arXiv:2602.11031v1 [math.GR] 11 Feb 2026

可解鲍姆斯拉格–索利塔群中的端同态扭曲共轭与外固定点

MALLIKA ROY

摘要。本文针对可解 Baumslag–Solitar 群 $BS(1,n)$，解决关于端同态的扭曲共轭问题；也就是说，我们提出一种算法：给定两个元素 $u,v \in BS(1,n)$ 和一个端同态 $\psi \in$端同态集$(BS(1,n))$，判断是否存在某个 $x \in BS(1,n)$ 使得$v = (x\psi)^{-1}ux$ 。此外，对于两个字 $u,v \in BS(1,n)$，我们将给定端同态 ψ 的外固定点与 φ-扭曲共轭问题联系起来，其中$\varphi \in$端同态集$(BS(1,n))$，且 u,v 取决于 ψ。进一步地，我们定义弱（外）固定点，并讨论其与 $BS(1,n)$ 中端同态扭曲共轭问题的相互关系。

1. 引言

设 G 为一个群， $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ 是 G的一个自同构。若存在 $x \in G$ 使得 $u = (x\varphi)^{-1}ux$，则称两个元素 u， $v \in G$ 为 φ-扭曲共轭，记作$u \sim_\varphi v$。这种扭曲共轭最早由 Reidemeister [17] 从拓扑学的角度引入，在现代 Nielsen 不动点理论中发挥着关键作用。可以看出，$\sim_\varphi$ 是 G上的一个等价关系；当我们将 φ 替换为恒等同态时，它与通常的共轭一致。

类似地，可以定义端同态扭曲共轭——给定一个端同态 $\psi \in \mathrm{End}(G)$ 和两个元素 u， $v \in G$，若存在 $x \in G$ 使得 $u = (x\psi)^{-1}ux$，则称 u， v为 ψ-扭曲共轭，记作 $u \sim_\psi v$。端同态扭曲共轭的算法方法如下：

端同态扭曲共轭问题， $E - TCP(G)$： 给定一个有限表示 $G = \langle X \mid R\rangle$，给定一个端同态 ψ: $G \to G$ （由生成元的像给出）以及两个由生成元构成的字 u、 $v \in F(X)$，判定 u 和 v 是否在 G中表示 ψ-扭曲共轭元素，即$u \sim_\psi v$。

本文的核心主题是可解 Baumslag– Solitar 群 $BS(1, n)$ 的端同态扭曲共轭问题。

如果将算法的输入部分由端同态改为自同构，那么这称为自同构扭曲共轭问题，或简称为 G 的扭曲共轭问题，记作 TCP(G)。算法群论的研究始于 1911 年提出的三个 Dehn 问题（参见 [9]），即字问题、共轭问题和同构问题。 $E-TCP(G)$ 或 $TCP(G)$ 是对上文所述共轭问题 $CP(G)$ 的推广。直观而言，若扭曲共轭问题有解，就能得到共轭问题的解，进而得到字问题的解。相反，存在字问题可解但共轭问题不可解的有限表示群（参见 [15]）。类似地，也存在共轭问题可解但扭曲共轭问题不可解的有限表示群（参见 [3, 推论 4.9]）。

众所周知，著名的三个 Dehn 问题在其最一般的情形下是不可判定的，但文献中确实存在许多重要且引人关注的结果，解决了某些群族中的这三个问题。设 $1 \to F \to G \to H \to 1$ 是一个满足特定条件的群的短正合列，具体而言， F 具有可解的自同构扭曲共轭问题。Bogoploski–Martino–Ventura [3] 证明， G具有可解的共轭问题，当且仅当相应的作用子群 $A \leqslant \mathrm{Aut}(F)$ 是轨道可判定的。作为应用，研究表明，在 [3] 中，虚曲面群和虚多循环群的自同构扭曲共轭问题是可解的。基于自同构扭曲共轭问题，已有大量研究。自由群的自同构扭曲共轭问题是可判定的 [2] ，并且也在

2020 数学主题分类。主要分类号 20F10。关键词和短语。可解 Baumslag-Solitar 群、内自同态扭曲共轭问题、外不动点。

其他群族中得到了研究 [1], [4], [7], [8], [10], [11], [13], [14]。然而，关于端同态扭曲共轭问题的文献寥寥无几。已知自由群的端同态扭曲共轭问题对于某些非满映射 [12], 是可判定的，但一般而言，这仍是一个悬而未决的问题。

本文研究 $BS(1, n)$ 的端同态扭曲共轭问题，随后将其与 $BS(1, n)$ 的端同态的外固定点联系起来。这一联系为判断给定的 $BS(1, n)$ 中两个元素 u, v 是否端同态扭曲共轭提供了另一种方法，即 $u \sim_\varphi v$，其中 u, v 和 $\varphi \in \mathrm{End}(BS(1, n))$ 由适当构造的端同态 $\psi \in \mathrm{End}(BS(1, n))$ 确定。本研究的后半部分受到 [5], 的启发；在该文中，Ciobanu–Logan 计算了外固定点（不是真幂），以找出生成自由群秩 2 的单同态之非平凡不动子群的本原元。

本文结构安排如下。我们先简要回顾有关 Baumslag–Solitar 群，特别是可解 Baumslag–Solitar 群 $BS(1, n) = \langle a, t \mid a = t^{-1}a^n t\rangle$ 的一些预备知识，第 2 节将对此进行介绍。这一简要概述主要包括其元素的标准形，以及基于 [14] 中所述记号的半直积结构。随后在第 2.2 小节中，我们依据 Collins–Levin [6] 和 O'Neil [16] 的结果，讨论两类端同态的构造。在第 3 节中，我们证明 $BS(1, n)$ 的端同态扭曲共轭问题（见定理 3.2）是可判定的。关于这一点，我们还想提及，Mitra–Roy–Ventura 在 $BS(1, n)$ 中解决了自同构扭曲共轭问题。最后，在第 4 节中，我们构造一个端同态 ψ，使得交集 $[a] \cap \mathrm{Fix}\ \psi$ 非空，当且仅当某些 u 和 v 是 φ-扭曲共轭的，其中 u 和 $v, \varphi \in \mathrm{End}(BS(1, n))$ 由该 ψ 确定（见命题 4.2）。之后，我们定义弱外固定点，并证明（见命题4.9），端同态 ψ 存在弱外固定点，便可保证由 ψ 定义的两个元素扭曲共轭。

一般记号与约定。对于群 G，$\mathrm{End}(G)$（分别地，$\mathrm{Aut}(G)$）表示 G 的端同态集（分别地，自同构群）。我们统一将自变量写在左边，即用 $(x)\varphi$（或简写为 $x\varphi$）表示元素 x 在同态 φ 下的像；相应地，我们用 $\varphi\psi$ 表示复合映射 $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$。具体而言，我们将字母$\gamma$专用于右共轭，$\gamma_g$: $G \to G,\ x \mapsto g^{-1}xg$。遵循同一约定，将矩阵 A 视为映射时，它总是作用在水平向量的右侧，$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$。我们用 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ 表示整数上的线性群。我们使用函数 $|\cdot|_a$ 来计算字 w 中 a 出现的次数。

2. 可解 Baumslag–Solitar 群的预备知识

所谓的鲍姆斯拉格–索利塔群 $BS(m, n)$ 是由下列表示给出的二生成一关系群：

$$BS(m, n) = \left\langle a, t \mid a^m = t^{-1}a^n t\right\rangle,$$

对于 $m, n \in \mathbb{Z}$。它们都是 $\mathbb{Z}$ 的 HNN 扩张（相关子群为 $m\mathbb{Z}$ 和 $n\mathbb{Z}$），位于众所周知的短正合列的中间：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \ll a \gg & \to & BS(m,n) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z} = \langle t\rangle & \to & 1. \\ & & & & a & \mapsto & 1 & & \\ & & & & t & \mapsto & t & & \end{array} \tag{1}$$

同态 π: $BS(m, n) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, $w \mapsto t^{|w|_t}$ 是良定义的，因为定义关系是 t-平衡的（对于 a 则不然，除非 $m = n$）。我们注意到，$\ker \pi = \ll a \gg = \{w(a, t) \mid |w|_t = 0\} \trianglelefteq BS(m, n)$。基本例子包括 $BS(0, 1) \simeq \mathbb{Z}$、$BS(1, 1) \simeq \mathbb{Z}^2$，以及 $BS(1, -1) = \langle a, t \mid a = t^{-1}a^{-1}t\rangle$，后者是克莱因瓶的基本群。

从现在起，我们将重点研究这一族中的可解群，即 $m = 1$ 的情形。此外，本文余下部分均假设 $n \neq \pm 1$。

2.1. 标准形。本节回顾 $BS(1, n)$中元素的标准形，该标准形在 [14, 第 2 节1] 中得到，并确定一些将在全文中使用的记号。$BS(1, n)$的定义关系为 $a = t^{-1}a^n t$，也可以写成 $ta = a^n t$ 和

$ta^{-1} = a^{-n}t$ ——这使我们能够将 t 的每个正出现项累积到右侧。反复使用这些关系，可以容易地得到：

$$t^p a^k = a^{kn^p} t^p, \tag{2}$$

对每个 p， $k \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$。同样，将定义关系改写为 $at^{-1} = t^{-1}a^n$ 和 $a^{-1}t^{-1} = t^{-1}a^{-n}$，可知每个负的 t 都可以移到左边，因此

$$a^k t^{-p} = t^{-p} a^{kn^p}, \tag{3}$$

对每个 p， $k \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$。

因此，任意元素 $w(a,t) \in BS(1,n)$ 都可以表示为 $g = t^{-p}a^k t^q$ 的形式，其中 $p,k,q \in \mathbb{Z}$, $p,q \geq 0$。由于 $BS(1,n)$ 是无挠的，我们注意到，在群 $BS(1,n)$ 中， $t^{-p_1}a^{k_1}t^{p_1+c_1} = t^{-p_2}a^{k_2}t^{p_2+c_2}$ 当且仅当 $c_1 = c_2 \in \mathbb{Z}$ 且 $k_1/n^{p_1} = k_2/n^{p_2} \in \mathbb{Z}[1/n]$，其中 $p_i, k_i, c_i \in \mathbb{Z}$ 满足 $p_i \geq 0$，对于 $i = 1,\ 2$。显然，由（1）中的 π 可知， $c_1 = c_2$ 是一个必要条件。因此， $BS(1,n)$ 中的任意元素都可以写成 $g = t^{-p}a^k t^q = t^{-p}a^k t^p t^c$ 的形式，其中 $p,k,c \in \mathbb{Z}, p \geq 0$ ——这已接近标准形。

从现在起，我们采用以下记号：对于 $\alpha = k/n^p \in \mathbb{Z}[1/n]$ （这里， k， $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$），记作

$$a^\alpha := t^{-p}a^k t^p \in BS(1,n).$$

引入这一记号的关键思路如下：(1) 有理数之间的相等关系$kn/n^{p+1} = k/n^p$ 对应于 $BS(1,\ n)$ 中相应元素之间的相等关系 $t^{-p-1}a^{kn}t^{p+1} = t^{-p}(t^{-1}a^n t)^k t^p = t^{-p}a^k t^p$；(2) 这一记号统一了上述两个等式 (2) 和 (3)—— t^c，因为对于 $c \in \mathbb{Z}$，只需将其指数乘以 n^c，便可将其移到 a 的有理幂右侧。

我们摘录引理 2.1 和引理 2.2（出自 [14]），不再给出证明。引理 2.1 证明了这一族群的线性性质：

引理 2.1. 映射

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon BS(1,n) & \to & \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[1/n]) \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \\ a & \mapsto & A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ t & \mapsto & T = \left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \end{array} \tag{4}$$

定义了群的一个单同态。特别地， $BS(1,n)$ 是一个线性群。

引理 2.2 指出，新的指数记号与标准运算规则相容：

Lemma 2.2. 对任意 $\alpha = k/n^p$, $\beta = \ell/n^q \in \mathbb{Z}[1/n]$ $(k, \ell, p, q \in \mathbb{Z},\ p, q \geq 0)$ 以及 $c, r \in \mathbb{Z}$， 我们有 ve

(i) $t^c a^\alpha = a^{\alpha n^c} t^c$ （等价地， $a^\alpha t^c = t^c a^{\alpha n^{-c}}$）；
(ii) $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; (iii) $(a^\alpha)^r = a^{r\alpha}$; (iv)
$t^{-c}a^\alpha t^c = a^{\alpha/n^c}$; (v) $\left(a^\alpha t^c\right)^{-1} = a^{-\alpha n^{-c}} t^{-c}$;
(vi) $\left(a^\alpha t^c\right)^r = a^{\frac{n^{rc}-1}{n^c-1}\alpha} t^{rc}$。

——

关于上述两个引理的详细证明，请参阅 [14] 。

利用这一记号和上述论证，每个元素 $g \in BS(1,n)$ 都可以唯一地写成 $g = a^\alpha t^c$，其中 $\alpha \in \mathbb{Z}[1/n]$ 和 $c \in \mathbb{Z}$。此外， $\left(a^{\alpha_1}t^{c_1}\right)\left(a^{\alpha_2}t^{c_2}\right) = a^{\alpha_1 + n^{c_1}\alpha_2} t^{c_1+c_2}$。

最后，我们通过讨论 $BS(1,n)$ 的半直积结构来结束本节。显然，

$$\ker \pi = \ll a \gg = \{a^\alpha t^c \in BS(1,n) \mid c = 0\} = \{a^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}[1/n]\} \simeq \mathbb{Z}[1/n].$$

因此，对于 $m = 1$，短正合列 (1) 的形式为

$$1 \quad \to \quad \mathbb{Z}[1/n] \quad \to \quad BS(1,n) \quad \to \quad \mathbb{Z} \quad \to \quad 1,$$

并且由于 $\mathbb{Z}$ 是自由的，它可以分裂。特别地， $BS(1,\ n) \simeq \mathbb{Z}[1/n] \rtimes \mathbb{Z}$，其中 $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ 通过乘以 n 作用于 $\mathbb{Z}[1/n]$。我们还注意到， $BS(1,\ n)^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/|n-1|\mathbb{Z}$，其中对于$n \neq 1$， $\ll a \gg$是唯一一个商群与 $\mathbb{Z}$ 同构的正规子群。

2.2. **的端同态(1， n)**。 在 Collins–Levin 的先前工作基础上， [6], J. O'Neill [16]明确描述了 BS(1， n) 的两种端同态，即*I* 型和*II* 型，其中第一种 I 型端同态是单同态，而第二种 II 型端同态包含真收缩这一子类。我们在此陈述该结果，不给出其证明。

命题 2.3 (J. O'Neill, [16, 命题 2.1])。 对于 $n \neq \pm 1$,

$$\mathrm{End}(BS(1,n)) = \{\psi^I_{\alpha,\beta,1},\, \psi^{II}_{0,\beta,c} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{Z}[1/n],\, c \in \mathbb{Z}\}$$

其中，对于 $\alpha = \ell/n^k$, $\beta = q/n^p$ 和 $c = r - p$，满足 $k, \ell, p, q, r \in \mathbb{Z}$, $k, p, r \geq 0$, $\psi^I_{\alpha,\ \beta,\ 1}$ 以及 $\psi^{II}_{0\ ,\ \beta,\ c}$ 定义如下:

$$\begin{array}{rccl} \psi^I_{\alpha,\beta,1}\colon BS(1,n) & \to & BS(1,n) \\ a & \mapsto & a^\alpha = t^{-k} a^\ell t^k \\ t & \mapsto & a^\beta t = t^{-p} a^q t^{p+1}; \end{array} \tag{5}$$

$$\begin{array}{rccl} \psi^{II}_{0,\beta,c}\colon BS(1,n) & \to & BS(1,n) \\ a & \mapsto & a^0 = 1 \\ t & \mapsto & a^\beta t^c = t^{-p} a^q t^r = t^{-p} a^q t^p t^{r-p}, \end{array} \tag{6}$$

对于 $\psi^{II}_{0\ ,\ \beta,\ c}$, 如果 q 是 n的倍数，则 $p = 0$ 或 $r = 0$。

观察 2.4. 设 $\psi^{II}_{0,\beta,c}$ 为一个 II 型端同态，其中 $\beta = q/n^p$ 和 $c = r - p$ 满足$p, q, r \in \mathbb{Z}$, $p, r \geq 0$。若 q是 n的倍数，即对于某个 $k \in \mathbb{N}$，有 $q = kn$，则 $p = 0$或 $r = 0$。此外，若 $p = 0$，则 $\psi^{II}_{0,\beta,c} = \psi^{II}_{0,\beta',c'}$，其中 $\beta' = kn$ 和 $c' = r$ — $\psi^{II}_{0,\beta',c'}$： $a \mapsto 1$, $t \mapsto a^{kn} t^r$。若$r = 0$，则 $\psi^{II}_{0,\beta,c} = \psi^{II}_{0,\beta'',c''}$，其中 $\beta'' = q/n^p$ 和 $c'' = -p$ — $\psi^{II}_{0,\beta'',c''}$： $a \mapsto 1$,$t \mapsto a^{q/n^p} t^{-p}$。因此，无论 q 是否为 n 的倍数，BS(1, n)的任意 II 型端同态都具有 $\psi^{II}_{0,\beta,c}$ 的形式，其中 $\beta \in \mathbb{Z}[1/n]$ 和 $c \in \mathbb{Z}$。

下面的命题概述了在我们的"标准形"记法中， BS(1， n)中的任意两个端同态如何复合。

引理 2.5. *I* 型和 *II* 型端同态的复合规则如下:

(i) $\psi^I_{\alpha_1,\beta_1,1} \circ \psi^I_{\alpha_2,\beta_2,1} = \psi^I_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\alpha_2+\beta_2,1}$;
(ii) $\psi^{II}_{0,\beta_1,c_1} \circ \psi^{II}_{0,\beta_2,c_2} = \psi^{II}_{0,\mu\beta_2,c_1c_2}$, *where* $\mu = \frac{n^{c_1c_2}-1}{n^{c_2}-1}$;
(iii) $\psi^{II}_{0,\beta_1,c_1} \circ \psi^I_{\alpha_2,\beta_2,1} = \psi^{II}_{0,\beta_1\alpha_2+\mu_1\beta_2,c_1}$, *where* $\mu_1 = \frac{n^{c_1}-1}{n-1}$;
(iv) $\psi^I_{\alpha_1,\beta_1,1} \circ \psi^{II}_{0,\beta_2,c_2} = \psi^{II}_{0,\beta_2,c_2}$.

证明。 首先，我们通过证明 I 型映射,$\psi^I_{\alpha,\ \beta,\ 1}$ 和 II 型映射,$\psi^{II}_{0\ ,\ \beta,\ c}$ 保持定义关系，来验证它们均定义良好:

$$a \overset{\psi^I_{\alpha,\beta,1}}{\mapsto} a^\alpha,$$

$$t^{-1}a^n t \overset{\psi^I_{\alpha,\beta,1}}{\mapsto} \left(a^\beta t\right)^{-1}\left(a^\alpha\right)^n\left(a^\beta t\right) = t^{-1}a^{-\beta}a^{n\alpha}a^\beta t = t^{-1}a^{n\alpha}t = a^\alpha.$$

对于 II 型情形，这一点显然成立:

$$a \overset{\psi^{II}_{0,\beta,c}}{\mapsto} 1,$$

$$t^{-1}a^n t \overset{\psi^{II}_{0,\beta,c}}{\mapsto} \left(a^\beta t^c\right)^{-1} 1 \left(a^\beta t^c\right) = 1.$$

现在来验证复合映射 $\psi^I_{\alpha_1,\beta_1,1} \circ \psi^I_{\alpha_2,\beta_2,1}$ 等于 $\psi^I_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\alpha_2+\beta_2,1}$。事实上，对于$\alpha_1 = \ell_1/n^{k_1}$, $\beta_1 = q_1/n^{p_1}$和 $\alpha_2 = \ell_2/n^{k_2}$, $\beta_2 = q_2/n^{p_2}$，其中 $k_i, \ell_i, p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, $k_i, p_i \geq 0$, $i = 1,2$，我们有

$$\begin{aligned} a \overset{\psi^I_{\alpha_1,\beta_1,1}}{\mapsto} t^{-k_1}a^{\ell_1}t^{k_1} \overset{\psi^I_{\alpha_2,\beta_2,1}}{\mapsto} & \left(a^{\beta_2}t\right)^{-k_1}\left(a^{\alpha_2}\right)^{\ell_1}\left(a^{\beta_2}t\right)^{k_1} = \\ & = a^{\frac{n^{-k_1}-1}{n-1}\beta_2}t^{-k_1}a^{\ell_1\alpha_2}a^{\frac{n^{k_1}-1}{n-1}\beta_2}t^{k_1} \\ & = a^{\frac{n^{-k_1}-1}{n-1}\beta_2}a^{n^{-k_1}\ell_1\alpha_2}a^{n^{-k_1}\frac{n^{k_1}-1}{n-1}\beta_2} \\ & = a^{\frac{n^{-k_1}-1}{n-1}\beta_2+\alpha_1\alpha_2+\frac{1-n^{-k_1}}{n-1}\beta_2} \\ & = a^{\alpha_1\alpha_2}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} t \overset{\psi^I_{\alpha_1,\beta_1,1}}{\mapsto} t^{-p_1}a^{q_1}t^{p_1+1} \overset{\psi^I_{\alpha_2,\beta_2,1}}{\mapsto} & \left(a^{\beta_2}t\right)^{-p_1}\left(a^{\alpha_2}\right)^{q_1}\left(a^{\beta_2}t\right)^{p_1+1} = \\ & = a^{\frac{n^{-p_1}-1}{n-1}\beta_2}t^{-p_1}a^{q_1\alpha_2}a^{\frac{n^{p_1+1}-1}{n-1}\beta_2}t^{p_1+1} \\ & = a^{\frac{n^{-p_1}-1}{n-1}\beta_2}a^{n^{-p_1}q_1\alpha_2}a^{n^{-p_1}\frac{n^{p_1+1}-1}{n-1}\beta_2}t \\ & = a^{\frac{n^{-p_1}-1}{n-1}\beta_2+\beta_1\alpha_2+\frac{n-n^{-p_1}}{n-1}\beta_2}t \\ & = a^{\beta_1\alpha_2+\beta_2}t. \end{aligned}$$

因此，$\psi^I_{\alpha_1,\beta_1,1}\circ\psi^I_{\alpha_2,\beta_2,1} = \psi^I_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\alpha_2+\beta_2,1}$，正如我们在 (i) 中所要证明的。

证明的以下部分包含当两个端同态均为II型时的复合规则：

$$a \overset{\psi^{II}_{0,\beta_1,c_1}}{\mapsto} 1 \overset{\psi^{II}_{0,\beta_2,c_2}}{\mapsto} 1,$$

and

$$t \overset{\psi^{II}_{0,\beta_1,c_1}}{\mapsto} a^{\beta_1}t^{c_1} \overset{\psi^{II}_{0,\beta_2,c_2}}{\mapsto} \left(a^{\beta_2}t^{c_2}\right)^{c_1} = a^{\frac{n^{c_1c_2}-1}{n^{c_2}-1}\beta_2}t^{c_1c_2} = a^{\mu\beta_2}t^{c_1c_2}.$$

因此，$\psi^{II}_{0,\beta_1,c_1}\circ\psi^{II}_{0,\beta_2,c_2} = \psi^{II}_{0,\mu\beta_2,c_1c_2}$，如（ii）中所述。

为证明（iii）：

$$a \overset{\psi^{II}_{0,\beta_1,c_1}}{\mapsto} 1 \overset{\psi^{I}_{\alpha_2,\beta_2,1}}{\mapsto} 1,$$

and

$$\begin{aligned} t \overset{\psi^{II}_{0,\beta_1,c_1}}{\mapsto} t^{-p_1}a^{q_1}t^{p_1}t^{c_1} \overset{\psi^{I}_{\alpha_2,\beta_2,1}}{\mapsto} & = \left(a^{\beta_2}t\right)^{-p_1}\left(a^{\alpha_2}\right)^{q_1}\left(a^{\beta_2}t\right)^{p_1}\left(a^{\beta_2}t\right)^{c_1} \\ & = a^{\frac{n^{-p_1}-1}{n-1}\beta_2}t^{-p_1}a^{q_1\alpha_2}a^{\frac{n^{p_1}-1}{n-1}\beta_2}t^{p_1}a^{\frac{n^{c_1}-1}{n-1}\beta_2}t^{c_1} \\ & = a^{\frac{n^{-p_1}-1}{n-1}\beta_2}a^{q_1\alpha_2n^{-p_1}}a^{n^{-p_1}}a^{\frac{n^{p_1}-1}{n-1}\beta_2}t^{p_1}a^{\frac{n^{c_1}-1}{n-1}\beta_2}t^{c_1} \\ & = a^{\frac{n^{-p_1}-1}{n-1}\beta_2}a^{\beta_1\alpha_2}a^{\frac{1-n^{-p_1}}{n-1}\beta_2}a^{\frac{n^{c_1}-1}{n-1}\beta_2}t^{c_1} \\ & = a^{\beta_1\alpha_2+\mu_1\beta_2}t^{c_1}. \end{aligned}$$

至此完成（iii）的证明。

最后，

$$a \overset{\psi^{I}_{\alpha_1,\beta_1,1}}{\mapsto} t^{-k_1}a^{\ell_1}t^{k_1} \overset{\psi^{II}_{0,\beta_2,c_2}}{\mapsto} \left(a^{\beta_2}t^{c_2}\right)^{-k_1}1\left(a^{\beta_2}t^{c_2}\right)^{k_1} = 1,$$

and

$$t \overset{\psi^{I}_{\alpha_1,\beta_1,1}}{\mapsto} t^{-p_1}a^{q_1}t^{p_1}t \overset{\psi^{II}_{0,\beta_2,c_2}}{\mapsto} \left(a^{\beta_2}t^{c_2}\right)^{-p_1}1\left(a^{\beta_2}t\right)^{p_1}\left(a^{\beta_2}t^{c_2}\right) = \left(a^{\beta_2}t^{c_2}\right).$$

至此，(iv) 的证明完成。 □

利用引理 2.2，下面分别计算任意元素 $a^\nu t^d \in BS(1,n)$（其中$\nu = m/n^r \in \mathbb{Z}[1/n]$, $m,r,d\in\mathbb{Z}$, $r\geq 0$）在 I 型和 II 型端同态下的像。

$$\begin{aligned} \left(a^\nu t^d\right)\psi^I_{\alpha,\beta,1} = \left(t^{-r}a^m t^{r+d}\right)\psi^I_{\alpha,\beta,1} &= \left(a^\beta t\right)^{-r}a^{m\alpha}\left(a^\beta t\right)^{r+d} \\ &= a^{\frac{n^{-r}-1}{n-1}\beta}t^{-r}a^{m\alpha}a^{\frac{n^{r+d}-1}{n-1}\beta}t^{r+d} \\ &= a^{\frac{n^{-r}-1}{n-1}\beta}a^{mn^{-r}\alpha}a^{n^{-r}\frac{n^{r+d}-1}{n-1}\beta}t^d \\ &= a^{\frac{n^{-r}-1}{n-1}\beta+mn^{-r}\alpha+\frac{n^d-n^{-r}}{n-1}\beta}t^d \\ &= a^{\nu\alpha+\frac{n^d-1}{n-1}\beta}t^d. \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\left(a^{\nu}t^{d}\right)\psi^{II}_{0,\beta,c} = \left(t^{-r}a^{m}t^{r+d}\right)\psi^{II}_{0,\beta,c} &= \left(a^{\beta}t^{c}\right)^{-r}1\left(a^{\beta}t^{c}\right)^{r+d}\\ &= \left(a^{\beta}t^{c}\right)^{d}\\ &= a^{\frac{n^{cd}-1}{n^{c}-1}\beta}t^{cd}.\end{aligned} \tag{8}$$

3. $BS(1,n)$中的端同态扭曲共轭问题

本节的目标是证明，端同态扭曲共轭问题在
$BS(1,n)$中是可解的。首先，我们记录以下初等事实，该事实对任意群 G都成立。

引理 3.1。 设 G 是一个群， $u,v,w \in G$, $\varphi \in$ 自同构群(G)， $\psi \in$ 端同态集(G) 且 $\gamma_w \in$ 内自同构群(G)。那么，以下命题等价:

(a) $u \sim_{\psi} v$, (b)
$u\varphi \sim_{\varphi^{-1}\psi\varphi} v\varphi$, (c)
$wu \sim_{\psi\gamma_{w^{-1}}} wv$, (d)
$uw \sim_{\gamma_{w^{-1}}\psi} vw$。 □

证明。 $u \sim_{\psi} v$ 当且仅当存在 $g \in G$ 使得 $v = (g\psi)^{-1}ug \Leftrightarrow v\varphi = \left((g\psi)^{-1}ug\right)\varphi$。 令$g\varphi = g'$。于是，$(g\psi)^{-1}ug\big)\varphi = (g^{-1})\psi\varphi\, u\varphi\, g\varphi = (g^{-1}\varphi)\varphi^{-1}\psi\varphi\, u\varphi\, g\varphi = (g')^{-1}\varphi^{-1}\psi\varphi(u\varphi)\ g' = (g'\varphi^{-1}\psi\varphi)^{-1}\,(u\varphi)\,g'$。因此，我们得到 $v\varphi = (g'\varphi^{-1}\psi\varphi)^{-1}\,(u\varphi)\ g' \Leftrightarrow u\varphi \sim_{\varphi^{-1}\psi\varphi} v\varphi$，从而完成了(a) $\Leftrightarrow$(b)的证明。

再假设 (a) 成立，因此存在 $g \in G$ ，使得 $v = (g\psi)^{-1}ug$

$$\begin{aligned} v = (g\psi)^{-1}ug \ \Leftrightarrow\ wv &= w(g\psi)^{-1}\,w^{-1}w\,u\,g\\ &= (g^{-1}\psi)\gamma_{w^{-1}}\,wu\,g\\ &= (g\psi\gamma_{w^{-1}})^{-1}\,wu\,g.\end{aligned}$$

因此， $u \sim_{\psi} v$ 当且仅当 $wu \sim_{\psi\gamma_{w^{-1}}} wv$ ，从而完成了 $(a) \Leftrightarrow (c)$ 的证明。

现在，假设 (d) 成立，即存在 $g \in G$ ，使得 $vw = (g\gamma_{w^{-1}}\psi)^{-1}\,uw\,g$

$$\begin{aligned} vw &= (g\gamma_{w^{-1}}\psi)^{-1}\,uw\,g\\ &= (g\gamma_{w^{-1}})^{-1}\psi\,uw\,g\\ &= (wgw^{-1})^{-1}\psi\,uw\,g\\ &= (wg^{-1}w^{-1})\psi\,uw\,g\\ \Leftrightarrow v &= (wg^{-1}w^{-1})\psi\,u\,(wgw^{-1})\\ &= (\tilde{g}\psi)^{-1}\,u\,\tilde{g}\\ \Leftrightarrow u &\sim_{\psi} v,\end{aligned}$$

其中 $wgw^{-1} = \tilde{g}$。因此，我们有 (d) $\Leftrightarrow$ (a)，并得到了所述的等价结论。 □

定理 3.2。 在 $BS(1,n)$ 中，端同态扭曲共轭问题是可解的。

证明。 设给定一个固定的端同态 $\psi \in$ End$(BS(1,n))$ 以及两个元素$u = a^{\nu_1}t^{d_1}, v = a^{\nu_1}t^{d_1} \in BS($ $1,n)$，其中 $\nu_i = m_i/n^{r_i} \in \mathbb{Z}[1/n]$ ，且 $m_i, r_i, d_i \in \mathbb{Z}$, $r_i \geq 0$, $i = 1,2$。我们需要判断 $a^{\nu_1}t^{d_1}$ 与 $a^{\nu_2}t^{d_2}$ 是否彼此 ψ-扭曲共轭，即判断 $u \sim_{\psi} v$ 是否成立。由于端同态有两种类型，我们需要考虑以下两种情形，即情形 1: $\psi = \psi^{II}_{0}{}_{,\beta,c}$，以及情况二: $\psi = \psi^{I}_{\alpha,\beta,1}$。

情形 *1* 的证明: 取 $w = t^{d_1}$，以及 $w' = t^{-r_1}$。 $\psi^{II}_{0}{}_{,\ \beta,\ c} \in$ End$(BS(1,\ n))$ 给定为，其中$\beta = \ell/n^{q}$，其中 ℓ， q， $c \in \mathbb{Z}$ 以及 $q \geq 0$。我们将 $\psi^{II}_{0}{}_{,\ \beta,\ c}$简单记作 ψ^{II}。应用引理 3.1 (a)$\Leftrightarrow$ (d),

$$u \sim_{\psi} v \Leftrightarrow uw^{-1} \sim_{\gamma_w\psi} vw^{-1} \Leftrightarrow a^{\nu_1} \sim_{\gamma_w\psi} a^{\nu_2}t^{d_2-d_1} \Leftrightarrow t^{-r_1}a^{m_1}t^{r_1} \sim_{\gamma_w\psi} t^{-r_2}a^{m_2}t^{r_2}t^{d_2-d_1} \tag{9}$$

现在取 $\varphi = \gamma_{w'} \in$ 自同构群$(BS(1,n))$。结合引理 3.1 (a) $\Leftrightarrow$ (b) 和式 (9)，可得
如下:

$$t^{-r_1}a^{m_1}t^{r_1} \sim_{\gamma_w\psi} t^{-r_2}a^{m_2}t^{r_2}t^{d_2-d_1} \Leftrightarrow a^{m_1} \sim_{\Psi^{II}} V, \tag{10}$$

其中 $\Psi^{II}=(\gamma_{w'})^{-1}\gamma_w\psi(\gamma_{w'})$ 和 $V=(t^{-r_2}a^{m_2}t^{r_2}t^{d_2-d_1})\varphi=t^{-(r_2-r_1)}a^{m_2}t^{r_2-r_1}t^{d_2-d_1}$。此外，取 $r=r_2-r_1$ 和 $d=d_2-d_1$。首先，我们由 2.5 注意到，任意一个 I 型端同态与一个 II 型端同态的复合，其所得端同态都是 II 型。因此，适当调整扭曲端同态后，我们只需检验输入为 a^{m_1} 和 $t^{-r}a^{m_2}t^rt^d$ 且 $d,\ m_1,\ m_2,\ r\in\mathbb{Z},\ r\geq 0$ 时的端同态扭曲共轭。取可能的 ψ^{II}-扭曲共轭元为 $g=a^{\gamma}t^{p}$，其中 $\gamma=y/n^x\in\mathbb{Z}[1/n]$、$p\in\mathbb{Z}$，并利用 (8) 和引理 2.2(iv)，得到如下结果：

$$\begin{aligned}(a^{\gamma}t^{p}\psi^{II})^{-1}\,a^{m_1}\,a^{\gamma}t^{p}&=(a^{\frac{n^{pc}-1}{n^c-1}\beta}t^{pc})^{-1}\,a^{m_1}\,a^{\gamma}t^{p}\\&=a^{\frac{n^{-pc}-1}{n^c-1}\beta}t^{-pc}\,a^{m_1}\,a^{\gamma}t^{p}\\&=a^{\frac{n^{-pc}-1}{n^c-1}\beta}\,a^{m_1n^{-pc}}\,a^{\gamma n^{-pc}}\,t^{-pc+p}\\&=a^{(\frac{1-n^{pc}}{n^c-1}\beta+m_1+\gamma)n^{-pc}}\,t^{-pc+p}.\end{aligned}$$

综上，当且仅当 $u\sim_{\psi^{II}}v$

$$a^{m_2/n^r}t^d=a^{(\frac{1-n^{pc}}{n^c-1}\beta+m_1+\gamma)n^{-pc}}\,t^{-pc+p}. \tag{11}$$

因此，令式 (11) 两边相等，首先需要 $d=p-pc$，并且还需要，

$$\begin{aligned}&\frac{m_2n^{pc}}{n^r}=\frac{1-n^{pc}}{n^c-1}\beta+m_1+\gamma\\\Rightarrow\ &m_2n^{pc-r}(n^c-1)=(1-n^{pc})\beta+m_1(n^c-1)+\frac{y}{n^x}(n^c-1)\\\Rightarrow\ &m_2(n^c-1)n^{pc+x}=(1-n^{pc})\beta n^rn^x+m_1(n^c-1)n^rn^x+(n^c-1)n^ry.\end{aligned}$$

令 $z=pc+x\in\mathbb{Z}$ 作变量代换，其中 c 给定；那么上述推导中的最后一个方程变为

$$\begin{aligned}&m_2(n^c-1)n^z=(1-n^z)\beta n^rn^x+m_1(n^c-1)n^rn^x+(n^c-1)n^ry\\\Rightarrow\ &m_2(n^c-1)n^z=\beta n^rn^x-\beta n^rn^z+m_1(n^c-1)n^rn^x+(n^c-1)n^ry\\\Rightarrow\ &An^x+By+Cn^z=0.\end{aligned}$$

根据输入，即 $\ell,q,m_1,m_2,r,d,n\in\mathbb{Z},\ q,r\geq 0,\ n\neq\pm1$，我们计算出三个整数

$$A=\beta n^r+m_1n^r(n^c-1),\ B=n^r(n^c-1),\ C=m_2(1-n^c)-\beta n^r.$$

综上，$A,B,C\in\mathbb{Z}$；$u=a^{\nu_1}t^{d_1}$ 与 $a^{\nu_2}t^{d_2}$ 是 $\psi_0^{II}{}_{,\beta,c}$-扭曲共轭的，当且仅当方程

$$An^x+By+Cn^z=0 \tag{12}$$

存在整数解，未知数为 x、y、$z\in\mathbb{Z}$，其中 $x\geq 0$。若 $B=\pm1$，则始终如此；因此，假设 $B\neq\pm1$。

若 $C=0$，则容易验证：若进一步有 $B=0$，那么除非 $A=0$，方程 (12) 无解；而若 $B\neq 0$，则计算有限集 $\mathcal{N}=\{1,n,n^2,\dots\}\subseteq\mathbb{Z}/B\mathbb{Z}$（通过计算 n的连续幂，直到模 B 第一次出现重复），并检查集合 $A\mathcal{N}$ 是否包含 0（模 B）。

现在假设 $C\neq 0$，将 $C=C'n^s$ 写成 $s\geq 0$，其中 $C'\neq 0$ 不是 n 的倍数，并注意到方程 (12) 的所有可能解都满足 $z\geq -s$。因此，作变量代换$\mathbb{Z}\ni z'=z+s$后，(12) 等价于

$$An^x+By+C'n^{z'}=0, \tag{13}$$

对于未知数 $x,\ y,\ z'\in\mathbb{Z}$，其中 $x,\ z'\geq 0$。我们再区分另外两种情形。

子情形 1： $B=0$。我们的方程（13）变为 $An^x=C''n^{z'}$（其中，$C''=-C'$），当且仅当 A/C'' 是一个有理数，且为 n 的（正或负）幂时，该方程才具有所需的解。这可以通过查看 A、C' 和 n 的素因数分解来检验，因此是可判定的。

子情形 2： $B\neq 0$。现在，方程（13）等价于

$$An^x\equiv C''n^{z'}\pmod{B}, \tag{14}$$

对于未知数 x、$z'\in\mathbb{Z}$，其中 x、$z'\geq 0$。计算有限集 $\mathcal{N}=\{1,n,n^2,\dots\}\subseteq\mathbb{Z}/B\mathbb{Z}$。显然，方程 (14) 有解，当且仅当来自 $\mathbb{Z}/B\mathbb{Z}$ 的子集 $A\mathcal{N}$ 和 $C''\mathcal{N}$ 有非平凡交集，而这是可判定的。至此，情形 1 的证明完成。

情况二的证明：设 $\psi^I_{\alpha,\beta,1} \in$ 端同态$(BS(1, n))$，其中 $\alpha = k/n^j$、 $\beta = \ell/n^q$满足 k、j、ℓ、$q \in \mathbb{Z}$、j、$q \geq 0$，为给定的端同态。我们注意到，任何 I 型端同态都会保持 $|.|_t$。因此， $d_1 = d_2$（简称 d）是 $u \sim_{\psi^I_{\alpha,\beta,1}} v$的一个显然必要条件。

应用引理 3.1 (a)⇔(d)（取 $w = t^{-d}$）和 (a)⇔(b)（取 $\varphi = \gamma_{t^{-r_1}}$），我们有

$$a^{\nu_1}t^d \sim_{\psi^I_{\alpha,\beta,1}} a^{\nu_2}t^d \quad \Leftrightarrow \quad a^{\nu_1} \sim_{\gamma_{w^{-1}}\psi^I_{\alpha,\beta,1}} a^{\nu_2} \quad \Leftrightarrow \quad a^{m_1} \sim_{\varphi^{-1}\gamma_{w^{-1}}\psi^I_{\alpha,\beta,1}\varphi} t^{-(r_2-r_1)}a^{m_2}t^{r_2-r_1}.$$

因此，适当调整扭曲端同态后，只需检验如下形式的输入之间的扭曲共轭： $u = a^{m_1}$、 $v = t^{-r}a^{m_2}t^r$，其中 m_1， m_2， $r(= r_2 - r_1) \in \mathbb{Z}$、 $r \geq 0$。

同情形 1 一样，将可能的 $\psi^I_{\alpha,\beta,1}$-扭曲共轭元写作 $g = a^\gamma t^p$、 $\gamma \in \mathbb{Z}[1/n]$、$p \in \mathbb{Z}$，并利用等式 (7)，我们得到

$$g\psi^I_{\alpha,\beta,1} = a^{\gamma\alpha+\frac{n^p-1}{n-1}\beta}t^p;$$

现在，利用引理 2.2(iv),

$$\left(g\psi^I_{\alpha,\beta,1}\right)^{-1}ug = t^{-p}a^{-\gamma\alpha-\frac{n^p-1}{n-1}\beta}a^{m_1}a^\gamma t^p = a^{n^{-p}\left(-\gamma\alpha-\frac{n^p-1}{n-1}\beta+m_1+\gamma\right)}.$$

因此， $u = a^{m_1} \sim_{\psi^I_{\alpha,\beta,1}} t^{-r}a^{m_2}t^r = v$ 当且仅当

$$\frac{m_2}{n^r}n^p = -\gamma\alpha - \frac{n^p-1}{n-1}\beta + m_1 + \gamma,$$

对于某些 $\gamma \in \mathbb{Z}[1/n]$ 和 $p \in \mathbb{Z}$；重新整理并化简后，得到

$$(n-1)m_2n^p + (n-1)n^r\gamma(\alpha-1) + (n^p-1)n^r\beta = (n-1)n^rm_1.$$

设 $\gamma = y/n^x$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \geq 0$，并作变量代换 $\mathbb{Z} \ni z = p + x$；我们的方程等价于整数方程

$$\begin{aligned}
(n-1)m_2n^p + (n-1)n^r\frac{y}{n^x}\frac{k-n^j}{n^j} + (n^p-1)n^r\frac{\ell}{n^q} &= (n-1)n^rm_1,\\
(n-1)m_2n^{p+x+j+q} + (n-1)y(k-n^j)n^{r+q} + (n^p-1)\ell n^{r+j+x} &= (n-1)m_1n^{r+j+q+x},\\
\left(\ell n^{r+j} + (n-1)m_1n^{r+j+q}\right)n^x + \left((n-1)(n^j-k)n^{r+q}\right)y &= \left((n-1)m_2n^{j+q} + \ell n^{r+j}\right)n^z.
\end{aligned}$$

根据数据，即 $k, j, \ell, q, m_1, m_2, r, n \in \mathbb{Z}$, $j, q, r \geq 0$, $n \neq \pm 1$，让我们计算这三个整数

$$A = \ell n^{r+j} + (n-1)m_1n^{r+j+q}, \qquad B = (n-1)(n^j-k)n^{r+q}, \qquad C = (n-1)m_2n^{j+q} + \ell n^{r+j}.$$

因此，得到 $A, B, C \in \mathbb{Z}$；并且 $u = a^{m_1}$与 $v = t^{-r}a^{m_2}t^r$ 相互$\psi^I_{\alpha,\beta,1}$-扭共轭，当且仅当方程

$$An^x + By = Cn^z \tag{15}$$

对于未知数 x， y， $z \in \mathbb{Z}$，在 $x \geq 0$ 的条件下有整数解。若 $B = \pm 1$ ，则始终如此；因此，假设 $B \neq \pm 1$。接着，我们用这些新值 A， B 和 C，按照情形 1 的证明中相同的步骤进行，特别是研究所有子情形，例如 $C = 0$ 且 $B = 0$或 $B \neq 0$，以及 $C \neq 0$ 且 $B = 0$ 或 $B \neq 0$。我们发现，所有这些子情形都是可判定的。至此，情况二的证明完成。□

4. 外固定点与端同态扭曲共轭

本节重点讨论可解鲍姆斯拉格–索利塔群 $BS(1, n)$ 的某类端同态 ψ' 的外固定点，以及元素 g_1 和 g_2 在 $BS(1, n)$ 中关于 φ的扭曲共轭，其中 g_1， g_2 和 $\varphi \in$End$(BS(1, n))$ 由该特定端同态 ψ 确定。我们还想强调，本节仅考虑 I 型端同态。随后，我们引入弱（外）固定点的概念，并展示弱（外）固定点与 $BS(1, n)$ 中的端同态扭曲共轭问题之间的相互作用。

定义 4.1. 设 G 是一个群， $\varphi \in$属于端同态集(G)。 φ 的外固定元 是指满足 $g\varphi \sim g$ 的元素$g \in G$ 。

端同态 $\varphi \in$ End(G) 的外不动点是外固定元 g 的共轭类 $[g]$ φ。

容易看出，如果 g 是外固定元，那么 $[g]$ 满足（$[g]$）$\varphi \subseteq [g]$。

对于一个字 z，定义端同态 $\varphi_z\colon BS(1,n) \to BS(1,n)$ 为 $a\varphi_z = a, t\varphi_z = z$。以下命题 4.2 将输入映射 ψ 在 a 的共轭类中存在不动点，与字 u 和 a^α 的 φ_z-扭曲共轭问题联系起来；其中，给定 u 及 $|u|_t = 0$，但整数 $\alpha \in \mathbb{Z}[1/n]$ 未知。注意，此处我们对输入 u 施加条件 $|u|_t = 0$，这是必要的，因为 $|a^\alpha|_t = 0$；而在第 3 节中，我们已经看到，如果两个字 u 和 v 被一个 I 型端同态扭曲共轭，那么 $|u|_t = |v|_t$。

在本节中，我们将任意 I 型端同态简写为 ψ^I，不再明确写出其下标；而 φ_z 始终是 $BS(1,n)$ 的一个 I 型端同态。

定理 4.2。设 $u = a^\nu$ 和 $v = a^\beta t$ 是 $BS(1,n)$ 中给定的两个元素，其中 $\nu = \frac{m}{n^r} \in \mathbb{Z}[1/n]$，$\beta = \frac{\ell}{n^q}$，$m, r, \ell, q \in \mathbb{Z}$ 和 $0 \le r \le q$。此外，设 $\psi^I \in$ 端同态集$(BS(1,n))\colon a \mapsto uau^{-1}, t \mapsto v$。定义 $z = u^{-1}vu$。

存在 $w \in BS(1,n)$ 和 $\alpha \in \mathbb{Z}[1/n]$，使得

$$u^{-1} = (w\varphi_z)^{-1} a^\alpha w \tag{16}$$

当且仅当 $[a] \cap \operatorname{Fix} \psi^I$ 非空。

证明。首先假设存在 $w \in BS(1,n)$ 和 $\alpha \in \mathbb{Z}[1/n]$，使得 (16) 成立。由于 w 是 $BS(1,n)$ 的一个元素，因此它是由 a 和 t 构成的一个字，

$$\begin{aligned}
(w^{-1}aw)\psi^I &= w^{-1}(a\psi^I, t\psi^I)\, a\psi^I\, w(a\psi^I, t\psi^I) \\
&= w^{-1}(uau^{-1}, uzu^{-1})\, uau^{-1}\, w(uau^{-1}, uzu^{-1}) \\
&= u\, w^{-1}(a,z)\, u^{-1}\, uau^{-1}\, u\, w(a,z)\, u^{-1} \\
&= u(w\varphi_z)^{-1}\, a\, (w\varphi_z)u^{-1} \\
&= w^{-1}a^{-\alpha}aa^\alpha w \\
&= w^{-1}aw.
\end{aligned}$$

注意到，倒数第二个等式由（16）得出。因此，在（16）的条件下，我们建立了 $[a] \cap \operatorname{Fix} \psi^I \neq \emptyset$。

L令 $x \in [a] \cap \operatorname{Fix} \psi^I$，并令 $w \in BS(1, n)$ 满足 $x = w^{-1}aw$。则有如下

$$w^{-1}aw = (w^{-1}aw)\psi^I = u(w\varphi_z)^{-1}\, a\, (w\varphi_z)u^{-1},$$

其中，第一个等式成立是因为 $w^{-1}aw \in \operatorname{Fix} \psi^I$，第二个等式则来自前面的计算。由此可推出

$$(w\varphi_z)u^{-1}w^{-1}a\, w\, u(w\varphi_z)^{-1} = a.$$

因此，我们得到（$w\varphi_z$）$u^{-1}w^{-1}$ 与生成元 a 对易。由于 $BS(1, n) \simeq \mathbb{Z}[1/n] \rtimes \mathbb{Z}$，存在某个 $\alpha \in \mathbb{Z}[1/n]$ 使得（$w\varphi_z$）$u^{-1}w^{-1} = a^\alpha$，从而 $u^{-1} = (w\varphi_z)^{-1}a^\alpha w$。因此，所述结果得证。□

推论 4.3。给定 $\alpha \in \mathbb{Z}[1/n]$，并按照 *4.2* 中的定义令 $\psi^I \in$ 端同态集$(BS(1, n))$。则可以通过算法判定 $[a] \cap$ 不动点集 ψ^I 是否为空。

证明。我们注意到，由 ψ^I 的构造，$u \in BS(1,n)$ 与 $\varphi_z \in$ 端同态集$(BS(1,n))$ 均为给定；此外，由假设，$\alpha \in \mathbb{Z}[1/n]$ 也是给定的。应用定理 3.2，对于给定的 u, α, φ_z，$u^{-1} \sim_{\varphi_z} a^\alpha$ 是否成立是算法可判定的。现在，$u^{-1} \sim_{\varphi_z} a^\alpha$ 当且仅当存在$w \in BS(1,n)$，使得 $u^{-1} = (w\varphi_z)^{-1}a^\alpha w$。于是，$w^{-1}aw \in [a] \cap$ 不动点集 ψ^I。由于我们已经计算出 $(w^{-1}aw)\psi^I = u(w\varphi_z)^{-1}\, a(w\varphi_z)u^{-1}$，并且由命题 4.2，$(w^{-1}aw)\psi^I = w^{-1}aw$，即 $w^{-1}aw \in [a] \cap$ 不动点集 ψ^I，当且仅当对某个 $\alpha \in \mathbb{Z}[1/n]$ 有 $u^{-1} \sim_{\varphi_z} a^\alpha$。这就完成了证明。□

注意到，a 经 φ_z 映射到 a，而 a 经新构造的同态 ψ^I映射到 uau^{-1}。因此，正如前文所述，本节只关注 I 型端同态。

现在，我们引入弱（外）固定点的概念，以研究弱（外）固定点的存在如何保证端同态扭曲共轭。

定义 4.4。设 G 为一个群，且 $\varphi \in \operatorname{End}(G)$。$\varphi$ 的一个 弱不动点 是满足 $g\varphi \sim a$ 的元素 $g \in G$，其中 a 是 φ 的一个不动点。

构造 4.5。设 $\widetilde{\psi}^I$ 是 $BS(1,n)$ 的任意 I 型端同态，满足 $a\widetilde{\psi}^I =_{\sim} uau^{-1}$ 和 $t\psi^I = v$。令 $x = u^{-1}vu$ 和 $\varphi_x \in \mathrm{End}(BS(1,n))$：$a \mapsto a, t \mapsto x$。注意，$\widetilde{\psi}^I$ 和 φ_x（一个 I 型端同态）的构造分别与 ψ^I 和 φ_z 的构造相同（见命题 4.2），但 $|u|_t$ 不一定等于 0。还要注意，如果我们对某个 $\beta \in \mathbb{Z}[1/n]$ 考虑 $v = a^\beta t$，那么对于某个 $\beta' \in \mathbb{Z}[1/n]$ 有 $x = a^{\beta'} t$；因此，$t\widetilde{\psi}^I = v = \underline{ux}u^{-1} = ua^{\beta'}tu^{-1}$。令 $\mu = \frac{n^d-1}{n-1}$。

任意元素 $a^\gamma t^d$ 在 $\widetilde{\psi}^I$ 下的像如下：

$$\begin{aligned}(a^\gamma t^d)\widetilde{\psi}^I &= u\,a^\gamma\,u^{-1}(uxu^{-1})^d \\ &= u\,a^\gamma\,(a^{\beta'}t)^d\,u^{-1} \\ &= u\,a^\gamma\,a^{\mu\beta'}t^d\,u^{-1} \\ &= u\,a^{\gamma+\mu\beta'}t^d\,u^{-1}\end{aligned}$$

观察 4.6。考虑如上定义的 $\widetilde{\psi}^I \in \mathrm{End}(BS(1,n))$。那么，$\widetilde{\psi}^I$ 的所有弱不动点都具有如下形式：$a^\gamma t^d$，其中 $a^{\gamma+\mu\beta'}t^d \sim a^\alpha t^d$，且 $a^\alpha t^d$ 是 $\widetilde{\psi}^I$ 的不动点。

定义4.7。设 G 是一个群，且 $\varphi \in \mathrm{End}(G)$。固定 $a \in \mathrm{Fix}\,\varphi$。若存在 $g \in G$ 使得 $(g^{-1}xg)\varphi = g^{-1}ag$，则元素 $x \in G$ 是 φ 的一个与 a 相关的弱外固定点。一般而言，若存在 $g \in G$ 使得对于 φ 的某个不动点 a，有 $(g^{-1}xg)\varphi = g^{-1}ag$，则 x 是 φ 的一个弱外固定点。

观察 4.8. 如果 x 是端同态 φ 的一个弱外固定点，且该端同态作用于 G，那么 x 是 φ的一个弱不动点。

下面的命题将 $\widetilde{\psi}^I$ 的弱不动点与 $BS(1,n)$ 中的扭曲共轭问题联系起来。

命题4.9. 设 $\widetilde{\psi}^I \in \mathrm{End}(BS(1,n))$ 如 *4.5* 中所定义，且 $a^\alpha t^d \in$不动点 $\widetilde{\psi}^I$。对于任意元素 $g_1, g_2 \in BS(1,n)$，若

$$(g_1^{-1}g_2g_1)\psi^I = g_1^{-1}a^\alpha t^d g_1$$

成立，则 $u^{-1} = (g_1\varphi_x)^{-1}g'g_1$，其中 $g' \in BS(1,n)$ 由 ψ^I确定。

证明。设 $g_2 = a^\gamma t^d$，其中 $\gamma \in \mathbb{Z}[1/n], d \in \mathbb{Z}$。我们假设

$$(g_1^{-1}a^\gamma t^d g_1)\psi^I = g_1^{-1}a^\alpha t^d g_1 \tag{17}$$

成立，因此 $a^\gamma t^d$ 是 ψ^I的一个弱不动点。根据观察 4.6 $a^{\gamma+\mu\beta'}t^d \sim a^\alpha t^d$，并令$g' = a^\delta t^r$ 为右共轭元，即，

$$a^\alpha t^d = (a^\delta t^r)^{-1}a^{\gamma+\mu\beta'}t^d\,(a^\delta t^r). \tag{18}$$

根据 $\widetilde{\psi}^I$的构造，

$$\begin{aligned}(g_1^{-1}a^\gamma t^d g_1)\widetilde{\psi}^I &= g_1^{-1}(a\widetilde{\psi}^I, t\widetilde{\psi}^I)\,(a^\gamma t^d)\widetilde{\psi}^I\,g_1(a\widetilde{\psi}^I, t\widetilde{\psi}^I) \\ &= g_1^{-1}(uau^{-1}, uxu^{-1})\,u\,a^{\gamma+\mu\beta'}t^d\,u^{-1}\,g_1(uau^{-1}, uxu^{-1}) \\ &= u\,g_1^{-1}(a,x)\,u^{-1}\,u\,a^{\gamma+\mu\beta'}t^d\,u^{-1}\,u\,g_1(a,x)\,u^{-1} \\ &= u(g_1\varphi_x)^{-1}\,a^{\gamma+\mu\beta'}t^d\,(g_1\varphi_x)u^{-1}\end{aligned}$$

因此，一方面利用 (17) 和 (18)，我们得到

$$(g_1^{-1}a^\gamma t^d g_1)\widetilde{\psi}^I = g_1^{-1}(a^\delta t^r)^{-1}a^{\gamma+\mu\beta'}t^d\,(a^\delta t^r)g_1. \tag{19}$$

另一方面，

$$(g_1^{-1}a^\gamma t^d g_1)\widetilde{\psi}^I = u(g_1\varphi_x)^{-1}\,a^{\gamma+\mu\beta'}t^d\,(g_1\varphi_x)u^{-1}. \tag{20}$$

综合 (19) 和 (20)，我们推得如下结论：

$$(g_1\varphi_x)\,u^{-1}\,g_1^{-1}\,(a^\delta t^r)^{-1}\,a^{\gamma+\mu\beta'}t^d = a^{\gamma+\mu\beta'}t^d\,(g_1\varphi_x)\,u^{-1}\,g_1^{-1}\,(a^\delta t^r)^{-1}$$

因此，$(g_1\varphi_x)\,u^{-1}\,g_1^{-1}(a^\delta t^r)^{-1} = 1$，进而可知 $u^{-1} = (g_1\varphi_x)^{-1}(a^\delta t^r)g_1$。至此，证明完成。□

以下推论将 $\widetilde{\psi}^I$ 的弱外固定点与 $BS(1,\ n)$ 中的端同态扭曲共轭联系起来。

推论 4.10。设 $\widetilde{\psi}^I \in$端同态集$(BS(1,\ n))$如 *4.5* 中所定义，并设 $a^\alpha t^d \in$不动点 $\widetilde{\psi}^I$。令 w 为相对于 $a^\alpha t^d$ 的 $\widetilde{\psi}^I$ 的弱外固定点。则 $u^{-1} =(g\varphi_x)^{-1}g'g$，其中 g、$g' \in BS(1、\ n)$由 $\widetilde{\psi}^I$ 和 $a^\alpha t^d$ 确定。

证明。由于 x 是相对于 $a^\alpha t^d$ 的 $\widetilde{\psi}^I$ 的弱外固定点，因此存在 $g \in BS(1,n)$，使得 $(g^{-1}xg)\widetilde{\psi}^I = g^{-1}a^\alpha t^d g$。令 $w = a^\gamma t^d \in BS(1,n)$，其中 $\gamma \in \mathbb{Z}[1/n],\, d \in \mathbb{Z}$。我们已经证明了 $(a^\gamma t^d)\widetilde{\psi}^I = ua^{\gamma+\mu\beta'}t^d u^{-1}$。因此，

$$\begin{aligned}(g^{-1}a^\gamma t^d g)\widetilde{\psi}^I &= g^{-1}(a\widetilde{\psi}^I, t\widetilde{\psi}^I)\,(a^\gamma t^d)\widetilde{\psi}^I\, g(a\widetilde{\psi}^I, t\widetilde{\psi}^I)\\ &= g^{-1}(uau^{-1}, uxu^{-1})\,u\,a^{\gamma+\mu\beta'}t^d\,u^{-1}\,g(uau^{-1}, uxu^{-1})\\ &= u\,g^{-1}(a,x)\,u^{-1}\,u\,a^{\gamma+\mu\beta'}t^d\,u^{-1}\,u\,g(a,x)\,u^{-1}\\ &= u(g\varphi_x)^{-1}\,a^{\gamma+\mu\beta'}t^d\,(g\varphi_x)u^{-1}\end{aligned}$$

根据假设和观察 4.8 $a^\gamma t^d$ 是 $\widetilde{\psi}^I$ 的弱不动点，因此由观察 4.6，$a^{\gamma+\mu\beta'}t^d \sim a^\alpha t^d$ 的右共轭元为 g'。换言之，

$$a^\alpha t^d = (g')^{-1}a^{\gamma+\mu\beta'}t^d g'.$$

将 $a^\alpha t^d$ 替换为上述表达式，一方面我们有：

$$(g^{-1}a^\gamma t^d g)\widetilde{\psi}^I = g^{-1}a^\alpha t^d g = g^{-1}(g')^{-1}a^{\gamma+\mu\beta'}t^d g'g. \tag{21}$$

另一方面，

$$(g^{-1}a^\gamma t^d g)\widetilde{\psi}^I = u(g\varphi_x)^{-1}\,a^{\gamma+\mu\beta'}t^d\,(g\varphi_x)u^{-1}. \tag{22}$$

结合（21）和（22），可得：

$$\begin{aligned}g^{-1}(g')^{-1}a^{\gamma+\mu\beta'}t^d g'g &= u(g\varphi_x)^{-1}\,a^{\gamma+\mu\beta'}t^d\,(g\varphi_x)u^{-1}\\ \Rightarrow (g\varphi_x)u^{-1}g^{-1}(g')^{-1} &= 1\end{aligned}$$

因此，$u^{-1} =(g\varphi_x)^{-1}g'g$，从而得到所述结果。 □

参考文献

[1] M. Blufstein、M. Valiunas，《大型阿廷群中的扭曲共轭问题》，预印本见 https://arxiv.org/pdf/2411.05493。[2] O. Bogopolski、A. Martino、O. Maslakova、E. Ventura，《自由群扩张循环群具有可解的共轭问题》，伦敦数学会会刊 38(5) (2006)，787–794。[3] O. Bogopolski、A. Martino、E. Ventura，《某些群的扩张的轨道可判定性与共轭问题》，美国数学会汇刊，362(4) (2010)，2003–2036。[4] J. Burillo、F. Matucci、E. Ventura，《Thompson 群 F 的扩张中的共轭问题》，以色列数学杂志 216(1) (2016)，15–59。[5] L. Ciobanu、A. Logan，《二阶自由群的端同态的不动点与稳定像》，代数杂志，第 591 卷 (2022)，538–576。[6] D. J. Collins、Donald J.；F. Levin，《某些鲍姆斯拉格–索利塔尔群的自同构与霍普夫性质》，《数学文献》（巴塞尔）40(5) (1983)，385–400。[7] G. Crowe，《二面体阿廷群中的扭曲共轭 I：环面结群》，群、复杂性与密码学杂志，17(1) (2025)。[8] G. Crowe，《二面体阿廷群中的扭曲共轭 II：Baumslag Solitar 群 $BS(n,n)$》，国际代数与计算杂志，第 36 卷，第 01 期，第 51–80 页 (2026)。[9] M. Dehn，《无限离散群》，《数学年刊》71 (1911)。J. Stillwell 译：《无限离散群》，载于《群论与拓扑学论文集》，133–178 页，施普林格出版社，1987 年。[10] A. Fel'shtyn、E. Troitsky 和 A. Vershik，《II_1 型群的扭曲伯恩赛德定理：一个例子》，《数学研究快报》13 (2006)，第 5–6 期，719–728。[11] J. González-Meneses、E. Ventura，《辫群中的扭曲共轭》，以色列数学杂志 201 (2014)，455–476。[12] S. Won Kim，《有限生成自由群的扭曲共轭问题》，《纯粹与应用代数杂志》220 (2016)，第 4 期，1281–1293。[13] P. M. Lins de Araujo 和 Y. S. Rego，《可解算术群中的扭曲共轭》，《数学通讯》298 (2025)，763–793。[14] O. Mitra、M.Roy 和 E. Ventura，《可解 Baumslag–Solitar 群中的扭曲共轭》，预印本见 https://arxiv.org/pdf/2508.04397。[15] C.F. Miller, III，《群论判定问题及其分类》，《数学年刊研究》68 (1971)。

[16] J. O'Neill, 《可解 Baumslag–Solitar 群中的测试元素》, 《纽约数学杂志》**25**(2019), 889–896。
[17] K. Reidemeister, "同伦链环的自同构", 《数学年刊》**112**（1936）, 586–593。

哈里什-钱德拉研究所，HBNI，Chhatnag 路，Jhunsi，Prayagraj（Allahabad）211019，印度。电子邮箱地址：mallikaroy@hri.res.in；mallikaroy75@gmail.com