arXiv:2602.11010v1 [math.AT] 11 Feb 2026

关于超实对偶 Steenrod 代数

MICHAEL A. HILL 和 MICHAEL J. HOPKINS

Abstract. 我们计算了具有常系数 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}/2$ 的 Bredon 同调的对偶Steenrod 代数，其中 $MU^{((G))}$是到 $G = C_{2^n}$ 的范数，作用于 $MU_{\mathbb{R}}$的模范畴中。利用这一结果以及 Greenlees–Serre 谱序列的一个等变版本，我们给出了一个计算 Eilenberg-Mac Lane 谱 $H\mathbb{F}_2 \otimes H\underline{\mathbb{Z}}$的$RO$-分次同伦的谱序列。

1. 引言

[9] 的约化定理是确定 $G = C_{2^n}$-谱的切片的关键工具

$$\Xi_n = MU^{((G))} = N_{C_2}^{C_{2^n}} MU_{\mathbb{R}}.$$

该定理通过将 $H\underline{\mathbb{Z}}$（常 Mackey 函子 $\mathbb{Z}$对应的 Eilenberg-Mac Lane 谱）表示为 Ξ_n上的模（正如我们将在第 2 节回顾的那样）来实现这一点。实际上，这为任意 G-谱与 $H\underline{\mathbb{Z}}$的楔积给出了一个公式。

定理 1.1. 对于任意 G-谱 E，存在自然的弱等价

$$H\underline{\mathbb{Z}} \otimes E \simeq \Xi_n \underset{A}{\otimes} E,$$

其中

$$A = \mathbb{S}^0[G \cdot \bar{r}_1, \dots] := \bigotimes_{i \geq 1} N_{C_2}^G \mathbb{S}^0[S^{i\rho_2}]$$

是由$\pi_{*\rho_2}\Xi_n$ 的一组生成元的选取所指定的扭曲幺半群代数，并通过到 $\mathbb{S}^0$的增广作用于 E 。

当 E 是结构化环谱时，这个公式更有用；而当 E 实际上是 Ξ_n-定向的时，它最为有用。若 E 是 E_∞ 环谱，则有 G-谱之间的自然等价

$$\Xi_n \underset{A}{\otimes} E \simeq (E \otimes \Xi_n) \underset{E \otimes A}{\otimes} E.$$

当 E 是 Ξ_n-可定向的时，我们可以重新表述这里的代数映射。通过 Thom 同构（见推论 3.7），$E \otimes A$的同伦在 RO 分次意义下是自由的，$E \otimes \Xi_n$也同样如此。因此，从 $E \otimes A$ 到$E \otimes \Xi_n$ 的同伦映射可视为一种基于 E的 Hurewicz 像。

当 $E = H\underline{\mathbb{Z}}$或 $H\underline{\mathbb{F}}_2$时，我们可以进一步将其完全改写为等变代数的形式。$H\underline{\mathbb{Z}} \otimes A$ 的 RO-分次同伦是由 C_2-等变类 $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots$生成的自由分次 Tambara 函子 $\pi_\star H\underline{\mathbb{Z}}$-代数。类 $\bar{r}_i$ 是 $\pi_{*\rho_2}^{C_2}(\Xi_n)$中的同伦元素，因此我们考察它们在

$$\pi_{*\rho_2}^{C_2}\left(H\underline{\mathbb{Z}} \otimes \Xi_n\right) \cong \mathbb{Z}[\bar{m}_1, \gamma\bar{m}_1, \dots].$$

Key words and phrases. 等变同伦，Steenrod 代数。

这基本上就是我们理解类 $\bar{r}_i$的方式。实际计算中，我们发现必须针对一个复杂的等变代数映射计算一个 RO-分次 Tor 群。展开来说，我们将证明如下结论。

定理 1.2. 我们有一个 $\pi_\star H\mathbb{F}_2$-模的同构

$$H\underline{\mathbb{F}}_{2\star}H\underline{\mathbb{Z}} \cong \mathrm{Tor}^{-\star}_{H\underline{\mathbb{F}}_{2\star}[G\cdot\bar{r}_1,\dots]}\left(H\underline{\mathbb{F}}_{2\star}[G\cdot\bar{m}_1,\dots], H\underline{\mathbb{F}}_{2\star}\right).$$

为简化计算，我们引入一个中间对象，即 Ξ_n-相对对偶 Steenrod 代数。由于 Ξ_n 是一个 G-交换环谱，因此存在一个 G-对称幺半模范畴 [7]。给定任意交换的 Ξ_n代数 E 和 E'，我们可以构造交换的 Ξ_n环谱

$$E \underset{\Xi_n}{\otimes} E'.$$

当 $E = E'$时，它便在记录从 E-模到 Ξ_n-模的下降的谱 Hopf 拓扑中，扮演余¨运算环的角色。特别是，假设具有良好的平坦性性质，我们就有一个更简单的 Adams 谱序列，用来计算 Ξ_n-模的同伦，参见 Baker–Lazarev [2]。

在 Ξ_n 上工作能使许多计算大为简化。我们可以完整描述整数系数和模 2 Ξ_n 相对对偶 Steenrod 代数。我们在第 4 节中研究加法部分，并证明以下结果。

定理 1.3. 对于任意 $\mathbb{Z}$-代数 R，我们有一个 HR-模的弱等价

$$H\underline{R} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}} \simeq H\underline{R} \otimes \Sigma^\infty_+ \left(\prod_{i\geq 1} \mathrm{Map}^{C_2}\left(G, S^{i\rho_2+1}\right) \right).$$

这完全描述了加法结构。由于乘积和余诱导在施加无穷完全悬挂后会分裂，右侧是 HR-自由的，可分解为如下形式的 HR-模的楔和

$$H\underline{R} \otimes (G_+ \underset{H}{\otimes} S^V)$$

对于各种子群 H 和 H-表示 V。我们在此注意到，我们并未对 R 作任何假设；它可以具有任意病态的性质。

在特化到 $R = \mathbb{F}_2$ 的情形时，我们也可以理解 $H\mathbb{F}_2$ 的相对 smash 平方。

定理 1.4. 我们有一个弱等价

$$H\underline{\mathbb{F}}_2 \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{F}}_2 \simeq H\underline{\mathbb{F}}_2 \otimes \Sigma^\infty_+ \left(S^1 \times \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Map}^{C_2}\left(G, S^{i\rho_2+1}\right) \right).$$

在第 5 节中，我们研究乘法结构。如果 R 是一个交换 Green$\mathbb{Z}$-代数，那么

$$H\underline{R} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}$$

是 $H\mathbb{Z}$-模中的 E_∞-幺半群。若 R 实际上是 Tambara $\mathbb{Z}$-代数，那么相对张量积就是一个 G-交换 $H\mathbb{Z}$-代数，因此其同伦上带有自然的范数映射。令人惊讶的是，这是最简单的情形，因为我们的方法和分裂会自动保留某些类型的范数结构。我们可以从计算中读出这些结构，再利用 G-谱的性质来解决其他乘法扩张问题。

最后，我们回到整体情形。在第 6 节中，我们构造了 Greenlees–Serre 谱序列 [8] 的一个等变精化。给定一个交换环谱的推出方块

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & Q, \end{array}$$

Greenlees–Serre 谱序列由 A （“纤维”）、B 和 Q（“底空间”）的同伦群计算出 R （“全空间”）的同伦群。Greenlees 的版本是在 B 为零阶 Postnikov 截面的情形下，由 A 的 Postnikov 塔构造而成。我们的版本则是在 B 为零阶切片截面的情形下，由 A 的切片塔构造而成。

定理 1.5. 设 $f\colon A \to R$ 为连通等变交换环谱之间的映射，设 P^0 为零切片截面函子，并考虑等变交换环谱的推出方块

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^0 A & \longrightarrow & Q. \end{array}$$

我们有一个分次 *Tambara* 函子的谱序列，其 E_2-项为

$$E_2^{s,\underline{\star}} = \pi_{\underline{\star}-s}\big(Q \underset{P^0 A}{\otimes} P^{\dim \underline{\star}}_{\dim \underline{\star}}(A)\big),$$

其中 $P_{\dim \star}^{\dim \star}(A)$ 是 $\dim \underline{\star}$-切片 A。微分为 *Adams* 型。它强收敛到 R 的同伦群。

一般而言，由于出现了相对张量积， E_2-项的计算会比较棘手。Lewis–Mandell K¨unneth 谱序列可以计算相对 smash 积 [13] 的同伦。当 A 的切片是自由的 $P^0(A)$-模时，我们可以轻松地确定 E_2-项。 $H\mathbb{F}_2 \otimes \Xi_n$ 就是这种情形。

推论 1.6. 存在一个分次 *Tambara* 函子谱序列，其 E_2-项为

$$\pi_{\underline{\star}}\big(H\underline{\mathbb{F}}_2 \underset{\underline{\Xi}_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}\big)[G \cdot \bar{m}_1, \dots] \Rightarrow \pi_{\underline{\star}}\big(H\underline{\mathbb{F}}_2 \otimes H\underline{\mathbb{Z}}\big).$$

同样，这种情形实际上纯粹是代数的。微分的构造利用了这样一点：类 $\bar{r}_i$ 是类 $\bar{m}_i$ 的代数组合，而 $\pi_\star\big(H\mathbb{F}_2 \underset{\Xi_n}{\otimes} H\mathbb{Z}\big)$ 的代数生成元则是类 $\bar{r}_i$ 的一种形式零伦。换言之，我们可以将推论 1.6 重新诠释为一种用于计算 $H\mathbb{Z}$ 的同调的 Koszul 分解，其系数取自 $\mathbb{F}_2$。我们为 $G = C_2$ 概述这一完整计算，重现 Hu–Kriz [11] 的工作。

记号。 我们在真正的 G 谱范畴中工作，并将其视为一个 G-对称幺半稳定 ∞-范畴。

字母 G 几乎总是指循环群 C_{2^n}，而字母 K 和 H 通常表示子群。

令 σ 表示符号表示。令 λ 表示 G 的复表示所对应的底层实表示，该复表示将一个生成元映射为乘以 σ

令 $e^{2\pi i/2^n}$ 表示群 H 的正则表示，并令 ρ_2 表示 C_2 的正则表示。

给定一个 V of G 的表示，令

$$a_V\colon S^0 \to S^V$$

表示 $\{0,\infty\}$ into S^V 的包含映射。

令 $\mathbb{M}_2$ 表示一点的 $RO(C_2)$-分次同调。

整数分次的通配符用星号表示。对于 $RO(G)$-分次，我们用星形符号： $\star$。最后，我们还将经常使用一种更一般的分次，它不仅允许 G 的（虚）表示，也允许诱导自 H 的（虚）表示（见 [1, 10]）。这种 RO 分次中相应的“通配符”是 $\star$。

最后，有几项计算将在各种 K¨unneth 谱序列中进行，并会用到同调悬挂。为避免与符号表示混淆，我们将用 ςx 表示环谱同伦中的元素 x 的同调悬挂。

致谢。 作者感谢 Agn`es Beaudry、Prasit Bhattacharya、Tyler Lawson 和 Danny XiaoLin Shi 仔细审阅本文的早期草稿。第一作者访问剑桥数学科学艾萨克·牛顿研究所期间完成了部分工作；此次访问是在“Equivariant Homotopy Theory in Context”项目期间进行的，并获得 EPSRC 拨款 EP/Z000580/1 的资助。

2. Twisted monoid rings and the Reduction Theorem

定理 1.3 的证明使用了 [9] 的约化定理，其形式是将 $H\mathbb{Z}$ 表示为一个 Ξ_n-模。这里我们回顾并重新表述其中一些必要内容。

2.1. 自由结合代数。

回忆一下，无限悬挂函子是一个强对称幺半函子，它将 G-CW复形的笛卡尔积映为真正 G-谱的楔积。特别地，我们有一个 Snaith 分裂的变体。

定义 2.1. 若 X 是一个 G-CW 谱，则令

$$\mathbb{S}^0[X] = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} X^{\otimes i}$$

为由 X生成的自由结合代数。

引理 2.2. 由一个有基点、单连通的 G-空间X 生成的自由结合代数为

$$\mathbb{S}^0[\Sigma^\infty_+ X] = \Sigma^\infty_+ \Omega\Sigma X.$$

由于无限悬挂是一个从带笛卡尔积的空间到谱的强对称幺半函子，我们也有一个关于空间的悬挂谱上自由结合代数的 smash 积的相关公式。

引理 2.3. 由 X 和由 Y 生成的自由结合代数的 *smash* 积为

$$\mathbb{S}^0[\Sigma^\infty_+ X] \otimes \mathbb{S}^0[\Sigma^\infty_+ Y] \simeq \Sigma^\infty_+ \Omega\big(\Sigma X \times \Sigma Y\big),$$

作为结合代数。

这种方法使我们能够对自由结合代数上的楔积（或由此得到的 smash 积）进行解释。

引理 2.4. 设 X 是一个道路连通的 G-*CW* 复形。我们有一个自然的弱等价

$$\mathbb{S}^0 \underset{\Sigma^\infty_+\Omega X}{\otimes} \mathbb{S}^0 \simeq \Sigma^\infty_+ X.$$

推论 2.5. 对于任意空间 X 和 Y，我们有

$$\mathbb{S}^0 \underset{\mathbb{S}^0[\Sigma^\infty_+ X]\otimes\mathbb{S}^0[\Sigma^\infty_+ Y]}{\otimes} \mathbb{S}^0 \simeq \Sigma^\infty_+\big(\Sigma X \times \Sigma Y\big),$$

对于任意 *smash* 积，情况也类似。

无限悬挂函子实际上是一个 G-对称幺半函子，它将 G-空间中的余诱导映射到范数。

命题 2.6. 对于任意 H-空间 X，我们有一个自然的弱等价

$$N^G_H\big(\Sigma^\infty_+ X\big) \simeq \Sigma^\infty_+ \operatorname{Map}^H(G, X).$$

这给出了引理 2.3 的一个扭曲版本。

引理 2.7。 H-空间 X 上基于一个点的自由结合代数的范数为

$$N^G_H\big(\mathbb{S}^0[\Sigma^\infty_+ X]\big) \simeq \Sigma^\infty_+ \operatorname{Map}^H(G, \Omega\Sigma X) \simeq \Sigma^\infty_+\Omega \operatorname{Map}^H(G, \Sigma X).$$

证明。 第一个等价是由引理 2.2 和命题 2.6 复合而成。这个弱等价仅仅是交换 G-空间中的两个右伴随。□

2.2. **扭曲幺半群环与** Ξ_n。 给定一个 G-交换环谱 R以及一个元素，其位于 H-等变同伦

$$\bar{x} \in \pi^H_V(R)$$

对于某个（虚） H-表示 V，我们可以构造一个结合代数映射:

$$\mathbb{S}^0[S^V] \to i^*_H R.$$

由于 R 是一个 G-交换幺半群，我们可以接着将其范数化至 G ，并与范数-遗忘伴随的余单位复合，从而得到一个结合环映射

$$N^G_H\big(\mathbb{S}^0[S^V]\big) \to N^G_H i^*_H R \to R.$$

给定多个元素，我们可以将这些代数张量在一起。我们的分析基于这样一个事实：我们可以将源代数理解为空间的悬挂谱，并且对于 $R = \Xi_n$，我们有良好定义的生成元。

为陈述这一点，令 $\mathbb{Z}_-$ 表示 C_2 的整符号表示。

定理2.8 ([9, 命题5.27，引理5.33]**)**。 存在一些类

$$\bar{r}_i \colon S^{i\rho_2} \to i^*_{C_2}\Xi_n$$

使得所诱导的交换环映射

$$\bigotimes_{i\geq 1} \operatorname{Sym}\left(\operatorname{Ind}^G_{C_2}(\mathbb{Z}_-)^{\otimes i}\right) \xrightarrow{\otimes \operatorname{Ind}\bar{r}_i} \underline{\pi}_{*\rho_2}(\Xi_n)(C_2/C_2)$$

是一个同构。

定理 2.9 ([9, 约化定理])**.** *Thom* 约化给出了 Ξ_n-模之间的弱等价

$$\Xi_n \underset{A}{\otimes} \mathbb{S}^0 \simeq H\underline{\mathbb{Z}}.$$

3. $\underline{\mathbb{Z}}$-HOMOLOGY VIA Ξ_n

3.1. **一般公式**。 约化定理立即给出了描述任意 G-谱与 $H\underline{\mathbb{Z}}$ smash 的方法。

命题 3.1。 对于任意 G-谱 E，我们有一个 Ξ_n-模的等价

$$H\underline{\mathbb{Z}} \otimes E \simeq \Xi_n \underset{A}{\otimes} E,$$

其中，通过增广映射 $A \to \mathbb{S}^0$，将 E 视为一个 A-模。

证明。 这是 shuffle 等价

$$H\underline{\mathbb{Z}} \otimes E \simeq (\Xi_n \underset{A}{\otimes} \mathbb{S}^0) \otimes E \simeq \Xi_n \underset{A}{\otimes} E. \qquad \square$$

若 E 是 E_∞ 幺半群或 G-交换幺半群，那么这个等价是 $\Xi_n \otimes E$-模之间的等价。在这种情况下，我们现在可以对 E-模使用自由-遗忘伴随来改写此式。

推论 3.2. 若 E 是 E_∞ 幺半群，则有一个 $\Xi_n \otimes E$-模之间的等价

$$H\underline{\mathbb{Z}} \otimes E \simeq (E \otimes \Xi_n) \underset{E\otimes A}{\otimes} E.$$

注 3.3. 由于 A 是形如$G_+ \underset{H}{\otimes} S^V$的谱的楔和，结合环谱 $E \otimes A$ 总是一个自由 E-模。

注 3.4. 这甚至适用于 $E = HA$的情形，即 Burnside-Mackey 函子对应的 Eilenberg-Mac Lane 谱；因此，由基变换可知，这也适用于任意 Eilenberg-Mac Lane 谱。

3.2. Ξ_n**-可定向情形**。 当 E 是 Ξ_n-可定向时，Thom 同构使我们能够改写第一个 smash 因子。

命题 3.5. 给定一个 Ξ_n-可定向的环谱 E，我们有左 E-模之间的等价

$$E \otimes \Xi_n \simeq E \otimes \Sigma^\infty_+ \operatorname{Map}^{C_2}(G, BU_{\mathbb{R}}).$$

这具有自由的 E-同调，原因基本上与经典情形相同。通过限制和范数-遗忘伴随的单位，一个 Ξ_n-定向给出了 $i^*_{C_2}E$ 的实定向：

$$MU_{\mathbb{R}} \to i^*_{C_2}\Xi_n.$$

这使我们能够轻松地确定 $BU_{\mathbb{R}}$ 的 $i^*_{C_2}E$-同调和余诱导 $BU_{\mathbb{R}}$的 E-同调。

定理 3.6 ([10,])**.** 存在一些类

$$\bar{m}_i \in \pi^{C_2}_{i\rho_2}\big(\Xi_n \otimes \operatorname{Map}^{C_2}(G, BU_{\mathbb{R}})\big)$$

使得诱导映射

$$\Xi_n \otimes \Big(\bigotimes_{i\geq 1} N^G_{C_2}\mathbb{S}^0[S^{i\rho_2}]\Big) \to \Xi_n \otimes \operatorname{Map}^{C_2}(G, BU_{\mathbb{R}})_+$$

是结合 Ξ_n-代数之间的等价。

沿映射 $\Xi_n \to E$ 进行底空间变换，并利用 Thom 同构，即可推出一般情形。

推论 3.7。对于任意 Ξ_n-可定向的 G-谱 E，结合 E-代数映射

$$E \otimes \Big(\bigotimes_{i\geq 1} N_{C_2}^G \mathbb{S}^0[S^{i\rho_2}] \Big) \to E \otimes \Xi_n$$

是一个等价。

注意，所述结合 E-代数实际上就是 $E\otimes A$。然而，在 $E \otimes \Xi_n$ 上诱导的A-代数结构并非来自 Ξ_n 本身。相反，由同伦范畴中的自映射所诱导的

$$E \otimes A \xrightarrow{E\otimes \iota} E \otimes \Xi_n \xleftarrow{\simeq} E \otimes \Big(\bigotimes_{i\geq 1} N_{C_2}^G \mathbb{S}^0[S^{i\rho_2}] \Big)$$

然而，并非恒等映射。这个 E-代数映射由以下C_2-等变映射确定：

$$S^{i\rho_2} \to i_{C_2}^* \Xi_n \to i_{C_2}^*(E \otimes \Xi_n).$$

换言之，来自 $E \otimes A$ 的映射选取的是 $E \otimes \Xi_n$中的 E-底空间 Hurewicz 像。

记号 3.8。若要强调代数结构是这个 Hurewicz 结构，我们将用 A_n^h 表示 A。

定理 3.9。设 E 是一个 E_∞-幺半群，并假设 E 是 Ξ_n-定向的。那么我们有一个 *Adams* 分次谱序列，其 E_2 项为

$$E_2^{s,V} = \operatorname{Tor}^{-s,V}_{E_\star[G\cdot \bar\tau_1,\dots]}\big(E_\star[G\cdot \bar m_1, G\cdot \bar m_2, \dots], E_\star\big)$$

收敛到 $\pi_{V-s}\big(H\underline{\mathbb{Z}} \otimes E\big)$。

证明。这是由将 $H\underline{\mathbb{Z}} \otimes E$ 写成平衡 smash 积所得到的 K¨unneth 谱序列：

$$H\underline{\mathbb{Z}} \otimes E \simeq (E \otimes \Xi_n) \underset{E\otimes A}{\otimes} E.$$

推论 3.7 给出了第一个楔积因子的同伦。基环的同伦就是我们取 Tor 时所用的环的定义。结论由此得出。□

在 $E = H\mathbb{F}_2$ 的情形下，我们是在 $H\mathbb{F}_2$-模范畴中工作，而它就是 $\mathbb{F}_2$-模的导出范畴 [14]。此时，Eilenberg–Mac Lane 函子是 [导出的]强对称幺半函子，因此这里的 K¨unneth 谱序列退化。对于 $n \geq 2$，这是阿贝尔范畴中的一个 Tor 计算，我们对此不甚熟悉。然而，对于 $n = 1$，我们可以轻松地推出加法对偶 Steenrod 代数，因为 K¨unneth 谱序列只是 Lewis–Mandell $RO(C_2)$-分次谱序列的一种形式。

推论 3.10. 我们有一个 $RO(C_2)$分次模的同构

$$\mathcal{A}_\star \cong \mathbb{M}_2[\bar x_1, \dots] \underset{\mathbb{M}_2}{\otimes} E_{\mathbb{M}_2}(\tau_0, \tau_1, \dots),$$

其中 $|\bar\xi_n| = |\bar v_n| = (2^n - 1)\rho_2$，以及 $|\tau_m| = |\bar v_m| + 1 = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1)\varsigma$.

证明。 赫雷维茨映射的形式为

$$\bar{r}_i \mapsto \begin{cases} \bar{m}_i & i \neq 2^n - 1 \forall n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这就得到了所需的结果，其中元素 ξ_n 由 $\bar{m}_{2^n-1}$ 表示，而 $\bar{\tau}_m$ 由 $\bar{r}_{2^m-1}$的同调悬挂表示。□

4. The relative dual Steenrod algebra: additive structure

4.1. 与 $H\mathbb{Z}$ 的相对 smash 积。利用 $H\underline{\mathbb{Z}}$作为$\underline{\Xi}_n$-模的表示，我们也可以计算 $\underline{G}$-谱与 $H\underline{\mathbb{Z}}$的各种相对 smash 积。

命题 4.1。 给定任意 Ξ_n-模 E，我们有等价

$$E \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}} \simeq E \underset{A}{\otimes} \mathbb{S}^0,$$

其中 E 是通过沿着 $A \to \Xi_n$拉回而得到的 A-模。

证明。 这是换环同构。我们有自然等价

$$E \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}} \simeq E \underset{\Xi_n}{\otimes} (\Xi_n \underset{A}{\otimes} \mathbb{S}^0) \simeq E \underset{A}{\otimes} \mathbb{S}^0. \qquad \square$$

在 $E = H\mathbb{Z}$ 本身的情形下，我们可以更轻松地进一步改写，因为 A-模结构必然是平凡的。

定理 4.2。 存在一个 $H\underline{\mathbb{Z}}$-模的等价

$$H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}} \simeq H\underline{\mathbb{Z}} \otimes \Sigma^\infty_+ \left(\prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{Map}^{C_2}(G, S^{i\rho_2+1}) \right).$$

证明。 命题 4.1 给出了一个 $H\underline{\mathbb{Z}}$-模的等价

$$H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}} \simeq B(H\underline{\mathbb{Z}}, A, \mathbb{S}^0).$$

映射 $\Xi_n \to H\mathbb{Z}$ 是一个环映射，因此模结构由结合环映射诱导

$$A \to H\underline{\mathbb{Z}}.$$

由于 $H\underline{\mathbb{Z}}$是一个零层，且 A 中除 $\mathbb{S}^0$的那一份之外的所有直和项都是切片正的，任何映射

$$A \to H\underline{\mathbb{Z}}$$

分解为

$$A \to \mathbb{S}^0 \to P^0(\mathbb{S}^0) \to H\underline{\mathbb{Z}}.$$

特别地，我们有一个弱等价

$$H\underline{\mathbb{Z}} \underset{A}{\otimes} \mathbb{S}^0 \simeq H\underline{\mathbb{Z}} \otimes \left(\mathbb{S}^0 \underset{A}{\otimes} \mathbb{S}^0 \right).$$

引理 2.3 使我们能够将 A 本身描述为一个悬挂谱：

$$A \simeq \Sigma^\infty_+ \Omega \left(\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Map}^{C_2}(G, S^{i\rho_2+1}) \right).$$

引理 2.4 和推论 2.5 随即给出相对 smash 积

$$\mathbb{S}^0 \underset{A}{\otimes} \mathbb{S}^0 \simeq \Sigma^\infty_+ \left(\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Map}^{C_2}(G, S^{i\rho_2+1}) \right),$$

这就是所需的结果。 □

由此也很容易确定模 2 约化：我们沿映射 $H\mathbb{Z} \to H\mathbb{F}_2$ 对左因子作基变换。与模 2 Moore 谱作 smash 积后，立即得到定理 1.4。

更一般的商。对于形如以下形式的更一般商的相对同调，同样的分析也适用

$$\Xi_n/(G\cdot \bar{s}_{i_1}, \cdots \mid i_j \in I),$$

其中元素 $G\cdot\bar{s}_{i_1}$、..... 是 $\pi_{*\rho_2}\Xi_n$ 中的代数独立元素，满足

$$|s_{i_j}| = i_j\rho_2,$$

如 [3] 中所考虑的。我们得到

$$H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_n}{\otimes} \Xi_n/(G\cdot \bar{s}_{i_1}, \dots) \simeq H\underline{\mathbb{Z}} \otimes \Sigma^\infty_+ \left(\prod_{i_j\in I} \mathrm{Map}^{C_2}(G, S^{i_j\rho_2+1}) \right).$$

这特别适用于 $BP^{((G))}$，以及任意一个 $BP_{((G))}\langle m\rangle$。

此外，对于任意空间中的 Ξ_n**/(**$G\cdot \bar{t}_{i_1}, \dots$**)**，只要它是一个环，基本上同样的分析都适用。关键步骤是理解从 A 出发的映射会经由 $\mathbb{S}^0$ 分解，而在环的情形下确实如此。对于像 $k^{((G))}[n]$ 这样的谱，这一点并无保证 [6]。

4.2. **谱的分裂**。不仅 $H\mathbb{Z}$ 在 Ξ_n-模范畴中的榔头平方 $H\mathbb{Z}$ 与一个悬挂谱作 smash 积，而且该悬挂谱还分裂为表示球面的楔和。这使我们能够完全加性地控制相对 smash 积的同伦 Mackey 函子。

以下只是将无限悬挂的 G-对称幺半性改写为我们的空间 X 已经带基点的情形。

命题 4.3。对于任意带基点的 H-空间 X，我们有一个等价

$$\Sigma^\infty_+ \mathrm{Map}^H(G, X) \simeq N_H^G\big(\Sigma^\infty X \oplus \mathbb{S}^0\big).$$

推论 4.4。我们有一个 $H\mathbb{Z}$-模的分裂

$$H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}} \simeq H\underline{\mathbb{Z}} \otimes \bigotimes_{i\geq 1} N_{C_2}^G\big(\mathbb{S}^{i\rho_2+1} \oplus \mathbb{S}^0\big).$$

范数的分配律由此给出显式公式。

使用 G 索引的和与积的语言，我们有一个等价

$$N_{C_2}^G\big(\mathbb{S}^{i\rho_2+1} \oplus \mathbb{S}^0\big) \simeq \bigoplus_{f\in \mathrm{Map}^{C_2}(G,\{a,b\})} \big(\mathbb{S}^{i\rho_2+1}\big)^{\otimes f^{-1}(a)}.$$

为便于计算，将各种 G 索引的部分整理成更传统的形式会有所帮助。为此，我们利用 f 的稳定子来改写。

定义 4.5. 令 H_f 为 G 中 f 的稳定子。

命题 4.6. 子群 H_f 是 $f^{-1}(a) \subseteq G$ 的稳定子，也是 $f^{-1}(b) \subseteq G$ 的稳定子。这是使分解成立的最大子群 H

$$C_{2^n} = f^{-1}(a) \amalg f^{-1}(b)$$

是 H-等变的。

注意，由于 G 的每个子群都在其上自由作用，因此 $f^{-1}(a)$ 和$f^{-1}(b)$ 自动是自由的 H-集。此外，由于该群是阿贝尔群，任何C_2-等变映射到作用平凡的集合上时，都自动被 C_2 稳定。

这些结果使我们能够识别带指标张量。

命题 4.7。 对于任意 $f \in$ 映射$^{C_2}(G, \{a,b\})$，我们有一个 H_f-等变等价

$$\left(\mathbb{S}^{i\rho_2+1}\right)^{\otimes f^{-1}(a)} \simeq \left(N_{C_2}^{H_f}\mathbb{S}^{i\rho_2+1}\right)^{\otimes |f^{-1}(a)/H_f|} \simeq \mathbb{S}^{|f^{-1}(a)/H_f|\,\mathrm{Ind}_{C_2}^{G}(i\rho_2+1)}.$$

定义 4.8。 若 $f \in$ 映射$^{C_2}(G,\ \{a,b\})$ 且 $i \geq 1$，则令

$$||f_i|| = \frac{|f^{-1}(a)|}{|H_f|}\,\mathrm{Ind}_{C_2}^{H_f}(i\rho_2+1).$$

将加法结构折叠起来，相当于把元素 f 的 G-轨道中的各种函数汇集在一起。

推论 4.9。 我们有一个等价

$$N_{C_2}^{G}\left(\mathbb{S}^{i\rho_2+1}\oplus\mathbb{S}^{0}\right) \simeq \bigoplus_{[f]\in \mathrm{Map}^{C_2}(G,\{a,b\})/G} G_+ \underset{H_f}{\otimes} \mathbb{S}^{||f_i||}.$$

将所有部分张量在一起，便得到我们所需的分解。

推论 4.10. 我们有如下 $H\mathbb{Z}$-模之间的等价

$$H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}} \simeq H\underline{\mathbb{Z}} \otimes \bigotimes_{i\geq 1}\left(\bigoplus_{[f_i]\in \mathrm{Map}^{C_2}(G,\{a,b\})/G} G_+ \underset{H_{f_i}}{\otimes} \mathbb{S}^{||f_i||}\right).$$

分配律也有助于我们展开这一部分。我们先考虑有限个张量因子的情形。这里，由于群不会置换这些张量因子，分配律可以改写为对以下对象求和

$$\prod_{i=1}^{n}\mathrm{Map}^{C_2}(G,\{a,b\}) \cong \mathrm{Map}^{C_2}(G,\prod_{i=1}^{n}\{a,b\}).$$

给定一个函数

$$f \in \prod_{i=1}^{n}\mathrm{Map}^{C_2}(G,\{a,b\}),$$

let

$$f_i = \pi_i \circ f : G \to \{a,b\}$$

令其为到 i 个因子中的第 i 个因子的投影。于是，分配律表明，与此处特定函数 f 对应的加项为

$$\mathbb{S}^{||f||} := \bigotimes_{i=1}^{n}\left(\mathbb{S}^{i\rho_2+1}\right)^{\otimes f_i^{-1}(a)}.$$

我们再次利用稳定子将其改写。

命题 4.11。对于任意 f，我们有

$$\mathrm{Stab}(f) = \bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Stab}(f_i).$$

由于 Stab(f) 包含于所有的 Stab(f_i) 中，由$f_i^{-1}(a)$给出的 G 的所有子集都是自由的 Stab(f)-集合。要识别分解中出现的张量积，只需将各个f_i 的所有部分限制到公共子群 Stab(f) 上即可。

定义 4.12。给定一个函数

$$f \in \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Map}^{C_2}(G, \{a, b\},$$

let

$$||f|| = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{H_f}^{H_{f_i}} ||f_i||.$$

采用这一记号，我们可以将所有部分组合起来

命题 4.13。我们有一个等价

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \bigoplus_{[f]\in \mathrm{Map}^{C_2}(G,\{a,b\})} G_+ \underset{H_f}{\otimes} \mathbb{S}^{||f_i||} \simeq \bigoplus_{[f]\in \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Map}^{C_2}(G,\{a,b\})} G_+ \underset{H_f}{\otimes} \mathbb{S}^{||f||}.$$

在讨论中，点 b似乎没有发挥任何作用。函数值的这一部分对应于仅含零球面的张量因子，因此不会出现在我们的公式中。然而，当我们对 n 取余极限时，这一点就起了很大作用。

定义 4.14。设

$$\mathcal{I} = \prod_{i=1}^{\infty} {}^{w} \mathrm{Map}^{C_2}(G, \{a, b\})$$

是所有等变函数序列的集合

$$f = (f_1, \dots)$$

使得对于 $i >> 0$， f_i 是在 b 处取常值的函数。

注意，函数 $f \in \mathcal{I}$ 的稳定子仅取决于那些不在 b 处取常值的有限多个坐标函数。此外，上述定义 $||f||$ 自然地推广到 $\mathcal{I}$ 上，因为如果 f_i 是在 b 处取常值的函数，那么 $f_i^{-1}(a) = \emptyset$。

推论 4.15. 我们有一个 $H\underline{\mathbb{Z}}$-模的等价

$$H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}} \simeq H\underline{\mathbb{Z}} \otimes \bigoplus_{[f]\in \mathcal{I}/G} G_+ \underset{H_f}{\otimes} \mathbb{S}^{||f||}.$$

4.3. **同伦 Mackey 函子**。 加法而言， C_2-等变同调的

$$\mathbb{S}^{i\rho_2+1} \oplus \mathbb{S}^0$$

is

$$\pi_\star^{C_2} H\underline{\mathbb{Z}} \oplus \pi_\star^{C_2} H\underline{\mathbb{Z}} \cdot (\varsigma \bar{r}_i),$$

其中 $\varsigma \bar{r}_i$ 的次数为

$$|\varsigma \bar{r}_i| = i\rho_2 + 1.$$

作为一个 $\pi_\star^{C_2} H\mathbb{Z}$-模，这是由单个类 $\varsigma \bar{r}_i$ 生成的外代数。在此基础上，我们得到范数的 C_2-等变同调为

$$E_{\pi_\star^{C_2} H\underline{\mathbb{Z}}}(\varsigma \bar{r}_i, \gamma\varsigma \bar{r}_i, \dots, \gamma^{|G|/2-1}\varsigma \bar{r}_i),$$

其中 $G=\langle\gamma\rangle$ 的剩余作用由下式给出

$$\gamma\cdot\gamma^j\varsigma\bar{r}_i=\begin{cases}\gamma^{j+1}\varsigma\bar{r}_i & j<|G|/2-1\\ -\varsigma\bar{r}_i & j=|G|/2-1,\end{cases}$$

与代数 A 及其 C_2-等变同调完全类似。正如那里一样，我们有一个自然映射

$$\mathrm{Map}^{C_2}(G,\{a,b\})\to E_{\pi_\star^{C_2}H\underline{\mathbb{Z}}}(\varsigma\bar{r}_i,\gamma\varsigma\bar{r}_i,\dots,\gamma^{|G|/2-1}\varsigma\bar{r}_i)/2$$

由下式给出

$$f\mapsto\bigwedge_{g\in f^{-1}(a)/C_2}g\varsigma\bar{r}_i.$$

推论 4.16. 我们有一个RO-分次同伦群的同构

$$\pi_\star\big(H\underline{\mathbb{Z}}\underset{\Xi_n}{\otimes}H\underline{\mathbb{Z}}\big)\simeq\bigoplus_{f\in\mathcal{I}_n/G}\mathrm{Ind}_{H_f}^G\Sigma^{||f||}\pi_\star H\underline{\mathbb{Z}}.$$

其中包含由满足$H_f=G$的那些对应项生成的 $\pi_\star H\mathbb{Z}$-子模。这些是对几何不动点有贡献的唯一项。

推论 4.17. 作为一个 $\pi_\star H\mathbb{Z}$-模，由对应于满足 $H_f=G$ 的函数 f 的那些项生成的子模同构于外代数

$$E_{\pi_\star H\underline{\mathbb{Z}}}\big(N_{C_2}^G(\varsigma\bar{r}_1),\dots\big),$$

其中

$$|N_{C_2}^G(\varsigma\bar{r}_i)=\mathrm{Ind}_{C_2}^G(i\rho_2+1).$$

由于投射模是平坦的，这是$\pi_\star H\mathbb{Z}$上的一个平坦模。特别地，亚当斯的原始论证表明我们得到一个霍普夫代数胚。

推论 4.18. 偶对 $\Big(\pi_\star H\mathbb{Z},\pi_\star\big(H\mathbb{Z}\underset{\Xi_n}{\otimes}H\mathbb{Z}\big)\Big)$ 是 RO-分次交换代数范畴中的一个霍普夫代数胚。

于是我们可以使用 Baker–Lazarev 相对亚当斯谱序列机制。**推论 4.19.** 对任意 Ξ_n-模 M，存在一个 *Adams* 谱序列，其E_2-项

$$\mathrm{Ext}^{s,\star}_{\left(\pi_\star H\underline{\mathbb{Z}},\pi_\star\left(H\underline{\mathbb{Z}}\underset{\Xi_n}{\otimes}H\underline{\mathbb{Z}}\right)\right)}\Big(\pi_\star H\underline{\mathbb{Z}},\pi_\star\big(H\underline{\mathbb{Z}}\underset{\Xi_n}{\otimes}M\big)\Big)$$

并收敛到 $\pi_{\star-s}(M)$。

当然，即便只是陈述这一结果，我们也一直在使用其底层的交换环结构。要真正处理这些项，我们需要描述这些乘积。

5. The relative dual Steenrod algebra: multiplicative structure

5.1. 幺半范畴旁论。 由于 $H\mathbb{Z}$ 是交换环谱，且 Thom 约化

$$\Xi_n\to H\underline{\mathbb{Z}}$$

是交换环映射，因此相对 smash 平方是等变交换环谱。我们已经描述了加法结构，但所用的方法无法明确控制乘法结构。

为此，我们采用 Hahn–Wilson 一个优美结果的等变版本。

定理 5.1 (Hahn–Wilson)。 正则表示球面上的自由 E_1-代数

$$\mathbb{S}^0[S^{k\rho_2}]$$

存在一个 E_ρ-乘法。

给定一个 E_ρ-代数 R，将 $\mathbb{S}^0[S^{k\rho_2}]$上的 E_1-映射延拓为 E_ρ-映射的障碍位于同伦群 $\pi_{m\rho_2-1}R$中。增广映射

$$\mathbb{S}^0[S^{k\rho_2}] \to \mathbb{S}^0$$

是 E_ρ。

对于 Ξ_n （以及我们通常考虑的任何正则商），这些同伦群全都为零。

推论 5.2。对于任意元素

$$\bar{r}_i \colon S^{i\rho_2} \to i_{C_2}^*\Xi_n,$$

结合环的诱导映射

$$\mathbb{S}^0[S^{i\rho_2}] \to i_{C_2}^*\Xi_n$$

扩展为一个E_{ρ_2}-代数映射。

E_{ρ_2}-代数的范数自动成为余诱导算子系上的代数

$$\mathrm{Map}^{C_2}(G, E_{\rho_2}).$$

Szczesny 的工作表明，$\mathrm{Map}^{C_2}(G,E_{\rho_2})$-代数具有

（1）一个底层为 E_2的结合乘法，（2）来自 E_ρ的 E_σ 因子的范数映射 $C_2 \to G$，以及（3）来自 E_ρ的 E_1 因子的范数映射 $\{e\} \to G$。

商映射

$$\Xi_n \to \Xi_n \underset{A}{\otimes} \mathbb{S}^0$$

因此，它继承了从 C_2 到任意中间群的范数。换句话说，那些看起来像范数的类——它们由相应维数的诱导球面承载，并且来自余诱导球面中的类范数胞腔——实际上是来自底层 C_2-表示球面的范数类。不过，要将这一点精确化，我们需要分解我们的操

$$\mathrm{Map}^{C_2}(G, E_\rho) \simeq E_1 \otimes \mathcal{O},$$

而我们目前还没有这样的分解。有鉴于此，我们通过对子群格使用归纳法，给出另一种更直接的论证。

5.2. **诱导类的乘积**。 根据弗罗贝尼乌斯关系，理解具有真稳定化子 H 的任意类的乘积，等价于理解 H-等变积。这就需要更好地理解《拓扑学》中的限制。在本小节中，设 $K = C_{2^m}$ 是包含 C_2的 G 的一个子群。

命题 5.3。 我们有一个 K-E_∞-环谱之间的等价

$$i_K^*\big(H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}\big) \simeq (H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_m}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}) \otimes \Sigma_+^\infty \left(\prod_{i=1}^{2^{n-m}-1} \mathrm{Map}^{C_2}(K, BBU_{\mathbb{R}}) \right).$$

证明。 由于限制是强对称幺半的，并且由于

$$i_K^* H\underline{\mathbb{Z}} = H\underline{\mathbb{Z}},$$

我们有 K-E_∞ 环谱的等价

$$i_K^*\big(H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}\big) \simeq H\underline{\mathbb{Z}} \underset{i_K^*\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}.$$

由Thom对角线，我们有 K-E_∞ 环谱的等价

$$i_K^*\Xi_n \simeq \Xi_m \otimes \bigotimes^{2^{n-m}-1}_{i=1} \Xi_m \simeq \Xi_m \otimes \Sigma^\infty_+ \left(\prod_{i=1}^{2^{n-m}-1} \mathrm{Map}^{C_2}(K, BU_{\mathbb{R}}) \right).$$

该映射

$$\bigotimes^{2^{n-m}-1}_{i=1} \Sigma^\infty_+ \mathrm{Map}^{C_2}(K, BU_{\mathbb{R}}) \to i_K^*\Xi_n \to H\underline{\mathbb{Z}}$$

经由到 $\mathbb{S}^0$的增广分解，因为除第一项外所有直和项都是切片正的。这意味着我们再次得到一个等价

$$H\underline{\mathbb{Z}} \underset{i_K^*\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}} \simeq \big(H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_m}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}\big) \otimes \Sigma^\infty_+ \left(\prod_{i=1}^{2^{n-m}-1} \mathrm{Map}^{C_2}(K, BBU_{\mathbb{R}}) \right),$$

其中我们使用了 K-E_∞-空间的等价

$$B\prod \mathrm{Map}^{C_2}(K, BU_{\mathbb{R}}) \simeq \prod \mathrm{Map}^{C_2}(G, BBU_{\mathbb{R}}). \qquad \square$$

根据我们的加法计算， $H\mathbb{Z} \otimes H\mathbb{Z}$ 的同伦在$\Xi_m H\underline{\mathbb{Z}}$的同伦上是自由的，因此 K¨unneth 谱序列退化，且没有扩张。

推论5.4。 我们有一个 RO-分次交换代数的同构

$$\pi_\star\big(i_K^* H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}\big) \cong \pi_\star(H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_m}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}) \underset{\pi_\star H\underline{\mathbb{Z}}}{\square} H_\star \left(\prod_{i=1}^{2^{n-m}-1} \mathrm{Map}^{C_2}(K, BBU_{\mathbb{R}}); \underline{\mathbb{Z}} \right).$$

由于 $BBU_{\mathbb{R}}$ 的同调是自由的，因此余诱导$BBU_{\mathbb{R}}$的同调也是自由的：

定理5.5 ([10, 定理5.9])。 我们有一个RO-分次 ***Tamabara*** 函子的同构

$$H_\star\big(\mathrm{Map}^{C_2}(C_{2^m}, BBU_{\mathbb{R}}); \underline{\mathbb{Z}}\big) \cong N_{C_2}^K \pi_\star H\underline{\mathbb{Z}}[\bar{y}_1, \dots]/(\bar{y}_i^2 - a_\sigma \bar{y}_{2i+1}),$$

其中 $|\bar{y}_i| = i\rho_2 + 1$。

注意，类 $\bar{y}_i$ 的次数与类 $\varsigma\bar{r}_i$ 的次数完全相同。我们认为这并非巧合（见下文猜想5.15），并且可以选择 $\varsigma\bar{r}_i$，使其本质上就是这些类；对于 $i_{C_2}^*\Xi_n$ ，使用 $\bar{t}_i$ 生成元，而不是通常的 $\bar{r}_i$ [5]。

最后，由于 $\mathrm{Map}^{C_2}(C_{2^m}, BBU_{\mathbb{R}})$ 的 RO 分次同调仍然是自由的，我们可以将多个副本的乘积的同调表示为盒积。

推论 5.6。 我们有一个 RO-分次交换代数的同构

$$\pi_\star\big(i_{C_{2^m}}^* H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}\big) \cong \pi_\star(H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_m}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}) \underset{\pi_\star H\underline{\mathbb{Z}}}{\square} H_\star\big(\mathrm{Map}^{C_2}(C_{2^m}, BBU_{\mathbb{R}}); \underline{\mathbb{Z}}\big)^{\square(2^{n-m}-1)}.$$

5.3. **非诱导类**。 根据推论 4.17，非诱导类的子模看起来像由这些类生成的一个外代数

$$N_{C_2}^G(\varsigma \bar{b}_i)\colon S^{\mathrm{Ind}_{C_2}^G(i\rho_2+1)} \to H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}.$$

这里的关键步骤是分解几何不动点。

记号5.7。 设

$$\Lambda_i = \mathrm{Ind}_{C_2}^G(i\rho_2+1) - (i+1)$$

为非不动直和项。

命题 5.8。 作为一个 $\mathbb{F}_2[b]$-模， $H\mathbb{Z} \otimes_{\Xi_n} H\underline{\mathbb{Z}}$ 的几何不动点的同伦加法群由下式给出

$$\mathbb{F}_2[b] \otimes E_{\mathbb{F}_2}(x_2, x_3, \dots),$$

其中

$$x_{i+1} = a_{\Lambda_i} N_{C_2}^G \varsigma \bar{r}_i$$

的次数为 $i+1$。

我们还有一种更一般的方法来求几何不动点，因为它们与范数和张量的运算相容。

命题 5.9。 几何不动点由下式给出

$$\Phi^G\big(H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}\big) \simeq H\mathbb{F}_2[b] \underset{MO}{\otimes} H\mathbb{F}_2[b'],$$

其中 b、b' 的次数为2。

$H\mathbb{Z} \otimes H\mathbb{Z}$ 的分解在 $H\underline{\mathbb{Z}}$的两个副本中是不对称的，因为Ξ_n它源自一项分析

$$H\underline{\mathbb{Z}} \otimes \big(\mathbb{S}^0 \underset{A}{\otimes} \mathbb{S}^0\big).$$

b 最左侧的副本来自左侧 $H\mathbb{Z}$ 的几何不动点，整个分析都在 $H\mathbb{Z}$-模中进行。因此，我们可以在此处向下基变换到 $H\mathbb{F}_2$。

取结合代数 A 的几何不动点后，我们再次得到自由结合代数的张量积，不过这次它们由更简单的类生成。

命题 5.10。 作为结合环， A 的几何不动点由下式给出

$$\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathbb{S}^0[S^i] \to \Phi^G A,$$

其中，与 i 对应的张量因子映为

$$f_i := a_{\bar{\rho}_G}^i N_{C_2}^G \bar{r}_i.$$

映射到

$$\pi_* MO \cong \mathbb{F}_2[x_2, x_4, \dots]$$

计算结果见 [9]:

$$f_i \mapsto \begin{cases} x_i & i \neq 2^j - 1 \\ 0 & i = 2^j - 1. \end{cases}$$

此外，在由.....生成的子代数上的相对张量积

$$f_1, f_3, f_7, \dots, f_{2^j-1}, \dots$$

被证明是由一个二维类生成的多项式代数： b'。

只需理解其同伦：

$$H\mathbb{F}_2 \underset{MO}{\otimes} H\mathbb{F}_2.$$

命题 5.11。 其同伦群

$$H\mathbb{F}_2 \underset{MO}{\otimes} H\mathbb{F}_2$$

是由奇数次数的类生成的多项式代数：

$$\varsigma x_2, \varsigma x_4, \dots$$

证明。 Thom 同构给出了一个换环同构

$$H\mathbb{F}_2 \underset{MO}{\otimes} H\mathbb{F}_2 \simeq (H\mathbb{F}_2 \otimes H\mathbb{F}_2) \underset{H\mathbb{F}_2 \otimes BO_+}{\otimes} H\mathbb{F}_2.$$

这里的 K¨unneth 谱序列退化，得到如下形式的伴随分次

$$E_{\mathbb{F}_2}(\varsigma x_i \mid i \neq 2^j - 1).$$

Kochman 对 Dyer–Lashof 作用在 BO [12]的同调上的计算表明，我们有

$$Q_1 x_i \equiv x_{2i+1} \mod \text{decomposables}.$$

由于 Dyer–Lashof 生成元与同调悬挂可交换，我们有

$$Q_0(\varsigma x_i) = \varsigma(Q_1 x_i) = \varsigma x_{2i+1},$$

从而得到所需结果。 □

追踪 K¨unneth 谱序列上的诱导映射，可得如下结论。

推论 5.12. 模去可分解元和 a_λ-挠元后，我们有

$$N_{C_2}^G(\varsigma \bar{b}_i)^2 = a_{\mathrm{Ind}_{C_2}^G \varsigma} N_{C_2}^G(\varsigma \bar{b}_{2i+1}).$$

证明。 由于次数的原因，这是唯一的选择。 □

注 5.13。 表示 $\mathrm{Ind}_{C_2}^G \sigma$ 是 G 的所有既不可约又自由的表示之和。这些表示对应于原始 2^n 次单位根与其共轭组成的不同配对，因此都给出了 λ 的形式。

注 5.14。 乘法关系表明，我们无法只消去 Ξ_n 中单个 $\bar{r}_i$ 并得到一个环。相反，我们必须消去整个无限族，才能彻底抹去与之对应的多项式子代数。对于 $MU_{\mathbb{R}}$，情况也一样。这类似于 [4],，它表明 $BP_{((G))}\langle m \rangle$ 是 $BP^{((G))}$ 中这种形式下唯一有可能成为环的商。

通过归纳法，我们可以看到，对于所有的 $K \subseteq G$，都有

$$\Phi^K\big(H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}\big) \simeq \Phi^K\big(H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_m}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}\big) \otimes \Sigma_+^\infty \prod_{i=1}^{2^{n-m}-1} BBO.$$

上面的计算表明，在几何不动点中还有一份 BBO ，这将使其对称化为

$$H\mathbb{F}_2[b] \otimes \Sigma^\infty_+ \prod_{i=1}^{2^{n-m}} BBO,$$

等价地

$$\Phi^K \left(H\underline{\mathbb{Z}} \otimes \Sigma^\infty_+ \operatorname{Map}^{C_2}(G, BBU_{\mathbb{R}}) \right).$$

猜想5.15. 我们有一个$\operatorname{Map}^{C_2}(G, E_{2+\sigma})$-代数的等价

$$H\underline{\mathbb{Z}} \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}} \simeq H\underline{\mathbb{Z}} \otimes \Sigma^\infty_+ \operatorname{Map}^{C_2}(G, BBU_{\mathbb{R}}).$$

6. The absolute case

相对同调可以纳入一个等变交换环谱的推出方块中

$$\begin{array}{ccc} H\underline{\mathbb{F}}_2 \otimes \Xi_n & \longrightarrow & H\underline{\mathbb{F}}_2 \otimes H\underline{\mathbb{Z}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H\underline{\mathbb{F}}_2 & \longrightarrow & H\underline{\mathbb{F}}_2 \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}. \end{array}$$

除了该方块右上角的项，我们对所有项都有完整的计算掌控。Greenlees–Serre 谱序列提供了一种利用这些结果求得第四项的方法。

6.1. 等变 Greenlees–Serre 谱序列。

定理 6.1. 设 $f\colon A \to R$ 是等变交换环谱之间的一个映射，且 A 连通；设 $p\colon A \to P^0(A)$ 为第零切片截面映射，并设 Q 是由推出方块定义的等变交换环谱

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & R \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow \\ P^0(A) & \longrightarrow & Q. \end{array}$$

设 $Gr(A)$ 是 A 的切片相伴分次，将其视为交换 $P^0(A)$-代数。则我们有一个分次 *Tambara* 函子的谱序列，其满足

$$E_2^{(s,\underline{t})} = \pi_{\underline{t}-s}\big(Q \underset{P^0(A)}{\otimes} Gr_{\dim \underline{t}}(A)\big) \Rightarrow \pi_{\underline{t}-s}(R).$$

微分满足

$$|d_r| = (-1, r).$$

当 R 也为 0-连通时，该谱序列强收敛。

证明。 考虑 A, $P_k(A)$ 的切片滤过，它由 A 的切片覆盖给出。由于 A 为 0-连通，到切片截断的自然映射

$$A \to P^k A$$

始终是 G-交换 A-代数之间的映射，因此滤过 $P_k(A)$ 实际上是 A-模中的滤过。这个滤过是豪斯多夫的，也就是说

$$\varprojlim P_k(A) \simeq 0,$$

当然，

$$A = P_0 A.$$

这给出了一个滤过

$$R \simeq R \underset{A}{\otimes} P_0(A),$$

通过取

$$F_k(R) = R \underset{A}{\otimes} P_k(A).$$

第 k 个关联分次部分是

$$R \underset{A}{\otimes} P_k^k(A).$$

根据构造， A 在 $P_k^k(A)$ 上的作用经由 $P^0(A)$ 分解。换言之，我们有一个等价

$$R \underset{A}{\otimes} P_k^k(A) \simeq R \underset{A}{\otimes} P^0(A) \underset{P^0(A)}{\otimes} P_k^k(A).$$

这意味着， R 的伴随分次可以改写为

$$\big(R \underset{A}{\otimes} P^0(A)\big) \underset{P^0(A)}{\otimes} P_*^*(A) = Q \underset{P^0(A)}{\otimes} P_*^*(A).$$

由于 G-交换幺半群的切片滤过自然是滤过 G-谱中的一个 G-交换幺半群，并且所考虑的所有映射都是 G-交换环映射，因此 R 上诱导的滤过是滤过谱中的一个 G-交换幺半群。因此，该谱序列是分次 Tambara 函子的谱序列。

关于收敛性，我们首先注意到， $P_k A$ 的连通度随 k 趋于无穷（最差情况下大约以 $k/|G|$ 的速度增长）。如果 R 是连通的，那么 K¨ 约化谱序列表明， $R \underset{A}{\otimes} P_k A$ 的连通度也趋于无穷；换言之，对于任意 n 以及所有 $k >> 0$,

$$\underline{\pi}_n\big(R \underset{A}{\otimes} P_k A\big) = 0.$$

这给出了强收敛性。 □

有一个 K¨ 约化谱序列，可以用来计算这个 Greenlees–Serre 谱序列的 E_2 项；该谱序列归功于 Lewis–Mandell [13]。我们有

$$E_2^{V,s} = \mathrm{Tor}^{-s}_{\underline{\pi}_\star P^0(A)}\big(\underline{\pi}_\star Q, \underline{\pi}_\star Gr_k(A)\big)_V \Rightarrow \pi_{V-s}\big(Q \underset{P^0(A)}{\otimes} Gr_k(A)\big).$$

然而，在我们的情形下，情况大为简化。由于 $H\mathbb{F}_2$ 是 Ξ_n-定向的，推论 3.7 表明，我们有一个 $H\mathbb{F}_2$-结合代数的等价

$$H\underline{\mathbb{F}}_2 \otimes A_n^h \simeq H\mathbb{F}_2 \otimes \Xi_n.$$

这是由切片球与 $H\mathbb{F}_2$ 张量积构成的楔和，因此也是切片的楔和，所以它就是自身的切片相伴分次。

命题 6.2. $H\mathbb{F}_2 \otimes \Xi_n$ 的零切片是 $H\mathbb{F}_2$，其切片相伴分次为

$$H\underline{\mathbb{F}}_2 \otimes A_n^h,$$

其中 A_n^h 上的分次是通常的单项式分次。

对我们而言，关键事实是这是一个自由的 $H\underline{\mathbb{F}}_2$-模。特别地，在 $H\mathbb{F}_2$ 上作粉碎积是容易理解的。

命题 6.3. 对任意0-连通的$(H\mathbb{F}_2 \otimes \Xi_n)$-代数 R，关于 R 的伴随分次为

$$\big(R \underset{H\underline{\mathbb{F}}_2 \otimes \Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{F}}_2\big) \otimes A_n^h.$$

推论 6.4. $H\mathbb{F}_2 \otimes H\mathbb{Z}$ 的 *Greenlees–Serre* 伴随分次为

$$\pi_\star\big(H\underline{\mathbb{F}}_2 \underset{\Xi_n}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}\big)[G \cdot \bar{m}_1, \dots].$$

6.2. **概念验证：C_2 Steenrod 代数**。 利用 Greenlees–Serre 谱序列，我们可以为 C_2-等变对偶 Steenrod 代数提供一种新方法，作为 Hu–Kriz [11]基础性工作的补充。我们先给出一些由先前计算得出的、易于计算的推论。为简化计算，我们在 $BP_{\mathbb{R}}$ 上进行研究；Roytman 的工作表明这就是 $E_{2\rho}$。

首先注意，对于 C_2，构成相对 smash 积的分解为

$$H\underline{\mathbb{F}}_2 \underset{BP_{\mathbb{R}}}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}} \simeq H\underline{\mathbb{F}}_2 \otimes \Sigma^\infty_+ \left(\prod_{i=1}^{\infty} S^{(2^i-1)\rho_2+1}\right).$$

将笛卡尔积分解后，它不过是普通 C_2-表示球面的一个楔和。换言之， RO-分次同调的一个基全部出现在 C_2层，因此不失一般性，我们可以改用 $RO(C_2)$-分次。

命题 6.5. $BP_{\mathbb{R}}$-相对同调 $H\mathbb{F}_2 \underset{BP_{\mathbb{R}}}{\otimes} H\mathbb{Z}$ 为

$$\mathbb{M}_2[\bar{\tau}_1, \dots]/(\bar{\tau}_i^2 - a_\sigma \bar{\tau}_{i+1}, \forall i \geq 1),$$

$\bar{\tau}_i$ 的次数为 $\big((2^i-1)\rho_2 + 1\big)$。

证明。 只需验证乘法关系。取几何不动点后，我们得到如下环：

$$\Phi^{C_2}\big(H\underline{\mathbb{F}}_2 \underset{BP_{\mathbb{R}}}{\otimes} H\underline{\mathbb{Z}}\big) \simeq H\mathbb{F}_2[b] \underset{H\mathbb{F}_2}{\otimes} H\mathbb{F}_2[b'^2],$$

其中 b 和 b' 的次数为 $\mathbf{1}$。类 $\bar{\tau}_i$ 的几何不动点位于次数2^i，因此我们看到，所有类 $\bar{\tau}_i$ 都必须满足乘法关系，从而重构出一个多项式环。考察双次数可知，唯一可能的关系就是环结构如上所列。□

模 2 化简时也有一个乘法关系。证明基本相同。

命题 6.6。 $BP_{\mathbb{R}}$-相对同调 $H\mathbb{F}_2 \underset{BP_{\mathbb{R}}}{\otimes} H\mathbb{F}_2$ 为

$$\mathbb{M}_2[\bar{\tau}_0, \dots]/(\bar{\tau}_i^2 - a_\sigma \bar{\tau}_{i+1}, \forall i \geq 0),$$

$\bar{\tau}_i$ 的次数为 $\big((2^i-1)\rho_2 + 1\big)$。

类似地， $BP_{\mathbb{R}}$ 的同调是

$$H_\star BP_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{M}_2[\bar{\xi}_1, \dots],$$

其中 $\bar{\xi}_i$ 位于度数 $(2^i-1)\rho_2$。这为 Greenlees 谱序列提供了所需的输入。

定理 6.7。 计算 $H\mathbb{F}_2 \otimes H\mathbb{Z}$ 的 *Greenlees–Serre* 谱序列在此处塌缩 _ _

$$E_2 = \mathbb{M}_2[\bar{\xi}_1, \dots] \underset{\mathbb{M}_2}{\otimes} \mathbb{M}_2[\bar{\tau}_1, \dots]/\bar{\tau}_i^2 - a_\sigma \bar{\tau}_{i+1},$$

其中

$$\mathbb{M}_2 = \pi_\star H\mathbb{F}_2$$

是一个点的 $RO(C_2)$-分次同调。不存在加法扩张。

¯证明。 </style}这些类 ξ_i 均来自 $H\mathbb{F}_2 \otimes BP_{\mathbb{R}}$ 的同伦，因此必定是永久循环。由于我们计算的是 Bredon 同调， $\mathbb{M}_2$ 中的所有元素也都是永久循环。唯一可能不是永久循环的类是 $\bar{\tau}_i$ （对应于 $i \geq 1$），因此我们只需证明它们都能在谱序列中存活。我们对 i 使用归纳法来证明这一点。

基础情形 $i = 1$ 的处理方法是注意到 $\bar{v}_1$ 的 Hurewicz 像为零。根据次数，$\bar{\tau}_1$ 上的微分唯一可能的目标是 _ξ_1 的倍数，但由此可推知它必为零。

由归纳假设，所有满足 $i < k$ 的 $\bar{\tau}_i$ 都是永久循环。这意味着 $\bar{\tau}_{k-1}^2 = a_\sigma \bar{\tau}_k$ 是永久循环。然而，到目前为止，谱序列是自由 $\mathbb{M}_2$- 模的直和，而 $\bar{\tau}_k$ 上任意微分的可能目标都是 a_σ-无挠的，因此我们推知 $\bar{\tau}_k$ 也必定是永久循环。

由于 $E_2 = E_\infty$ 是 $\mathbb{M}_2$上的自由模，因此不存在加法扩张。□

正如 Hu–Kriz 所示，存在非平凡的乘法扩张。

References

[1] Vigleik Angeltveit 和 Anna Marie Bohmann。分次 Tambara 函子。

J. Pure Appl., （）：–。[2]

Algebra 222 12 4126 4150, 2018
Andrew Baker 和 Andrej Lazarev。关于

R *Algebr.* -模的 Adams 谱

Geom. Topol. 1 173 199, 2001
序列。，：–。[3] Agn`es Beaudry、Michael A. Hill、Tyler Lawson、XiaoLin Danny Shi 和 Mingcong Zeng。关于实 bordism 的范数商的切片谱序列。 *J. Topol.*，18(1)：论文编号 e70015，2025年。[4] Agn`es Beaudry、Michael A. Hill、Tyler Lawson、XiaoLin Danny Shi 和 Mingcong Zeng。关于实 bordism 的范数商的切片谱序列。 *J. Topol.*，18(1)：论文编号 e70015，2025年。[5] Agn`es Beaudry、Michael A. Hill、XiaoLin Danny Shi 和 Mingcong Zeng。通过实 bordism 理论构造 Lubin-Tate 谱的模型。 *Adv. Math.*，392：论文编号 108020，58 页，2021 年。[6] Agn`es Beaudry 、 Michael A. Hill 、 XiaoLin Danny Shi 和 Mingcong Zeng。动机 bordism 中的跨色扩张。 *Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B*，10：76–90，2023年。[7] Andrew J. Blumberg 和 Michael A. Hill。 G等变交换环谱上模的对称幺半范畴。arxiv.org：1511.07363，2015年。[8] J. P. C. Greenlees。拓扑 Hochschild 同调的 Ausoni-B

¨ *J. Pure* okstedt 对偶性。，

Appl. Algebra 220 4 1382 1402, 2016
（）：–。[9] M. A. Hill、M. J. Hopkins 和 D. C. Ravenel。关于 Kervaire 不变量为 1 的元素不存在。
Ann. of Math. (2)，184(1)：1–262，2016年。[10] Michael A. Hill。自由性与等变稳定同伦。 *J. Topol.*，15(2)：359–397，2022年。[11] Po Hu 和 Igor Kriz。实定向同伦论及 Adams–Novikov 谱序列的一个类比。 *Topology*，40(2)：317–399，2001年。[12] Stanley O. Kochman。经典群在 Dyer–Lashof 代数上的同调。

Trans.，：–。[13] L.

Amer. Math. Soc. 185 83 136, 1973
Gaunce Lewis, Jr. 和 Michael A. Mandell。等变通用系数谱序列与 K¨unneth 谱序列。
Proc. London Math. Soc. (3)，92(2)：505–544，2006年。[14] Stefan Schwede 和 Brooke E. Shipley。幺半模型范畴中的代数与模。*Proc. London Math. Soc. (3)*，80(2)：491–511，2000年。

University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455*Email address*: mahill@umn.eduDepartment of Mathematics, Harvard University, Cambridge, MA 02138*Email address*: mjh@math.harvard.edu