arXiv:2602.11115v1 [math.DG] 11 Feb 2026

在$(n-1)$维膨胀群不变的爱因斯坦–麦克斯韦方程的解

BENEDITO LEANDRO、ILTON MENEZES 和 RAFAEL NOVAIS

摘要。我们研究一个静电系统，其空间因子与 n 维欧几里得空间共形。我们对最一般的试探形式给出完备刻画，从而将相关静电系统的偏微分方程约化为常微分方程组。我们证明仅有两种可能：宇宙学常数非零，此时解必然在旋转或平移下不变；或者宇宙学常数为零，此时解属于 Majumdar–Papapetrou 类，并具有与一个不变的（$n-1$）维子群相关联的自由度。因此，我们在 Majumdar–Papapetrou 类中为电真空系统引入一个新解，该解在一个（$n-1$）维膨胀群下不变。

1. 引言

带宇宙学常数 $\Lambda \in \mathbb{R}$ 的洛伦兹流形 $(\widehat{M}^{n+1}, \hat{g})$ 上的爱因斯坦–麦克斯韦方程为

$$\begin{cases} \mathrm{Ric}_{\hat{g}} - \dfrac{R_{\hat{g}}}{2}\hat{g} + \Lambda\hat{g} &= 2\left(F\circ F - \frac{1}{4}|F|^2_{\hat{g}}\hat{g}\right), \\ dF &= 0, \quad \text{and} \quad \mathrm{div}_{\hat{g}} F = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，F表示（法拉第）电磁 (0, 2)-张量，且 $(F\circ F)_{\alpha\beta} = \hat{g}^{\sigma\gamma}F_{\alpha\sigma}F_{\beta\gamma}$，希腊指标的取值范围为 1 到 $n+1$。

静态时空是一个乘积流形 $\widehat{M}^{n+1} = \mathbb{R}\times M^n$，其度量为

$$\hat{g} = -N^2dt^2 + \overline{g},$$

其中 (M^n, g) 是一个定向的 n 维黎曼流形，N 是 M^n 上的正光滑函数。将电磁场取为 $F = NE^\flat \wedge dt$ 的形式，其中 $E^\flat$ 表示与电场 E 对偶的 1-形式，则爱因斯坦–麦克斯韦系统可化为以下定义（参见 [5, 9] 及其中的参考文献）。

定义 1。设(M^n, g)是一个 n 维黎曼流形，$E \in \mathfrak{X}(M)$是一个切向量场，$N \in C^\infty(M)$ 是一个正函数。与(M^n, g, N, E)相关联的静态时空中，带宇宙学常数 Λ 的爱因斯坦–麦克斯韦方程为

$$\Delta_{\overline{g}} N = 2N\left(\frac{n-2}{n-1}|E|^2_{\overline{g}} - \frac{\Lambda}{n-1}\right), \tag{1.2}$$

$$\mathrm{div}_{\overline{g}} E = 0, \qquad \mathrm{d}(NE^\flat) = 0, \tag{1.3}$$

and

$$\nabla^2_{\overline{g}} N = N\left(\mathrm{Ric}_{\overline{g}} - \frac{2\Lambda}{n-1}\overline{g} + 2E^\flat\otimes E^\flat - \frac{2}{n-1}|E|^2_{\overline{g}}\overline{g}\right). \tag{1.4}$$

日期：2026年2月12日。2020 数学主题分类。主要分类 53C25；83C22；53C21；53Z05。关键词和短语。静电系统，共形度量，爱因斯坦–麦克斯韦方程，静电系统，电真空系统，Majumdar-Papapetrou 解，对称群。
通讯作者：B. Leandro (bleandrone@mat.unb.br)。

在这种情况下，(M^n, g, N, E) 称为静电系统。如果 (M^n, g) 是完备的，那么该静电系统也完备。

这里，$|\cdot|_{\bar{g}}$、Δ_g 和 ∇_g^2 分别表示关于 g 的范数、拉普拉斯算子和海森张量。此外，Ric_g 和 div_g 分别表示与 g 相关的里奇张量和散度。函数 N 和流形 $\bar{M}^n$ 分别称为静态爱因斯坦–麦克斯韦时空的切片函数（或静态势）和空间因子。宇宙学常数为零的静电系统称为电真空系统。特别地，当宇宙学常数和电场都恒等于零时，定义 1 就化为静态真空爱因斯坦方程。

将 (1.4) 缩并并与 (1.2) 结合，可得

$$R_{\bar{g}} = 2\left(|E|_{\bar{g}}^2 + \Lambda\right), \tag{1.5}$$

其中，R_g 表示 (M^n, g) 的标量曲率。由于 $\mathrm{d}(NE^\flat) = 0$，庞加莱引理表明，局部存在一个光滑函数 ψ，使得

$$NE^\flat = \mathrm{d}\,\psi.$$

因此，

$$NE = \nabla_{\bar{g}}\psi,$$

我们将 (M^n, g, N, ψ) 称为电势为 ψ 的静电系统。

Reissner–Nordström 时空是定义 1 中最重要的解之一，可解释为静态黑洞或带电量为 q、质量为 m 的恒星模型。根据 $m^2 > q^2$、$m^2 = q^2$ 或 $m^2 < q^2$ 是否成立，该解分别称为次极端、极端或超极端 解。另一个基本的电真空解是马伊姆达尔–帕帕佩特鲁（MP）解，它与极端 Reissner–Nordström 时空相关。Reissner–Nordström 解和马伊姆达尔–帕帕佩特鲁解都是最重要且研究最深入的电真空系统之一；参见 [9, 10]。

马伊姆达尔–帕帕佩特鲁解描述了任意数量带电黑洞的静态平衡，其相互间的电斥力恰好抵消引力。后来人们认识到，这一非凡构型是超引力的一个超对称解。最近的研究表明，这一族解构成了该理论中唯一一类 BPS黑洞；参见 [12] 及其中的参考文献。情形 $m > |q|$ 已通过将 Bunting 和 Masood-ul-Alam 的巧妙方法推广至高维而得到完整分类；结果表明，唯一的非平凡渐近平坦正则解是 Reissner–Nordström 黑洞（关于渐近平坦次极端电真空系统的形式分类，参见 [3, 4] ）。

在本文中，我们聚焦于极端情形，即 $m = |q|$。在此背景下，Kunduri 和 Lucietti [7] 证明了，一个渐近平坦静电真空空间（M^n，g，N，ψ）满足 $m = |q|$当且仅当

$$\pm\sqrt{\frac{2(n-2)}{(n-1)}}\,\psi = 1 - N. \tag{1.6}$$

这一刻画意味着，极端解必属于 Majumdar–Papapetrou 类，即满足（$\mathbb{R}\times M^n$，$\hat{}g$）式（1.6）以及下式的静电真空时空类，

$$\hat{g} = -N^{-2}dt^2 + \bar{g}, \tag{1.7}$$

其中，共形关系 $g = \varphi^2 g$ 在 $\varphi = N^{1/(n-2)}$ 下成立；见 [7, 9, 12]。多中心极端黑洞解 [6]表示为

$$N = 1 + \sum_{I=1}^{N} \frac{q_I}{r_I^{n-2}}, \tag{1.8}$$

其中，$r_I = |x - p_I|$ 表示到各个中心 $p_I \in \mathbb{R}^n$ 的欧几里得距离，这些中心的笛卡尔坐标为 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$。Lucietti [12] 证明了，唯一具有适当正则事件视界的渐近平坦时空

属于 Majumdar–Papapetrou 类高维爱因斯坦-麦克斯韦真空解的，恰好是标准多黑洞解（1.8）。然而，在完全一般的情形下，这仍是一个悬而未决的问题；参见 [7, 12]。

本文介绍了一类不同的非渐近平坦 Majumdar–Papapetrou 解。我们的方法基于采用一种试探形式，将静电偏微分方程组化简为常微分方程组，随后即可显式求解。这类化简方法是研究非线性几何偏微分方程的经典手段，并已成功应用于多种情形，包括扭曲乘积构造和旋转对称情形，例如 Bryant孤子——这是 Ricci 孤子中最著名的例子之一。

在 Ricci 孤子的广泛分类研究中，多年来人们提出了多种不同的试探形式。文献 [1], 中得到了在一个 $(n-1)$ 维平移群作用下保持不变的稳态Ricci孤子；文献 [8] 中则建立了 Yamabe 孤子的类似结果。这些构造受到 [15], 的研究启发；该研究刻画了内禀广义波方程和正弦-Gordon方程的对称群，并随后利用这些对称群构造显式解。研究表明，相应的对称群仅由平移和伸缩变换构成。

随后，在 [11], 中，作者研究了与 n维伪欧几里得空间共形的梯度Ricci孤子，并描述了将相关偏微分方程组化为常微分方程组的最一般代换。因此，所得梯度Ricci孤子在底空间上作用的（$n-1$）维平移群或伪正交群下保持不变。 [16], 中给出了静态度规的相关结果，其中 n维Schwarzschild解是其一个应用。 [2, 10],进一步研究了在平移下保持不变的爱因斯坦方程静态解，而 [14]则推导出了拟爱因斯坦度规的平移不变解。最近， [13]采用Lie点对称性，构造了满足带指定张量的Ricci曲率方程和爱因斯坦方程的度规。

本工作的创新之处在于，发现了一类宇宙学常数为零的爱因斯坦–麦克斯韦方程静态解，其群不变量由一个涉及切片函数的方程确定。具体而言，这揭示了Majumdar–Papapetrou 类中存在额外的群不变解，其中包括在伸缩变换下保持不变的解。这种情况与爱因斯坦型方程已知群不变解通常表现出的刚性形成对比，例如Ricci孤子、静态真空度规和拟爱因斯坦度规通常仅在平移或旋转下保持不变（见 [16, 11]）。因此，存在具有本质不同不变类型的静态度规值得关注。

为证明我们的主要结果，即定理 1 的第 (1) 项，我们仔细分析定义 1 中给出的方程组。为此，我们使用共形平坦度量将该方程组化为常微分方程组。这一约化涉及冗长的计算过程，我们将在下文概述。通过进行这一分析，我们得到电真空系统在 Majumdar–Papapetrou 类中的一族新解，它在 $(n-1)$ 维膨胀群下不变，见定理 2。从偏微分方程的角度看，这一现象尤其有趣，因为据我们所知，对于 Ricci孤子、Yamabe 孤子、拟爱因斯坦度规和静态真空度规等方程，此前尚未观察到这种现象；见 [1, 2, 8, 11, 14, 16] 及其中的参考文献。

现在，我们先介绍一些基本记号，再陈述主要结果。函数 φ、N 和 ψ 定义了静电系统的一个解 $(\Omega,\ g,\ N,\ \psi)$，其中 $g = g/\varphi^2$ 是与欧几里得度量 g共形的度量，其共形因子为 φ。在全文中，$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$表示函数 φ、N 和 ψ 所定义在其上的一个开子集。为方便起见，我们采用共形变换 $g = g/\varphi^2$，而不采用$g = \varphi^2 g$（后者在 Majumdar–Papapetrou 类中更为常用）；需要指出的是，这种选择不会影响结果，仅仅是为了方便。

定理 1. 设（$\mathbb{R}^n$， g）为带有笛卡尔坐标（x_1，……， x_n）和欧几里得度量 g的欧几里得空间。那么，存在一个光滑函数 $\xi = \xi$（x_1，……， x_n），使得（Ω g， N（ξ）$\bar{}$$\psi$（$\xi$））是静电系统的一个解，当且仅当下列条件之一成立：

(1) 该解属于 *Majumdar–Papapetrou* 类，满足 (1.6)和 (1.7)，其中 $\Lambda = 0$，并且

$$-\frac{d}{d\xi}\log\left(-\frac{d}{d\xi}\left(N^{-1}\right)\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n}\partial_{x_k}^2\xi}{\sum_{k=1}^{n}\left(\partial_{x_k}\xi\right)^2}; \tag{1.9}$$

(2) 该解不属于 *Majumdar–Papapetrou* 类，并且

$$\xi(x_1,\ldots,x_n) = \Gamma\left(\sum_{k=1}^{n}\tau x_k^2 + \gamma_k x_k + \theta_k\right). \tag{1.10}$$

这里， τ、 γ_k和 θ_k 是实常数， Γ 是光滑实函数。

第 (2) 项中的情形 $\tau = 0$ 推广了 [10] 中得到的解，并给出了在平移下不变的解。当 $\tau \neq 0$ 时，这些解是球对称的，这种情形已在 [3, 4]中讨论。因此，在本文余下部分，我们将专注于定理 1 的第 (1) 项。特别是，该结果允许选取任意光滑函数 ξ，前提是方程 (1.9) 可解。

我们证明，存在一个在伸缩变换下不变的电真空方程的 Majumdar-Papapetrou 解（并非渐近平坦 [7, 12]）。此外，我们将证明，经典 MP 解可以由定理 1 第 (1) 项恢复；见下文推论 1。

定理 2. 设$(\mathbb{R}^n, g)$ 为带有笛卡尔坐标 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 和欧几里得度量 g 的欧几里得空间。考虑Ω $\subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集，使得切片函数 N 有定义。这里， $1 \le m_1 \le m_2 \le n$, $k \neq 0$, k_1 为常数。此外，

$$\eta = \sum_{k=1}^{m_2} b_k^2, \quad \theta = -2\sum_{k=1}^{m_1} a_k b_k, \quad \delta = \sum_{k=1}^{m_1} a_k^2, \quad \sum_{i=1}^{m_1} a_i \neq 0, \quad \textit{and} \quad \prod_{j=1}^{m_2} b_j \neq 0,$$

其中 a_i, $b_j \in \mathbb{R}$。于是，

$$(\Omega, \overline{g}, N, \psi),$$

是电真空系统的一个解，其中

$$\overline{g} = \frac{g}{\varphi^2}, \qquad \pm\sqrt{\frac{2(n-2)}{(n-1)}}\psi = 1 - N, \qquad \varphi = N^{1/(n-2)},$$

and

$$\frac{1}{N(x)} = k_1 + \frac{2k}{\sqrt{4\eta\delta - \theta^2}}\arctan\left(\frac{\theta\sum_{j=1}^{m_2} b_j x_j + 2\eta\sum_{i=1}^{m_1} a_i x_i}{\sqrt{4\eta\delta - \theta^2}\sum_{j=1}^{m_2} b_j x_j}\right),$$

其中 $4\eta\delta - \theta^2 > 0$。

作为上述定理的推论，我们得到一个新的静态时空解示例，它是宇宙学常数为零的爱因斯坦–麦克斯韦方程的解，定义在 $\widehat{M}^{n+1} = \mathbb{R}\times\Omega$ 上，并赋有度量

$$\widehat{g} = -N^2 dt^2 + \frac{g}{\varphi^2}.$$

现在我们更精确地描述切片函数有定义的定义域 Ω。

注释 1 (切片函数的定义域 Ω **)**。 定理 *2* 中得到的切片函数取决于不变量

$$\xi(x) = \frac{M(x)}{P(x)}, \qquad M(x) = \sum_{i=1}^{m_1} a_i x_i, \quad P(x) = \sum_{j=1}^{m_2} b_j x_j.$$

特别是，假设 $\sum_{i=1}^{m_1} a_i \neq 0$ 和 $\prod_{j=1}^{m_2} b_j \neq 0$ 确保了 $\delta > 0$ 和 $\eta > 0$。根据柯西–施瓦茨不等式，

$$4\eta\delta - \theta^2 = 4\left[\Big(\sum_{j=1}^{m_2} b_j^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m_1} a_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{m_1} a_i b_i\Big)^2\right] \geq 0.$$

此外，当且仅当向量 $(a_1, \ldots, a_{m_1})$ 和 $(b_1, \ldots, b_{m_2})$ 线性相关时，等号成立；当 $m_1 = m_2$时，这种情况有可能发生，但不包括 $4\eta\delta - \theta^2 = 0$的情形。因为在这种情况下， $\xi(x)$ 是一个常函数。因此， ξ （以及 N）的自然解析域为

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \ P(x) \neq 0\},$$

因为不变量 ξ 在超平面 $\{P = 0\}$上未定义。

考虑 $4\eta\delta - \theta^2 > 0$，切片函数由反正切函数给出，该函数对所有 $\xi \in \mathbb{R}$都有定义。注意，对所有 $t \in \mathbb{R}$，$\arctan(t) \in (-\pi/2, \pi/2)$，由此可得

$$k_1 - \frac{k\pi}{\sqrt{4\eta\delta - \theta^2}} < N^{-1}(x) < k_1 + \frac{k\pi}{\sqrt{4\eta\delta - \theta^2}}, \qquad \forall\, x \in \Omega_0.$$

特别地， N^{-1} 在Ω_0上一致有界。因此，

$$\{x \in \Omega_0 : \ N(x) = 0\} = \varnothing.$$

在此情形下，解的定义域是该开子集

$$\Omega = \{x \in \Omega_0 : \ N(x) > 0\},$$

它仅由切片函数为正这一几何要求所确定。

备注 2（定理 2 的一致等价性与完备性）。鉴于

$$4\eta\delta - \theta^2 > 0$$

以及由反正切表达式给出的切片函数。由于对于所有$t \in \mathbb{R}$，$\arctan(t) \in (-\pi/2, \pi/2)$，我们有

$$k_1 - \frac{k\pi}{\sqrt{4\eta\delta - \theta^2}} < N^{-1}(x) < k_1 + \frac{k\pi}{\sqrt{4\eta\delta - \theta^2}}, \qquad \forall x \in \Omega,$$

其中Ω 是 N 有定义且为正的任意开集。定义

$$A = k_1 - \frac{k\pi}{\sqrt{4\eta\delta - \theta^2}}, \qquad B = k_1 + \frac{k\pi}{\sqrt{4\eta\delta - \theta^2}},$$

我们注意到 $B > 0$。此外，如果 $A > 0$，那么 N^{-1} 与零一致地保持正距离。在这种情况下，共形度量

$$\overline{g} = N^{-\frac{2}{n-2}}\, g$$

is 与欧几里得度量 g 一致等价，即存在正常数 c_1、c_2，使得 *t* *hat*

$$c_1\, g \ \leq \ \overline{g} \ \leq \ c_2\, g \quad \textit{on}\ \Omega.$$

因此，(Ω g) 完备，当且仅当(Ω g) 完备。 −

2. 背景

下文中，我们对函数 $F = F(\xi)$ 的导数采用以下约定，其中 $\xi\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个依赖于笛卡尔坐标 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 的光滑函数。

$$\frac{dF}{d\xi} = F', \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = F_{,i} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = F_{,ij}.$$

引理1。 设$(\mathbb{R}^n, g)$， $n \geq 3$为带有笛卡尔坐标$(x_1, ..., x_n)$和欧几里得度量 g的欧几里得空间。考虑光滑函数 φ、 ψ 和 N 以及度量 $g = g/\varphi^2$ ，使得$(\Omega\ \ g, N, \psi)$，$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$是静电系统的一个解。那么，函数 φ、 ψ 和 N必须满足

$$\sum_{k=1}^{n}\left[2(n-1)N\varphi_{,kk} - n(n-1)\frac{N}{\varphi}(\varphi_{,k})^2 - 2\frac{\varphi}{N}(\psi_{,k})^2\right] = \frac{2N}{\varphi}\Lambda. \tag{2.1}$$

引理*1*的证明。 由方程（1.5）可得

$$R_{\overline{g}} = 2\left(\frac{|\nabla_{\overline{g}}\psi|^2}{N^2} + \Lambda\right),$$

其中， R_g 和 ∇_g分别表示相对于 g的标量曲率和梯度。众所周知， g 的标量曲率（参见 [17]）由下式给出

$$R_{\overline{g}} = (n-1)\left(2\varphi\,\Delta_g\varphi - n|\nabla_g\varphi|^2\right).$$

此外，若 ψ 是（Ω g）上的光滑函数，则

$$|\nabla_{\overline{g}}\psi|^2 = \varphi^2\sum_{k=1}^{n}(\psi_{,k})^2.$$

将上述恒等式与方程 (1.5) 结合，可得

$$(n-1)\left(2\varphi\,\Delta_g\varphi - n|\nabla_g\varphi|^2\right) = 2\left(\frac{|\nabla_{\overline{g}}\psi|^2}{N^2} + \Lambda\right).$$

在笛卡尔坐标中，这个恒等式变为

$$\sum_{k=1}^{n}\left[2(n-1)N\varphi_{,kk} - n(n-1)\frac{N}{\varphi}(\varphi_{,k})^2 - 2\frac{\varphi}{N}(\psi_{,k})^2\right] = \frac{2N}{\varphi}\Lambda,$$

至此，证明完成。 □

接下来，我们将定义 1 中给出的静电系统化为一个偏微分方程组，该方程组涉及函数 ψ、φ 和 N 及其偏导数。

定理 3. 设$(\mathbb{R}^n, g)$， $n \geq 3$为具有笛卡尔坐标 $x = (x_1, \dots, x_n)$和欧几里得度量分量 g的欧几里得空间。那么，存在度量 $g = g/\varphi^2$ ，使得$(\Omega\ \ g, N, \psi)$,$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$是静电系统的一个解，当且仅当光滑函数 φ、 ψ 和 N满足

$$(n-2)N\varphi_{,ij} - \varphi N_{,ij} - \varphi_{,i}N_{,j} - \varphi_{,j}N_{,i} + 2\frac{\varphi}{N}\psi_{,i}\psi_{,j} = 0, \qquad \text{for } i \neq j; \tag{2.2}$$

并且对于每个 i

$$\begin{aligned}\varphi\left[(n-2)N\varphi_{,ii} - \varphi N_{,ii} - 2\varphi_{,i}N_{,i} + 2\frac{\varphi}{N}(\psi_{,i})^2\right]\\ + \sum_{k=1}^{n}\left[\varphi\varphi_{,kk}N + \varphi\varphi_{,k}N_{,k} - (n-1)N(\varphi_{,k})^2 - \frac{2}{(n-1)N}\varphi^2(\psi_{,k})^2\right] = \frac{2\Lambda}{n-1}N;\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}[N\varphi\psi_{,kk}-(n-2)N\varphi_{,k}\psi_{,k}-\varphi\psi_{,k}N_{,k}]=0; \tag{2.4}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\varphi^2NN_{,kk}-(n-2)\varphi\varphi_{,k}NN_{,k}-\frac{2(n-2)}{n-1}\varphi^2\left(\psi_{,k}\right)^2\right]=-\frac{2\Lambda}{n-1}N^2. \tag{2.5}$$

定理 *3* 的证明。回顾形如 $g=g/\varphi^2$ 的共形度量的里奇张量和标量曲率的表达式（参见 [17]）：

$$\mathrm{Ric}_{\overline{g}}=\frac{1}{\varphi^2}\Big((n-2)\varphi\,\nabla_g^2\varphi+\big[\varphi\Delta_g\varphi-(n-1)|\nabla_g\varphi|^2\big]g\Big)$$

and

$$R_{\overline{g}}=(n-1)\big(2\varphi\Delta_g\varphi-n|\nabla_g\varphi|^2\big).$$

由方程 (1.4)，可得

$$N\,\mathrm{Ric}_{\overline{g}}=\nabla_{\overline{g}}^2N-2\frac{\nabla_{\overline{g}}\psi\otimes\nabla_{\overline{g}}\psi}{N}+\frac{2}{n-1}\left(\frac{|\nabla_{\overline{g}}\psi|^2}{N}+N\Lambda\right)\overline{g},$$

这等价于

$$\begin{aligned}(n-2)N\varphi(\nabla_g^2\varphi)_{ij}&+N\big[\varphi\Delta_g\varphi-(n-1)|\nabla_g\varphi|^2\big]\delta_{ij}\\&=\varphi^2(\nabla_{\overline{g}}^2N)_{ij}+\frac{2}{n-1}\left(\frac{|\nabla_{\overline{g}}\psi|^2}{N}+N\Lambda\right)\delta_{ij}-\frac{2\varphi^2}{N}(\nabla_{\overline{g}}\psi\otimes\nabla_{\overline{g}}\psi)_{ij}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

N 关于 g 的海森张量为

$$(\nabla_{\overline{g}}^2N)_{ij}=N_{,ij}-\sum_{k=1}^{n}\overline{\Gamma}_{ij}^kN_{,k},$$

其中 $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ 表示 g的克里斯托费尔符号。对于互不相同的指标 i,j,k，有

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k=0,\qquad\overline{\Gamma}_{ij}^i=-\frac{\varphi_{,j}}{\varphi},\qquad\overline{\Gamma}_{ii}^k=\frac{\varphi_{,k}}{\varphi},\qquad\overline{\Gamma}_{ii}^i=-\frac{\varphi_{,i}}{\varphi}. \tag{2.7}$$

因此,

$$(\nabla_{\overline{g}}^2N)_{ij}=N_{,ij}+\frac{\varphi_{,j}N_{,i}}{\varphi}+\frac{\varphi_{,i}N_{,j}}{\varphi},\qquad i\neq j, \tag{2.8}$$

and

$$(\nabla_{\overline{g}}^2N)_{ii}=N_{,ii}+2\frac{\varphi_{,i}N_{,i}}{\varphi}-\frac{1}{\varphi}\sum_{k=1}^{n}\varphi_{,k}N_{,k},\qquad\text{for each } i. \tag{2.9}$$

此外,

$$|\nabla_g\varphi|^2=\sum_{k=1}^{n}(\varphi_{,k})^2,\qquad\Delta_g\varphi=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{,kk}, \tag{2.10}$$

and

$$(\nabla_g^2\varphi)_{ij}=\varphi_{,ij},\qquad(\nabla_{\overline{g}}\psi\otimes\nabla_{\overline{g}}\psi)_{ij}=\psi_{,i}\psi_{,j}. \tag{2.11}$$

首先，假设 $i\neq j$ 满足式 (2.6)。那么

$$(n-2)N(\nabla_g^2\varphi)_{ij}-\varphi(\nabla_{\overline{g}}^2N)_{ij}+2\frac{\varphi}{N}\psi_{,i}\psi_{,j}=0. \tag{2.12}$$

将 (2.8) 和 (2.11) 代入 (2.12)，得到

$$(n-2)N\varphi_{,ij}-\varphi N_{,ij}-\varphi_{,j}N_{,i}-\varphi_{,i}N_{,j}+2\frac{\varphi}{N}\psi_{,i}\psi_{,j}=0.$$

若在 (2.6) 中改为 $i=j$，则由 (2.11) 可得

$$(n-2)N\varphi(\nabla_g^2\varphi)_{ii}+N\left[\varphi\Delta_g\varphi-(n-1)|\nabla_g\varphi|^2\right] = \varphi^2(\nabla_{\overline{g}}^2N)_{ii}+\frac{2}{n-1}\left(\frac{|\nabla_{\overline{g}}\psi|^2}{N}+N\Lambda\right)-\frac{2\varphi^2}{N}(\psi_{,i})^2. \tag{2.13}$$

将 (2.9)、(2.10) 和 (2.11) 与 (2.13) 结合，得到

$$\varphi\Big[(n-2)N\varphi_{,ii}-\varphi N_{,ii}-2\varphi_{,i}N_{,i}+2\frac{\varphi}{N}(\psi_{,i})^2\Big] +\sum_{k=1}^{n}\Big[\varphi\varphi_{,kk}N+\varphi\varphi_{,k}N_{,k}-(n-1)N(\varphi_{,k})^2-\frac{2\varphi^2}{(n-1)N}(\psi_{,k})^2-\frac{2\Lambda}{(n-1)n}N\Big]=0.$$

方程 (1.3)，即 div$_g$($\nabla_g\psi/N$)$=0$，等价于

$$N\Delta_{\overline{g}}\psi-\overline{g}(\nabla_{\overline{g}}\psi,\nabla_{\overline{g}}N)=0. \tag{2.14}$$

直接计算可得

$$\overline{g}(\nabla_{\overline{g}}\psi,\nabla_{\overline{g}}N)=\varphi^2\sum_{i=1}^{n}\psi_{,i}N_{,i}. \tag{2.15}$$

由于光滑函数 F 关于 g 的拉普拉斯算子为

$$\Delta_{\overline{g}}F=\sum_{i=1}^{n}\left[\varphi^2F_{,ii}-(n-2)\varphi\varphi_{,i}F_{,i}\right],$$

由 (2.14) 和 (2.15) 可知

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{N\varphi\psi_{,kk}-(n-2)N\varphi_{,k}\psi_{,k}-\varphi\psi_{,k}N_{,k}\right\}=0.$$

最后，方程 (1.2) 得出

$$\Delta_{\overline{g}}N=2N\left(\frac{n-2}{n-1}|E|^2-\frac{1}{n-1}\Lambda\right),$$

其中 $E=\nabla_{\overline{g}}\psi/N$。因此，

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\varphi^2NN_{,kk}-(n-2)\varphi\varphi_{,k}NN_{,k}-\frac{2(n-2)}{n-1}\varphi^2(\psi_{,k})^2\right]=-\frac{2\Lambda}{n-1}N^2.$$

反向蕴含可通过直接计算得到。 □

3. 主要结果的证明

下面的结果将 [11] 和 [16] 中发展的技术应用于静电系统。其目的在于刻画最一般的光滑函数 $\xi:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，其中 $\xi=\xi(x_1、\ .....、\ x_n)$，使得偏微分方程 (2.2)、(2.3)、(2.4) 和 (2.5) 可以化为一个常微分方程组。

Pr定理 1 的证明。 假设 $\varphi(\xi)$、 $\psi(\xi)$ 和 $N(\xi)$ 都是 ξ 的函数。那么，例如，

$$\varphi_{,i}=\varphi'\xi_{,i};\qquad \varphi_{,ii}=\varphi''\left(\xi_{,i}\right)^2+\varphi'\xi_{,ii};\qquad \varphi_{,ij}=\varphi''\xi_{,i}\xi_{,j}+\varphi'\xi_{,ij}. \tag{3.1}$$

因此，由 (2.2) 得，

$$\left[(n-2)\varphi''N-\varphi N''-2\varphi'N'+2\frac{\varphi}{N}\left(\psi'\right)^2\right]\xi_{,i}\xi_{,j} +\left[(n-2)\varphi'N-\varphi N'\right]\xi_{,ij}=0. \tag{3.2}$$

必须分两种不同情形分析恒等式 (3.2)。与 [11, 16], 其中 $(n-2)\varphi' N - \varphi N' \neq 0$ 是显然成立的事实不同，众所周知，电真空系统的 Majumdar-Papapetrou多中心极值解满足 $(n-2)\varphi' N - \varphi N' = 0$；参见 (1.7)。因此，我们将分别讨论这两种情形。

首先，考虑 $(n-2)\varphi' N - \varphi N' = 0$。由于 $\xi_{,i}\xi_{,j} \neq 0$ 是 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 的子集，对于某个 $i \neq j$，由 (3.2) 可得 $(n-2)\varphi'' N - \varphi N'' - 2\varphi' N' + 2\frac{\varphi}{N}(\psi')^2 = 0$。对 $(n-2)\varphi' N - \varphi N' = 0$ 求导得到

$$(n-2)N\varphi'' - \varphi N'' - 2N'\varphi' = -(n-1)\varphi' N'. \tag{3.3}$$

将 $(n-2)\varphi'' N - \varphi N'' - 2\varphi' N' + 2\frac{\varphi}{N}(\psi')^2 = 0$ 与上述恒等式结合，我们得到

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{n-2}\frac{N'}{N}, \quad \text{and} \quad (\psi')^2 = \frac{n-1}{2(n-2)}(N')^2. \tag{3.4}$$

A这有力地表明，我们处理的是 Majumdar–Papapetrou类解 .

接下来，由 (2.3) 和 (3.4)，我们有

$$\begin{aligned}\left[\varphi\varphi'' N + \varphi\varphi' N' - (n-1)N(\varphi')^2 - \frac{2}{(n-1)N}\varphi^2(\psi')^2\right]|\nabla_g \xi|^2 \\ + \varphi\left[-(n-1)N'\varphi' + \frac{2\varphi}{N}(\psi')^2\right](\xi_{,i})^2 + \varphi\varphi' N\Delta_g \xi = \frac{2\Lambda}{n-1}N.\end{aligned} \tag{3.5}$$

将方程 (3.3) 代入 $(n-2)\varphi'' N - \varphi N'' - 2\varphi' N' + 2\frac{\varphi}{N}(\psi')^2 = 0$，得到

$$N'\varphi' - \frac{2\varphi}{(n-1)N}(\psi')^2 = 0, \tag{3.6}$$

and

$$\begin{aligned}&\varphi\varphi'' N + \varphi\varphi' N' - (n-1)N(\varphi')^2 - \frac{2}{(n-1)N}\varphi^2(\psi')^2 \\ &\quad = \varphi\varphi'' N - (n-1)N(\varphi')^2 + \varphi\varphi' N' - \frac{2}{(n-1)N}\varphi^2(\psi')^2 \\ &\quad = N\left[\varphi\varphi'' - (n-1)(\varphi')^2\right] + \varphi\left(\varphi' N' - \frac{2}{(n-1)N}\varphi(\psi')^2\right).\end{aligned}$$

由 (3.6)，可得

$$\varphi\varphi'' N + \varphi\varphi' N' - (n-1)N(\varphi')^2 - \frac{2}{(n-1)N}\varphi^2(\psi')^2 = N\left[\varphi\varphi'' - (n-1)(\varphi')^2\right].$$

在这种情况下，(3.5) 可改写为

$$\left[\varphi\varphi'' - (n-1)(\varphi')^2\right]|\nabla_g \xi|^2 + \varphi\varphi'\Delta_g \xi = \frac{2\Lambda}{n-1}. \tag{3.7}$$

另一方面，根据引理1，可以验证

$$\left[2(n-1)\varphi'' - n(n-1)\frac{(\varphi')^2}{\varphi} - \frac{2\varphi}{N^2}(\psi')^2\right]|\nabla_g \xi|^2 + 2(n-1)\varphi'\Delta_g \xi = \frac{2\Lambda}{\varphi}.$$

由 (3.4)，可得

$$\left[\varphi\varphi'' - (n-1)(\varphi')^2\right]|\nabla_g \xi|^2 + \varphi\varphi'\Delta_g \xi = \frac{\Lambda}{n-1}. \tag{3.8}$$

结合 (3.7) 和 (3.8) 得到

$$\Lambda = 0.$$

这也是预料之中的，因为静态 Majumdar-Papapetrou 解类的宇宙学常数为零。

由方程 (3.2)，可得

$$(n-2)\varphi''N-\varphi N''-2\varphi'N'+2\frac{\varphi}{N}\left(\psi'\right)^2=0.$$

此外，由 (3.4) 可知，该方程显然成立。结合 (2.3) 和 (3.1)，得到

$$\left[\varphi\varphi''N+\varphi\varphi'N'-(n-1)\left(\varphi'\right)^2N-\frac{2}{(n-1)N}\varphi^2\left(\psi'\right)^2\right]\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_{,k}\right)^2+\varphi\varphi'N\sum_{k=1}^{n}\xi_{,kk}=0.$$

类似地，由 (2.4) 和 (3.1)，可得

$$[\varphi N\psi''-(n-2)\varphi'N\psi'-\varphi N'\psi']\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_{,k}\right)^2+\varphi N\psi'\sum_{k=1}^{n}\xi_{,kk}=0,$$

最后，由 (2.5) 和 (3.1)，

$$\left[\varphi N''-(n-2)\varphi'N'-\frac{2(n-2)}{(n-1)N}\varphi\left(\psi'\right)^2\right]\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_{,k}\right)^2+\varphi N'\sum_{k=1}^{n}\xi_{,kk}=0.$$

因此，我们得到如下方程组

(1) $\left[\varphi\varphi''N+\varphi\varphi'N'-(n-1)\left(\varphi'\right)^2N-\frac{2}{(n-1)N}\varphi^2\left(\psi'\right)^2\right]|\nabla_g\xi|^2+\varphi\varphi'N\Delta_g\xi=0,$

(2) $[\varphi N\psi''-(n-2)\varphi'N\psi'-\varphi N'\psi']\,|\nabla_g\xi|^2+\varphi N\psi'\Delta_g\xi=0,$

(3) $\left[\varphi N''-(n-2)\varphi'N'-\frac{2(n-2)}{(n-1)N}\varphi\left(\psi'\right)^2\right]|\nabla_g\xi|^2+\varphi N'\Delta_g\xi=0.$

我们断言，(1)、(2) 和 (3) 等价。事实上，由

$$\frac{\varphi'}{\varphi}=\frac{1}{(n-2)}\frac{N'}{N},\quad\text{and}\quad\left(\psi'\right)^2=\frac{(n-1)}{2(n-2)}\left(N'\right)^2$$

我们可以看出，(1)、(2) 和 (3) 成立当且仅当

$$\frac{N''}{N'}-2\frac{N'}{N}=-\frac{\Delta_g\xi}{|\nabla_g\xi|^2}.$$

事实上，考虑到

$$\frac{\varphi'}{\varphi}=\frac{1}{n-2}\frac{N'}{N},\qquad(\psi')^2=\frac{n-1}{2(n-2)}(N')^2. \tag{3.9}$$

对 $(n-2)\varphi'N-\varphi N'=0$ 求导，得到

$$(n-2)N\varphi''-\varphi N''-2N'\varphi'=-(n-1)\varphi'N'. \tag{3.10}$$

注意，通过直接使用（1）进行计算，

$$\begin{aligned}&\left[\varphi\varphi''N+\varphi\varphi'N'-(n-1)(\varphi')^2N-\frac{2}{(n-1)N}\varphi^2(\varphi')^2\right]|\nabla_g\xi|^2+\varphi\varphi'N\Delta_g\xi\\&=\frac{\varphi^2}{n-2}\left\{\left[(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi}N+(n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}N'-\frac{(n-1)}{(n-2)}\left((n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2N-\frac{2(n-2)}{(n-1)}N(\varphi')^2\right]|\nabla_g\xi|^2\right.\\&\qquad\left.+(n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}N\Delta_g\xi\right\}.\end{aligned}$$

将上述方程与（3.9）和（3.10）结合，可得

$$\left[\varphi\varphi''N+\varphi\varphi'N'-(n-1)(\varphi')^2N-\frac{2}{(n-1)N}\varphi^2(\psi')^2\right]|\nabla_g\xi|^2+\varphi\varphi'N\Delta_g\xi$$
$$=\frac{\varphi^2N'}{n-2}\left\{\left[\frac{N''}{N'}-2\frac{N'}{N}\right]|\nabla_g\xi|^2+\Delta_g\xi\right\}.$$

因此，

$$\left[\varphi\varphi''N+\varphi\varphi'N'-(n-1)(\varphi')^2N-\frac{2}{(n-1)N}\varphi^2(\psi')^2\right]|\nabla_g\xi|^2+\varphi\varphi'N\Delta_g\xi=0.$$

当且仅当

$$\frac{N''}{N'}-2\frac{N'}{N}=-\frac{\Delta_g\xi}{|\nabla_g\xi|^2}.$$

考虑方程 (2)；注意 $(\psi')^2=\frac{n-1}{2\ n-2}(N')^2$。因此，$\psi'=AN'$ 且 $\psi''=AN''$，其中 $A=\pm\sqrt{\frac{n-1}{2\ n-2}}$。所以，

$$[\varphi N\psi''-(n-2)\varphi'N\psi'-\varphi N'\psi']|\nabla_g\xi|^2+\varphi N\psi'\Delta_g\xi$$
$$=\left[\varphi NAN''-A(n-2)\varphi'NN'-\varphi A(N')^2\right]|\nabla_g\xi|^2+\varphi ANN'\Delta_g\xi,$$

即，

$$[\varphi N\psi''-(n-2)\varphi'N\psi'-\varphi N'\psi']|\nabla_g\xi|^2+\varphi N\psi'\Delta_g\xi$$
$$=A\varphi NN'\left\{\left[\frac{N''}{N'}-(n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}-\frac{N'}{N}\right]|\nabla_g\xi|^2+\Delta_g\xi\right\}.$$

因此，

$$[\varphi N\psi''-(n-2)\varphi'N\psi'-\varphi N'\psi']|\nabla_g\xi|^2+\varphi N\psi'\Delta_g\xi=0.$$

当且仅当

$$\frac{N''}{N'}-2\frac{N'}{N}=-\frac{\Delta_g\xi}{|\nabla_g\xi|^2},\tag{3.11}$$

其中我们用到了 $(n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}=\frac{N'}{N}$。

最后，对于方程 (3)，注意到

$$\left[\varphi N''-(n-2)\varphi'N'-\frac{2(n-2)}{(n-1)N}\varphi(\psi')^2\right]|\nabla_g\xi|^2+\varphi N'\Delta_g\xi$$
$$=\varphi N'\left\{\left[\frac{N''}{N'}-(n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}-\frac{2(n-2)}{(n-1)N}\frac{(\psi')^2}{N'}\right]|\nabla_g\xi|^2+\Delta_g\xi\right\}.$$

由方程 (3.9) 可知

$$\left[\varphi N''-(n-2)\varphi'N'-\frac{2(n-2)}{(n-1)N}\varphi(\psi')^2\right]|\nabla_g\xi|^2+\varphi N'\Delta_g\xi=\varphi N'\left\{\left[\frac{N''}{N'}-2\frac{N'}{N}\right]|\nabla_g\xi|^2+\Delta_g\xi\right\}.$$

由此可得

$$\left[\varphi N''-(n-2)\varphi'N'-\frac{2(n-2)}{(n-1)N}\varphi(\psi')^2\right]|\nabla_g\xi|^2+\varphi N'\Delta_g\xi=0$$

当且仅当

$$\frac{N''}{N'} - 2\frac{N'}{N} = -\frac{\Delta_g \xi}{|\nabla_g \xi|^2}.$$

现在，考虑开子集 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 中的 $\xi_{,i}\xi_{,j} \neq 0$，其中存在某个 $i \neq j$，使得 $(n-2)\varphi' N - \varphi N' \neq 0$。由 (3.2) 可知

$$\frac{\xi_{,ij}}{\xi_{,i}\xi_{,j}} = H(\xi), \tag{3.12}$$

对于同一个光滑函数 $H(\xi) = \dfrac{\left[(n-2)\varphi'' N - \varphi N'' - 2\varphi' N' + 2\frac{\varphi}{N}(\psi')^2\right]}{(n-2)\varphi' N - \varphi N'}$。

通过积分，我们可以推得

$$\xi_{,i} = exp\left\{\int H(\xi) d\xi + H_i(\tilde{x_j})\right\}, \tag{3.13}$$

其中变量 x_j 是任意的，且 $H_i(\tilde{x_j})$ 不依赖于变量 x_j，即 $\tilde{x_j} = (x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n)$。对于所有 $i \neq j$，都可以进行这一过程。令 $L(\xi) = exp\left\{\int H(\xi)\, d\xi\right\}$ 且 $L_i(x_i) = exp\{H_i(\tilde{x_j})\}$，则有

$$\xi_{,i} = L(\xi) L_i(x_i). \tag{3.14}$$

将引理1中的 $\frac{\varphi}{n}$ 相乘，得到

$$-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2(n-1)}{n} N\varphi\varphi_{,kk} - (n-1)N(\varphi_{,k})^2 - \frac{2\varphi^2}{nN}(\psi_{,k})^2\right] = -\frac{2N}{n}\Lambda.$$

将上述恒等式与（2.3）结合，得到

$$\begin{aligned}\varphi\left[(n-2)N\varphi_{,ii} - \varphi N_{,ii} - 2\varphi_{,i}N_{,i} + 2\frac{\varphi}{N}(\psi_{,i})^2\right] \\ + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(2-n)}{n} N\varphi\varphi_{,kk} + \varphi\varphi_{,k}N_{,k} - \frac{2}{(n-1)n}\frac{\varphi^2}{N}(\psi_{,k})^2\right] = \frac{2\Lambda}{n(n-1)}N.\end{aligned} \tag{3.15}$$

将（2.5）乘以 $\frac{1}{nN}$，即

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\varphi^2 N_{,kk}}{n} - \frac{(n-2)}{n}\varphi\varphi_{,k}N_{,k} - \frac{2(n-2)}{n(n-1)}\frac{\varphi^2}{N}(\psi_{,k})^2\right] = -\frac{2\Lambda}{n(n-1)}N. \tag{3.16}$$

结合（3.15）和（3.16），得到

$$\begin{aligned}\left[(n-2)N\varphi_{,ii} - \varphi N_{,ii} - 2\varphi_{,i}N_{,i} + 2\frac{\varphi}{N}(\psi_{,i})^2\right] \\ - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[(n-2)N\varphi_{,kk} - \varphi N_{,kk} - 2\varphi_{,k}N_{,k} + 2\frac{\varphi}{N}(\psi_{,k})^2\right] = 0.\end{aligned}$$

利用（3.1），上述方程变为

$$\begin{aligned}\left[(n-2)\varphi'' N - \varphi N'' - 2\varphi' N' + 2\frac{\varphi}{N}(\psi')^2\right]\left(\xi_{,i}^2 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_{,k}^2\right) \\ + \left[(n-2)\varphi' N - \varphi N'\right]\left(\xi_{,ii} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_{,kk}\right) = 0.\end{aligned}$$

考虑（3.12）中的 $H(\xi)$，我们得出

$$H(\xi)\left(n\xi_{,i}^{2}-\sum_{k=1}^{n}\xi_{,k}^{2}\right)=\left(n\xi_{,ii}-\sum_{k=1}^{n}\xi_{,kk}\right), \tag{3.17}$$

因此，

$$n\left(\xi_{,i}exp\left\{-\int Hd\xi\right\}\right)_{,i}=\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_{,k}exp\left\{-\int Hd\xi\right\}\right)_{,k}. \tag{3.18}$$

结合 (3.14) 和 (3.18)，得到

$$\sum_{k=1}^{n}\left(L_{k}(x_{k})L(\xi)L^{-1}(\xi)\right)_{,k}=n\left(L_{i}(x_{i})L(\xi)L^{-1}(\xi)\right)_{,i}.$$

因此，

$$\sum_{k=1}^{n}L_{k}^{\prime}=nL_{i}^{\prime}.$$

由于上述恒等式对任意 i 都成立，我们有 $nL_{i}^{\prime}=nL_{j}^{\prime}$，其中 $i\neq j$，这意味着对于每个 i，$L_{i}(x_{i})=2\tau x_{i}+\gamma_{i}$，其中 τ，$\gamma_{i}\in\mathbb{R}$。因此，对于每个 $i\neq j$，由 (3.14) 得到

$$\frac{\xi_{,i}}{L_{i}\left(x_{i}\right)}=L\left(\xi\right),$$

即，

$$\frac{\xi_{,i}}{2\tau x_{i}+\gamma_{i}}=\frac{\xi_{,j}}{2\tau x_{i}+\gamma_{i}}.$$

上述方程的特征蕴含了该结果。

该结果的逆命题只需进行简单计算，且与[11]给出的方法类似。为确保完备性，我们将概述证明。

现在假设$\xi=\sum_{k=1}^{n}U_{k}(x_{k})$，其中 $U_{k}(x_{k})=\tau x_{k}^{2}+\gamma_{k}x_{k}+\theta_{k}$。因此，

$$\psi_{,x_{i}}=\psi^{\prime}U_{i}^{\prime},\qquad\psi_{,x_{i}x_{j}}=\psi^{\prime\prime}U_{i}^{\prime}U_{j}^{\prime},\qquad\psi_{,x_{i}x_{i}}=\psi^{\prime\prime}(U_{i}^{\prime})^{2}+\psi^{\prime}U_{i}^{\prime\prime}.$$

函数 φ 和 N也同样如此。由方程 (2.2)，我们有

$$\left[(n-2)\varphi^{\prime\prime}N-\varphi N^{\prime\prime}-2\varphi^{\prime}N^{\prime}+2\frac{\varphi}{N}\left(\psi^{\prime}\right)^{2}\right]U_{i}^{\prime}U_{j}^{\prime}=0.$$

由于在开子集 $\mathbb{R}^{n}$中存在 $U_{i}U_{j}\neq0$，

$$(n-2)\varphi^{\prime\prime}N-\varphi N^{\prime\prime}-2\varphi^{\prime}N^{\prime}+2\frac{\varphi}{N}\left(\psi^{\prime}\right)^{2}=0. \tag{3.19}$$

此外，对每个 i，方程 (2.3) 给出

$$\begin{aligned}\varphi\left[(n-2)\varphi^{\prime\prime}N-\varphi N^{\prime\prime}-2\varphi^{\prime}N^{\prime}+2\frac{\varphi}{N}\left(\psi^{\prime}\right)^{2}\right](U_{i}^{\prime})^{2}+\varphi\left[(n-2)\varphi^{\prime}N-\varphi N^{\prime}\right]U_{i}^{\prime\prime}\\+\left[\varphi\varphi^{\prime\prime}N-(n-1)\left(\varphi^{\prime}\right)^{2}N+\varphi\varphi^{\prime}N^{\prime}-\frac{2\varphi^{2}}{(n-1)N}\left(\psi^{\prime}\right)^{2}\right]\sum_{k=1}^{n}(U_{k}^{\prime})^{2}\\+\varphi\varphi^{\prime}N\sum_{k=1}^{n}U_{k}^{\prime\prime}=\frac{2\Lambda}{n-1}N.\end{aligned} \tag{3.20}$$

结合 (3.19)、(3.20)、$\sum_{k=1}^{n}(U_{k}^{\prime})^{2}=4\tau\xi+\beta$ 和 $\sum_{k=1}^{n}U_{k}^{\prime\prime}=2n\tau$，其中 $\beta=\sum_{k=1}^{n}\left(\gamma_{k}^{2}-4\tau\theta_{k}\right)$，我们可以将 (3.20) 改写如下：

$$\left[\varphi\varphi''N-(n-1)\left(\varphi'\right)^2N+\varphi\varphi'N'-\frac{2\varphi^2}{(n-1)N}\left(\psi'\right)^2\right](4\tau\xi+\beta) + 2\tau\varphi\left[2(n-1)\varphi'N-\varphi N'\right]=\frac{2\Lambda}{n-1}N. \tag{3.21}$$

由方程 (2.4) 可得

$$2n\tau\varphi\psi'N+\left[\varphi\psi''N-(n-2)\varphi'\psi'N-\varphi\psi'N'\right](4\tau\xi+\beta)=0.$$

最后，由方程 (2.5) 得到

$$2n\tau\varphi NN'+\left[\varphi NN''-(n-2)\varphi'NN'-\frac{2(n-2)}{n-1}\varphi\left(\psi'\right)^2\right](4\tau\xi+\beta) = -\frac{2\Lambda}{n-1}\varphi N^2. \tag{3.22}$$

□

本节将说明，经典多中心 Majumdar-Papapetrou 解可以由定理 1 得到。此外，我们将证明定理 2，即给出一个爱因斯坦-麦克斯韦静态空间的例子，该空间在一个 $(n-1)$ 维膨胀群作用下保持不变。

推论 1. 设$(\mathbb{R}^n,\, g)$、 $n\geq 3$为具有笛卡尔坐标 $x=(x_1,\ldots,x_n)$和欧几里得度量 g的欧几里得空间。设$\Omega\ \subset\mathbb{R}^n\setminus\{c_1^k,\ldots,c_l^k\}$，其中 $c_l^k=(c_l^1,\ldots,\,c_l^n)\in\mathbb{R}^n$是一个开子集，光滑函数 φ、ψ 和 N 定义于其中。那么，存在一个度量 $g=g/\varphi^2$，使得$(\Omega\ \ g,\,N,\,\psi)$是电真空系统的一个解，其中

$$\begin{cases} N(x)^{-1}=\displaystyle\sum_{l=1}^{s}\frac{k\lambda_l}{r_l^{n-2}}-k_1,\\[2ex] \varphi=N^{1/(n-2)},\\[2ex] \pm\sqrt{\dfrac{2(n-2)}{(n-1)}}\psi=1-N, \end{cases} \tag{3.23}$$

其中 $r_l^2=\sum_{k=1}^n(x_k-c_l^k)^2$ 对每个中心 $c_l^k=(c_l^1,\ldots,\,c_l^n)\in\mathbb{R}^n$均成立。这里，$l\in\{1,\ldots,\,s\}$。**推论 1 的证明**。考虑

$$\xi=-\sum_{l=1}^{s}\lambda_l\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-c_l^k)^2\right)^{\frac{2-n}{2}},$$

其中 $c_l^k=(c_l^1,\ldots,\,c_l^n)$ 表示第 l 个多中心黑洞。对上述恒等式求一阶导数，得到

$$\xi_{,s}=-(2-n)\sum_{k=1}^{n}\lambda_l(x_s-c_l^s)\left[\sum_{l=1}^{n}(x_k-c_l^k)^2\right]^{-\frac{n}{2}}.$$

计算二阶导数，得到

$$\xi_{,ss}=-(2-n)\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\left[\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-c_l^k)^2\right)^{-\frac{n}{2}}-n(x_s-c_l^s)^2\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-c_l^k)^2\right)^{-\frac{n+2}{2}}\right].$$

由于 $\Delta_g\xi = \sum_{s=1}^n \xi,_{ss}$，我们有

$$\begin{aligned}\Delta_g\xi = \sum_s \xi_{,ss} &= \sum_{s=1}^N \left(-(2-n)\sum_{k=1}^n \lambda_l (x_s - c_l^s) \left[\sum_{l=1}^n (x_k - c_l^k)^2\right]^{-\frac{n}{2}} \right) \\ &= -(2-n)\sum_{l=1}^n \lambda_l \left[n\left(\sum_{k=1}^n (x_k - c_l^k)^2\right)^{-\frac{n}{2}} - n\sum_{s=1}^n (x_s - c_l^s)^2 \left(\sum_{k=1}^n (x_k - c_l^k)^2\right)^{-\frac{n+2}{2}} \right] \\ &= 0,\end{aligned}$$

co因此， $\Delta_g\xi = 0$，即 ξ 是一个调和函数。由定理 1 的第一项可得

$$\frac{N''}{N'} - 2\frac{N'}{N} = 0.$$

因此，

$$N(\xi) = -\frac{1}{k\xi + k_1},$$

其中 k 和 k_1 为常数。

最后，我们得到

$$N(\xi) = \frac{1}{\sum_{l=1}^s \frac{k\lambda_l}{r_l^{n-2}} - k_1},$$

其中 $r_l^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - c_l^k)^2$。令 $k_1 = -1$ 和 $k = 1$，即可得到经典的 Majumdar-Papapetrou 解。因此， $k\lambda_l$ 表示黑洞的电荷（或质量）。□

下面给出电真空系统 $(\Omega,\ g,\ N,\ \psi)$ 的解，该解在一个 $(n-1)$ 维膨胀群下保持不变，并满足附加条件：它属于 Majumdar-Papapetrou 类，即满足定理 1 - (1)。

定理 4. *[定理 2]* 设 $(\mathbb{R}^n, g)$， $n \geq 3$ 是具有笛卡尔坐标 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 和欧几里得度量 g 的欧几里得空间。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集。取整数 $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq n$ 和实常数 $a_i\,(1 \leq i \leq m_1)$， $b_j\,(1 \leq j \leq m_2)$，使其满足

$$\sum_{i=1}^{m_1} a_i \neq 0, \qquad \prod_{j=1}^{m_2} b_j \neq 0.$$

定义伸缩变换不变函数

$$\xi(x) = \frac{\sum_{i=1}^{m_1} a_i x_i}{\sum_{j=1}^{m_2} b_j x_j}.$$

Set

$$\eta = \sum_{j=1}^{m_2} b_j^2, \qquad \theta = -2\sum_{i=1}^{m_1} a_i b_i, \qquad \delta = \sum_{i=1}^{m_1} a_i^2,$$

以及任意常数 $k \neq 0$ 和 $k_1 \in \mathbb{R}$，将切片函数 N 定义如下：

$$\frac{1}{N(x)} = k_1 + \frac{2k}{\sqrt{4\eta\delta - \theta^2}} \arctan\left(\frac{2\eta\,\xi(x) + \theta}{\sqrt{4\eta\delta - \theta^2}}\right),$$

其中 $4\eta\delta - \theta^2 > 0$。另定义

$$\varphi = N^{1/(n-2)}, \qquad \psi = \pm\sqrt{\frac{n-1}{2(n-2)}}\,(1 - N), \qquad \textit{and} \qquad \overline{g} = g/\varphi^2.$$

那么，$(\Omega^-g,\, N,\, \psi)$ 是真空电磁爱因斯坦–麦克斯韦系统（宇宙学常数为零）的一个解。此外，与之相关的静态时空属于马尤姆达尔–帕帕佩特罗类，并且在一个$(n-1)$维膨胀群作用下保持不变。

定理 4 的证明。将 $\mathbb{R}^n$ 视为具有笛卡尔坐标 $x=(x_1,\ ...,\ x_n)$ 的欧几里得空间，并取膨胀不变量

$$\xi(x)=\frac{\sum_{i=1}^{m_1}a_ix_i}{\sum_{j=1}^{m_2}b_jx_j},\qquad 1\le m_1\le m_2\le n, \tag{3.24}$$

其中 a_i 和 b_j 是满足下列条件的实常数

$$\sum_{i=1}^{m_1}a_i\neq 0,\quad \text{and}\quad \prod_{j=1}^{m_2}b_j\neq 0, \tag{3.25}$$

参见 [13, 15]及其中的参考文献。

定义

$$M(x)=\sum_{i=1}^{m_1}a_ix_i,\qquad P(x)=\sum_{j=1}^{m_2}b_jx_j,\qquad 1\le m_1\le m_2\le n,$$

使得变量 ξ 可表示如下

$$\xi(x)=\frac{M(x)}{P(x)}.$$

ξ 关于变量 x_k 的偏导数为

$$\xi_{,k}=\frac{M_{,k}\,P-M\,P_{,k}}{P^2}.$$

第一： $1\le k\le m_1$。在这种情况下，我们有 $M_{,\,k}=a_k$ 以及 $P_{,\,k}=b_k$。因此，

$$\xi_{,k}=\frac{a_k-b_k\xi}{P},\qquad \xi_{,kk}=-\frac{2\,b_k}{P}\xi_{,k}. \tag{3.26}$$

第二： $m_1<k\le m_2$。这里，$M_{,\,k}=0$以及 $P_{,\,k}=b_k$。因此，

$$\xi_{,k}=-\frac{b_k}{P}\xi,\qquad \xi_{,kk}=\frac{2b_k^2}{P^2}\xi. \tag{3.27}$$

注意，$|\nabla_g\xi|^2=\sum_{k=1}^n\xi_{,\,k}^2$。由于我们考虑的是膨胀不变量，因此$\xi_{,\,k}=\dfrac{a_k-b_k\xi}{P}$对于 $1\le k\le m_1$成立，而$\xi_{,\,k}=-\dfrac{b_k}{P}\xi$对于 $m_1<k\le m_2$成立。因此，$|\nabla_g\xi|^2=\sum_{k=1}^{m_1}\dfrac{(a_k-b_k\xi)^2}{P^2}+\sum_{k=m_1+1}^{m_2}\dfrac{b_k^2\xi^2}{P^2}$。于是，$P^2|\nabla_g\xi|^2=\sum_{k=1}^{m_1}(a_k-b_k\xi)^2+\sum_{k=m_1+1}^{m_2}b_k^2\xi^2$，从而

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\left(P^2|\nabla_g\xi|^2\right)&=\frac{d}{d\xi}\left(\sum_{k=1}^{m_1}\left(a_k-b_k\xi\right)^2+\sum_{k=m_1+1}^{m_2}b_k^2\xi^2\right)\\&=-2\sum_{k=1}^{m_1}b_k\left(a_k-b_k\xi\right)+2\sum_{k=m_1+1}^{m_2}b_k^2\xi.\end{aligned} \tag{3.28}$$

另一方面，由于 $\Delta_g\xi=\sum_{k=1}^n\xi_{,kk}$，我们得到

$$\Delta_g\xi=-2\sum_{k=1}^{m_1}\frac{b_k}{P}\xi_{,k}+\sum_{k=m_1+1}^{m_2}\frac{2b_k^2}{P^2}\xi.$$

此外，对于 $k \leq \underline{m_1},\ \xi_{,k} = \dfrac{a_k - b_k\xi}{P}$。因此，

$$\Delta_g \xi = -2\sum_{k=1}^{m_1} \frac{b_k\left(a_k - b_k\xi\right)}{P^2} + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \frac{2b_k^2}{P^2}\xi.$$

因此，

$$P^2\Delta_g \xi = -2\sum_{k=1}^{m_1} b_k\left(a_k - b_k\xi\right) + 2\sum_{k=m_1+1}^{m_2} b_k^2\xi. \tag{3.29}$$

将方程 (3.28) 与 (3.29) 结合，可得由膨胀不变量给出的基本关系：

$$\frac{1}{P^2}\frac{d}{d\xi}\left(P^2|\nabla_g\xi|^2\right) = \Delta_g\xi.$$

由 (1.9) 可知，切片函数满足方程

$$\frac{N''}{N'} - 2\frac{N'}{N} = -\frac{\Delta_g\xi}{|\nabla_g\xi|^2}. \tag{3.30}$$

因此，

$$\frac{d}{d\xi}\log\left(-\frac{d}{d\xi}\left(N^{-1}\right)\right) = -\frac{1}{P^2|\nabla_g\xi|^2}\frac{d}{d\xi}\left(P^2|\nabla_g\xi|^2\right).$$

积分后，

$$\frac{d}{d\xi}\left(-N^{-1}\right) = \frac{k}{P^2|\nabla_g\xi|^2},$$

其中 k 是一个非零常数。因此，

$$-N^{-1}(\xi) = k\int \frac{1}{P^2|\nabla_g\xi|^2}d\xi + k_1, \tag{3.31}$$

其中 $k_1 \in \mathbb{R}$。

注意，$P^2|\nabla_g\xi|^2 = \sum_{k=1}^{m_1}(a_k - b_k\xi)^2 + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} b_k^2\xi^2$，可改写为 $P^2|\nabla_g\xi|^2 = \eta\xi^2 + \theta\xi + \delta$，其中 $\eta = \sum_{k=1}^{m_2} b_k^2$、$\theta = -2\sum_{k=1}^{m_1} a_k b_k$和 $\delta = \sum_{k=1}^{m_1} a_k^2$。因此，

$$\int \frac{1}{P^2|\nabla_g\xi|^2}d\xi = \int \frac{1}{\eta\xi^2 + \theta\xi + \delta}d\xi.$$

我们知道 $4\eta\delta - \theta^2 \geq 0$ （见注释 1）。若 $4\eta\delta - \theta^2 > 0$，则可显式计算式 (3.31) 中的积分，得到

$$-N^{-1}(\xi) = k_1 + \frac{2k}{\sqrt{4\eta\delta - \theta^2}}\arctan\left(\frac{2\eta\xi + \theta}{\sqrt{4\eta\delta - \theta^2}}\right),$$

其中 $4\eta\delta - \theta^2 > 0$。 □

利益冲突：没有需要披露的利益冲突。

数据可用性：不适用。

参考文献

[1] Ezequiel Barbosa、Romildo Pina 和 Keti Tenenblat，《与伪欧几里得空间共形的梯度Ricci孤子》，《以色列数学杂志》200（2014），第1期，213–224。[2] Marcelo Barboza、Benedito Leandro 和 Romildo Pina，《爱因斯坦场方程的不变量解》，《数学物理杂志》59（2018），第6期，062501。[3] Gary L. Bunting 和 A. K. M. Masood-ul-Alam，《渐近欧几里得静态真空时空中多个黑洞不存在》，《广义相对论与引力》19（1987），147–154。[4] Piotr T. Chru´sciel，《对含有内部紧致的渐近平坦类空超曲面的静态电真空时空进行分类》，《经典与量子引力》16（1999），第3期，689–704。[5] Allan Freitas、Benedito Leandro、Ernani Ribeiro Jr 和 Guilherme Sabo，《带边界静电系统的几何不等式》，《经典与量子引力》第43卷，第3期，035003（2026）。[6] James B. Hartle 和 Stephen W. Hawking，《含有多个黑洞的爱因斯坦–麦克斯韦方程解》，《数学物理通讯》26，87–101（1972）。[7] Hari K. Kunduri 和 James Lucietti，《高维爱因斯坦–麦克斯韦理论中不存在静态泡沫时空》，《经典与量子引力》35（2018），第5期，689–704。[8] Benedito Leandro 和 Keti Tenenblat，《与伪欧几里得空间共形的梯度山部孤立子》，《几何物理杂志》123（2018），284–291。[9] Benedito Leandro、Maria Andrade 和 Robson Lousa，《高维电真空空间的几何》，Ann. Henri Poincar´e 24（2023），第9期，3153–3184。[10] Benedito Leandro、Ana Paula de Melo、Ilton Menezes 和 Romildo Pina，《平移不变的静态爱因斯坦–麦克斯韦时空》，《广义相对论与引力》53（2021），第10期，论文编号92，共21页。[11] Benedito Leandro 和 Jo˜ao Paulo dos Santos：《梯度里奇孤立子方程的约化》，《芬兰科学学会数学年刊》45（2020），第2期，1003–1011。[12] James Lucietti，《所有高维马宗达尔–帕帕佩特鲁黑洞》，Ann. Henri Poincar

´ 22 2021 7, e

2437 2450

（），第–期。[13] Romildo Pina 和 Jo˜ao Paulo dos Santos，《里奇曲率方程和爱因斯坦方程的群不变解》，《微分方程杂志》266（2019），第4期，2214–2231。[14] Ernani Ribeiro Jr. 和 Keti Tenenblat，《与欧几里得空间共形的非紧拟爱因斯坦流形》，《数学新闻》294（2021），第1期，132–144。[15] Keti Tenenblat 和 P. Winternitz，《内禀广义波动方程与正弦-戈登方程的对称群》，《数学物理杂志》34（1993），第8期，3527–3542。[16] Jo˜ao Paulo dos Santos 和 Benedito Leandro，《 n维静态真空爱因斯坦方程的约化及广义Schwarzschild解》，《数学分析与应用杂志》469（2019），第2期，882–896。[17] K¨uhnel Wolfgang，《爱因斯坦空间之间的共形变换》，《共形几何：马克斯·普朗克数学研究所出版物》，波恩（Ravi S. Kulkarni 和 Ulrich Pinkall 编），Vieweg+Teubner 出版社，威斯巴登，1988年，第105–146页。
B. Leandro - 数学系，巴西利亚大学，巴西利亚-联邦区，70910-900，巴西。电子邮箱：bleandrone@mat.unb.br：部分研究经费由巴西国家科学技术发展委员会项目303157/2022-4、巴西国家科学技术发展委员会项目400078/2025-2及联邦区研究支持基金会项目00193-00001678/2024-39资助。I. Menezes - 精密科学与技术中心，巴伊亚州西部联邦大学，邮编47808-021，巴雷拉斯，巴伊亚州，巴西。电子邮箱：ilton.menezes@ufob.edu.br；R. Novais - 联邦教育、科学与技术学院，Posse 校区，邮编73900-000，波塞，戈亚斯州，巴西。电子邮箱：rafael.novais@ifgoiano.edu.br：