arXiv:2602.10932v1 [math.DG] 11 Feb 2026

标量曲率锁定原理

GEORG FRENCK、BERNHARD HANKE 和 SVEN HIRSCH

Abstract. 我们证明了一个适用于带有超曲面奇点的渐近平坦自旋流形的黎曼正质量定理。与以往的结果不同，只要奇异集的其他分支具有足够强的平均凸性，奇异集的某些分支可以是平均凹的。我们的证明采用初始数据集，其中经过适当选择的第二基本形式会在不同的奇点分支之间转移凸性缺陷。

1. Introduction

光滑黎曼流形上的标量曲率几何中的极值性与刚性结果，往往在黎曼度量存在奇点时仍然成立，前提是相关的曲率限制仍以弱意义满足。一个广为人知的例子是：如果渐近平坦流形沿超曲面具有度量奇点，且这些奇点是平均凸的，也就是说，相对于指向无穷远的法向量，平均曲率跳跃非正，那么该流形仍满足正质量定理，见 [ST02；Mia02]。如[Mia02，命题 3 所述，1], 平均凹奇点（其平均曲率跳跃严格为负）可以被视为在弱意义下具有无限负的标量曲率。

本文表明，上述平均凸条件可以替换为一个较弱的条件：奇异集某些分支上的平均凹跃变，可以由其他分支上的平均凸跃变抵消。粗略地说，通过取某种平均，局部平均凸条件可以替换为较弱的全局 条件。鉴于正质量定理中的逐点标量曲率下界不能替换为平均标量曲率的下界，这一现象出乎意料。

为陈述我们的主要结果，设 M 是一个非紧致连通自旋流形，沿着光滑紧超曲面 $\Sigma_1, \dots \Sigma_N$ 分解为

$$M = M_0 \cup_{\Sigma_1} \cdots \cup_{\Sigma_N} M_N.$$

这里 $M_0, \dots, M_N \subset M$ 是带边界的光滑子流形， M_i 在$1 \le i \le N-1$时是紧致的，且 M_N 是非紧致且连通的；见图 1。对于 $0 \le i \le N$，设 g_i 是 M_i 上的光滑黎曼度量，满足

- 对于 $1 \le i \le N$，我们有 $(g_{i-1})|_{\Sigma_i} = (g_i)|_{\Sigma_i}$,
- 每个 g_i 都具有非负标量曲率,
- (M_N, g_N) 是渐近平坦的。

我们将 $g := g_0 \cup \cdots \cup g_N$ 记为 M 上的诱导 C^0-黎曼度量。我们将沿 Σ_i 的平均曲率记为

$$H_{i,-} := H(\Sigma_i \subseteq M_{i-1}), \qquad H_{i,+} := H(\Sigma_i \subseteq M_i), \qquad 1 \le i \le N.$$

我们采用广义相对论中的惯例：平均曲率相对于指向无穷远的法向量计算。也就是说，如果 M 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ ，且具有如下分解

$$M_0 := \{|x| \le 1\}, \quad M_1 := \{1 \le |x| \le 2\}, \quad M_2 := \{|x| \ge 2\},$$

那么我们有 $H_{1,\mp} = n-1$，$H_{2,\mp} = (n-1)/2$。

对于 $1 \le i \le N$，我们定义

$$\underline{H}_{i,-} := \min_{\Sigma_i} H_{i,-}, \qquad \overline{H}_{i,+} := \max_{\Sigma_i} H_{i,+}.$$

我们的主要结果如下。

定理 1。假设对于 $1 \le i \le N$，平均曲率 $H_{i,\mp}$ 均严格为正，并且存在某个 $1 \le \Lambda < N$ 使得

$$\underline{H}_{i,-} \le \overline{H}_{i,+} for \qquad 1 \le i \le \Lambda,$$
$$\underline{H}_{i,-} \ge \overline{H}_{i,+} for \qquad \Lambda+1 \le i \le N.$$

此外，假设

$$\sum_{1 \le i \le N} \left(\underline{H}_{i,-}^2 - \overline{H}_{i,+}^2 \right) \ge 0. \tag{1.1}$$

那么 (M, g) 的 *ADM* 质量非负。

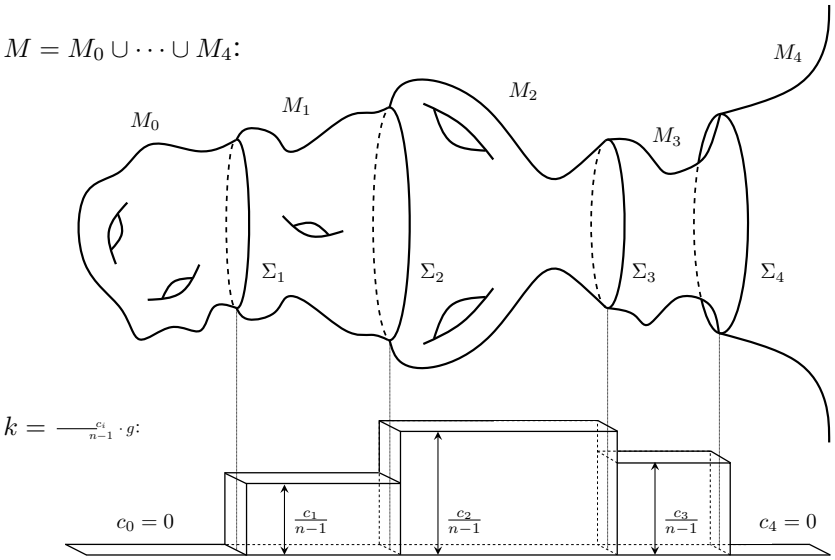


FIGURE 1. 用于 $N = 4$ 和 $\Lambda = 2$的标量曲率锁定原理。位于 Σ_1 和 Σ_2 的两个平均凹曲率跳跃，由位于 Σ_3 和 Σ_4的两个平均凸曲率跳跃抵消。决定对称张量 c_i 的常数 k 在（2.5）中定义。

在证明中，我们将（M，g）视为初始数据集（M^n，g，k）的时间对称切片，其中包含一个对称（0，2）阶张量场 k。适当选取时，张量 k 可充当锁：它使我们能够将 Σ_i 处不利的平均曲率跳跃转化为相应的 k跳跃，将这一缺陷传递穿过 M_i，最后在后续的一个奇点处 Σ_j 将其吸收，该处具有有利的平均曲率跳跃。图 1展示了一个典型情形。在这种情况下，我们便可应用 Kazaras–Khuri–Lin 证明的、适用于带折痕初始数据集的正质量定理 [KKL25]。因此，通过转向初始数据集，我们证明了一个无法通过局部变形论证获得的黎曼几何结果。

本文详细阐述了锁定原理的一个具体例子。在第 3 节中，我们将讨论可能的推广。

致谢： BH 和 SH 感谢洛纳瓦拉几何节提供了理想的工作条件，本研究的部分工作正是在此完成的。BH 获得了德国研究联合会重点计划 2026“无穷远处的几何”的部分资助。

2. Proof Theorem 1

我们的主要结果可由反复应用以下引理得出。

引理 2. 设 Σ 是一个光滑$(n-1)$流形，且 $H_-, H_+\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ 是光滑函数，并设 H_-, $H_+ \in (0,\infty)$ 满足 $H_- \geq H_-$ 和$H_+ \leq H_+$。给定满足 $H_+^2 - H_-^2 + a^2 \geq 0$的 $a \in \mathbb{R}$，我们定义函数$\vec{H}_+, \vec{H}_-\colon \Sigma \to \mathbb{R}^{1,1}$ 如下

$$\vec{H}_- = \begin{pmatrix} H_- \\ a \end{pmatrix}, \qquad \vec{H}_+ = \begin{pmatrix} H_+ \\ \sqrt{H_+^2 - H_-^2 + a^2} \end{pmatrix}.$$

于是存在一个双曲旋转角 $\vartheta \in \mathbb{R}$，使得函数

$$X = F_\vartheta \vec{H}_- - \vec{H}_+ \colon \Sigma \to \mathbb{R}^{1,1}, \qquad F_\vartheta = \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & -\sinh\vartheta \\ -\sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{pmatrix},$$

满足

$$X_1 \geq |X_2| \quad along\ \Sigma,$$

其中， X_1 和 X_2 分别表示 X的第一和第二个分量。

证明。 简记 $\xi := \sqrt{H_+^2 - H_-^2 + a^2}$。我们选择

$$\vartheta = \sinh^{-1}\left(\frac{a H_+ - \xi H_-}{H_-^2 - a^2}\right), \tag{2.1}$$

当 $H_- \neq a$时，以及

$$\vartheta = \log(H_-) - \log(H_+) \tag{2.2}$$

当 $H_- = a$时。利用 $\cosh(\vartheta) = \sqrt{1 + \text{双曲正弦}^2(\vartheta)}$，可得

$$F_\vartheta \vec{H}_- - \vec{H}_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\sinh^2(\vartheta)}\, H_- - \sinh(\vartheta)\, a - H_+ \\ \sqrt{1+\sinh^2(\vartheta)}\, a - \sinh(\vartheta)\, H_- - \xi \end{pmatrix}.$$

若 $H_- \neq a$，则

$$\begin{aligned} &\left(H_-^2 - a^2\right)^2 \left(1 + \sinh^2(\vartheta)\right) \\ &\quad = H_-^4 - 2a^2 H_-^2 + a^4 + (a H_+ - \xi H_-)^2 \\ &\quad = H_-^4 - 2a^2 H_-^2 + a^4 + a^2 H_+^2 - 2a\xi H_+ H_- + (H_+^2 - H_-^2 + a^2) H_-^2 \\ &\quad = \left(H_+ H_- - a\xi\right)^2 \end{aligned}$$

因此 $\left|H_-^2 - a^2\right| \sqrt{1 + \text{双曲正弦}^2(\vartheta)} = \left|H_+ H_- - a\xi\right|$。

在 $H_- > a$ 的情况下，我们注意到 $\xi < H_+$，并且 $H_-^2 - a^2$ 和 $H_+ H_- - a\xi$ 均为正数。因此，我们可以估计

$$\begin{aligned} &\left(H_-^2 - a^2\right)\left(\sqrt{1+\sinh^2(\vartheta)}\, H_- - \sinh(\vartheta)\, a - H_+\right) \\ &\quad = H_-\left(H_+ H_- - a\xi\right) - a\left(a H_+ - \xi H_-\right) - H_+\left(H_-^2 - a^2\right) \\ &\quad \geq \left(H_- - H_-\right)\left(H_+ H_- - a\xi\right), \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式使用了 $\overline{H_+}(\underline{H}_-^2 - a^2) \le H_+(\underline{H}_-^2 - a^2)$。此外，我们有

$$\begin{aligned}
&(\underline{H}_-^2 - a^2)\left(\sqrt{1+\sinh^2(\vartheta)}\,a - \sinh(\vartheta)\,H_- - \xi\right)\\
&\qquad = a\left(\overline{H}_+\underline{H}_- - a\xi\right) - H_-\left(a\overline{H}_+ - \xi\underline{H}_-\right) - \xi(\underline{H}_-^2 - a^2)\\
&\qquad = (H_- - \underline{H}_-)\left(\xi\underline{H}_- - a\overline{H}_+\right)
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{H}_+\underline{H}_- - a\xi\right)^2 - \left(\xi\underline{H}_- - a\overline{H}_+\right)^2\\
&\qquad = \overline{H}_+^2\underline{H}_-^2 - 2a\xi\overline{H}_+\underline{H}_- + a^2\xi^2 - \underline{H}_-^2\xi^2 + 2a\xi\overline{H}_+\underline{H}_- - a^2\overline{H}_+^2\\
&\qquad = \overline{H}_+^2\underline{H}_-^2 + a^2\left(\overline{H}_+^2 - \underline{H}_-^2 + a^2\right) - \underline{H}_-^2\left(\overline{H}_+^2 - \underline{H}_-^2 + a^2\right) - a^2\overline{H}_+^2\\
&\qquad = a^4 - 2a^2\underline{H}_-^2 + \underline{H}_-^4 \ge 0,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

我们得到 $\overline{H}_+\underline{H}_- - a\xi \ge |\xi\underline{H}_- - a\overline{H}_+|$，因此，

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{1+\sinh^2(\vartheta)}\,H_- - \sinh(\vartheta)\,a - H_+\right)\\
&\qquad\qquad \ge \left|\sqrt{1+\sinh^2(\vartheta)}\,a - \sinh(\vartheta)\,H_- - \xi\right|.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

在 $H_- < a$ 的情况下，其中 $\xi > \overline{H}_+$，且 $\underline{H}_-^2 - a^2$ 和 $H_+\overline{H}_- - a\xi$ 均为负数，我们可以类似地估计

$$\begin{aligned}
&-(\underline{H}_-^2 - a^2)\left(\sqrt{1+\sinh^2(\vartheta)}\,H_- - \sinh(\vartheta)\,a - H_+\right)\\
&\qquad = -H_-\left(\overline{H}_+\underline{H}_- - a\xi\right) + a\left(a\overline{H}_+ - \xi\underline{H}_-\right) + H_+(\underline{H}_-^2 - a^2)\\
&\qquad \ge (H_- - \underline{H}_-)\left(-\overline{H}_+\underline{H}_- + a\xi\right)\\
&\qquad \ge (H_- - \underline{H}_-)\left|a\overline{H}_+ - \xi\underline{H}_-\right|,
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式可仿照（2.3）得出。此外，

$$\begin{aligned}
&-(\underline{H}_-^2 - a^2)\left(\sqrt{1+\sinh^2(\vartheta)}\,a - \sinh(\vartheta)\,H_- - \xi\right)\\
&\qquad = -a\left(\overline{H}_+\underline{H}_- - a\xi\right) + H_-\left(a\overline{H}_+ - \xi\underline{H}_-\right) + \xi(\underline{H}_-^2 - a^2)\\
&\qquad = (H_- - \underline{H}_-)\left(a\overline{H}_+ - \xi\underline{H}_-\right)
\end{aligned}$$

因此，在这种情况下，（2.4）同样成立。

最后，在 $a = H_-$ 的情况下，我们有。在此情况下，$\overline{\xi} = H_+$，因此

$$F_\vartheta\vec{H}_- - \vec{H}_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\sinh^2(\vartheta)}\,H_- - \sinh(\vartheta)\,\underline{H}_- - H_+ \\ \sqrt{1+\sinh^2(\vartheta)}\,\underline{H}_- - \sinh(\vartheta)\,H_- - \overline{H}_+ \end{pmatrix}.$$

注意，双曲正弦$(\vartheta) = \frac{1}{2}(\underline{H}_-\overline{H}_+^{-1} - \overline{H}_+\underline{H}_-^{-1})$，且

$$\cosh(\vartheta) = \sqrt{1+\sinh^2(\vartheta)} = \tfrac{1}{2}(\underline{H}_-\overline{H}_+^{-1} + \overline{H}_+\underline{H}_-^{-1}).$$

利用 $\overline{H_+} \geq H_+$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+\sinh^2(\vartheta)}\,H_- - \sinh(\vartheta)\,\underline{H}_- - H_+ \\
&\qquad \geq \frac{1}{2}\left(H_- - \underline{H}_-\right)\left(\underline{H}_-\overline{H}_+^{-1} + \overline{H}_+\underline{H}_-^{-1}\right) = \left(H_- - \underline{H}_-\right)\cosh(\vartheta), \\
&\sqrt{1+\sinh^2(\vartheta)}\,\underline{H}_- - \sinh(\vartheta)\,H_- - \overline{H}_+ \\
&\qquad = \frac{1}{2}\left(H_- - \underline{H}_-\right)\left(\overline{H}_+\underline{H}_-^{-1} - \underline{H}_-\overline{H}_+^{-1}\right) = -\left(H_- - \underline{H}_-\right)\sinh(\vartheta).
\end{aligned}$$

由于 $\left(H_- - \underline{H}_-\right) \geq 0$ 以及 $\cosh(\vartheta) \geq |\sin(\vartheta)|$，我们再次得到 (2.4)，从而完成证明。□

定理 定理 1的证明。令 $d_0 = c_0 = 0$，对于 $1 \leq \ell \leq N$，令

$$d_\ell := \sum_{i=1}^{\ell}(\overline{H}_{i,+}^2 - \underline{H}_{i,-}^2), \quad c_\ell := \sqrt{\max\{d_\ell, 0\}}. \tag{2.5}$$

不失一般性，我们可以假设 $d_\ell > 0$ 对某个 ℓ成立。否则，定理1 由 [Mia02]可推出。

令 $\Lambda' \in \{\Lambda, \ldots, N\}$为满足 $d_{\Lambda'} > 0$的极大值。根据假设，我们有 $\Lambda' < N$。此外，对于 $1 \leq \ell \leq \Lambda'$，我们有 $c_\ell = \sqrt{d_\ell}$；对于 $\Lambda' + 1 \leq \ell \leq N$，我们有$c_\ell = 0$。对于 $0 \leq \ell \leq N$，定义 M_ℓ上的一个对称 (0，2) 张量 k，令其为

$$k_\ell = \frac{c_\ell}{n-1} \cdot g_\ell.$$

特别地，我们有 $k_N = 0$。此外，由于每个 g_i 都具有非负标量曲率，主导能量条件在 $M_0, \ldots, M_N$ 上成立。

设 $\ell \in \{1, \ldots, \Lambda'\}$。如果我们选择

$$\Sigma := \Sigma_\ell, \quad H_\mp := H_{\ell,\mp}, \quad \underline{H} := H_{\ell,-}, \quad \overline{H}_+ := \overline{H}_{\ell,+} \quad \text{and} \quad a := c_{\ell-1} \tag{2.6}$$

然后 $c_\ell = \sqrt{d_\ell} = \sqrt{H_+^2 - H_-^2 + a^2}$，由 引理 2 可得一个双曲角 ϑ_ℓ 使得

$$X = F_{\vartheta_\ell}\begin{pmatrix} H_{\ell,-} \\ c_{\ell-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_{\ell,+} \\ c_\ell \end{pmatrix} \in C^\infty\left(\Sigma_\ell, \mathbb{R}^{1,1}\right)$$

满足 $X_1 \geq |X_2|$。

对于 $\ell \in \{\Lambda' + 1, \ldots, N\}$，我们选取 Σ， H_-, H_+， $\underline{H}$，以及常数 a 如（2.6）中所述，并选取

$$\overline{H}_+ := \sqrt{\underline{H}_{\ell,-}^2 - c_{\ell-1}^2}.$$

注意，根据关于 Λ' 的假设，我们有 $H_{\ell,-}^2 - c_{\ell-1}^2 \geq H_{\ell,+}^2$，从而$H_+ \geq H_{\ell,\mp} \geq H_\mp$以及 $H_+^2 - H_-^2 + a^2 = 0$。因此，应用 引理 2可得一个 $\vartheta \in \mathbb{R}$ 使得

$$X = F_{\vartheta_\ell}\begin{pmatrix} H_{\ell,-} \\ c_{\ell-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_{\ell,+} \\ 0 \end{pmatrix} \in C^\infty\left(\Sigma_\ell, \mathbb{R}^{1,1}\right)$$

再次满足 $X_1 \geq |X_2|$。

因此， [KKL25, (1.7)] 在 Σ_ℓ， $\ell = 1, \ldots, N$， [1] 成立，也就是说，支配能量条件在每个 Σ_ℓ上弱成立。因此，该结果由 [KKL25，定理 13],得出，从而完成了定理 1的证明。□

[1] 按照 [KKL25], 中的记号，我们有 $\nu_+ = \binom{1}{0}$、 $\tau_+ = \binom{0}{1}$ 以及 $\beta_\pm = k(\nu, \cdot)|_{TM} = 0$、$\beta^\Delta = 0$。因此，在我们的设定中， [KKL25 中的 (1.7)] 转化为以下条件：$X = F_{\vartheta_\ell}\vec{H}_{\ell,-} - \vec{H}_{\ell,+}$ 满足 $X_1 \geq |X_2|$。

3. Concluding remarks

我们预计，锁原理可以有若干扩展和推广。本节将列举其中一些，不作详细论述。

(i) 除最终跃变外，不利的 k-项也可以通过渐近双曲型端在无穷远处吸收。这一机制在解决 Gromov 总平均曲率猜想的过程中发挥着核心作用，见[FHH26，第 3] 节。(ii) 平均曲率 $H_{i、\pm}$ 为正的假设并非必要。允许符号变化会使（1.1）中的假设略微增强，但仍保留了其基本原理；另见 [FHH26]。本着同样的思路，关于 $H_{i、\pm}$ 的最大值和最小值的条件可以替换为逐点条件。(iii) 可以将角点之间的距离纳入考虑，从而弱化假设（1.1），正如近期关于带屏障和任意端的正质量定理的研究所做的那样 [LUY24；CZ24]。换言之，跃变彼此距离越远，补偿不利跃变所需的有利跃变就越小。(iv) 通过适当选择 k，任何超曲面 Σ_i 都可以变换为边际外陷曲面或陷获曲面，从而成为时空正质量定理所允许的边界条件。这为将锁定原理与 Penrose 型不等式相结合带来了可能性。

References

[CZ24] Simone Cecchini 和 Rudolf Zeidler。“旋量情形下的正质量定理与距离估计”。英文。 *Trans. Am. Math. Soc.* 377.8（2024），第 5271–5288 页。 DOI: 10.1090/tran/8942。[FHH26] Georg Frenck、Bernhard Hanke 和 Sven Hirsch。 *Surgery and total mean curvature*。2026。arXiv: 2601.10617 [math.DG]。[KKL25] Demetre Kazaras、Marcus Khuri 和 Michael Lin。 *The Positive Mass Theorem for Creased Initial Data* 2025 DOI 10 48550 2508 17585 2508 。预印本。.: ./arXiv. . . arXiv: .17585 [math.DG]。[LUY24] Martin Lesourd 、 Ryan Unger 和丘成桐。“ 具有任意端的正质量定理”。 *Journal of Differential Geometry* 128.1（2024），第 257–293 页。 DOI: 10.4310/jdg/1721075263。[Mia02] 缪鹏姿。“沿超曲面具有角点的流形上的正质量定理”。英文。 *Adv. Theor. Math. Phys.* 6.6（2002），第 1163–1182 页。 DOI: 10.4310/ATMP.2002.v6.n6.a4。[ST02] 史宇光和谭联辉。“非负标量曲率紧流形的正质量定理与边界行为。”英文。 *J. Differ. Geom.* 62.1（2002），第 79–125 页。 DOI: 10.4310/jdg/1090425530。

Email address: georg.frenck@math.uni-augsburg.de
URL: frenck.net/math
Universität Augsburg, Universitätsstr. 14, 86159 Augsburg, Germany

Email address: hanke@math.uni-augsburg.de*URL* math.uni-augsburg.de/hanke :,
Universität Augsburg
Universitätsstr. 14, 86159 Augsburg, Germany

Email address: sven.hirsch@columbia.edu*URL*: svenhirsch.com
Columbia University, 2990 Broadway, New York NY 10027, USA