arXiv:2602.11037v1 [physics.soc-ph] 11 Feb 2026

线性基于主体的系统的广义朗之万模型：通过环境耦合实现策略性影响

Semra G¨und¨uc,[1,2] David J. Butts,[3] 和 Michael S. Murillo[1]
[1] *Computational Mathematics, Science and Engineering, Michigan State University, East Lansing, Michigan 48824, USA*
[2] *Computer Engineering Department, Ankara University, Ankara 06880, Turkiye*
[3] *Information Systems & Modeling, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico 87545, USA*
（日期：2026年2月12日）

基于主体的模型通常将系统视为孤立的，认为环境耦合要么计算成本过高，要么与动力学无关，因此将其舍弃。我们证明，这种忽视遗漏了关键物理效应：环境自由度会产生记忆效应，从根本上改变系统动力学。通过将线性更新规则系统地转换为精确的广义朗之万方程，我们表明，未观测到的环境主体会表现为记忆核，其时间尺度和耦合强度由环境相互作用谱决定。网络拓扑以不同方式塑造这种记忆结构：小世界重连会使动力学趋向单一占主导地位的弛豫模态，而碎片化环境则维持多个持久模态，分别对应孤立子群体。我们将这一框架应用于隐蔽影响行动，在此类行动中，对手仅通过环境中介者操纵目标人群。稳态响应可通过命中概率作随机游走解释，揭示顽固派意见如何在环境中扩散，使系统主体意见向顽固派的平均意见偏移——即使顽固派从未与目标直接接触。

复杂系统很少孤立演化。因此，基于主体的模型 [1, 2]必须面对一个根本抉择：是纳入环境耦合，但承担可能高得令人望而却步的计算成本；还是忽略环境耦合，并冒着遗漏关键动力学的风险。新冠疫情鲜明地展现了这一权衡。纳入旅行网络和区域耦合的模型 [3–5], 对于政策决策不可或缺，但其计算需求仍令许多应用难以承受。这一挑战不仅存在于流行病学领域，也涉及社会影响宣传活动、经济传染和生态系统；在这些领域，环境效应主导着行为，但完整模拟环境仍然难以实现。我们证明，对于线性基于主体的系统，这一计算困境可以得到优雅的解决。环境耦合自然表现为记忆核和涨落力，它们编码了未观测自由度的累积效应，从而无需显式模拟，便能捕捉关键的环境信息。

线性模型值得特别关注，原因有三。第一，许多复杂系统在平衡点或共识状态附近可以进行线性化，此时微扰动力学决定了稳定性和响应 [6]。第二，动态模态分解等数据驱动方法自然会生成能够捕捉系统主导行为的线性模型 [7, 8]。第三，多个不同领域的基础模型本质上都是线性的：社会系统中的德格鲁特意见动力学 [9], 、年龄结构化种群的Leslie矩阵 [10, 11], 以及经济学中的列昂惕夫投入产出模型 [12, 13], 。线性并非一种限制，恰恰相反，它提供了所需的可处理性，使我们能够在非线性效应仍属微扰的情形下，推导出环境耦合的精确解，进而捕捉其中的关键动力学。最重要的是，线性系统具有无与伦比的分析透明性，因此是理解环境耦合如何塑造集体行为的天然起点。

我们首先为分区智能体系统推导出精确的广义朗之万方程[14, 15] ，揭示环境耦合如何表现为记忆核和涨落力。随后，我们分析合成网络和真实网络上的DeGroot 观点动力学，并提出算子中心性这一框架，通过记忆算子的谱性质量化智能体影响力和脆弱性。最后，我们通过隐蔽影响行动展示其战略意义：对手仅通过环境中介操纵目标；我们据此推导出最优狂热者布置策略，并在实证社交网络上验证相关预测。

我们方法的数学基础借鉴了统计力学中的Mori-Zwanzig形式 [16, 17], ，该形式使用投影算子将整个空间划分为可观测的系统变量和不可观测的环境自由度。不过，线性基于代理的模型使我们能够采取更直接的方法。我们可以使用分块矩阵将个体划分为系统和环境，在避免使用投影算子的同时实现精确降维。由此得到的广义朗之万方程自然源自分块结构，其中记忆核编码了过去的系统状态如何通过环境调节影响未来的动力学。

考虑状态向量为 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 、不断演化的 N 个体

遵循线性离散更新规则

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{D}\mathbf{x}(n), \tag{1}$$

其中，离散更新矩阵 $\mathbf{D}$ 编码了个体间的相互作用和环境影响， n表示离散时间步。为了系统地推导开放系统动力学，我们将所有 N 个体划分为 $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^{N_s}$ （主要关注的系统个体）和 $\mathbf{x}_b \in \mathbb{R}^{N_b}$ （浴或环境主体），其中 $N_s + N_b = N$。划分后的动力学为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_s(n+1) \\ \mathbf{x}_b(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ss} & \mathbf{D}_{sb} \\ \mathbf{D}_{bs} & \mathbf{D}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_s(n) \\ \mathbf{x}_b(n) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中，$\mathbf{D}_{ss}$ 控制系统内部的直接相互作用，$\mathbf{D}_{bb}$ 描述浴内部动力学，$\mathbf{D}_{sb}$ 表示浴到系统的影响，而$\mathbf{D}_{bs}$ 描述系统对浴的影响。

浴方程，

$$\mathbf{x}_b(n+1) = \mathbf{D}_{bs}\mathbf{x}_s(n) + \mathbf{D}_{bb}\mathbf{x}_b(n), \tag{3}$$

可以通过迭代精确求解，得到

$$\mathbf{x}_b(n) = \mathbf{D}_{bb}^n \mathbf{x}_b(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{D}_{bb}^{n-1-k} \mathbf{D}_{bs} \mathbf{x}_s(k). \tag{4}$$

这揭示了环境动力学的双重性质：一是由初始条件驱动的自主演化（捕捉先前的环境状态），二是由系统反馈驱动的响应式演化（体现双向耦合）。将式（4）代入系统方程，可得精确离散时间广义朗之万方程（GLE）：

$$\mathbf{x}_s(n+1) = \mathbf{D}_{ss}\mathbf{x}_s(n) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}_d(n-k)\mathbf{x}_s(k) + \boldsymbol{\eta}_d(n), \tag{5}$$

其记忆核为，

$$\mathbf{K}_d(m) = \begin{cases} \mathbf{D}_{sb}\mathbf{D}_{bs} & \text{if } m = 0 \\ \mathbf{D}_{sb}\mathbf{D}_{bb}^{m-1}\mathbf{D}_{bs} & \text{if } m \geq 1, \end{cases} \tag{6}$$

和噪声，

$$\boldsymbol{\eta}_d(n) = \mathbf{D}_{sb}\mathbf{D}_{bb}^n \mathbf{x}_b(0). \tag{7}$$

请注意，动力学的线性特性使得可以直接通过代数运算消去浴变量——传统 Mori-Zwanzig形式中对非线性系统至关重要的投影算子，在此并不需要。在这里，给定初始热浴条件，噪声是确定性的；但当$\mathbf{x}_b(0)$未知时，从系统的角度看，它则呈现为随机量。

为构造连续时间类比，我们引入时间步长 Δt ，并假设离散更新矩阵具有如下展开式

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} + \Delta t \cdot \mathbf{M} + O((\Delta t)^2), \tag{8}$$

其中，$\mathbf{M}$ 是瞬时速率矩阵。在保持 $n\Delta t = t$ 不变的同时取极限 $\Delta t \to 0$ ，可得

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{x}. \tag{9}$$

通过类似步骤可得连续时间广义朗之万方程

$$\frac{d\mathbf{x}_s}{dt} = \mathbf{M}_{ss}\mathbf{x}_s + \int_0^t \mathbf{K}(t-s)\mathbf{x}_s(s)ds + \boldsymbol{\eta}(t), \tag{10}$$

其中记忆核为

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{M}_{sb}e^{\mathbf{M}_{bb}t}\mathbf{M}_{bs} \tag{11}$$

噪声为

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{M}_{sb}e^{\mathbf{M}_{bb}t}\mathbf{x}_b(0). \tag{12}$$

记忆核$\mathbf{K}(t)$描述了一个三阶段过程：系统影响进入浴中（$\mathbf{M}_{bs}$），经环境动力学传播（$e^{\mathbf{M}_{bb}t}$），然后返回并影响系统（$\mathbf{M}_{sb}$）。类似地，噪声 $\boldsymbol{\eta}(t)$刻画了初始热浴条件（$\mathbf{x}_b(0)$）如何通过相同的环境动力学（$e^{\mathbf{M}_{bb}t}$）传播并影响系统（$\mathbf{M}_{sb}$）。

为量化这些影响路径并识别哪些个体最容易受到环境操纵，我们引入算子中心性——一种用于分析具有多个影响算子的动力系统中个体重要性的框架。对于由广义朗之万方程产生的任一影响算子$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_s \times N_s}$，例如式（11）或式（12），算子中心性通过两个互补指标量化个体参与影响路径的方式：影响力（驱动动力学的能力）和脆弱性（对外部强迫的易感程度）。我们进行奇异值分解

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T, \tag{13}$$

其中， $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$为奇异值，$\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{N_s}$ 为左奇异向量，$\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{N_s}$ 为右奇异向量，且 $r = \text{rank(A)}$为非零奇异值的数量。这种谱分解揭示了个体参与在各动力学模式中的分布。我们将个体 i 的影响力和脆弱性算子中心性定义为:

$$I_i^{(\mathbf{A})} = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k^2 |v_{k,i}|^2, \tag{14}$$

$$V_i^{(\mathbf{A})} = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k^2 |u_{k,i}|^2, \tag{15}$$

其中，$v_{k,i}$ 和$u_{k,i}$ 分别表示右奇异向量$\mathbf{v}_k$ 和左奇异向量$\mathbf{u}_k$的第 i 个分量。影响力和脆弱性等价于

列范数的平方 $\|\mathbf{A}_{:,i}\|^2$ 和行范数的平方$\|\mathbf{A}_{i,:}\|^2$，分别刻画输入 i对所有输出的影响，以及输出 i 对所有输入的响应。

关键的是，影响力与脆弱性不一定相关。个体可以强烈驱动环境动态，同时不受反馈影响，反之亦然。传统的中心性度量无法体现这种输入-输出不对称性；它源于非正规记忆核结构，并揭示了封闭系统分析中不可见的脆弱性。现在，我们通过 DeGroot意见动力学展示这些原理，说明网络拓扑如何塑造记忆结构，并在真实社交网络中造成战略脆弱性。

在 DeGroot模型中，个体将邻居的意见加权平均后更新自己的意见。行随机信任矩阵$\mathbf{T}$ 对这些权重进行编码，其中 T_{ij}表示个体 i 对个体 j的意见的信任程度。离散更新规则$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{T}\mathbf{x}(n)$与式（1）完全对应，其中$\mathbf{D} = \mathbf{T}$。对于连续时间分析，我们构造速率矩阵 $\mathbf{M} = (\mathbf{T} - \mathbf{I})/\Delta t$，其中 Δt 表示意见更新时间尺度。

为理解网络拓扑如何塑造记忆效应，我们通过对式(11)进行特征分解，从而得到模态结构

$$\mathbf{K}(t) = \sum_{k=1}^{N_b} \mathbf{C}_k e^{\lambda_k t}, \tag{16}$$

其中系数矩阵

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{M}_{sb}\mathbf{q}_k\mathbf{p}_k^T\mathbf{M}_{bs} \tag{17}$$

量化每个浴模态 k 与系统耦合的强弱。此处，$\mathbf{q}_k$ 和$\mathbf{p}_k$ 分别为$\mathbf{M}_{bb}$的右特征向量和左特征向量， λ_k 为相应的特征值。每个模态以特征时间尺度 $\tau_k = -1/\mathrm{Re}(\lambda_k)$和耦合强度 $\|\mathbf{C}_k\|_F$对记忆作出贡献，其中 $\|\cdot\|_F$ 表示弗罗贝尼乌斯范数。

图1说明网络拓扑如何通过两种互补变化塑造记忆核结构。第一行展示被划分为系统–系统（左上，深灰）、浴–浴（右下，蓝色）和系统–浴耦合区块（非对角，浅灰）的邻接矩阵，点表示各条边。第二行通过式(16)–(17)展示所得模态记忆动力学，绘制耦合强度 $\|\mathbf{C}_k\|_F$ 随时间的变化。所有网络包含$N = 300$ 个节点，平均度为 $k = 6$ ，并被划分为 $N_s = 30$ 个系统个体和 $N_b = 270$ 个浴代理。

前两列展示了重连概率为 $p_{\mathrm{ws}} = 0.1$ （第 1 列）和 $p_{\mathrm{ws}} = 0.5$ （第 2 列）的 Watts–Strogatz 小世界图。当 p_{ws}较低时，邻接矩阵呈现出密集的对角带，这是局部连接的典型特征，同时伴有稀疏的长程捷径。随着 p_{ws} 增大，重连使连接分布得更加广泛，这一点从越来越分散的非对角线元素中可以看出。这种结构转变会显著影响记忆动力学：较高的 p_{ws} 会同时带来更强的系统–浴耦合（更大的 $\|\mathbf{C}_k\|_F$）和更快的记忆衰减（ λ_k更负），这反映出长程路径增强了信息交换。

最后三列通过将浴划分为三个互不相互作用的回声室（在$\mathbf{M}_{bb}$中可见为块对角结构），同时保持每个区块内部的 $p_{\mathrm{ws}} = 0.1$ ，来探究浴的碎片化。系统–浴池相互作用密度参数 $f \in \{0.1, 0.3, 1.0\}$ 控制实际形成的系统–浴池潜在边所占的比例。在 f 较低时（第 3 列），非对角耦合块较为稀疏；在 $f = 1.0$时（第 5 列），这些耦合块则达到最大密度。这种变化揭示了截然不同的记忆行为：不同于单浴池情形中会出现一个主导模态，回声室配置会维持多个持久模态——每个独立腔室各有一个。随着 f 增加，这些模态会变得更强（$\mathbf{C}_k\|_F$更大），但其衰减速度不会显著加快，因为每个腔室的内部动力学保持不变。

这两种变化揭示了记忆结构的不同方面。小世界重连改变了浴处理信息的方式——形成更快、全局耦合程度更高的动力学，从而使记忆迅速增强并消散。回声室碎片化则改变了哪些信息能够持续存在——维持多个彼此独立的弛豫时间尺度，无法将其简化为单一有效模态。总而言之，这些变化表明，记忆核结构既编码了环境响应的时间尺度，也编码了相互独立的影响路径的多重性。

图2比较了小世界和块结构浴池构型的特征值 λ_k 及其对应的耦合强度 $\|\mathbf{C}_k\|_F$ 。这些图展示了记忆核的谱结构如何随小世界网络的重连概率 p_{ws} （左图）或块结构中的系统–浴相互作用密度 f （右图）变化。

在小世界情形下，当 p_{ws} 较低时，浴几乎是一个规则环。M_{bb} 的前四个特征值紧密聚集在 $\mathrm{Re}(\lambda_k) \approx 0$附近，如实线所示；它们对应的记忆贡献（虚线）也几乎相同。由于所有主导模态都以相近的速率弛豫，因此它们与系统的耦合程度相当。随着 p_{ws} 增大并加入长程边，这种简并被打破：一个特征值仍接近零，并保留较强的记忆模态；其他特征值则移向更负的值，其对应的耦合强度也随之减弱。因此，增大 p_{ws} 会使浴趋向于单一的主导弛豫模态。

存在回声室时，每个回声室都有各自占主导地位的特征值；它们仅通过系统间接耦合。因此，多个特征值

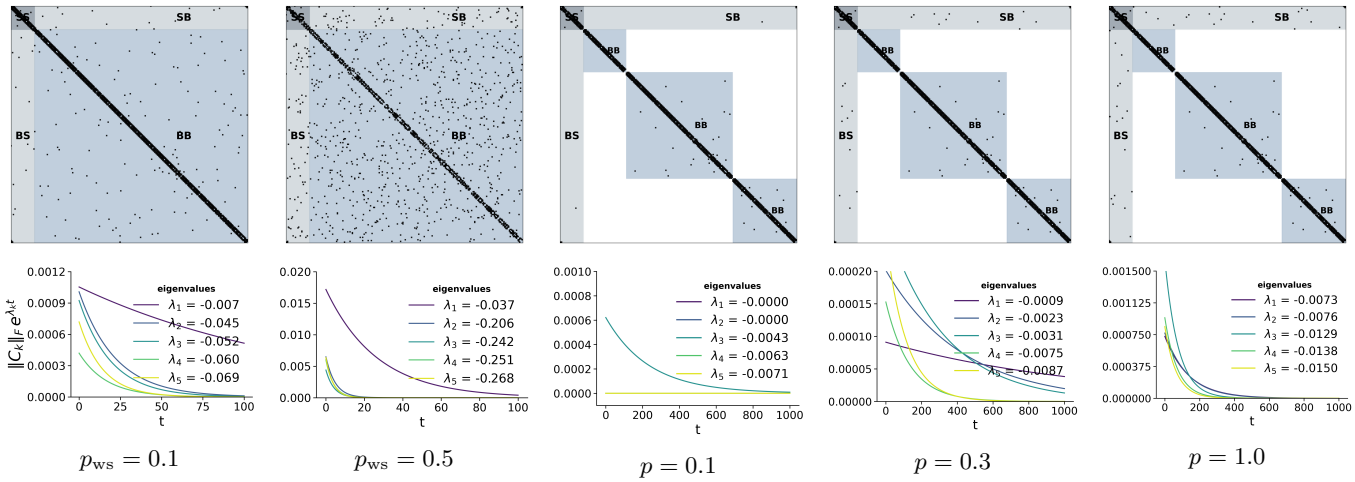

图 1：**图结构及其产生的模态记忆动力学示意图**。顶行展示了不同图构型的邻接矩阵。每个矩阵分为系统–系统（左上，深灰色）、浴–浴（右下，蓝色）和对称的系统–浴耦合区块（非对角区域，浅灰色）；圆点代表各条边。底行展示了相应的模态记忆动力学。所有图均有 $N = 300$ 个节点，平均度为 $k = 6$。左侧两个面板：重连概率分别为 $p_{\mathrm{ws}} = 0.1$ 和 $p_{\mathrm{ws}} = 0.5$ 的 Watts–Strogatz小世界图，显示增大 p_{ws} 会使边（圆点代表边）分布得更广泛、更具全局性，从而增强系统–记忆耦合并加快记忆动力学。右侧三个面板：浴区块之间无相互作用、$p_{\mathrm{ws}} = 0.1$ 固定而系统–浴相互作用密度 $f \in \{0.1, 0.3, 1.0\}$ 不同的回音室浴构型，表明相互作用密度越高，记忆模态越强、分布越广。

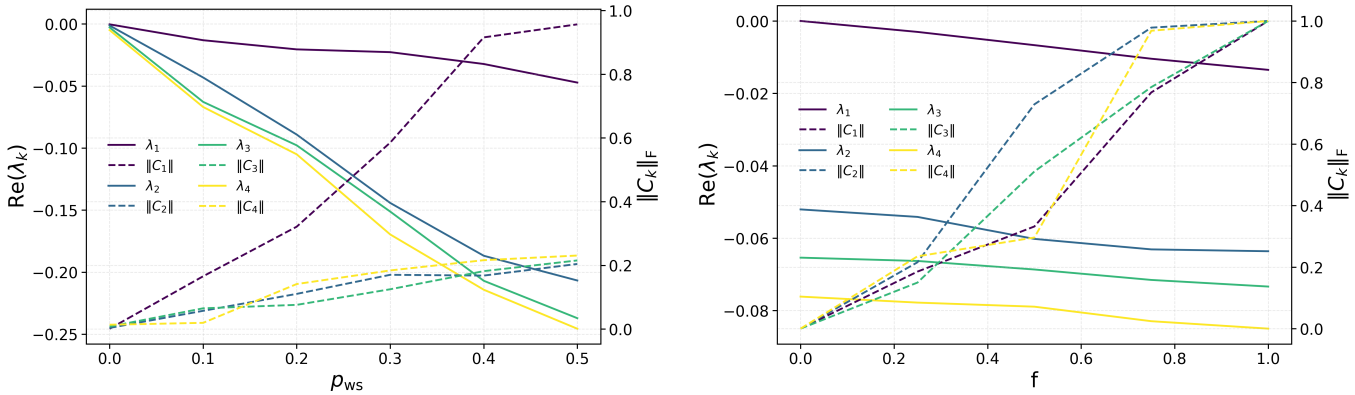

图 2：**特征值谱 $\mathrm{Re}(\lambda_k)$ 和模态耦合强度 $\|C_k\|_F$**。（左）单浴系统：一个占主导地位的特征值支配系统动力学，而其他特征值则逐渐衰减。（右）回音室（块对角）浴：每个彼此隔离的浴区块都保留其自身占主导地位的特征值及对应模态，因此多个模态可同时占据主导地位。注意尺度的变化。

会同时保持在接近零的位置，从而产生多个长寿命记忆模态，而非单一的全局弛豫模态。由于各块之间缺乏混合，这些特定于各块的模态在谱上彼此分离。随着系统–浴相互作用密度增加，这些模态的耦合强度 $\|\mathbf{C}_k\|_F$ 会系统性地增强。因此，增加 f 会激活并增强每个独立块的记忆贡献。

在阐明网络拓扑如何塑造记忆结构之后，我们现在将这一框架应用于一个关键的安全问题：隐蔽影响行动在这种情境中，对手只能通过环境中介操纵目标人群，绝不直接接触目标。传统的意见控制研究侧重于直接操纵，或在目标系统中植入顽固个体 [18–20]。我们的广义朗之万框架能够分析一种本质上截然不同的情境：操纵者必须通过浴发挥作用。这一框架刻画了影响行动中的现实约束，例如直接接触受限、容易被发现或遭到禁止；从协同虚假信息传播到战略操纵，皆属此类情形。

考虑以下对抗性场景：一名外部行动者试图改变目标人群中的公众舆论，但由于存在被发现的风险、平台限制或法律约束，无法直接联系这些人。相反，该行动者必须在周边社交网络中安插个体，只能通过真实的社交关系影响目标。上述谱特征分析既可用于优化进攻策略（识别易受影响目标并优化资源分配），也可用于防御性脆弱性评估（量化操纵风险）。我们将这一场景正式建模如下。

实体 $\mathcal{A}$ （系统，$\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^{N_s}$）表示遵循自然DeGroot意见动力学的目标人群。实体 $\mathcal{B}$ （操纵者）试图通过部署 N_z 顽固者——即具有固定意见 $\mathbf{s}_Z \in \mathbb{R}^{N_z}$、战略性地布置在浴中的个体——将 $\mathcal{A}$ 的意见转向目标 $\mathbf{x}_s^*$ 。为保持隐蔽性，顽固者必须位于浴中。

在没有顽固者的标准 DeGroot 动力学中，稳态由初始条件通过守恒定律决定。对于本原行随机信任矩阵 $\mathbf{T}$，佩龙–弗罗贝尼乌斯定理保证存在唯一的左特征向量 $\boldsymbol{\pi} > 0$，满足 $\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{T} = \boldsymbol{\pi}^T$，其中为$\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{1} = 1$。虽然右零向量 $\mathbf{M1} = \mathbf{0}$ 决定稳态（共识）的形态，但左零向量 $\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{M} = \mathbf{0}^T$ 决定守恒的初始意见加权组合：对于所有 t，$\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\pi}^T\mathbf{x}(0)$。在稳态下，$\mathbf{x}^* = c\,\mathbf{1}$，其中 $c = \boldsymbol{\pi}^T\mathbf{x}(0)$ 是影响力加权平均值。顽固者通过始终保持固定意见，从根本上改变了这一图景：它们打破守恒定律，使稳态不再取决于初始条件。

为分析这一点，我们对含顽固派强迫项的式 (10) 取拉普拉斯变换：

$$\mathrm{s}\tilde{\mathbf{x}}_s(\mathrm{s}) - \mathbf{x}_s(0) = \mathbf{M}_{ss}\tilde{\mathbf{x}}_s(\mathrm{s}) + \tilde{\mathbf{K}}(\mathrm{s})\tilde{\mathbf{x}}_s(\mathrm{s}) + \tilde{\boldsymbol{\eta}}(\mathrm{s}) + \tilde{\mathbf{f}}_z(\mathrm{s}), \quad (18)$$

其中记忆核变换为

$$\tilde{\mathbf{K}}(\mathrm{s}) = \mathbf{M}_{sb}(\mathrm{s}\mathbf{I} - \mathbf{M}_{bb})^{-1}\mathbf{M}_{bs}, \quad (19)$$

且 $\tilde{\mathbf{f}}_z(\mathrm{s})$ 表示顽固派强迫项。在稳态（$\mathrm{s} \to 0$）下，舒尔补 $\tilde{\mathbf{K}}(0) = -\mathbf{M}_{sb}\mathbf{M}_{bb}^{-1}\,\mathbf{M}_{bs}$出现，编码了所有经浴介导的积分路径。

关键的观察是，当 $\mathrm{s} \to 0$ 时，涉及初始条件 $\mathbf{x}_s(0)$ 和 $\mathbf{x}_b(0)$（出现于 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(0)$ 中）的项被持续的顽固派强迫项 $\tilde{\mathbf{f}}_z(0) \sim 1/\mathrm{s}$ 所主导。这种发散反映出，狂热者会无限期地供给或吸收意见“流”，从而有效地充当储库，覆盖系统对其初始配置的记忆。

当狂热者占据浴中具有固定意见 $\mathbf{s}_z$ 的位置 $\mathcal{P}$ 时，稳态平衡要求同时满足系统和浴平衡：

$$\mathbf{0} = \mathbf{M}_{ss}\mathbf{x}_s^* + \mathbf{M}_{sb}\mathbf{x}_b^* + \mathbf{M}_{sz}\mathbf{s}_z, \quad (20)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{M}_{bs}\mathbf{x}_s^* + \mathbf{M}_{bb}\mathbf{x}_b^* + \mathbf{M}_{bz}\mathbf{s}_z, \quad (21)$$

其中 $\mathbf{M}_{sz}$ 与 $\mathbf{M}_{bz}$ 分别编码顽固派意见如何耦合到系统个体和浴代理。这些方程反映了意见平衡：在稳态下，每个个体从其邻居（系统、浴和狂热者）接收的净影响力之和必须为零。

为分析狂热者影响，我们暂时搁置系统-浴划分，并考虑所有没有固定意见的个体。将自由个体 $\mathbf{x}_F$ 定义为系统与非狂热者浴个体的并集——即所有意见可以演化的个体。具有固定意见的狂热者$\mathbf{s}_Z$充当边界条件。自由个体动力学为

$$\frac{d\mathbf{x}_F}{dt} = \mathbf{M}_{FF}\mathbf{x}_F + \mathbf{M}_{FZ}\mathbf{s}_Z, \quad (22)$$

其中$\mathbf{M}_{FF}$ 支配自由个体之间的相互作用，而$\mathbf{M}_{FZ}$ 编码狂热者对自由个体的影响力。

在稳态下，每个自由个体的意见满足以狂热者为边界条件的离散拉普拉斯方程：

$$x_i^* = \frac{1}{k_i}\sum_{j\sim i} x_j^*, \quad i \in F. \quad (23)$$

这具有随机游走解释：x_i^* 等于从节点 i出发的游走者所遇到的期望狂热者意见，

$$x_i^* = \sum_{j\in Z} h_i^{(j)} s_{Z,j}, \quad (24)$$

其中 $h_i^{(j)}$ 是首次命中狂热者 j的概率。定义元素为 $H_{ij} = h_i^{(j)}$ 的命中概率矩阵$\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N_F \times N_Z}$后，稳态变为

$$\mathbf{x}_F^* = \mathbf{H}\mathbf{s}_Z, \quad \text{where} \quad \mathbf{H} = -\mathbf{M}_{FF}^{-1}\mathbf{M}_{FZ}. \quad (25)$$

关键在于，稳态通常是一种分布，而非均匀共识：在随机游走意义上更接近高意见狂热者的个体，其均衡值高于更接近低意见狂热者的个体，这类似于稳态热传导中热边界与冷边界之间的温度梯度。

对于逆问题——找出能够实现目标分布的顽固派意见——我们对式（25）求逆：

$$\mathbf{s}_Z = \mathbf{H}^{+}\mathbf{x}_F^*. \quad (26)$$

由于$\mathbf{H}$ 的秩至多为 N_Z，只有列空间中的分布才能被精确实现；对于任意目标，伪逆可给出最小二乘意义下最优的顽固者配置。

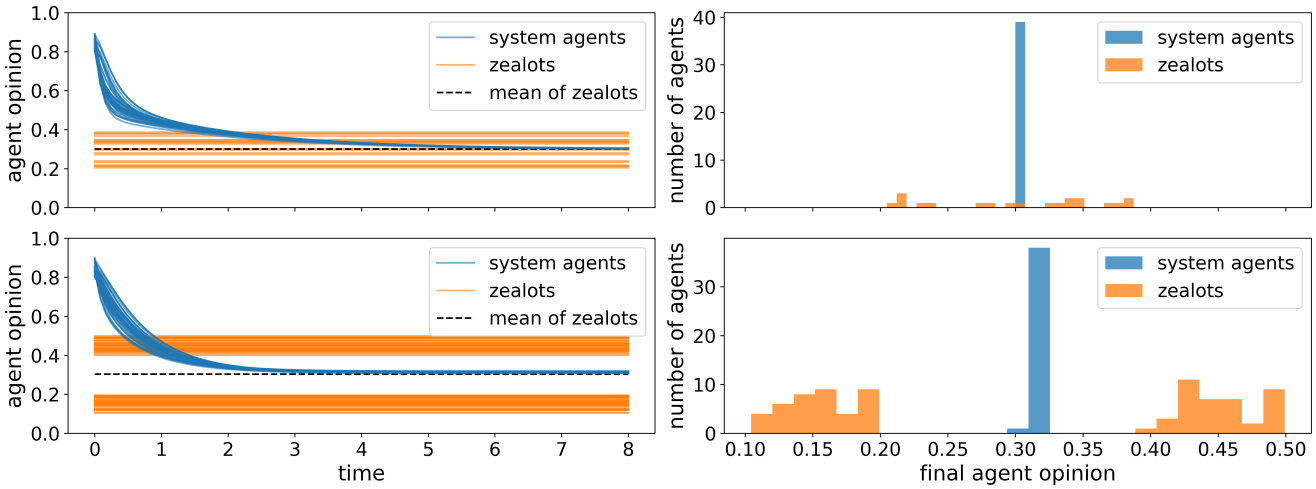

图 3：**顽固者对系统个体的影响**。顶行中，顽固者意见取样自单个均匀分布；底行中，顽固者意见取样自两个不相交的均匀分布。所有系统个体均取样自单个均匀分布。左列展示意见动力学，右列展示稳态意见分布。随着时间推移，顽固者对系统个体的影响表现为系统个体意见分布逐渐收窄并发生偏移。在稳态下，系统主体意见分布于顽固者意见均值附近。

回到系统-浴划分：由于自由个体同时包含系统和浴，式（25）可同时确定两者的稳态，

$$\begin{pmatrix}\mathbf{x}_s^*\\ \mathbf{x}_b^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{H}_{sZ}\\ \mathbf{H}_{bZ}\end{pmatrix}\mathbf{s}_Z, \tag{27}$$

其中，$\mathbf{H}_{sZ}$ 和$\mathbf{H}_{bZ}$ 分别是$\mathbf{H}$ 中对应于系统个体和浴代理的行。浴状态并非预先假定，而是由调和结构预测得到。在顽固者受限于浴的秘密行动中，该框架揭示了间接操纵如何传播：顽固者的影响力先通过浴扩散，再到达系统；命中概率$\mathbf{H}_{sZ}$ 量化了这一间接路径。

图 3 展示了顽固者对系统个体的影响。顶行考察顽固者意见取样自单个均匀分布的情形，底行则考察顽固者意见取样自两个不相交均匀分布的情形。在这两种情形下，系统个体均从一个与顽固者意见分离的均匀分布中初始化。左列展示系统个体（蓝色）和顽固者（橙色）的意见随时间的变化，右列展示系统个体和顽固者的稳态意见分布。在这两种情形下，系统个体意见的分布都会随时间推移逐渐变窄，并向顽固者意见均值（黑色虚线）偏移。在稳态下，系统主体意见紧密分布于顽固者意见的均值附近。

我们构建了一个框架，可将线性基于主体的模型通过精确的广义朗之万方程，从封闭系统描述转化为开放系统描述。环境耦合表现为记忆核，其模态结构——时间尺度和耦合强度——由环境相互作用的谱决定。这种方法无需显式模拟所有环境个体，即可捕捉关键的环境信息。

将该框架应用于DeGroot意见动力学后，我们发现网络拓扑通过两种截然不同的机制塑造记忆结构。小世界重连增强了全局信息交换，打破特征值简并，并使浴趋向于单一主导弛豫模态。相比之下，具有孤立子群体（回声室）的碎片化环境会维持多个持久模态，无法将其合并为单一有效路径。这些结构特征反映了系统对外部操纵的不同易受影响性。

对于对手仅在环境网络中布置顽固者的隐蔽影响行动，稳态系统响应可由一个命中概率矩阵推导得出，该矩阵编码了到达顽固者位置的随机游走距离。这种结构表明，顽固者充当意见储库：系统个体最终会趋于一种以顽固者意见均值为中心的分布，而分布的离散程度取决于网络几何结构，而非初始条件。因此，该框架既揭示了间接影响力的作用机制，也为分析网络化系统中的战略脆弱性奠定了基础。

通过投影算子方法将研究扩展至非线性动力学、时变网络以及顽固者布置优化，是未来研究的自然方向。

这是文档 LA-UR-26-20919。

[1] E. Bonabeau, 《美国国家科学院院刊》**99**, 7280 (2002). [2] J. M. Epstein, *Generative Social Science: Studies in Agent-Based Computational Modeling*（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2006）。[3] R. M. Anderson、H. Heesterbeek、D. Klinkenberg 和 T. D. Hollingsworth, 《柳叶刀》**395**, 931 (2020). [4] M. Chinazzi、J. T. Davis、M. Ajelli、C. Gioannini、M. Litvinova、S. Merler、A. Pastore y Piontti、K. Mu、L. Rossi、K. Sun、C. Viboud、X. Xiong、H. Yu、M. E. Halloran、I. M. Longini Jr. 和 A. Vespignani, 《科学》**368**, 395 (2020). [5] C. R. Wells、P. Sah、S. M. Moghadas、A. Pandey、A. Shoukat、Y. Wang、Z. Wang、L. A. Meyers、B. H. Singer 和 A. P. Galvani, 《美国国家科学院院刊》**117**, 7504 (2020). [6] P. van den Driessche 和 J. Watmough, 《数学生物科学》**180**, 29 (2002)，谨以此文纪念 John Jacquez。

[7] P. J. Schmid, 《流体力学年度评论》**54**, 225 (2022). [8] G. Haller 和 B. Kasz´as, 《美国国家科学院院刊》**112**, 18639 (2024). [9] M. H. DeGroot, 《美国统计学会杂志》**69**, 118 (1974). [10] P. H. Leslie, 《生物计量学》**33**, 183 (1945). [11] H. Caswell, *Matrix Population Models: Construction, Analysis and Interpretation* 2 , , 第 nd 版（Sinauer Associates，桑德兰，MA，2001）。[12] W. W. Leontief, *Input-Output Economics*，第 2 版（牛津大学出版社，纽约，1986）。[13] R. E. Miller 和 P. D. Blair, *Input-Output Analysis: Foundations and Extensions* 2 ，第 nd 版（剑桥大学出版社，2009）。[14] R. Zwanzig, *Nonequilibrium statistical mechanics*（牛津大学出版社，2001）。[15] N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* 3 2007 ，第 rd 版（北荷兰出版社，阿姆斯特丹，）。[16] H. Mori, 《理论物理学进展》**33**, 423 (1965). [17] R. Zwanzig, 《物理评论》**124**, 983 (1961). [18] P. Jia、A. MirTabatabaei、N. E. Friedkin 和 F. Bullo, 《SIAM评论》**57**, 367 (2015). [19] D. Acemo˘glu、M. A. Dahleh、I. Lobel 和 A. Ozdaglar, 《动态博弈与应用》**1**, 3 (2011). [20] F. Pasqualetti、S. Zampieri 和 F. Bullo, 《网络系统控制汇刊》**1**, 40 (2014).