2 + 2b_1 x + b_2$$

给出

$$\begin{aligned} b_2 &= f(a,t) + g(a,t) \cdot x + e^t \cdot x^2 - b_0 x^2 - 2b_1 x \\ &= (2a^2 - 1) \cdot (e^t - 1) - 2a^2 t + 2a \cdot (e^t - 1 - t) \cdot x + (e^t - 1) \cdot x^2. \end{aligned}$$

根据定理 5.6,

$$B\mathrm{Pos}(\mathbb{R})_{\leq 2} \subseteq \mathrm{Pos}(\mathbb{R})_{\leq 2}$$

等价于

$$\begin{pmatrix} b_0(x) & b_1(x) \\ b_1(x) & b_2(x) \end{pmatrix} \succeq 0 \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}. \tag{11.1}$$

由于 $b_0 = 1 > 0$, (11.1) 等价于

$$h(x) := \det \begin{pmatrix} b_0(x) & b_1(x) \\ b_1(x) & b_2(x) \end{pmatrix} = b_0(x) \cdot b_2(x) - b_1(x)^2 \geq 0 \quad \text{for all } x \in \mathbb{R} \tag{11.2}$$

with

$$h(x) = (2a^2 - 1) \cdot (e^t - 1) - 2a^2 t - a^2 t^2 + 2a \cdot (e^t - 1 - t) \cdot x + (e^t - 1) \cdot x^2.$$

对于 $t > 0$, 我们有 h 是关于 x 的二次多项式, 因此 (11.2) 等价于

$$m(a,t) := \min_{x \in \mathbb{R}} h(x) \geq 0$$

with

$$m(a,t) = 1 - e^t + a^2 \cdot \frac{5 + 8t + 4t^2 - (10 + 8t + t^2) \cdot e^t + 5 \cdot e^{2t}}{e^t - 1}. \tag{11.3}$$

因此, 对于每个 $a \in \mathrm{R}$, 只要 $|a| > \frac{1}{\sqrt{5}}$, 就存在一个 $\tau_a > 0$, 使得

$$m(a,t) < 0$$

对于所有 $t \in (0, \tau_a)$, 以及

$$m(a,t) > 0$$

对于所有 $t \in (\tau_a, \infty)$, 即 (i) 和 (ii) 得证。

设 $a \in \mathrm{R}$ 满足 $|a| < \frac{1}{\sqrt{5}}$=我们看到

$$m(a,t) < 0$$

对所有 $t > 0$, 而对于边界情形 $a = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$, 我们有

$$m(\pm 5^{-1/2}, t) = \frac{4e^{-t} \cdot t \cdot (t+2) - t \cdot (t+8)}{5 - 5e^{-t}} < 0$$

对所有 $t > 0$ 也成立，由此证明

$$e^{tA}\mathrm{Pos}(\mathbb{R})_{\leq 2} \not\subseteq \mathrm{Pos}(\mathbb{R})_{\leq 2}$$

对于所有 $t > 0$。 □

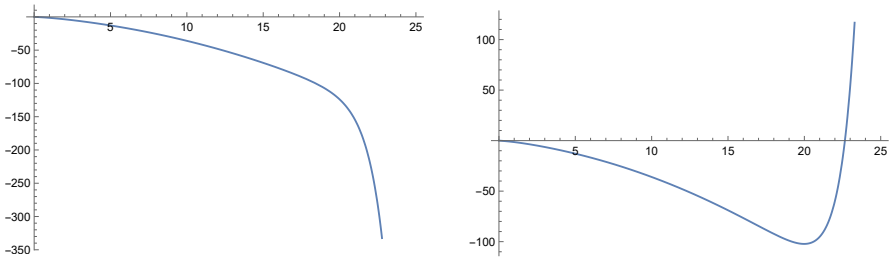
由（11.3）可清楚得出

$$\tau_a = \tau_{-a}$$

对于所有满足条件的 $a \in \mathbb{R}$

$$|a| > \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

在图 11.2 中，我们给出了（11.3）中的极小值 $m(a, t)$，对应于两个接近 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 的 a 值。对于



(a) $a = 0.44721359$。 (b) $a = 0.44721360$。

图 11.2：在区间 $t \in [0, 25]$ 内，(11.3) 中的极小值 $m(a, t)$ 对于两个接近 $\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472135955$ 的取值 a 的情况。两幅图均由 [Wol21] 生成。最初发表于 [dDS25，图 2]。

$$a = 0.44721359 < \frac{1}{\sqrt{5}},$$

极小值 $m(a, t)$ 总是负的，即，

$$(e^{tA})_{t \geq 0}$$

不是最终正的。对于

$$a = 0.44721360 > \frac{1}{\sqrt{5}},$$

极小值 $m(a, t)$ 改变符号，特别是 > 0 对于

$$t \geq \tau_a \approx 22.66,$$

即，

$$(e^{tA})_{t\geq 0}$$

是最终正的。

例 11.5 ([dDS25，例 7.4])。以下给出若干具有 $|a| > \frac{1}{\sqrt{5}}$ 的 $a \in \mathrm{R}$ 中 $\tau_{\pm a}$ 的近似值：

(a) $a = 0$。44721360（图 11.2b）：

$$22.655 \quad < \quad \tau_{\pm a} \quad < \quad 22.656$$

(b) $a = 0$。45：

$$7.5504 \quad < \quad \tau_{\pm a} \quad < \quad 7.5505$$

(c) $a = 1$：

$$1.1675 \quad < \quad \tau_{\pm a} \quad < \quad 1.1676$$

(d) $a = 10$：

$$9.7541 \cdot 10^{-2} \quad < \quad \tau_{\pm a} \quad < \quad 9.7542 \cdot 10^{-2}$$

(e) $a = 100$：

$$9.6219 \cdot 10^{-3} \quad < \quad \tau_{\pm a} \quad < \quad 9.6220 \cdot 10^{-3}$$ ∘

习题

11.1 在命题 11.4 中，给定算子

$$A = a \cdot \partial + \frac{1}{2}(x^2 - 1) \cdot \partial^2$$

a) 试从直观上解释，为什么它可能是一个最终正半群的生成元。

b) 参数 $a \in \mathrm{R}$ 的作用，以及算子部分 $a \cdot \partial$ 有什么影响?

11.2 在例 11.5 中，确定 $\tau_{\pm a}$ for 的上界和下界

a) $a = 5$，**b)** $a = 25$，以及

c) $a = 50$。

提示：在 (11.3) 中使用二分法求 $m(a, t)$。

附录

参考文献

[Ach56] N. I. Achieser，《逼近论》，Frederick Ungar，纽约，1956年。[Ber12] S. N. Bernstein，基于概率演算的魏尔斯特拉斯定理证明（D´emonstration du th´eor`eme de Weierstrass fond´ee sur le calcul des probabilit´es），哈尔科夫数学学会通讯13（1912年），1–2。[Ber15] ，论正多项式的表示（Sur la repr´esentation des polynˆomes positifs），哈尔科夫数学学会通讯，第2辑14（1915年），227–228。[Bog07] V. I. Bogachev，《测度论》，施普林格出版社，柏林，2007年。[Bor11] J. Borcea，保持椭圆型、正与非负多项式的线性算子分类，《纯粹与应用数学杂志》650（2011年），67–82。[Bri59] L. Brickman，F. Luk´acs问题的一个新推广，《数学汇刊》14（1959年），195–227。[Cho69] G. Choquet，《分析讲义》，W. A. Benjamin, Inc.，纽约，阿姆斯特丹，1969年，3卷。[dD24] P. J. di Dio，论具有常系数的保正算子及其生成元，《代数杂志》660（2024年），882–907。[dD25] ，将非负多项式化为平方和，https://arxiv.org/abs/2506.16321。[dDL25] P. J. di Dio与L.-L. Langer，矩序列的Hadamard 积、对角保正算子及其生成元，《积分方程与算子理论》97（2025年），文章编号32。[dDS22] P. J. di Dio与K. Schm¨udgen，多维截断矩问题：矩锥，《数学分析与应用杂志》511（2022年），126066，38页。[dDS25] P. J. di Dio与K. Schm¨udgen，K-保正算子及其生成元，《SIAM应用代数与几何杂志》9（2025年），第4期，794–824。[DG18] D. Daners与J. Gl¨uck，算子半群一致最终正性的一个判别准则，《积分方程与算子理论》90（2018年），46，19页。[DGK16] D. Daners、J. Gl¨uck与J. B. Kennedy，Banach格上最终正与渐近正半群，《微分方程杂志》261（2016年），2607–2649。[DKP21] R. Denk、M. Kunze与D. Ploß，Lipschitz区域上具有Wentzell边界条件的双拉普拉斯算子，《积分方程与算子理论》93（2021年），13，26页。[Fil64] V. A. Fil’ˇstinkiˇı，整个实轴上谱中含有限个空区间的幂矩问题，Zap. Meh.-Mat. Fak. i Harkow. Mat. Obˇsˇc 40（1964年），186–200，俄语。[Gau15] C. F. Gauß，《通过近似求积分值的新方法》，G¨ottingen科学学会数学通讯3（1815年），29–76。[GH23] J. Gl¨uck与J. H¨olz，再论最终锥不变性，《代数及其应用杂志》675（2023年），274–293。[GS08] A. Guterman与B. Shapiro，论保持正多项式集合的线性算子，《不动点理论与应用杂志》3（2008年），411–429。

[Hal04] B. C. Hall, 《李群、李代数与表示：初等导论》, 施普林格, 纽约, 2004年。[Ham20] H. L. Hamburger, 论施蒂尔切斯矩问题的一个推广（¨Uber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems）, 《数学年刊》81（1920年）, 235–319。[Hau21] F. Hausdorff, 求和法与矩序列I, 《数学杂志》9（1921）, 74–109。[Hav35] E. K. Haviland, 多维分布函数的矩问题, 《美国数学杂志》57（1935年）, 562–572。[Hav36] , 多维分布函数的矩问题II, 《美国数学杂志》58（1936年）, 164–168。[Hil88] D. Hilbert, 论将定形式表示为形式平方和（¨Uber die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten）, 《数学年刊》32（1888年）, 342–350。[HS33] T. H. Hildebrandt与I. J. Schoenberg, 论线性泛函运算及一维或多维有限区间上的矩问题, 《数学年刊》34（1933年）, 317–328。[Kac85] V. Kac（编）, 《无限维群及其应用》, 施普林格出版社, 纽约, 柏林, 海德堡, 东京, 1985年。[Kal02] O. Kallenberg, 《现代概率论基础》, 第2版, 施普林格出版社, 纽约, 柏林, 海德堡, 2002年。[Kem68] J. H. B. Kemperman, 一般矩问题：一种几何方法, 《数学统计年刊》39（1968年）, 93–122。[Kle06] A. Klenke, 《概率论》, 施普林格, 柏林, 2006年。[KN77] M. G. Kreˇın与A. A. Nudel'man, 《马尔可夫矩问题与极值问题》, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1977年, 译自1973年俄语原著。[K¨ot69] G. K¨othe, 《拓扑向量空间I》, 施普林格出版社, 纽约, 1969年。[K¨ot79] , 《拓扑向量空间II》, 施普林格出版社, 纽约, 1979年。[Les67] J. Leslie, 论微分同胚群的微分结构, 《拓扑学》6（1967年）, 263–271。[Lor86] G. G. Lorentz, 《伯恩斯坦多项式》, AMS Chelsea Publishing, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1986年。[Luk18] F. Luk´acs, 有理多项式积分学第一中值定理的加强（Versch¨arfung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung f¨ur rationale Polynome）, 《数学杂志》2（1918年）, 295–305。[Mar95] A. A. Markov, 某些连分数收敛性的两个证明（Deux d´emonstrations de la convergence de certaines fractions continues）, 《数学学报》19（1895年）, 93–104。[Mar06] , 偏离零最小的函数讲义, 油印讲义, 圣彼得堡, 1906年, 俄语; 重印于A. A. Markov, 《连分数与偏离零最小函数理论论文选》, OGIZ, 莫斯科, 1948年, 第244–291页。[Mar08] M. Marshall, 《正多项式与平方和》, 《数学调查与专著》第146号, 美国数学会, 罗得岛州, 2008年。[Omo74] H. Omori, 《无限维李变换群》, 《数学讲义》第427号, 施普林格出版社, 柏林, 海德堡, 纽约, 1974年。[Omo97] , 《无限维李群》, 《数学专著译丛》第158号, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1997年。[Ouh05] E. M. Ouhabaz, 《区域上热方程的分析》, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 牛津, 2005年。[Phe01] R. R. Phelps, 《肖凯定理讲义》, 施普林格出版社, 柏林, 海德堡, 2001年。[Pie72] A. Pietsch, 《核局部凸空间》, 《数学及其边缘领域成果》第66号, 施普林格出版社, 柏林, 海德堡, 纽约, 1972年。[PS64] G. P´olya与G. Szeg¨o, 《分析中的习题与定理》（Aufgaben und Lehrs¨atze aus der Analysis）, 第3版, 第2卷, 施普林格出版社, 柏林, 1964年。[PS70] , 《分析中的习题与定理》（Aufgaben und Lehrs¨atze aus der Analysis）, 第4版, 第1卷, 施普林格出版社, 柏林, 1970年。

[Rad80] R. Radau, ´关于用于计算定积分数值的近似公式的研究,《纯粹与应用数学杂志》, 3me 第 6 辑（ 1880 ），283–336。[Ric57] H. Richter, 《期望值的无参数估计与实现》, 《德国保险数学学会通报》3（1957），147–161。[Roc72] R. T. Rockafellar,《凸分析》, 普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1972年。[Rog58] W. W. Rogosinski, 《非负质量的矩》，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》245（1958），1–27。[Ros52] P. C. Rosenbloom, 《若干类极值问题。II》，《法国数学会通报》80（1952），183–215。[Sch68] R. Schnabel, 《伯恩斯坦多项式的一种推广¨》，《数学年刊》179（1968），74–82。[Sch91] K. Schm¨udgen, 《闭半代数集上的 K-矩问题》，《数学年刊》289（1991），203–206。[Sch12] K. Schm¨udgen, 《希尔伯特空间上的无界自伴算子》，施普林格，代尔夫特，2012年。[Sch14] R. Schneider,《凸体：布伦–明可夫斯基理论》, 剑桥大学出版社，剑桥，2014年。[Sch17] K. Schm¨udgen,《矩问题》，施普林格，纽约, 2017年。[Sch23] A. Schmeding, 《无限维微分几何导论》，剑桥高等数学研究丛书，第 202 卷，剑桥大学出版社，英国剑桥，2023 年。[SHNW02] A. Strasburger 、 J. Hilgert、K.-H. Neeb 和 W. Wojtynski（编），《有限维与无限维李群上的几何与分析》, 巴拿赫中心出版物，第 55 卷，波兰科学院数学研究所，华沙，2002年。[ST43] J. A. Shohat 和 J. D. Tamarkin,《矩问题》，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，1943年。[Sti94] T. J. Stieltjes, 《连分数研究》，《图卢兹科学学院年刊》8（1894年），第 4 期, J1–J122。[˘Sve39] K. I. ˘Svenco, 《关于 Hamburger 矩问题及要求给定区间内无质量的补充条件》，《哈尔科夫数学学会通讯》16（1939），121–128，俄语。[SW99] H. H. Schaefer 和 M. P. Wolff,《拓扑向量空间》，第 2 版，施普林格出版社，纽约，1999年。[Tch57] M. V. Tchakaloff, 《具有非负系数的机械求积公式》，《数学科学通报》81（1957），123–134。[Tr`e67] F. Tr`eves,《拓扑向量空间、广义函数与核》，学术出版社，纽约，1967年。[Wal39] A. Wald, 《由绝对矩确定的分布函数的极限及绝对矩满足的不等式》，《美国数学会会刊》46(2)（1939），280–306。[War83] F. W. Warner,《微分流形与李群基础》，施普林格出版社，纽约、柏林、海德堡，1983年。[Wol21] Wolfram Research, Inc., Mathematica, 13.0.0 版，2021年，伊利诺伊州尚佩恩。[Wur04] T. Wurzbacher（编），《无限维群与流形》，IRMA 数学与理论物理讲座丛书，第 5 卷，德格鲁伊特，柏林、纽约，2004年。

符号表

[· , ·] .52𝔅(R^{n}): 例 1.2 (b).3𝔡: 定义 9.2.78$\mathfrak{d}_{c}$: 定义7.1.59$\mathfrak{d}_{C}$: 定义 10.1.87$\mathfrak{D}_{c}$: 定义7.1.59$\mathfrak{D}_{C}$: 定义10.1.87$\mathfrak{d}_{c,+}$: 定义8.1.69$\mathfrak{D}_{c,+}$: 定义8.1.69$\mathfrak{d}_{\mathcal{V}}$: 推论 9.12.85$\mathfrak{d}_{+}$: 定义10.1.87$\mathfrak{D}_{+}$: 定义10.1.87$\mathfrak{d}_{y}$: 例 9.14.86$\delta_{y}$: 例 1.2 (a).3𝔤𝔩(*n*, R).52 Gl(*n*, R).51 L(V): 定义 1.8.6L_{s}: 定义 1.10.6l_{y}: 例子 1.4 (a).4𝔬(*n*, R).58 O(*n*, R).58 Pos(*K*): 式 (2.1).v, 16 S(V, v): 定义 1.10.6𝔰𝔩(*n*, R).55 Sl(*n*, R).55𝔰𝔬 (*n*, R).58 SO(*n*, R).58$T_{e}G$ .52T_{y}: 定义 5.3, 方程 (5.1).38 V$_{+}$: 定义 2.1.13 Z(f): 方程 (1.2).5

索引

A

阿贝尔代数 李
52 适配空间
14 Ado I. D.
52 定理 52 李
代数 Fr´ec
het 57**B**

基本表示定理 14 伯恩斯坦多项
式 17 定理 17 Bernstein,S. N.
17 Borel-σ-代数 3 括号 52
Brickman,L. 18

C

典范表示 23
Choquet Gustave 13
锥 矩 6 矩泛函 6 截断
6 求积公式 高斯 9

D

定义序列 31 导
数 57 定矩泛函
4 dfn:Ls 6 对角
算子 25 序列
25 可微 57 支配
13

F

Fil’˘stinskiˇı, V.A.
19 公式 L´evy–
Khinchin 71 Fr´
echet 空间 29 泛函
矩 4 锥 6 确定的 4 不
确定的 4 截断 4 里斯
6

G

Gauß, C. F. 9 生成元 C-保留半
群 87 常系数正性保持算子
69

群 李群 51 线性特殊群 55 正交群 58 正则 Fr´echet李群 57 特殊正交群 58 指数型拓扑群 56

H

Hadamard 积 42 汉堡矩问题 参见 定理, Hamburger 汉堡定理 15 Hamburger, H. L. 15 豪斯多夫矩问题 参见定理，豪斯多夫 豪斯多夫定理 15 Hausdorff，F. 15 Haviland 定理 16 Haviland，E. K. 16 哈维兰–希尔德布兰特–舍恩伯格–温特纳定理 19 Haviland–Wintner 定理 19 赫格洛茨矩问题 16 D. 希尔伯特 16 Hildebrandt，T. H. 19

I

不定矩泛函 4

K

Kre˘ın，M. G. 18

L

L´evy–Khinchin公式 71 LF空间 31 李代数 阿贝尔 52 群 51 Luk´acs定理 参见 Luk´acs–Markov定理 Luk´acs，F. 18 Luk´acs–Markov定理 18

M

Markov定理 参见Luk´acs–Markov定理 A. A. 马尔可夫 18 Markov–Luk´acs定理 参见Luk´acs–Markov定理 可除测度 71 无限可分 71 表示 4 矩 3 经典 4 锥 6 泛函 4 锥 6 确定的 4 不确定的 4 截断 4 惯性 4 多项式 4 问题 Hamburger 参见定理，Hamburger 豪斯多夫 参见定理，豪斯多夫 赫格洛茨 16 施蒂尔切斯 参见定理，施蒂尔切斯 ˇ ˇ Svenco 参见 定理，Svenco 三角 16 序列 6 截断 6

N

Nudel’man，A. A. 18

O

大森英樹 56 算子对角线 25 缩放 27

P

P´olya，G. 16 多项式伯恩斯坦 17 正性K-保持算子 37 保持算子 37 保持算子K-正性 37

正性 37
Hadamard 乘积 42

R

Radau, M. R. 18 表示 典范 23 基本定理 14 Richter 定理 7 Richter–Rogosinski–Rosenbloom 定理 10 Riesz 泛函 6 Riesz, M. 16 Rogosinski, W. W. 9 Rosenbloom, P.C. 9

S

缩放算子 27 Schm¨udgen 定理 17 Schoenberg,I. 19 定义序列 31 对角线 25 矩 6 截断 6 置零 5 适配空间 14 Fr´echet 29 LF- 31 斯蒂尔切斯矩问题 参见 定理, Stieltjes Stieltjes 定理 15 Stieltjes,T.J. 15 ˇ斯文科定理 19 ˇ Svenco, K. I. 19 Szeg¨o,G. 16

T

Tchakaloff, M. V. 9 定理 Ado 52 基本表示 14 Bernstein 17 Hamburger 15 豪斯多夫 15 Haviland 16 Haviland–Hildebrandt–Schoenberg–Wintner 19 哈维兰–温特纳 19 Luk´acs 参见Luk´acs–马尔可夫 Luk´acs–马尔可夫 18 马尔可夫 参见Luk´acs–马尔可夫 Markov–Luk´acs 参见 Luk´acs–马尔可夫 Richter 7 Richter–Rogosinski–Rosenbloom 10 Rogosinski 9 Rosenbloom 9 Schm¨udgen 17 Stieltjes 15ˇ斯文科 19 Tchakaloff 9 Wald 9 迹 54 三角矩问题 16 截断矩泛函 6 序列 6

W

Wald, A. 9 温特纳，A. 16

Z

零点集 5