arXiv:2602.11120v1 [math.QA] 11 Feb 2026

由泡沫求值构造的幺半 2-范畴

LEON J. GOERTZ、LAURA MARINO 和 PAUL WEDRICH

Abstract. 本文介绍一种通用框架，用于构造局部线性的半严格幺半 2-范畴，涵盖链环同调理论中的许多实例。其主要输入数据是一个闭泡沫求值公式。作为示例，我们严谨地构造了基于 $\mathfrak{gl}_N$-泡沫的半严格幺半 2-范畴，它们构成一般线性链环同调理论的基础；此外，还构造了基于 Bar-Natan 的装饰余边的其他实例，这些实例与 Khovanov 同调相关。这些幺半2-范畴通常不是半单的，对所有对象都具有对偶，对所有 1-态射都具有伴随，并带有一种典范的空间对偶结构，用以表达定向三维枢轴性和球性。

Contents

1. 引言 2 1.1. 泡沫与高阶范畴 2 1.2. 组合泡沫与拓扑泡沫 2 1.3. 方法 4 1.4. 从闭泡沫求值到网与泡沫的拓扑量子场论 5 1.5. 经由全息到幺半 2-范畴 6 致谢 9 资助 9 2. 闭泡沫求值 9 2.1. 闭泡沫 9 2.2. 求值 11 3. 网与泡沫的拓扑量子场论 12 3.1. 带边界的泡沫与网 12 3.2. 带边界的标记泡沫 17 3.3. 泛构造 19 3.4. 配对与半双线性 24 3.5. Frobenius代数与分次 26 4. 一个半严格幺半 2-范畴 29 4.1. 对象与1-态射 30 4.2. 2-态射与垂直复合 34 4.3. 水平复合 38 4.4. 张量积 41 4.5. 局部分次与示例 45 4.6. 对偶与伴随 47 参考文献 55

1. Introduction

数十年来，幺半范畴与辫幺半范畴一直在量子拓扑中发挥着核心作用，为纽结和链环的量子不变量以及相关拓扑场论的构造提供了代数框架。重要的例子包括 Temperley–Lieb范畴，它通过 Kauffman 括号奠定了 Jones 多项式的基础 [Jon85, Lic92]，以及与量子群（ A [MOY98,CKM14, TVW15] 型）的倾斜模相关的网范畴。这些范畴具有图示性质，即它们可以表示为由某些生成对象和态射集合生成的线性幺半范畴，再对由纽结关系张成的幺半理想取商。此外，这些表示可以在整数上定义，因此这些范畴在正特征下仍具有有意义的约化，并且适用于范畴化。因此，它们不仅成为表示论中的基本对象，也成为低维拓扑及相关领域中的基本对象。

1.1. **泡沫与高阶范畴。** 量子拓扑中的图示方法不仅适用于上述幺半范畴，也延伸至其范畴化，自然产生高阶范畴结构。具体而言，Temperley–Lieb 范畴和 A型网范畴的范畴化都具有额外一层的2-态射，可用带装饰曲面或 泡沫来描述——泡沫是连接网的奇异曲面——通常被视为嵌入环境三维空间（甚至四维空间）中。这类泡沫高阶范畴构成了 *Khovanov* 同调 [Kho00、BN05] 以及由*Khovanov–Rozansky* 开创的一般线性链环同调[KR08、MSV09、QR16、RW20]，在相关文献中以多种变体和改进形式广泛出现；关于这一主题的最新讲义，参见 [KS25]。从范畴化的角度看，这类构造最自然的组织方式是[1]将其视为幺半2-范畴，其中网是1-态射，泡沫是2-态射，并且它们去范畴化后得到图示幺半1-范畴。

1.2. **组合泡沫与拓扑泡沫。** 然而，在现有文献中，泡沫构造的高阶范畴性质往往只得到部分明确阐述。一部分文献以纯粹的组合方式描述泡沫范畴，但通常只讨论 1-范畴层面，将泡沫视为具有固定边界条件的网之间的态射，而不考虑幺半 2-范畴。另一种做法是，有时将泡沫视为真正的拓扑对象，即把它们看作嵌入三维球或立方体中的奇异曲面，并通过粘合定义复合，同时对环境同痕及某些局部关系取商。尽管这两种视角都证明颇有用处，但各自只把握了底层结构的一部分：前者忽略了拓扑量子场论所必需的高阶范畴运算，而后者则本质上依赖几何嵌入，掩盖了泡沫的组合性质。

本文采用的方法将这两种观点结合起来。我们以纯粹的代数-组合方式，将泡沫形式体系构造为真正的高范畴对象，避免使用嵌入代表元，同时保留体现其三维起源的复合与粘合结构。尤其是，这使我们能够将泡沫范畴实现为

[1]在§1.5中，我们将讨论其他方案。

与链环同调相关的幺半2-范畴，从而明确呈现其高范畴特征，并使其适用于严格的形式化验证。

本文的主要成果是明确而严谨地构造了*Bar-Natan* 幺半 *2*-范畴以及由 $\mathfrak{gl}_N$-泡沫构成的幺半 *2*-范畴，并将它们作为局部带分次线性半严格幺半 2-范畴的两类典型实例。这些 2-范畴配备了额外的幺半结构，其 Hom-范畴取值于分次$\Bbbk$-模，并且这些结构与水平复合及幺半结构相容；例如参见 [LMGR+24]。采用高阶范畴记号，我们将这些实例视为 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_1}(\mathrm{Cat}[\mathrm{Cat}[\Bbbk\text{-grmod}]])$中的对象，即 $\mathbb{E}_1$-代数，所在范畴由分次 $\Bbbk$-线性范畴构成，而后者可建模为取值于分次$\Bbbk$-模的范畴。

主定理。

(1) 对于每个交换环 $\Bbbk$ 以及每个在$\Bbbk$上自由的交换 Frobenius 代数 $A\Bbbk$，Bar–Natan 装饰余边 [BN05]的形式体系可扩展为一个局部 $\Bbbk$-线性半严格幺半 2-范畴

$$\mathrm{BN}_A \in \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_1}(\mathrm{Cat}[\mathrm{Cat}[\Bbbk\text{-mod}]]),$$

由一个 2-可对偶自对偶对象生成。进一步地，如果 $\Bbbk$是分次的，且 A是 $\Bbbk$上的分次 Frobenius代数，那么 BN_A 可以提升为带有分次 $\Bbbk$-线性结构的对象，从而成为$\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_1}(\mathrm{Cat}[\mathrm{Cat}[\Bbbk\text{-grmod}]])$的一个对象。

(2) 对于每个交换环 $\Bbbk$ 以及每个正整数 N，Robert–Wagner 闭泡沫求值公式 [RW20] 对于 $\mathfrak{gl}_N$上的 -泡沫 $\Bbbk$ 扩展为一个局部分次的 $\Bbbk$-线性半严格幺半 2-范畴

$$N\mathbf{Foam} \in \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_1}(\mathrm{Cat}[\mathrm{Cat}[\Bbbk\text{-grmod}]]),$$

由由集合 $\{1,\dots,N\}$索引的 2-可对偶对象生成。

在这两类幺半 2-范畴中，所有对象都具有对偶，所有 1-态射都具有伴随。此外，这些结构可以按照 Barrett–Meusburger–Schaumann 的意义打包为规范的 空间[2] 对偶结构[3]， [BMS24]。

注记 （关于链环同调）。 我们的 主定理 严格构造了分别出现在将 Khovanov 同调（1）和 $\mathfrak{gl}_N$链环同调（2）推广到缠结情形中的幺半 2-范畴。在此背景下，我们将缠结视为适当地嵌入立方体 $[0$中， $1]^3$ 其端点位于 $[0$上， $1]\times\{0$。 $1\}\times\{1/2\}$沿第二个坐标方向堆叠缠结对应于 1-态射的水平复合，而沿第一个坐标方向将缠结并排放置则对应于幺半结构。2-态射发挥着双重作用：既为缠结链复形中的解析立方体 提供微分，又作为与缠结协边相关的链映射的分量。与缠结图示相关的解析立方体可以通过将丰富化基底从线性范畴改为以下范畴来容纳

[2][BMS24，定义 4。8]。[3][BMS24，定义 3。10]。

链复形，这可以解释为一种完备化操作[4]。例如， [SW24]中构造了一个局部线性半严格幺半2-范畴的 Soergel 双模。在完备化为局部稳定、局部线性的 $(\infty, 2)$-范畴的 Soergel 双模链复形后，Rouquier 编织 [Rou08] 扩展为一个 $\mathbb{E}_2$-代数结构 [LMGR+24]。我们预期，对 $\mathfrak{gl}_N$-泡沫进行类似的完备化，可以提升为一个局部稳定、局部线性的 $\mathbb{E}_2$-幺半 $(\infty, 2)$-范畴，从而在链级上控制一般线性链环同调理论。在本文中，链环同调和 $\mathbb{E}_2$-结构仅发挥激励作用。相反，我们专注于严格描述底层 $\mathbb{E}_1$-结构的组合性质。

注记 （关于缠结理论）。 对象的对偶、1-态射的伴随、典范对偶结构以及空间性，是主定理所构造的幺半2-范畴的关键特征。换言之，用 [DR18，定义 2.2.3 和 2.2.4], 的术语来说，这些特征意味着：在一个幺半平面枢轴 2-范畴中，每个对象都有左对偶和右对偶，并且该范畴带有枢轴结构。这些性质和结构是幺半1-范畴中刚性性质与枢轴性的高范畴类比，并确保所得的幺半2-范畴具有良好的图形演算，可用于处理嵌入定向三维空间中的二维辫图——我们可称之为 SO(3)-枢轴性。

此外，我们的例子在球形意义下符合 [DR18，定义 2.3。2], 这使得定向三维球面中的缠结求值没有歧义[5]。因此，我们的幺半2-范畴可作为完全局部、部分定义的四维拓扑量子场论 [HRW24、Wed25、Goe25]的输入。

注记 (分次 $\Bbbk$-线性与 $\Bbbk$-线性且带有 $\mathbb{Z}$-作用)。 在我们的主定理的背景下，分次 $\Bbbk$-模上的局部富集也可以替换为带有分次平移自等价 $\Bbbk$-作用的 $\mathbb{Z}$-线性 Hom-范畴，从而得到 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_1}(\mathrm{Cat}[\mathrm{Cat}[\Bbbk\text{-模}]^{B\mathbb{Z}}])$中的对象。在这种设定下， 主定理 中的两类例子仍然对所有对象都有对偶，对所有 1-态射都有伴随。不过，由于 1-态射的左伴随与右伴随通常相差一个非平凡的分次平移，这些例子无法继承其局部分次 $\Bbbk$-线性对应物的对偶结构。

1.3. **方法**。 虽然我们的 主定理 聚焦于链环同调中最突出的两类例子，但本文提出的构造要一般得多。从概念层面看，所需的输入仅有：

(1) 选择一种组合类型的泡沫。例如，对于主定理(2)，我们考虑具有定向面片的泡沫：这些面片在三价缝处按循环次序相接，并在四价顶点处相交；面片标记为满足缝处流条件的自然数，并装饰有某些 $\Bbbk$-代数元素。我们在§2.1中描述这类三价泡沫（幂零泡沫的一个子类）及相应的标记数据。其他组合类型，例如 [KS25] 中针对 SL(3)和 SO(3)讨论的类型，另见 [KM19],，均可作相应修改后处理。

[4]经过幂等完备化和加性完备化后，链复形的 ∞-范畴有界同伦范畴的构造，在 [LMGR+24，§3.4] 中被确定为从稳定幂等完备范畴到加性幂等完备范畴的遗忘函子的左伴随。[5]据推测，这与 SO(4)-枢轴性有关。

(2) 选择一个兼容的闭泡沫求值公式，并使其满足某些乘法性要求。例如， [RW20] 中针对主定理(2) 的组合型 Robert–Wagner 泡沫求值公式。另一种选择是 Kapustin–Li 公式 [KL03]，该公式由 Khovanov–Rozansky 调整后用于泡沫的情形 [KR07], ，另见 Mackaay–Sto˘si´c–Vaz [MSV09]。(3) 规定所选类型的泡沫在定向 3-流形中的允许嵌入方式。在我们的贯穿示例中，我们要求面片的循环次序、由此诱导的缝线定向以及环境 3-流形的定向之间满足左手定则所确定的相容性。

由这些数据，我们分两个阶段得到一个局部线性的半严格幺半2-范畴，这两个阶段分别在第3 节和第4 节中进行，我们现在非正式地加以描述。

1.4. **从闭泡沫求值到网与泡沫的拓扑量子场论**。第一阶段是借助泛构造，从闭泡沫求值公式中提取网与泡沫的拓扑量子场论，参见例如 [BHMV95]。

在§3.1 中，我们首先将所选闭泡沫的组合类型推广到带边界的泡沫，后者被编码为适当类型的闭网。在将边界网划分为源点与目标网络的不交并之后，我们可以在一个适当定义的对称幺半范畴中把泡沫视为闭合网络之间的态射；见命题3.10。泡沫的复合由组合粘合构造给出，而对称幺半结构为不交并。

在 §3.2 中，我们将标记数据所提供的泡沫标记和装饰纳入考量[6]$\mathcal{C}$ ，从而得到一个 $\Bbbk$-线性对称幺半范畴 $\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}$，其对象为 $\mathcal{C}$-预泡沫，态射为闭合$\mathcal{C}$-网，见命题 3.17。前缀pre表示这个由预泡沫自由生成的范畴仍缺少一些关系。

通过泛构造，可以从 §3.3 中的闭泡沫求值公式得到这些关系，下面将对此进行说明。对于闭合 $\mathcal{C}$-网 W 和 W' ，我们将它们之间的$\Bbbk$-模 $\mathcal{C}$-预泡沫记作 $\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W,\ W')$。预泡沫复合和闭泡沫求值公式给出一个 $\Bbbk$-双线性配对

$$\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W,W')\times\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W',W)\to\Bbbk$$

其根基 $I(W,\ W')\subset\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W,\ W')$ 我们将其解释为泡沫关系的子空间。事实上，这些子空间定义了一个理想，而商

$$\mathcal{C}\mathsf{Foam}:=\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}/I$$

就是所需的对称幺半 $\Bbbk$-线性泡沫范畴。

接着，我们研究闭泡沫求值公式关于乘法性质的其他性质。在适当情况下，空网的可表函子 $\varnothing$

$$\mathsf{eval}\colon\ \mathrm{Hom}(\varnothing,-)\colon\mathcal{C}\mathsf{Foam}\to\Bbbk\text{-mod}$$

是强对称幺半的。与从$\mathcal{C}$PreFoam出发的典范商函子复合后，我们得到一个对称幺半函子

$$\mathcal{F}\colon\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}\to\Bbbk\text{-mod},\tag{1.1}$$

[6]如定义2.4所定义。

它与求值一同构成了所需的、适用于带有标记数据的网与泡沫的拓扑量子场论的第二种实现 $\mathcal{C}$。泡沫求值与反转泡沫的所有定向相容的情形，将在§3.4中研究。

在§3.5 中，我们观察到，网与泡沫的拓扑量子场论对 $\mathcal{C}$中的每个固定标签都包含一个普通的二维拓扑量子场论，其定义在闭定向一维流形之间的定向协边上。相应地，还存在一个与之关联的、定义在 $\Bbbk$上的交换 Frobenius 代数。在分次情形中，我们提取单位映射和余单位映射的齐次度；在下文中，这些齐次度将作为分次平移，在定义关联幺半 2-范畴中的 2-态射空间时发挥重要作用。

1.5. 通过全息通向幺半 2-范畴。我们的方法背后的一个指导原则是全息视角。幺半 2-范畴中的 2-态射空间由一对平行的 1-态射 $S, T\colon s \to t$ 编号，它们分别充当源点 S和目标点 T。在幺半 2-范畴的图形演算中，将 S 和 T 分别作为三维立方体的底面和顶面的装饰来考察很方便；它们的目标对象和源对象 t与s 分别沿左侧面和右侧面相连。在我们所期望的幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$Foam 中，这些装饰对应于一个闭合的 $\mathcal{C}$-网，如图 1.c) 所示。因此，该网嵌入立方体的边界中，可以作为适当嵌入的$\mathcal{C}$-泡沫的边界条件，如图 1.c) 所示。或者，也可以将其视为抽象的闭合 $\mathcal{C}$-网，如图 1.d) 所示，我们将其记作 $\mathsf{abs}(\mathrm{Hom}(S,T))$。

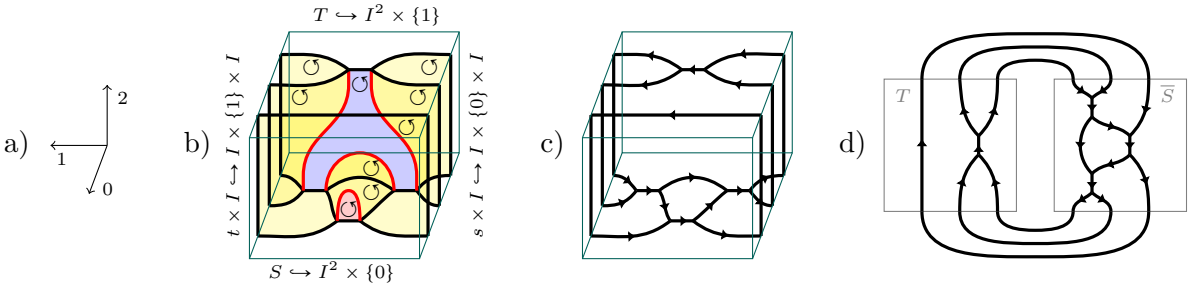


FIGURE 1. a) 图形演算的坐标系；b) 作为平行网 S, T 之间 2-态射的嵌入三价泡沫：$s \to t$。c) 对应的边界网。d) 边界网的扁平示意图。全文中我们省略标签和循环次序。

在我们的构造中，$\mathcal{C}$**泡沫**我们定义从 S 到 T 的 2-态射空间为

$$\mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,T) := \mathcal{F}(\mathsf{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T)))$$

其中 $\mathcal{F}$ 是从 ($\mathcal{C}$1.1) 中抽象的、带标签的网和泡沫所对应的拓扑量子场论。在§4.2 中，我们将详细描述这一构造，此时 $\mathcal{C}$**泡沫**的对象集和 1-态射集已在§4.1中定义。

注记 （缠结与纽结关系）。 给定任意一个嵌入在三维立方体中、满足边界条件 S, T 的 $\mathcal{C}$-泡沫，如上所述，我们可以通过如下方式对该泡沫进行求值，从而得到$\Bbbk$-模 $\mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,T)$ 的一个元素。首先，我们忘掉嵌入，并将该泡沫视为一个抽象的 $\mathcal{C}$-PreFoam，也就是说，将其视为从空网到边界网的态射

$\varnothing$ 到边界网 $\mathsf{abs}(\mathsf{Hom}(S,T))$ 中的态射，其中 $\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}$。应用拓扑量子场论 $\mathcal{F}$ 可得到一个 $\Bbbk$-线性映射 $\Bbbk \to \mathsf{Hom}_{t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,T)$，其在 $1 \in \Bbbk$ 处的取值可以视为该泡沫所表示的 2-态射。

在主定理的例子中，对于任意一对 $S,T\colon s \to t$，嵌入泡沫的求值张成 $\mathsf{Hom}_{t\mathcal{C}\textbf{泡沫}_s}(S,T)$。这由此给出了 2-态射模的纽结理论描述。具体而言，$\mathsf{Hom}_{t\mathcal{C}\textbf{泡沫}_s}(S,T)$ 可以表示为自由 $\Bbbk$-模的商，其基由所有边界条件为 $S,T\colon s \to t$ 的嵌入 $\mathcal{C}$-泡沫构成——即缠结——再模去由上述求值在基上定义的、映到 $\mathsf{Hom}_{t\mathcal{C}\textbf{泡沫}_s}(S,T)$ 的 $\Bbbk$-线性映射的核——即纽结关系。

请注意，这种纽结理论描述是我们构造的结果，而非构造本身的一部分——嵌入三维立方体中的 $\mathcal{C}$-泡沫在本文中仅起到启发作用。

Foam 的垂直复合、水平复合和幺半结构 $\mathcal{C}$**泡沫**分别在 §4.2、§4.3和§4.4 中构造。这三项构造的非平凡部分在于 $\Bbbk$-2-态射模；三者均遵循同一个基本思路，该思路受到 Khovanov 构造弧环的启发 [Kho02], 以及图 1 中图形演算的启发。考察图 1.a) 所示的坐标系很有帮助。0 方向是张量积 $\boxtimes$的方向，1 方向是水平复合的方向 $\circ_h$ ，其中 1-态射进行复合；2 方向是垂直复合的方向 $\circ_v$。在 2-态射层面上，这三种运算分别对应于将（包含泡沫的）立方体沿前后、左右和上下方向依次堆叠。

例如，2-态射 $S \Rightarrow T$ 和 $T \Rightarrow U$ 的垂直复合，对应于沿着包含网 T的公共面将立方体上下堆叠，并重新缩放垂直坐标，从而得到一个底部网为 S 、顶部网为 U的新立方体。在抽象边界网的层面上，这对应于变换

$$\mathsf{abs}(\underline{\mathsf{Hom}}(T,U)) \sqcup \mathsf{abs}(\underline{\mathsf{Hom}}(S,T)) \to \mathsf{abs}(\underline{\mathsf{Hom}}(S,U)),$$

我们可以通过精心构造的抽象 $\mathcal{C}$-泡沫来实现这一变换，该泡沫将两份 T收缩。在作用于带有 $\mathcal{C}$ 标签的网和泡沫的（对称）幺半拓扑量子场论 $\mathcal{F}$ 下，这恰好对应于所需的 $\Bbbk$-线性垂直复合映射：

$$\mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(T,U) \otimes_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,T) \to \mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,U)$$

在明确构造出实现水平复合、幺半结构、恒等 2-态射以及半严格幺半结构的某些其他结构 2-态射的抽象泡沫之后，半严格幺半 2-范畴公理的所有验证 [BN96，引理 4] 均可归结为展示抽象 $\mathcal{C}$-预泡沫之间的显式同构。例如，垂直复合是结合的，这是因为对三个可复合 2-态射进行复合的两种方式，都可以通过在 $\mathcal{F}$ 下由同一个底层 $\mathcal{C}$-预泡沫诱导的映射来实现。

在§4.5中，我们讨论了分次情形下所需的修改。这些修改相当于在分次 $\Bbbk$2-态射模的定义中加入某些分次平移，以确保三个复合运算 $\boxtimes$、 $\circ_h$和 $\circ_v$ 最终都保持分次。

注记(另一种 3-范畴形式化)。通过去环化，任意半严格幺半 2-范畴都可以视为一个具有单个对象的弱 3-范畴，更准确地说，是一个*Gray* 幺半群 [Gur13][7]。

图 2 展示了 3-范畴结构的几种替代模型，可以通过使用网与泡沫的拓扑量子场论的全息方法来构造其具体实例。这些模型的共同点是，最高维态射空间由一个拓扑 3-球参数化，该球的边界 2-球面中嵌有一张与给定分层横截相交的网。对于 Morrison–Walker [MW12], 意义下的圆盘状 3-范畴，分层可以解释为平凡的。对于 Bar-Natan [BN05], 意义下的 canopolis，分层由将 3-球实现为一个 $can\ \ B^2 \times I$ 而诱导，并且只考虑在$S^1 \times I$上竖直的网。对于幺半 2-范畴或三重范畴（双范畴的三重类比），分层继承自立方体 I^3 的乘积分层。唯一的区别是，在幺半 2-范畴中，网避开前后面，并在侧面上竖直。

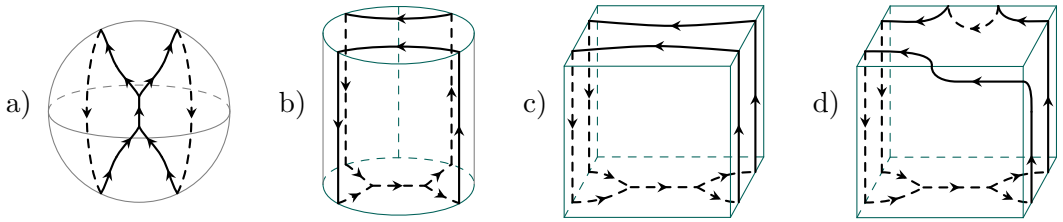


FIGURE 2. 顶维态射的形状示例：a) 圆盘状 3-范畴，b) 一个 canopolis [BN05], c) 一个幺半 2-范畴，d) 一个三重范畴。

其他分层也各有用途，例如由多边形上的圆柱所产生的分层，参见 [HRW24]。

最后，在 §4.6 中，我们证明 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$ 的所有对象都有对偶，且所有 1-态射都有左伴随与右伴随。此外，我们证明，取对偶和伴随可以归纳为 $*$ 上的两种对偶运算 # 和 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$；粗略来说，这两种运算[8] 在图形演算中分别对应于将 2-态射旋转角度为 π，分别绕 $(0、1)$- 平面和 $(1、2)$- 平面旋转。满足这些运算的相容性条件，可由 空间对偶结构 这一概念来编码，相关定义见 [BMS24]。这使得我们能够为 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$ 建立图形演算，其中环境 3-立方体是定向的（而非带框架的），并可在环境定向 3-流形中运用编织理论。

注记。 相对于 [BMS24], 图 1 中的图示语言，我们重新标记了坐标轴 $w \mapsto 0$， $x \mapsto 1$， $y \mapsto 2$ 并将立方体旋转 π 后，在我们的 $(1,\ 2)$平面中展示。也就是说：幺半积的第一个因子出现在第二个因子之前。水平复合将后一个 1-态射置于前一个的左侧，垂直复合将后一个 2-态射置于前一个的上方。我们也采用约定 [DSPS20，定义 2.1。3]即张量积在去环化后对应于反向复合。

[7]反之，每个弱 3-范畴都等价于一个Gray范畴，由 [GPS95]。[8]参见注记4.42。

因此，针对三个复合方向，我们采用了右手定则。不过，我们仍然使用适配于张量积的图示语言，遵循 [BMS24]。

致谢。 我们感谢 David Reutter 和 Kevin Walker 的有益讨论。

经费支持。 作者感谢德国研究基金会（DFG）通过德国卓越战略提供的支持：EXC 2121“量子宇宙”（项目编号 390833306），以及协同研究中心 SFB 1624“高阶结构、模空间与可积性”（项目编号 506632645）。

2. Closed foam evaluation

2.1. **闭泡沫**。

定义 2.1。 组合闭泡沫由以下数据组成：

• 一个有限的 V 顶点集。• 一个有限的 E 缝集，将其划分为 $E = E_{\mathrm{loop}} \sqcup E_{\mathrm{arc}}$ 环和有向弧。• 对于每条弧 $e \in E_{\mathrm{arc}}$，关联一个 $V(e) \subset V$ 恰含两个相邻顶点的集合。每条弧 e 都通过指定 $V(e)$ 中的一个顶点为源点 $s(e)$、另一个为目标点 $t(e)$来赋予定向。对于每个顶点 $v \in V$，记 $E(v) \subset E$ 为与 v相邻的弧的子集。对于每个 $e \in E_{\mathrm{arc}}$，定义 e^- 为具有相反定向的 e，即 $s(e^-) = t(e)$和 $t(e^-) = s(e)$，并令 $e^+ := e$。然后，我们令 $W(E)$ 表示以下方式形成的正长度循环词集合：长度为 1 的词由E_{loop}中的环组成。对于长度 $\ell > 1$， $W(e)$ 包含元组 $(e_1^{\varepsilon_1}, \ldots e_\ell^{\varepsilon_\ell})$，按循环置换视为等价，其中对所有 i， $\varepsilon_i \in \{-, +\}$、 $e_i \in E_{\mathrm{arc}}$，且这些 $e_i^{\varepsilon_i}$是可复合的，即对于 $1 \leqslant i < \ell$， $t(e_i^{\varepsilon_i}) = s(e_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}) =: v_{i+1}$，以及 $t(e_\ell^{\varepsilon_\ell}) = s(e_1^{\varepsilon_1}) =: v_1$，并且顶点 v_1、.....、v_ℓ两两不同。我们称 $W(E)$ 中长度为 $\ell > 1$ 的元素为有向的，其余元素为无向的。• 一个有限的 F 面集，按照亏格 $g \in \mathbb{N}_0$ 和边界分支数 $n \in \mathbb{N}_0$划分为$F = \bigsqcup F_{g,n}$。• 对于每个$f \in F_g$，n是一个边界词集合 $\partial(f) \in \mathsf{P}(W(E))$，其基数为 $|\partial(f)| = n$。 $\partial(f)$中的元素是循环词 $\partial_i(f) \in W(E)$，其中每条缝 $e \in E$ 和每个顶点 $v \in V$ 在 $\partial_i(f)$ 中至多被经过一次 i。如果$e \in E$以这种方式恰好被经过一次，我们记 $f \in F(e) \subset F$和 $e \in E(f) \subset E$。同样，如果 $v \in V$恰好被经过一次，我们记 $f \in F(v) \subset F$和 $v \in V(f) \subset V$。• 对于每条缝 $e \in E$，给出与 e相邻的 $F(e)$ 面的一个循环序。

注 2.2. 请注意，当 $\ell > 1$时，循环词 $(e_1^{\varepsilon_1}, \ldots e_\ell^{\varepsilon_\ell}) \in W(E)$ 完全由元组 $(e_1, \ldots, e_\ell)$ 以及其任意一条弧 e_i的符号 ε_i 确定。若 $\ell > 2$，则还有更强的结论： $(e_1^{\varepsilon_1}, \ldots e_\ell^{\varepsilon_\ell}) \in W(E)$ 完全由元组 $(e_1, \ldots, e_\ell)$确定。因此，在这种情况下，我们将省略符号 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell$。

在下文 中，我们将汇集一些与组合闭泡沫相关的有用概念 s:

定义 2.3。

• 考虑与面 f相关联的定向边界词 $\partial_i(f) = (e_1^{\varepsilon_1}, \dots, e_\ell^{\varepsilon_\ell}) \in W(E)$。对于任意 $1 \leqslant j \leqslant \ell$，我们称 f 诱导弧 e_j 的定向，当且仅当$\varepsilon_j = +$；称 f 在 e_j 上诱导相反的定向，当且仅当 $\varepsilon_j = -$。• 给定一个组合闭泡沫，顶点 $v \in V$ 的链接是图 $\mathsf{Link}(v)$，其节点为 $e \in E(v)$，边为 $f \in F(v)$；当且仅当 $f \in F(e)$时，这些节点被定义为相邻。• 若一个组合闭泡沫满足以下条件，则称其为三价：**(i)** 对每个 $e \in E$，都有 $|F(e)| = 3$。**(ii)** 对每个 $v \in V$，图 $\mathsf{Link}(v)$ 都同构于四面体的 1-骨架。特别地，对每个 $v \in V$，都有 $|E(v)| = 4$。**(iii)** 对每条弧 $e \in E_{\mathrm{arc}}$，三个相邻面中恰有两个（记为f_1 和 f_2）诱导 e 的定向，而第三个（记为 f_3）诱导相反的定向。• 若一个组合闭泡沫满足 $E = \varnothing$ 且 $V = \varnothing$，则称其为零价。• 给定一个组合闭泡沫 Σ，其镜像 Σ^m 通过反转所有循环次序得到；其反向 Σ^r 则通过反转所有弧的定向并反转边界词得到，即

$$E_{\mathrm{arc}} \ni e \overset{r}{\mapsto} e^- \quad \text{and} \quad W(E) \ni (e_1^{\varepsilon_1}, \dots, e_\ell^{\varepsilon_\ell}) \overset{r}{\mapsto} (e_\ell^{-\varepsilon_\ell}, \dots, e_1^{-\varepsilon_1}).$$

在下文中，我们主要考虑零价泡沫和三价泡沫。在三价泡沫中，每个顶点恰好与六个面相邻。

定义 2.4（三价泡沫和零价泡沫的标记数据）。设 $\Bbbk$是一个交换环。三价组合泡沫的一个 $\Bbbk$-线性标记数据 $\mathcal{C}$ 由一个带有结合乘法（记作 $+\colon \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1$）的半群$\mathcal{C}_1$ 构成，并且对每个 $a \in \mathcal{C}_1$，给定一个交换 $\Bbbk$-代数 $\mathsf{Dec}(a)$，称为一个 a-面上的装饰代数。若该运算有单位元 $0 \in \mathcal{C}_1$，我们还要求 $\mathsf{Dec}(0) \cong \Bbbk$。

零价泡沫的一个 $\Bbbk$-线性标记数据 $\mathcal{C}$ 由一个集合 $\mathcal{C}_1$ 构成，并且对每个 $a \in \mathcal{C}_1$，给定一个交换 $\Bbbk$-代数 $\mathsf{Dec}(a)$。

定义 2.5 (组合闭 $\mathcal{C}$-泡沫)。设 $\Bbbk$ 为一个交换环，且 $\mathcal{C}$ 如定义 2.4所述。一个组合闭 $\mathcal{C}$-泡沫由以下数据组成：

(1) 一个如定义 2.1 所述的组合闭泡沫，其顶点、缝和面的集合分别记为 V, E 和 F。

(2) 一个标记 $\mathrm{l}\colon F \to \mathcal{C}_1$，将所有面标记为 $\mathcal{C}_1$中的元素。**(3)** 用一个元素 $\mathsf{Dec}(F) \in \bigotimes_{f \in F} \mathrm{Dec}(\mathrm{l}(f))$对面进行装饰。

在零价情形下，定义至此完成。在三价情形下，这些数据还须满足以下要求：

- 对于每条弧缝 $e \in E_{\mathrm{arc}}$，我们将 $F(e)$ 上的循环序细化为全序(f_1, f_2, f_3)，要求 f_3 是定向与其余边不相容的那条边。接着要求 f_1, f_2, f_3 的标签满足：

$$\mathrm{l}(f_1) + \mathrm{l}(f_2) = \mathrm{l}(f_3).$$

此外，对于环缝 $e \in E_{\mathrm{loop}}$ 相邻的面，也必须满足相同的要求，并为其适当地指定名称 f_1、f_2、f_3。

- 对于每个顶点 $v \in V$，相邻的缝 e_1、e_2 中恰有两条指向该顶点，另有两条缝 e_3、e_4 从该顶点向外，因此六个相邻面 f_1、……、f_6 具有以下两种标记配置之一：

$$\mathrm{l}(f_1)+\mathrm{l}(f_2)\overset{e_1}{=}\mathrm{l}(f_4) \qquad \mathrm{l}(f_2)+\mathrm{l}(f_3)\overset{e_1}{=}\mathrm{l}(f_4)$$
$$\mathrm{l}(f_4)+\mathrm{l}(f_3)\overset{e_2}{=}\mathrm{l}(f_6) \qquad \mathrm{l}(f_1)+\mathrm{l}(f_4)\overset{e_2}{=}\mathrm{l}(f_6)$$
$$\mathrm{l}(f_2)+\mathrm{l}(f_3)\overset{e_3}{=}\mathrm{l}(f_5) \qquad \mathrm{l}(f_1)+\mathrm{l}(f_2)\overset{e_3}{=}\mathrm{l}(f_5)$$
$$\mathrm{l}(f_1)+\mathrm{l}(f_5)\overset{e_4}{=}\mathrm{l}(f_6) \qquad \mathrm{l}(f_5)+\mathrm{l}(f_3)\overset{e_4}{=}\mathrm{l}(f_6)$$

这里，f_1, f_2, f_3 确定了 e_1, e_2, e_3, e_4的定向，而 f_6 确定相反的定向。请注意，在每个等式中，求和项的顺序表示与相应缝相邻的三个面的全序，正如第一点所述。

注 2.6. 定义 2.4 和2.5 可以直接推广到具有其他价数或其他定向行为的泡沫类。由于三价和零价情形足以涵盖我们预期的主要示例，本文不再探讨这些推广。

2.2. **求值**。固定一个交换环 $\Bbbk$ 以及一个 $\Bbbk$-线性标记数据 $\mathcal{C}$。具有定义 2.5 中相同底层数据 (1) 和 (2) 的组合闭合 $\mathcal{C}$-泡沫的集合，由面 (3) 上的装饰的 $\Bbbk$-模参数化。令

$$\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing,\varnothing)$$

将 $\Bbbk$-模定义为这些 $\Bbbk$-模的余积，其中 (1) 和 (2) 遍历所有组合闭泡沫及其标记。此记号预示着定理 3.13。

定义 2.7。设 $\Bbbk$是一个交换环，$\mathcal{C}$ 是一个 $\Bbbk$-线性标记数据。闭合 $\mathcal{C}$-泡沫的求值是一个 $\Bbbk$-线性函数

$$\mathrm{eval}\colon \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing,\varnothing)\to\Bbbk$$

将每个组合闭合 $\mathcal{C}$-泡沫映射到交换环 $\Bbbk$中的一个元素。若求值满足以下条件，则称其为可乘的：

(1) $\mathrm{eval}(\varnothing)=1\in\Bbbk$，其中 $\varnothing$ 表示空的组合闭合 $\mathcal{C}$-泡沫；(2) 对任意一对组合闭合 $\mathcal{C}$-泡沫 Σ_1，Σ_2，$\mathrm{eval}(\Sigma_1\sqcup\Sigma_2)=\mathrm{eval}(\Sigma_1)\cdot\mathrm{eval}(\Sigma_2)$。

定义 2.8。设 $\iota\colon \Bbbk\to\Bbbk$ 是 $\Bbbk$ 的一个对合（即平方后为恒等映射的环自同构），并假设标记数据 $\mathcal{C}$ 对每个 $a\in\mathcal{C}_1$ 都包含 $\Bbbk$-代数 $\mathsf{Dec}(a)$上的一个相容对合的数据，该对合也记为 ι。

然后，我们在组合闭合 $\mathcal{C}$-泡沫上定义一个对合

$$-^r\colon \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing,\varnothing)\to\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing,\varnothing)$$

通过 $\Sigma\to\Sigma^r$ （根据定理 2.3）作用于底层泡沫，并通过对合 ι 作用于所有装饰。求值 eval 称为（ι-）对合的，如果对于任意组合闭合 $\mathcal{C}$-泡沫Σ，都有

$$\mathrm{eval}(\Sigma^r)=\iota(\mathrm{eval}(\Sigma)).$$

例 2.9（Khovanov–Bar-Natan 装饰曲面）。设 A是交换环 $\Bbbk$ 上的交换 Frobenius 代数，其乘法为 $m\colon A\otimes A\to A$，余乘法为$\Delta\colon A\to A\otimes A$，Frobenius迹为 $\epsilon\colon A\to\Bbbk$，把手算子为 $H:=m\circ\Delta\colon A\to A$。

一个用于幂零泡沫的 $\Bbbk$-线性标记数据 $\mathcal{C}^A$，通过令 $\mathcal{C}_1^A:=\{*\}$ 为单元素集合并定义 $\mathrm{Dec}(*):=A$ 来指定。

组合闭合 $\mathcal{C}^A$-泡沫的数据，不过是由有限个 F（闭合）面组成的族，每个面都由张量幂 $A^{\otimes F}$ 中的一个元素装饰。闭合面 $f\in F$ 唯一的不变量是其亏格 $g_f\in\mathbb{N}_0$，因此我们也可以将这类泡沫等价地编码为一对$((g_f)_{f\in F},\ a)\in\mathbb{N}_0^F\times A^{\otimes F}$。求值由以下内容的 $\Bbbk$-线性扩张给出：

$$\mathrm{eval}\colon \mathcal{C}^A\text{-ClFoam}\to\Bbbk,\quad ((g_f)_{f\in F},\otimes_{f\in F}a_f))\mapsto\prod_{f\in F}\epsilon(H^{g_f}a_f)\in\Bbbk$$

例 2.10（Robert–Wagner $\mathfrak{gl}_N$-泡沫）。设 $N\in\mathbb{N}$ 且 $\Bbbk=\mathbb{Z}$。三价泡沫的标记数据$\mathcal{C}^N$ 的底层半群为 $\mathcal{C}_1^N:=(\mathbb{N}_0,\ +)$ 即带加法的自然数；对于 $n\in\mathbb{N}$，一个带 n 标签的面的装饰代数由环 $\mathrm{Dec}(n)=\mathbb{Z}[x_1,\ \ldots\ldots,\ x_n]^{S_n}$ 给出，它是 n 个变量的对称多项式环。

因此，组合闭合 $\mathcal{C}^N$泡沫对应于 Robert–Wagner 的 $\mathfrak{gl}_N$泡沫，而闭泡沫求值公式由 [RW20]的主定理给出。

泡沫的求值归功于 Blanchet [Bla10]。

例 2.11（Robert–Wagner 等变 $\mathfrak{gl}_N$-泡沫）。令 $N\in\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{K}=\mathbb{Z}$。Robert–Wagner 泡沫求值推广到等变情形，其定义在基环 $\Bbbk:=H^*_{\mathrm{GL}(N)}(*)\cong\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_N]^{S_N}$上，即点的 GL (N)-等变上同调。对应的三价泡沫标记数据 $\mathcal{C}^{\mathrm{GL}(N)}$ 再次具有 $\mathcal{C}_1^{\mathrm{GL}(N)}:=(\mathbb{N}_0,+)$和 Dec $(n)=\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]^{S_n}$，对应于 $n\in\mathbb{N}_0$。闭泡沫求值公式由 [RW20] 的主定理给出。事实上，将变量 $X_1,\ldots,X_n$ 设为零，即可由此等变求值导出定理 2.10 中的求值。

3. TQFT FOR WEBS AND FOAMS

3.1. 带边界的泡沫与网。

现在，我们将定义 2.1推广到带边界泡沫的情形。

定义 3.1. 一个 带边界的组合泡沫 由以下部分组成：

- 一个有限集 V 的顶点，如定义2.1所述。
- 一个有限集 $E=E_{\mathrm{loop}}\sqcup E_{\mathrm{arc}}$ 的 缝，如定义 2.1所述。
- 一个额外的有限集 V^∂ 的 边界顶点。令 $V=\underline{V}\sqcup V^\partial$。
- 一个额外的有限集 E^∂ 的边界边，划分为 边界环 和有向边界弧，$E^\partial=E^\partial_{\mathrm{loop}}\sqcup E^\partial_{\mathrm{arc}}$以便可以写作：

$$\overline{E}_{\mathrm{loop}}:=E_{\mathrm{loop}}\sqcup E^\partial_{\mathrm{loop}},\quad \overline{E}_{\mathrm{arc}}:=E_{\mathrm{arc}}\sqcup E^\partial_{\mathrm{arc}},\quad \overline{E}:=E\sqcup E^\partial.$$

- 对于每个 $e\in E_{\mathrm{arc}}$，集合 $V(e)\subset\overline{V}$恰好包含两个与 e相邻 的顶点，其中一个指定为源点，另一个指定为目标点。对于每个 $v\in V$，我们随后用 $\overline{E}(v)\subset E_{\mathrm{arc}}$ 表示与 v相邻的接缝子集。

• 对于每个 $e \in E^{\partial}_{\mathrm{arc}}$，集合 $V^{\partial}(e) \subset V^{\partial}$ 恰好包含两个与 e相邻 的边界顶点，其中一个指定为源点 $s(e)$，另一个指定为目标点 $t(e)$。对于每个边界顶点$v \in V^{\partial}$，我们用 $E^{\partial}(v) \subset E^{\partial}_{\mathrm{arc}}$ 表示与 v 相邻的边界边子集，并用$E(v) = E(v) \sqcup E^{\partial}(v) \subset E_{\mathrm{arc}}$ 表示与 v相邻的所有接缝和边的子集。

与定义 2.1 一样，我们考虑由可复合的接缝和边构成的正长度循环词集合 $W(E)$，并赋予符号 $+$ 或 $-$，当 $\ell > 1$ 时。更精确地说，长度为一的词由 E_{loop} 中的环构成，而长度为 $\ell > 1$ 的词是元组 $(e_1^{\varepsilon_1}, \dots e_\ell^{\varepsilon_\ell})$，视为在循环置换下等价，其中 $\varepsilon_i \in \{-, +\}$ 且对所有 i，并且 $e_i^{\varepsilon_i}$可复合且源点各不相同。此外，我们要求若 $e_i \in E^{\partial}_{\mathrm{arc}}$，则它带有符号 $\varepsilon_i = +$。• 一个有限面集 F，划分为 $F = \bigsqcup F_{g,n}$，如定义 2.1 所述。• 与每个 $f \in F_{g,n}$相关联的是一个边界词集合 $\partial(f) \in \mathrm{P}(W(E))$，其基数为 $|\partial(f)| = n$。$\partial(f)$中的元素是循环词 $\partial_i(f) \in W(E)$，使得每个$e \in E$ 和每个 $v \in V$ 在 $\partial_i(f)$ 中至多经过一次 i。若 $e \in E$ 以这种方式恰好经过一次，我们记作 $f \in F(e) \subset F$和 $e \in E(f) \subset E$。• 对于每条缝 $e \in E$，都给定与 e相邻的面集 $F(e)$ 上的一个循环次序。• 对于 $v \in V^{\partial}$ 和 $e \in E^{\partial}$，我们要求 $|E(v)| = 1$ 和 $|F(e)| = 1$。

带边界的组合泡沫集合记为 BdFoam。

注意，对于每个边界顶点 $v \in V^{\partial}$，相邻的边界边 $E^{\partial}(v)$ 与唯一缝 $e(v) \in E$ 的相邻面 $F(e(v))$ 之间存在典范双射；该缝与 v相邻，因此这些面也具有循环序。

定义 3.2。

• 若带边界的组合泡沫满足以下条件，则称其为三价：**(i)** $|F(e)| = |E^{\partial}(v)| = 3$ 对于每个 $e \in E$和 $v \in V^{\partial}$。**(ii)** 对于每个 $v \in V$，图 $\mathrm{Link}(v)$ 同构于四面体的 1-骨架。**(iii)** 对于每条弧 $e \in E_{\mathrm{arc}}$，三个相邻面中恰有两个（记为f_1 和 f_2）诱导出 e的定向，而第三个（记为 f_3）诱导出相反的定向。注意，适当指定名称 f_1和 f_2后，此条件会将 $F(e)$ 上的循环序细化为全序 (f_1, f_2, f_3)。• 若带边界的组合泡沫满足 $E = \varnothing$、$V = \varnothing$和 $V^{\partial} = \varnothing$，则称其为零价。

注3.3。在一个带边界的三价组合泡沫中，考虑一个面 f，其边界为 $\partial(f) = \{\partial_1(f)、\dots\dots、\partial_n(f)\}$，并设某个边界分支 $\partial_i(f)$沿着一条边界边 $e \in E^{\partial}$穿过。若分别将 s_1 和 s_2 称为 $E(s(e))$ 和 $E(t(e))$ 中的唯一缝，那么容易验证，$(s_1^{\varepsilon_1}、e、s_2^{\varepsilon_2})$ 是 $\partial_i(f)$的一个子词，其中某个$\varepsilon_1、\varepsilon_2 \in \{-、+\}$。

现在我们描述定义 3.1中的泡沫的边界。

定义 3.4。一个组合闭合网络由以下部分组成：

• 一个有限集 V^{∂}，由顶点组成。• 一个有限集 E^{∂}，由边组成，并划分为环 和有向弧，$E^{\partial} = E^{\partial}_{\mathrm{loop}} \sqcup E^{\partial}_{\mathrm{arc}}$。• 对于每个 $e \in E^{\partial}_{\mathrm{arc}}$，有一个集合 $V^{\partial}(e) \subset V^{\partial}$，其中恰有两个与之相邻 的顶点，一个指定为源点 $s(e)$，另一个指定为目标点 $t(e)$。对于每个顶点 $v \in V^{\partial}$，我们用 $E^{\partial}(v) \subset E^{\partial}_{\mathrm{arc}}$表示与 v相邻的边的子集。

• 对于每个顶点 $v \in V^{\partial}$，对与 v相邻的边集 $E^{\partial}(v)$ 赋予一个循环次序。注意，两个网的不交并仍然是一个网。组合闭网的集合记为 ClWeb。

定义 3.5.

• 若一个组合闭合网络满足以下条件，则称其为三价： 对于每个 $v \in V^{\partial}$，$|E^{\partial}(v)| = 3$ 中恰有两条相邻弧边相对于 v具有相容的定向。如果这两条边的 v 均为源点，那么 v 称为分裂顶点；否则，它们的 v 均为目标点，且 v 称为合并顶点。• 若 $V^{\partial} = \varnothing$，因而 $E^{\partial}_{\mathrm{arc}} = \varnothing$也成立，则称组合闭合网络为零价 。• 对于给定的网 W，我们考虑镜像 W^m，它是通过反转所有循环次序得到的；以及反向 W^r，它是通过反转所有弧边的定向得到的。注意，这些运算都是对合，并且 W 中的分裂顶点会变成合并顶点，反之亦然。

定义 3.1 中的每个带边界的组合泡沫都定义了一个组合闭合网络。事实上，我们已经注意到，与一个固定边界顶点相邻的边界边，会从围绕它们共有的缝排列的相应各面的循环序中继承一个循环序。此外，请注意，根据构造，对于每条边界弧 $e \in E^{\partial}_{\mathrm{arc}}$，唯一的相邻面 $f \in F(e)$ 会诱导 e的定向。结合定理3.2的条件 (iii)，这意味着带边界的三价泡沫的边界是一个三价网。将每个带边界的组合泡沫映射到其边界网的映射记为：

$$\partial\colon \mathrm{BdFoam} \to \mathrm{ClWeb}$$

定义 3.6。 给定网 W_1， $W_2 \in$ ClWeb，泡沫 $\Sigma\colon\ W_1 \to W_2$ 被定义为边界为 $\partial(\Sigma) = W_2 \sqcup W_1^r$ 的泡沫$\Sigma \in$ BdFoam。

注意，具有边界 $\partial(\Sigma) = W_2 \sqcup W_1^r$ 的泡沫 Σ 既可以被视为泡沫$W_1 \to W_2$，也可以被视为泡沫 $W_2^r \to W_1^r$。

构造 3.7 （泡沫的复合）。 给定两个泡沫 $\Sigma_1\colon\ W_1 \to W_2$ 和 $\Sigma_2\colon\ W_2 \to W_3$，它们均为三价或零价。令 $V(\Sigma_i)$、 $E(\Sigma_i)$ 和 $F(\Sigma_i)$（其中 $i = 1,\ 2$）分别表示它们的顶点、缝和面片的集合。注意， $V^{\partial}(\Sigma_i) = V_i^{\partial} \sqcup V_{i+1}^{\partial}$ 和 $E^{\partial}(\Sigma_i) = E_i^{\partial} \sqcup E_{i+1}^{\partial}$，其中 V_j^{∂} 和 E_j^{∂} 分别是 W_j 的顶点和边的集合。我们按如下方式构造三价（分别为零价）组合泡沫 $\Sigma_2 \circ \Sigma_1\colon\ W_1 \to W_3$：

• 顶点集合为 $V = V(\Sigma_1) \sqcup V(\Sigma_2)$。• 边界顶点集和边界边集分别为 $V^{\partial} = V_1^{\partial} \sqcup V_3^{\partial}$和 $E^{\partial} = E_1^{\partial} \sqcup E_3^{\partial}$。• 缝集 $E = E_{\mathrm{loop}} \sqcup E_{\mathrm{arc}}$ 由以下部分组成：

$$E_{\mathrm{loop}} := E_{\mathrm{loop}}(\Sigma_1) \sqcup E_{\mathrm{loop}}(\Sigma_2) \sqcup N_{\mathrm{loop}}$$
$$E_{\mathrm{arc}} := \{e \in E_{\mathrm{arc}}(\Sigma_1) \sqcup E_{\mathrm{arc}}(\Sigma_2) \mid V(e) \cap V_2^{\partial} = \varnothing\} \sqcup N_{\mathrm{arc}}$$

对于集合 N_{loop} 和 N_{arc}，它们分别由新的环 和新的弧 构成，具体如下。

考虑一个顶点 $v \in V_2^{\partial}$。根据定义 3.1，在 $E_{\mathrm{arc}}(\Sigma_1)$中恰有一条缝，在 $E_{\mathrm{arc}}(\Sigma_2)$ 中恰有一条缝与 v相邻。因此， v 属于唯一一条极大

路径 $[v] := (v_1 \overset{e_1}{\longleftrightarrow} v_2 \overset{e_2}{\longleftrightarrow} \cdots \overset{e_k}{\longleftrightarrow} v_{k+1})$，由两两不同的缝 $e_i \in E_{\mathrm{arc}}(\Sigma_1) \sqcup E_{\mathrm{arc}}(\Sigma_2)$ 组成，并经过边界顶点 v_2、.....、 $v_k \in V_2^\partial$。若两个缝出现在同一条这样的路径中，则定义了 V_2^∂ 上的一个等价关系。我们将新缝的集合定义为等价类的集合：

$$N_{\mathrm{loop}} \sqcup N_{\mathrm{arc}} := \{[v] \mid v \in V_2^\partial\}$$

为了确定环和弧的划分，我们考虑路径$[v] = (v_1 \overset{e_1}{\longleftrightarrow} v_2 \overset{e_2}{\longleftrightarrow} \cdots \overset{e_k}{\longleftrightarrow} v_{k+1})$的两种情况：如果 $v_1, v_{k+1} \notin V_2^\partial$，那么我们将该路径视为一条新的弧，即令 $[v] \in N_{\mathrm{arc}}$，并规定 $V([v]) := \{v_1, v_{k+1}\}$。接缝 $e_1 \dots e_k$ 具有相容的定向，我们为 $V([v])$ 赋予诱导定向。另一方面，如果 $v_1 \in V_2^\partial$或 $v_{k+1} \in V_2^\partial$，那么由极大性可知 $v_1 = v_{k+1}$，我们将新的缝视为一个环 $[v] \in N_{\mathrm{loop}}$。

- 面集 $F = \bigsqcup F_{g,n}$ 由商 $(F(\Sigma_1) \sqcup F(\Sigma_2))/\sim$ 给出，其中商是相对于由以下条件生成的面上的等价关系取得的

$$f \sim f' \iff E_2^\partial(f) \cap E_2^\partial(f') \neq \varnothing$$

即在 E_2^∂ 中共享一条边界边。我们将面$f \in F(\Sigma_1) \sqcup F(\Sigma_2)$ 的等价类记为 $[f]$，并将其诱导的、由 $F(\Sigma_1)$ 和 $F(\Sigma_2)$ 中的面构成的划分记为 $[f] = [f]_1 \sqcup [f]_2$。

受注记 3.3 的启发，我们将 $[f]$ 视为由面集合 $[f]_1$和 $[f]_2$沿着 E_2^∂ 中相邻的环（在零价和三价情形下）以及相邻的弧（在三价情形下）粘合而得到的新面。更具体地说，注记 3.3保证面不必沿着长度大于一的边界弧路径粘合。

- $[f] \in F$ 的边界词集合 $\partial([f]) \subset \mathrm{P}(W(E))$ 是由以下内容得到的 t

$$\bigsqcup_{f' \in [f]_1} \partial(f') \sqcup \bigsqcup_{f'' \in [f]_2} \partial(f'') \subset \mathrm{P}(W(\overline{E}(\Sigma_1) \cup \overline{E}(\Sigma_2)))$$

通过以下算法，该算法迭代执行以下步骤：

(a) 我们首先移除 E_2^∂ 中由公共环给出的 1 元边界词出现项的所有有序对 $\partial_i(f'), \partial_j(f'')$

$$\partial_i(f') \in W(E_{2,\mathrm{loop}}^\partial \cap \bigcup_{f' \in [f]_1} E_2^\partial(f')) \quad \text{and} \quad \partial_j(f'') \in W(E_{2,\mathrm{loop}}^\partial \cap \bigcup_{f'' \in [f]_2} E_2^\partial(f''))$$

令 $g_+([f])$ 表示执行该操作的次数。

(b1) 我们考虑在剩余边界词中出现两次的所有边 $e \in E_{2,\ \mathrm{arc}}^\partial$。这两次出现分别来自 Σ_1 和 Σ_2 中与 e 相邻的两个唯一面的边界词。因此，边 e是沿相反的定向遍历的。首先考虑 e 出现在两个不同的循环词中的情形，其长度分别为 k，$l \geqslant 2$：

$$(v_1 \xrightarrow{e_1^{\epsilon_1}} \cdots \xrightarrow{e_{k-1}^{\epsilon_{k-1}}} v_k \xrightarrow{e^{\epsilon}} v_1) \text{ and } (v_1 \xrightarrow{e^{-\epsilon}} v_k \xrightarrow{e_k^{\epsilon_k}} \cdots \xrightarrow{e_{k+l-2}^{\epsilon_{k+l-2}}} v_1)$$

这里我们移除两个循环词，并添加长度为$k + l - 2$ 的嫁接循环词，其定义如下：

$$(v_1 \xrightarrow{e_1^{\epsilon_1}} \cdots \xrightarrow{e_{k-1}^{\epsilon_{k-1}}} v_k \xrightarrow{e_k^{\epsilon_k}} \cdots \xrightarrow{e_{k+l-2}^{\epsilon_{k+l-2}}} v_1)$$

令 $n_-([f])$ 表示此操作执行的次数。

(b2) 对于第二种情形，我们假设边 $e \in E_{2,\ \mathrm{arc}}^{\partial}$ 在一个长度为 $k+l \geqslant 4$ 的循环词中出现两次：

$$(v_1 \xrightarrow{e_1^{\epsilon_1}} \cdots \xrightarrow{e_{k-1}^{\epsilon_{k-1}}} v_k \xrightarrow{e^{\epsilon}} v_{k+1} \xrightarrow{e_{k+1}^{\epsilon_{k+1}}} \cdots \xrightarrow{e_{k+l-3}^{\epsilon_{k+l-3}}} v_{k+l-2} \xrightarrow{e_{k+l-2}^{\epsilon_{k+l-2}}} v_{k+1} \xrightarrow{e^{-\epsilon}} v_k \xrightarrow{e_{k+l}^{\epsilon_{k+l}}} v_1)$$

现在，我们移除该循环词，并附加由下式给出的两个循环词

$$(v_1 \xrightarrow{e_1^{\epsilon_1}} \cdots \xrightarrow{e_{k-1}^{\epsilon_{k-1}}} v_k \xrightarrow{e_{k+l}^{\epsilon_{k+l}}} v_1) \text{ and } (v_{k+1} \xrightarrow{e_{k+1}^{\epsilon_{k+1}}} \cdots \xrightarrow{e_{k+l-3}^{\epsilon_{k+l-3}}} v_{k+l-2} \xrightarrow{e_{k+l-2}^{\epsilon_{k+l-2}}} v_{k+1})$$

令 $n_+([f])$ 表示执行此操作的次数。

(c) 对于每个经过至少一个边界顶点 $v \in V_2^{\partial}$ 的循环词，上文所述的唯一极大路径 $[v]$ 都会作为子词出现；将此子词缩并为单个字母 $[v] \in N_{\mathrm{loop}} \sqcup N_{\mathrm{arc}} \subset E$。

显然，该算法会在有限步后终止，因为每一步都会减少所有面之边界词中字母的总数。我们将验证以下结论留给读者：应用类型 **(b1)** 和 **(b2)** 的步骤时，其顺序不会影响结果。对于面构成的有限集 F'，我们用 $g(F'), n(F') \in \mathbb{N}_0$ 表示 F' 中所有面的亏格总和和边界分支总数。对于$i \in \{1,2\}$，我们令 $g_i([f]) := g([f]_i), n_i([f]) := n([f]_i) \in \mathbb{N}_0$。新面的边界分支数和亏格 $[f]$ 定义为

$$\begin{aligned} g([f]) &:= g_1([f]) + g_2([f]) + n_-([f]) + g_+([f]) + 1 - |[f]_1| - |[f]_2| \\ n([f]) &:= |\partial([f])| = n_1([f]) + n_2([f]) - 2 \cdot g_+([f]) - n_-([f]) + n_+([f]). \end{aligned}$$

- 可以验证，每条边、每个 $e \in E$ 和每个 $\overline{v} \in V$ 在 $\partial_i([f])^{-}$中至多经过一次，且至多对应一个 i。这用到了假设的三价性或零价性。特别地，每条缝 $e \in E$ 都恰好与三个面相邻，这些面在 Σ_1 和 Σ_2 中的循环序由其构成部分继承而来。我们将证明 $N_{\mathrm{loop}} \sqcup N_{\mathrm{arc}}$ 中缝的循环次序定义良好留作练习。

注记 3.8. 元素 $f \in F_{g,n}$ 可以非正式地看作亏格为 g 且有 n 个边界分支的连通定向曲面，因此其欧拉示性数为 $\chi(f) = 2 - n - 2g$。作为合理性检验，我们现在将定理 3.7 中粘合面时亏格的更新规则与欧拉示性数在粘合下的变化进行比较。回顾一下，χ 在不交并下具有可加性，在沿圆周自粘合时保持不变，而在沿区间粘合时减少 1。粘合后面的欧拉示性数一方面为 $2 - n([f]) - 2 \cdot g([f])$，展开后为：

$$2 - n_1([f]) - n_2([f]) + 2 \cdot g_+([f]) + n_-([f]) - n_+([f]) - 2 \cdot g([f])$$

另一方面，我们根据 $[f]_1$和 $[f]_2$中所有面的欧拉示性数以及沿区间粘合的次数来计算它：

$$2|[f]_1| + 2|[f]_2| - n_1([f]) - n_2([f]) - 2 \cdot g_1([f]) - 2 \cdot g_2([f]) - n_+([f]) - n_-([f])$$

令两个表达式相等并解出 $g([f])$，我们得到：

$$g([f]) = g_1([f]) + g_2([f]) + n_-([f]) + g_+([f]) + 1 - |[f]_1| - |[f]_2|$$

类似地，可以非正式地将元素 $e \in E$ 视为连通定向1-流形；当 $e \in E_{\mathrm{loop}}$ 时为闭合流形，当 $e \in E_{\mathrm{arc}}$时则带有边界。因此，第一种情况下我们令 $\chi(e) = 0$，第二种情况下令 $\chi(e) = 1$。最后，对于顶点 $v \in V$，我们令 $\chi(v) = 1$，并非正式地将其视为一个点。

定义 3.9（恒等泡沫）。给定一个（三价或零价）组合闭合网络W，我们将 上的恒等泡沫定义为（三价或零价）组合泡沫 id_W： $W \to W$ 其构造如下：

• 我们将构成所需泡沫 id_W 边界的两个网分别重新命名为 $W_1 := W^r$ 和 $W_2 := W$。对于 $i \in \{1, 2\}$，记 V_i^∂和 E_i^∂为 W_i 的顶点集和边集，并注意到我们有典范双射 $V_1^\partial \cong V_2^\partial$和 $E_1^\partial \cong E_2^\partial$。根据定义，$\mathrm{id}_W$ 的顶点集 V 完全由边界顶点 $V \equiv V^\partial = V_1^\partial \sqcup V_2^\partial$组成，不含内部顶点 $V = \varnothing$。• 边界边集声明为 $E^\partial = E_1^\partial \sqcup E_2^\partial$。• 缝集 $E = E_{\mathrm{loop}} \sqcup E_{\mathrm{arc}}$ 由 $E_{\mathrm{loop}} = \varnothing$ 和 $E_{\mathrm{arc}} = \{e_v\}_{v \in V_2^\partial}$给出，其中，对于每个合并/分裂顶点 $v \in V_2^\partial$，令 $v^r \in V_1^\partial$为 W_1 中在典范双射下对应的分裂/合并顶点，并将 e_v 定义为连接 $V(e_v) = \{v, v^r\}$的缝，方向从合并顶点指向分裂顶点。• 面集 F 由 $F = F_{0,1} \sqcup F_{0,2} = \{f_e\}_{e \in E_2^\partial}$ 给出（特别地，对于 $g > 0$ 或 $n > 2$，有 $F_{g,n} = \varnothing$），其中 f_e 定义如下：对于每个 $e \in E_2^\partial$，令 $e^r \in E_1^\partial$ 为 W_1 中在典范双射下对应的边。若 e 是一个环，则令 $f_e \in F_{0,2}$ 为边界为 $\{\partial_1(f_e), \partial_2(f_e)\} = \{(e), (e^r)\}$的面。若 e 是一个以 v 为源点、以 v'为目标点的弧，则令 $f_e \in F_{0,1}$ 为边界为 $\partial(f_e) = (e, e_{v'}, e^r, e_v)$的面。• 给定一个具有 $v \in V_2^\partial$的缝 $e_v \in E$，与其相邻的三个面 f_e、$f_{e'}$ 和 $f_{e''}$ 从与 v相邻的边 e、e'、$e'' \in E_2^\partial$ 的循环次序继承一个循环次序。

命题 3.10. 以下数据定义了一个小对称幺半范畴，我们将其记为 PreFoam，并称为闭网与预泡沫范畴：

• 对象集为 ClWeb，即定义3.4中的组合闭合网络集合。• 态射集 $W_1 \to W_2$ 为定义 3.6 中的组合泡沫集合。• 态射的复合律由构造 3.7给出。• 对每个 $W \in$ClWeb，恒等态射 id_W 在 W 上由定义 3.9给出。• 对称幺半结构在网和泡沫上由不交并给出，空网作为张量单位。

证明。 由构造 3.7可直接看出，复合满足结合律，且恒等泡沫在左右两侧均起单位作用。□

3.2. **带边界的标记泡沫**。 组合 $\mathcal{C}$带边界泡沫的定义是对定义 2.5的直接扩展。

定义 3.11 (带边界的组合 $\mathcal{C}$-泡沫)。 设 $\Bbbk$ 是一个交换环，且$\mathcal{C}$ 如定义 2.4中所述。一个（三价或零价）组合 $\mathcal{C}$-泡沫（带边界）由以下数据组成：

(1) 如定义 3.1 和3.2 中所述的（有三价或零价顶点的）带边界的组合泡沫，其顶点、缝和面片的集合分别记为 V， E 和 F。

(2) 一个标记 $\mathrm{l}\colon F \to \mathcal{C}_1$ 将所有面标记为 $\mathcal{C}_1$中的元素。(3) 用一个元素装饰这些面：$\mathrm{Dec}(F) \in \bigotimes_{f\in F}\mathrm{Dec}(\mathrm{l}(f))$。(4) 该标记必须满足定义 F中内部缝 E和内部顶点 V对面集合所规定的相同条件；该定义针对闭合组合泡沫，见定义 2.5。

带边界的组合泡沫集合记作 $\mathcal{C}$-BdFoam。

现在我们描述 $\mathcal{C}$-泡沫的边界，它们来自定义 3.11。

定义 3.12 （组合闭合 $\mathcal{C}$-网）。 设 $\mathcal{C}$ 如定义 2.4 中所述。一个（三价或零价）组合闭合 $\mathcal{C}$-网 由以下部分组成：

- 定义3.4 和3.5 中所述的（三价或零价）组合闭合网，其顶点集和有向边集分别记为 V^∂ 和 E^∂ 。• 对所有面进行标记 $\mathrm{l}\colon E^\partial \to \mathcal{C}_1$ ，其中各面取自 $\mathcal{C}_1$。

在零价情形下，定义至此完成。在三价情形下，这些数据须满足以下要求：给定一个顶点 $v \in V^\partial$，我们将 $E(v)$ 上的循环序细化为全序 $(e_1,\ e_2,\ e_3)$，要求 e_3 是定向与其余边不一致的那条边。然后，要求 $e_1,\ e_2,\ e_3$ 的标签满足：

$$\mathrm{l}(e_1) + \mathrm{l}(e_2) = \mathrm{l}(e_3).$$

带边界的组合泡沫集合记为 $\mathcal{C}$-ClWeb。

组合闭合 $\mathcal{C}$-网是定义 $\mathcal{C}$3.11中带边界的组合 $\mathcal{C}$-泡沫的边界。注意，每条边界边 $e \in E^\partial$ 都继承自唯一相邻面 $f \in F(e)$的诱导标签 l。将每个带边界的 $\mathcal{C}$-泡沫映射到其边界 $\mathcal{C}$-网的映射记为：

$$\partial\colon \mathcal{C}\text{-BdFoam} \to \mathcal{C}\text{-ClWeb}$$

定义 3.13. 给定 $\mathcal{C}$-网 $W_1, W_2 \in \mathcal{C}$-ClWeb，一个 $\mathcal{C}$-泡沫 $\Sigma\colon W_1 \to W_2$ 定义为一个泡沫 $\Sigma \in \mathcal{C}$-BdFoam，其边界为 $\partial(\Sigma) = W_2 \sqcup W_1^r$。所有具有相同底层数据 (1) 和 (2) 的 $\mathcal{C}$-泡沫 $\Sigma\colon W_1 \to W_2$构成的集合，其中 (1) 和 (2) 见定义3.11 ，由面 (3) 上装饰的 $\Bbbk$-模参数化。令

$$\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W_1, W_2)$$

记为 $\Bbbk$-模，它由这些 $\Bbbk$-模的余积得到，其中 (1) 和 (2) 遍历所有 $\mathcal{C}$-泡沫 $F\colon W_1 \to W_2$。

注意，我们有典范的恒等识别：

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W_1, W_2) &= \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing, W_2 \sqcup W_1^r)\\ &= \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W_1 \sqcup W_2^r, \varnothing) = \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W_2^r, W_1^r).\end{aligned} \tag{3.1}$$

注记 3.14. 在定理2.8中对合标记数据的情形下，我们在 $\mathcal{C}$-BdFoam 上得到一个对合，它将 $\mathcal{C}$-标记的带边界泡沫 W 映射为具有边界W^r的此类泡沫。该对合同样通过反转底层泡沫，并对所有装饰施加 ι 来作用。特别地，我们得到同构：

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W_1, W_2) = \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing, W_2 \sqcup W_1^r)\\ &\xrightarrow{-^r} \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing, W_2^r \sqcup W_1) = \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W_2, W_1).\end{aligned} \tag{3.2}$$

构造 3.15 （ $\mathcal{C}$-泡沫的复合）。设 W_1、 W_2、 $W_3 \in \mathcal{C}$-ClWeb 是 $\mathcal{C}$-网，并考虑两个组合的（三价或零价） $\mathcal{C}$-泡沫 Σ_1: $W_1 \to W_2$ 和 Σ_2: $W_2 \to W_3$。我们构造一个 $\mathcal{C}$-泡沫

$$\Sigma_2 \circ \Sigma_1 \colon W_1 \to W_3$$

如下:

•底层的组合（无标签）泡沫由 Σ_1 和 Σ_2的底层组合泡沫的复合给出，如构造 3.7 所示。回忆一下面集由 $F = (F(\Sigma_1) \sqcup F(\Sigma_2))/\sim$给出。• 每个面 $[f] \in F$都从 $f \in F(\Sigma_1) \sqcup F(\Sigma_2)$的标签继承一个标签 $\mathrm{l}([f])$: 事实上，如果 $f \sim f'$，那么 $\mathrm{l}(f) = \mathrm{l}(f')$，因为它们在 $\mathcal{C}$-网W_2中共享一条公共边界边。• 设 $\mathrm{Dec}(F(\Sigma_1))$ 和 $\mathrm{Dec}(F(\Sigma_2))$ 分别是 Σ_1 和 Σ_2 上的装饰。(F) 上的装饰 Dec F由映射$\bigotimes$ 将 $\mathrm{Dec}(F(\Sigma_1)) \otimes \mathrm{Dec}(F(\Sigma_2))$ 的像取为 $\mathrm{Dec}(\mathrm{l}(f)) \otimes \bigotimes_{f \in F(\Sigma_2)} \mathrm{Dec}(\mathrm{l}(f)) \cong \bigotimes_{[f] \in F} \bigotimes_{f' \in [f]} \mathrm{Dec}(\mathrm{l}([f])) \longrightarrow \bigotimes_{[f] \in F} \mathrm{Dec}(\mathrm{l}([f]))_{f \in F(\Sigma_1)}$，该映射由乘法映射诱导

$$\bigotimes_{f' \in [f]} \text{十二月}(\mathrm{l}([f])) \to \text{十二月}(\mathrm{l}([f])).$$

可直接推出， $(\Sigma_2, \Sigma_1) \to \Sigma_2 \circ \Sigma_1$ 定义了一个 $\Bbbk$-双线性映射

$$\circ \colon \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W_2, W_3) \times \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W_1, W_2) \to \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W_1, W_3)$$

定义 3.16. 给定一个（三价或零价）组合闭合 $\mathcal{C}$网 W，我们将 W 上的恒等泡沫定义为如下构造的（三价或零价） $\mathcal{C}$-泡沫 id_W: $W \to W$:

• 底层组合泡沫由位于 W 上的恒等泡沫给出，来自定义 3.9。回顾 id_W 的面集由 $F = \{f_e\}_{e \in E^\partial(W)}$给出。• 每个面 $f_e \in F$ 所继承的标签来自 $e \in E^\partial(W)$: $\mathrm{l}(f_e) = \mathrm{l}(e)$。• 各面上的装饰由 $\mathrm{Dec}(F) = 1$给出。

命题 3.17。 以下数据定义了一个对称幺半 $\Bbbk$-线性范畴，我们将其记为 $\mathcal{C}$PreFoam，并称为闭合 $\mathcal{C}$-网和 $\mathcal{C}$-预泡沫的范畴</style}:

• 对象集 $\mathcal{C}$-ClWeb 是定义 $\mathcal{C}$3.12 中的组合闭合 3.12。• 态射的 $\Bbbk$-模 $W_1 \to W_2$ 由定义 $\mathcal{C}$3.13 中的泡沫构成 3.13。• 态射的复合律由构造 3.15 给出。• 对于每个 $W \in \mathcal{C}$-ClWeb，其上的恒等态射 id_W 由定义 W 3.16 给出3.16。• 对称幺半结构在 $\mathcal{C}$-网上由不交并给出，在泡沫上则由底层组合泡沫的不交并的 $\Bbbk$-双线性扩张至$\mathcal{C}$-泡沫给出。空网充当张量单位。

证明。 这由命题 3.10 以及面上装饰代数的单位性和结合性得出。 □

3.3. **泛构造**。 固定一个交换环 $\Bbbk$ 和一个 $\Bbbk$-线性标记数据 $\mathcal{C}$ ，如定义 2.4所述，以及一个闭泡沫求值 eval，如定义 2.7所述，暂不假设它是可乘的。我们将使用 [BHMV95] 的泛构造，在 $\mathcal{C}$-泡沫上施加关系。

对于对象 $W \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}$，我们使用（3.1）来定义迹：

$$\mathrm{tr}_W : \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W,W) = \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W \sqcup W^r, \varnothing) \xrightarrow{\mathrm{id}_W \circ -} \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing,\varnothing)$$

其中我们再次使用了（3.1）来考虑 $\mathrm{id}_W \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing, W \sqcup W^r)$。对于另一个对象$W' \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}$与 $\Sigma \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W, W')$ 以及 $\Sigma' \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W', W)$ 我们有

$$\mathrm{tr}_W(\Sigma' \circ \Sigma) = \mathrm{tr}_{W'}(\Sigma \circ \Sigma')$$

引理 3.18. 对于对象 W, $W' \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}$，我们考虑对称且 $\Bbbk$-线性的配对：

$$\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W',W) \otimes \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W,W') \longrightarrow \Bbbk$$
$$\Sigma' \otimes \Sigma \mapsto \langle \Sigma', \Sigma \rangle := \mathrm{eval}(\mathrm{tr}_W(\Sigma' \circ \Sigma))$$

以及 $\Bbbk$-线性映射：

$$\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W',\varnothing) \otimes \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W,W') \otimes \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing,W) \longrightarrow \Bbbk$$
$$\Sigma'' \otimes \Sigma \otimes \Sigma' \mapsto \langle \Sigma'', \Sigma, \Sigma' \rangle := \mathrm{eval}(\Sigma'' \circ \Sigma \circ \Sigma')$$

则这些子模

$$I_1(W,W') := \bigcap_{\Sigma'} \ker \langle \Sigma', - \rangle \subset \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W,W') \tag{3.3}$$

and

$$I_2(W,W') := \bigcap_{\Sigma', \Sigma''} \ker \langle \Sigma'', -, \Sigma' \rangle \subset \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W,W') \tag{3.4}$$

满足 $I_1(W, W') \subset I_2(W, W')$ 且这两个族都构成 $\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}$ 中的态射理想 .

证明。对于第一个断言，注意到 $\langle \Sigma'', -, \Sigma' \rangle = \langle \Sigma' \circ \Sigma'', - \rangle$，(3.4) 中交集的指标集对应于 (3.3) 中交集的指标集的子集，该子集由那些 Σ' 可经由 $\varnothing$分解的元素组成。

为了验证 I_1构成一个理想，我们考虑 $\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}$ 中的态射 $W' \xrightarrow{\Phi'} V \xrightarrow{\Phi} W \xrightarrow{\Sigma} W' \xrightarrow{\Psi} V' \xrightarrow{\Psi''} W$，并得到

$$\Sigma \in \ker \langle \Psi'' \circ \Psi, - \rangle \implies \Psi \circ \Sigma \in \ker \langle \Psi'', - \rangle$$
$$\Sigma \in \ker \langle \Phi \circ \Phi', - \rangle \implies \Sigma \circ \Phi \in \ker \langle \Phi', - \rangle$$

其中第二行中我们两次使用了迹的循环性。由于 $\Psi'' \circ \Psi$ 和 $\Phi \circ \Phi'$ 都出现在 (3.3) 中交集的指标集中，因此我们有 $\Sigma \in I_1(W, W')$ 意味着 $\Psi \circ \Sigma \in I_1(W, V')$且 $\Sigma \circ \Phi \in I_1(V, W')$。

对于 I_2，我们转而考虑 $\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}$ 中的态射 $\varnothing \xrightarrow{\Phi'} V \xrightarrow{\Phi} W \xrightarrow{\Sigma} W' \xrightarrow{\Psi} V' \xrightarrow{\Psi''} \varnothing$，并得到：

$$\Sigma \in \ker \langle \Psi'' \circ \Psi, -, \Sigma' \rangle \implies \Psi \circ \Sigma \in \ker \langle \Psi'', -, \Sigma' \rangle$$
$$\Sigma \in \ker \langle \Sigma'', -, \Phi \circ \Phi' \rangle \implies \Sigma \circ \Phi \in \ker \langle \Sigma'', -, \Phi' \rangle$$

由于 $\Psi'' \circ \Psi$ 和 $\Phi \circ \Phi'$ 出现在交集（3.4）的索引中，因此我们有$\Sigma \in I_2(W, W')$ 蕴含 $\Psi \circ \Sigma \in I_2(W, V')$ 且 $\Sigma \circ \Phi \in I_2(V, W')$。□

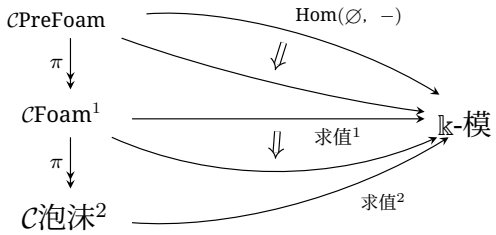
引理 3.19。对于任意 $W \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}$，我们有 $I_1(\varnothing, W) = I_2(\varnothing, W)$。

证明。 对于任意态射 $\Sigma \in I_2(\varnothing,\ W)$，我们有 $\mathsf{eval}(\Sigma' \circ \Sigma \circ C) = 0$ 对于所有 $\Sigma' \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W,\ \varnothing)$以及 $C \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing,\ \varnothing)$。这包括 $C = \varnothing$ 的情形，因此我们有

$$\langle \Sigma', \Sigma \rangle = \langle \Sigma', \Sigma, \varnothing \rangle = 0$$

这意味着 $\Sigma \in I_1(\varnothing,\ W)$。反向包含关系已在定理 3.18中证明。 □

定义 3.20。 我们引入以下记号 $\mathcal{C}\mathsf{PreFoam} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1 \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}\mathsf{Foam}^2$ ，表示与定理 中的理想相关联的 -线性商函子及其陪域。3.18。关于可表函子 求值$^i = \mathrm{Hom}(\varnothing,\ -)$ 的进一步记号通过以下 -线性函子与自然变换图来定义： $\Bbbk$



这里，未标记箭头由未标记三角形的交换性定义。此外，我们定义 $\Bbbk$-线性函子：

$$\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2 \colon \mathcal{C}\mathsf{PreFoam} \to \Bbbk\text{-mod}, \quad \mathcal{F}^1 := \mathsf{eval}^1 \circ \pi, \quad \mathcal{F}^2 := \mathsf{eval}^2 \circ \pi \circ \pi$$

推论 3.21。 我们有 $\Bbbk$-线性函子的典范自然同构

$$\mathsf{eval}^1 \xRightarrow{\cong} \mathsf{eval}^2 \circ \pi \qquad \text{and} \qquad \mathcal{F}^1 \xRightarrow{\cong} \mathcal{F}^2.$$

证明。 这是定理 3.19的直接推论。 □

在 下文中，我们可以写作 $\mathcal{F} := \mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^2$和 $I(\varnothing,\ W) := I_1(\varnothing,\ W) = I_2(\varnothing,\ W)$.

引理 3.22。 $\Bbbk$-线性函子 eval^2 是忠实的。

证明。 Let $\underline{\Sigma} \in \mathcal{C}\mathsf{Foam}^2(W,\ W')$ 使得 $\mathsf{eval}^2(\underline{\Sigma}) = \underline{0}$。这意味着诱导映射 :

$$\mathcal{C}\mathsf{Foam}^2(\varnothing, W) \xrightarrow{\underline{\Sigma} \circ -} \mathcal{C}\mathsf{Foam}^2(\varnothing, W')$$

为零。设 $\Sigma \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W,\ W')$ 满足 $\pi \circ \pi(\Sigma) = \Sigma$。这意味着对于每个 $\Sigma' \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing,\ W)$，我们都有：

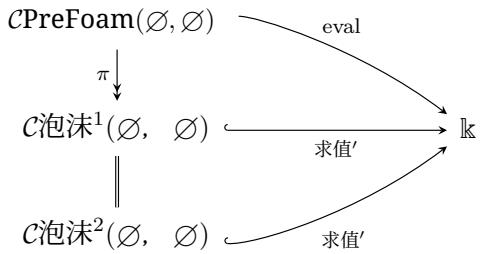
$$\Sigma \circ \Sigma' \in I_2(\varnothing, W') = I_1(\varnothing, W')$$

那么，对于每个 $\Sigma'' \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W',\ \varnothing)$，我们必有

$$\mathrm{eval}(\Sigma'' \circ \Sigma \circ \Sigma') = 0$$

因此 $\Sigma \in I_2(W,\ W')$，这意味着 $\Sigma = \pi_{\underline{\circ}}\, \pi(\Sigma) = 0$ 在 $\mathcal{C}$泡沫$^2(W,\ W')$ 中。 □

引理 3.23。 闭泡沫求值 eval 可分解为：



若求值按定理 2.7 的意义满足可乘性，则有以下结论：

(1) 映射 求值′ 是一个 $\Bbbk$-代数同构。(2) 函子 $\mathcal{F}$ 相对于不交并是弱对称幺半的。

证明。 对于任意自同态 $C \in I(\varnothing,\ \varnothing)$ 以及 $C' \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing,\ \varnothing)$，根据 I_1的定义可知求值$(C' \circ C) = 0$。这包括 $C' = \varnothing$ 的情形，由此可得 $I(\varnothing,\ \varnothing) \subset$ 求值(的核)。因此，诱导的求值 求值′ 是良定义的。根据定理3.22，它是单射的。

(1) 若求值满足定理 $(\varnothing) = 1 \in \Bbbk$2.7 所要求的条件，则 $1 \mapsto \varnothing$ 给出了一个截面 $\Bbbk \to \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing, \varnothing)$ 对应于求值，从而说明求值和求值′ 都是满射。定理 2.7.(2) 随后给出了与代数乘法所需的相容性。

(2) 对于对象 $W, W' \in \mathcal{C}$PreFoam，考虑如下张量积

$$\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing, W) \otimes \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing, V) \to \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing, W \sqcup V) \tag{3.5}$$

它由泡沫的不交并诱导，并记作 $\sqcup$。令 $\Sigma \in I(\varnothing, W) \subset \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing, W)$以及 $\tau \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing, V) = \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(V^r, \varnothing)$。

令 $X \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W \sqcup V, \varnothing) = \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W, V^r)$ 为任意对象。那么

$$\begin{aligned}\langle X, \Sigma \sqcup \tau\rangle &= \mathrm{eval}(\mathrm{tr}_{\varnothing}(X \circ (\Sigma \sqcup \tau)))\\ &= \mathrm{eval}(X \circ (\Sigma \sqcup \tau)\\ &= \mathrm{eval}(\tau \circ X \circ \Sigma)\\ &= \mathrm{eval}(\mathrm{tr}_{\varnothing}(\tau \circ X \circ \Sigma)) = \langle \tau \circ X, \Sigma\rangle = 0\end{aligned}$$

这表明 $\Sigma \sqcup \tau \in I_1(\varnothing, W \sqcup V) = I(\varnothing, W \sqcup V)$。因此，张量积 (3.5) 可下降到商上，并可用以下三种等价形式表示：

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(\varnothing, W) \otimes \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(\varnothing, V) &\to \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(\varnothing, W \sqcup V)\\ \mathcal{C}\mathsf{Foam}^2(\varnothing, W) \otimes \mathcal{C}\mathsf{Foam}^2(\varnothing, V) &\to \mathcal{C}\mathsf{Foam}^2(\varnothing, W \sqcup V)\\ \mathcal{F}(W) \otimes \mathcal{F}(V) &\to \mathcal{F}(V \sqcup W).\end{aligned} \tag{3.6}$$

这些映射在两个变量上都是自然的，因此赋予函子 $\mathcal{F}$ 一个松单结构。此外，函子 $\mathcal{F}$ 显然与 $\mathcal{C}$PreFoam 和 $\Bbbk$-mod 上通过交换分量给出的对称编织相容。□

引理 3.24。 若求值按定理2.7 所述具有可乘性，且此外 $\mathcal{F}$ 是一个强对称幺半函子，则：

(1) 对于每个 $W, W' \in \mathcal{C}$泡沫^1,，映射

$$\circ\colon \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(\varnothing, W') \otimes \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W, \varnothing) \to \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W, W')$$

都是满射， $I_1(W,W') = I_2(W,W') = I(W,W')$ 因此，商函子给出了一个典范同构 π: $\mathcal{C}$泡沫$^1 \to \mathcal{C}$泡沫^2，它是 $\Bbbk$-线性范畴之间的同构。
在这种情况下，我们记 $\mathcal{C}\mathsf{Foam} := \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1 = \mathcal{C}\mathsf{Foam}^2$，并记 $\mathsf{eval} := \mathsf{eval}^1 = \mathsf{eval}^2$。

(2) $I(W,W')$ 中的态射理想 $\mathcal{C}$PreFoam 是幺半的，因此幺半结构可以下降到商 $\mathcal{C}$Foam，且函子 eval 成为强对称幺半函子。

注 3.25. 在 [Kho20], Khovanov 讨论了与泛构造相关的一些性质（另见 [BHMV95]）：

(M) 表示函子 $\mathcal{F}$ 的强幺半性。(M') 表示引理 3.24 中所述的满射性，通常称为颈切割。(M") 是 (M) 的较弱形式，要求 $\mathcal{F}(W) \otimes \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(V \sqcup W)$ 仅为一个 $\Bbbk$-模直和项上的同构，对所有 V， $W \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}$。

引理 3.24 的证明从注意到蕴含关系 (M) 开始 $\Longrightarrow$(M')，其逆命题也成立，只要 $\Bbbk$ 是一个域，参见 [Kho20]。

定理 *3.24*的证明。(1) 所声称的 $\circ$ 的满射性（事实上是双射性）源于 $\mathcal{F}$的强幺半性，因为 $\circ$ 对应于经由下方交换方块转换后的映射 (3.6):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(\varnothing,W') \otimes \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W,\varnothing) & \xrightarrow{\ \circ\ } & \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W,W') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(\varnothing,W') \otimes \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(\varnothing,W^r) & \longrightarrow & \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(\varnothing,W' \sqcup W^r) \end{array}$$

包含关系 $I_1(W,\ W') \subset I_2(W,\ W')$ 由引理 3.18可得。令 $\Sigma \in I_2(W,\ W')$ 并考虑任意一个 $\tau \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W',\ W)$ 以及 $\pi(\tau) = \tau \in \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W',\ W)$。由 $\circ$的满射性可知，

$$\underline{\tau} = \sum_i a_i \underline{\Sigma}'_i \circ \underline{\Sigma}''_i$$

对于_ $\Sigma'_i \in \mathcal{C}$泡沫$^1(\varnothing,\ W)$, $\underline{\Sigma}''_i \in \mathcal{C}$泡沫$^1(W',\ \varnothing)$ 以及 $a_i \in \Bbbk$。对于所有 i,

$$\begin{aligned} \langle \Sigma'_i \circ \Sigma''_i, \Sigma \rangle &= \mathrm{eval}(\mathrm{tr}_W(\Sigma'_i \circ \Sigma''_i \circ \Sigma)) \\ &= \mathrm{eval}(\mathrm{tr}_\varnothing(\Sigma''_i \circ \Sigma \circ \Sigma'_i)) \\ &= \mathrm{eval}(\Sigma''_i \circ \Sigma \circ \Sigma'_i) \\ &= \langle \Sigma''_i, \Sigma, \Sigma'_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

因此， $\langle \tau,\ \Sigma \rangle = 0$，由此得出 $I_2(W,\ W') \subset I_1(W,\ W')$。

（2）给定对象 V， V'， W， $W' \in \mathcal{C}$，在 PreFoam 中考虑张量积

$$\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(V,V') \otimes \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W,W') \to \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(V \sqcup W, V' \sqcup W') \tag{3.7}$$

由泡沫的不交并诱导，记为 $\sqcup$。令 $\Sigma \in I(V,\ V') \subset \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(V,\ V')$ 和$\Theta \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W,\ W')$。令 $\tau \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing,\ V \sqcup W)$和 $\tau' \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(V' \sqcup W',\ \varnothing)$ 为任意对象。根据第 (1) 点，$\tau = \pi(\tau) \in \mathcal{C}\mathsf{Foam}(\varnothing,\ V \sqcup W) = \mathcal{C}\mathsf{Foam}(V^r,\ W)$ 可分解为

$$\underline{\tau} = \sum_i a_i \underline{\Sigma}'_i \circ \underline{\Sigma}''_i$$

对于 $_\,\Sigma_i' \in \mathcal{C}\mathsf{Foam}(V^r,\ \varnothing) = \mathcal{C}\mathsf{Foam}(\varnothing,\ V)$、$_\,\Sigma_i'' \in \mathcal{C}\mathsf{Foam}(\varnothing,\ W)$ 和 $a_i \in \Bbbk$。于是，对所有 i，

$$\begin{aligned}\langle \tau', \Sigma \sqcup \Theta, \Sigma_i' \sqcup \Sigma_i'' \rangle &= \mathrm{eval}(\tau' \circ (\Sigma \sqcup \Theta) \circ (\Sigma_i' \sqcup \Sigma_i'')) \\ &= \mathrm{eval}(\tau' \circ (\Sigma \circ \Sigma_i') \sqcup (\Theta \circ \Sigma_i'')) \\ &= \mathrm{eval}(\Sigma_i'' \circ \Theta \circ \tau' \circ \Sigma \circ \Sigma_i') \\ &= \langle \Sigma_i'' \circ \Theta \circ \tau', \Sigma, \Sigma_i' \rangle = 0\end{aligned}$$

这表明 $\langle \tau',\ \Sigma \sqcup \Theta,\ \tau \rangle = 0$ 并进而表明 $\Sigma \sqcup \Theta \in I_2(V \sqcup W,\ V' \sqcup W') = I(V \sqcup W,\ V' \sqcup W')$。因此，张量积（3.7）下降到 $\mathcal{C}$泡沫。由于 $\mathcal{F} =$ 求值 $\circ \pi$，求值 求值 的强幺半性由 $\mathcal{F}$的强幺半性推出。□

引理 3.26。 假设求值是可乘的，且满足以下性质：

(A) 每个 $W \in \mathcal{C}$泡沫^1 都是某个 $m \in \mathbb{N}_0$的双积 $W \cong \bigoplus_{i=1}^m \varnothing$ 。

于是：

(1) 性质 (M) 成立，即函子 $\mathcal{F}$ 是强（对称）幺半的。(2) $\Bbbk$-模中的所有态射 $\mathcal{C}\mathsf{Foam} = \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1$ 都是有限秩自由的。(3) 引理 求值 中的函子 3.24 诱导出一个范畴等价，仍记作 求值:

$$\mathrm{eval}\colon \mathrm{Mat}(\mathcal{C}\mathsf{Foam}) \longrightarrow \Bbbk\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{fr}}$$

从 ($\mathcal{C}$Foam) 的加性闭包 Mat $\mathcal{C}$Foam 到满子范畴 $\Bbbk$-模^{fr} 的 $\Bbbk$-模中，其对象为有限秩自由 $\Bbbk$-模。

证明。 对于 V，$W \in \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1$，我们可以假设 $V = \bigoplus_{i=1}^m \varnothing$ 并且 $W = \bigoplus_{i=1}^n$，利用引理 3.23 可得 $\mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(\varnothing,\ \varnothing)) \cong \Bbbk$ 因此：

$$\mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(\varnothing, V) \otimes \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(\varnothing, W) \cong \Bbbk^m \otimes \Bbbk^n \cong \Bbbk^{m,n} \cong \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(\varnothing, V \sqcup W)$$

类似地，我们有

$$\mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(V, W) \cong \mathrm{Mat}(m \times n, \Bbbk)$$

是有限秩自由的。所述范畴等价由此得证。 □

例 3.27。 在 Robert–Wagner $\mathfrak{gl}_N$-泡沫构造中，根据定理 2.10，闭泡沫求值映射（记作 $\langle - \rangle$ 见于 [RW20]）是可乘的，并且是 ι-对合的，对合为 $\iota =$ id。此外，以下性质成立：

- （A）由 [RW20，定理 3 的证明30]得出。• （M）由（A）和定理 3.26得出。• （M’）由（M）根据定理 3.24 和定理3.25得出，并由 [RW20，命题 3 的关系式32]（10）• 表示。定理3.29中引入的（F）由（A）和定理 3.31得出。

3.4。 **配对与半双线性**。 本节研究定理3.26 中性质（A）的一种替代表述，适用于定理 2.8意义下的对合泡沫求值情形。本小节与本文其余部分相互独立。

对于每一对对象 W，$V \in \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}^1$，配对 $\langle -,\ - \rangle$ 由定理3.18 下降为非退化的 $\Bbbk$-线性配对，定义在 $\mathcal{C}$泡沫^1，上，我们仍将其记作 $\langle -,\ - \rangle$

$$\mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(V, W) \otimes \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W, V) \longrightarrow \Bbbk$$

$$\underline{\Sigma'} \otimes \underline{\Sigma} \mapsto \langle \underline{\Sigma'}, \underline{\Sigma} \rangle := \langle \Sigma', \Sigma \rangle$$

其中 Σ 和 Σ' 分别是 Σ 和 Σ'的任意代表元。

引理 3.28. （3.2）的对称性保持理想 $I_1(-,\ =)$ 与 $I_2(-,\ =)$ 在 $\mathcal{C}$PreFoam中，从而下降到商 $\mathcal{C}$Foam^1 与 $\mathcal{C}$Foam^2。

证明。设 $V,\ W \in \mathcal{C}$PreFoam 且 $\Phi \in I_2(V,\ W)$。则对 $\Sigma \in \mathcal{C}$PreFoam$(\varnothing,\ W)$ 以及 $\Sigma' \in \mathcal{C}$PreFoam$(V,\ \varnothing)$，我们有

$$\langle \Sigma', \Phi^r, \Sigma \rangle = \iota \langle \Sigma^r, \Phi, (\Sigma')^r \rangle = \iota(0) = 0$$

从而 $\Phi^r \in I_2(W,\ V)$。I_1 的证明类似。 □

现在，对任意对象对 $W,\ V \in \mathcal{C}$Foam^1,，考虑 $\Bbbk$-线性映射

$$\begin{aligned} \varphi_{W,V} :\ \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(V,W) &\longrightarrow \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W,V)^* \\ \underline{\Sigma'} &\longmapsto \langle \underline{\Sigma'}, - \rangle \end{aligned}$$

我们还考虑 ι-半双线性（在第一个自变量上为ι-反线性）配对：

$$\begin{aligned} \langle -^r, - \rangle &: \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W,V) \times \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W,V) \longrightarrow \Bbbk \\ (\underline{\Sigma'}, \underline{\Sigma}) &\mapsto \langle \underline{\Sigma'}^r, \underline{\Sigma} \rangle = \varphi_{W,V}(\underline{\Sigma'}^r)(\underline{\Sigma}) \end{aligned}$$

其中 $\underline{\Sigma'}^r \in \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W^r,\ V^r) = \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(V,\ W)$。

注 3.29. 除定理3.25之外，Khovanov [Kho20] 还讨论了以下两个性质（另见 [BHMV95]）：

(I) 对所有 $V,\ W \in \mathcal{C}$Foam^1，映射 $\varphi_{W,\ V}$ 是一个同构。(F) 对所有 $V,\ W \in \mathcal{C}$Foam^1，模 $\mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W,\ V)$ 都是有限秩自由的，并且半双线性型

$$\langle -^r, - \rangle : \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W,V) \times \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W,V) \to \Bbbk$$

是幺模的。

引理 3.30. 设求值在定理2.8意义下是对合的，且相对于对合 ι。则：

(1) 对所有 $\varphi_{W,\ V}$，映射都是单射的。(2) 若 (F) 成立，则对所有 $W,\ V \in \mathcal{C}$Foam^1,，$\varphi_{W,\ V}$ 是一个同构，即 (I) 成立。

证明。(1) $\varphi_{W,V}$ 的单射性直接由配对 $\langle -, - \rangle$的非退化性得出。(2) 这些条件表明，配对 $\langle -^r, - \rangle$ 诱导出一个同构

$$\mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W,V) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(W,V)^*$$

g由 $\varphi_{W,V} \circ -^r$给出。因此，$\varphi_{W,V} = (\varphi_{W,V} \circ -^r) \circ -^r$ 是一个同构 . □

引理 3.31. 假设求值是可乘且为对合的。以下命题等价：(FM') 性质 (F) 和 (M') 成立。(A) 每个 $W \in \mathcal{C}$泡沫^1 都是某个 $W \cong \bigoplus_{i=1}^m \varnothing$ 的双积 $m \in \mathbb{N}_0$。

证明。我们先证明蕴含关系 (FM') ⇒(A)，为此，假设 (F) 和 (M') 成立。给定 $W \in \mathcal{C}$泡沫^1,，令 $m = \mathrm{rk}_{\Bbbk}\mathcal{C}$泡沫$^1(\varnothing, W)$，并选取 $\mathcal{C}$泡沫$^1(\varnothing, W)$的一组基 $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$，以及 $\mathcal{C}$泡沫$^1(\varnothing, W)^*$的一组对偶基 $\Sigma^1, \ldots, \Sigma^m$。我们有 $\Sigma^i = \langle \tau_i, - \rangle$，其中存在某个 $\tau_i \in \mathcal{C}$泡沫$^1(\varnothing, W^r) =\mathcal{C}$泡沫$^1(W, \varnothing)$，它们构成一组基，且按如下意义互为对偶：$\langle \tau_i, \Sigma_j \rangle = \delta_{ij}$。由性质 (M')，我们可以将 $\mathrm{id}_W = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \Sigma_i \circ \tau_j$ 写成某些标量 $\lambda_{ij} \in \Bbbk$的形式。对于 $a, b \in \{1, \ldots, m\}$，我们接着计算：

$$\delta_{ab} = \langle \Sigma_a, \tau_b \rangle = \langle \mathrm{id}_W, \Sigma_a \circ \tau_b \rangle = \langle \sum_{i,j=1}^m \lambda_{ij} \Sigma_i \circ \tau_j, \Sigma_a \circ \tau_b \rangle$$
$$= \sum_{i,j=1}^m \lambda_{ij} \langle \Sigma_i, \tau_b \rangle \langle \tau_j, \Sigma_a \rangle = \sum_{i,j=1}^m \lambda_{ij} \delta_{ib} \delta_{ja} = \lambda_{ab}.$$

因此，我们得到逆同构

$$W \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \bigoplus_{i=1}^m \varnothing \ , \quad f = (\tau_1, \ldots, \tau_m)^t, \quad g = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m). \tag{3.8}$$

使 W 成为符合 (A) 要求的双积。

对于推论 (A) ⇒ (FM')，我们假设 (A) 成立，并且已知它蕴含 (M)，进而蕴含 (M')。为证明 (F)，我们可以假设 $W = \bigoplus_{i=1}^m \varnothing$ 和 $V = \bigoplus_{i=1}^n \varnothing$ 在 $\mathcal{C}$泡沫^1 中，并回顾定理3.26指出

$$\mathcal{C}\mathsf{Foam}^1(V, W) \cong \mathrm{Mat}(m \times n, \Bbbk)$$

是有限秩自由的。该配对对应于矩阵配对 $(\varphi_1, \ \varphi_2) \mapsto \mathrm{tr}(\varphi_1^t \circ \varphi_2)$，这显然是幺模的。□

3.5. **Frobenius 代数与分次**。

本小节讨论如何将分次纳入前面的讨论。

我们记 Cob_2 为定向闭一维流形之间定向二维配边的对称幺半范畴。考虑一个 $\Bbbk$-线性标记数据 $\mathcal{C}$，如定义 2.4所述，以及一个闭泡沫求值，记为 eval。设 $x \in \mathcal{C}_1$ 是一个标签。我们有如下对称幺半函子：

$$\mathsf{Cob}_2 \to \mathsf{PreFoam}^{\mathrm{nil}} \xrightarrow{\text{label by } x} \mathcal{C}\mathsf{PreFoam} \to \mathcal{C}\mathsf{Foam}^1 \to \mathcal{C}\mathsf{Foam}^2 \to \Bbbk\text{-mod} \tag{3.9}$$

通过将紧致定向一维流形解释为网，将二维定向配边解释为泡沫，并随后为所有对象标记 x。这里，$\mathsf{PreFoam}^{\mathrm{nil}} \subset \mathsf{PreFoam}$ 是由幂零网和预泡沫构成的子范畴。我们记 $\mathcal{Z}_x$ 为复合函子。

引理 3.32。假设泡沫求值是可乘的，并满足引理 [9] 中的假设 (A)3.31，那么对每个标签 $x \in \mathcal{C}_1$，函子 $\mathcal{Z}_x$ 都是对称幺半的，即一个二维拓扑量子场论。因此，$A_x := \mathcal{Z}_x(\bigcirc)$这个 x-标记环网的不变量是一个在 $\Bbbk$上自由的交换 Frobenius 代数。

我们将标记数据扩展到分次情形。

[9]这个 假设或许比必要的更强，但在我们感兴趣的例子中会得到满足 .

定义 3.33（三价泡沫与零价泡沫的分次标记数据及次数）。设 $\Bbbk$是一个分次交换环。三价泡沫的分次[10] $\Bbbk$线性标记数据 由标记数据 $\mathcal{C}$ （其意义见定理 2.4）构成，并满足：对于每个 $a \in \mathcal{C}_1$ ，装饰代数 $\mathbf{Dec}(a)$ 都配备了分次结构以及权

$$\alpha(k) \in \mathbb{Z}, \quad \alpha(k,l) \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_1(k,l,h) \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_2(k,l,h) \in \mathbb{Z}$$

分别对应标签为 $k \in \mathcal{C}_1$ 的面、标签为 k， l， $k+l \in \mathcal{C}_1$ 的缝，以及涉及标签 k， l， h， $k+l$， $l+h$， $k+l+h \in \mathcal{C}_1$ 的两种类型[11] 的顶点。若 f、 s、 v 分别是具有这些标签的面、缝和顶点，我们还定义

$$\alpha(f) := \alpha(k), \quad \alpha(s) := \alpha(k,l), \quad \alpha(v) := \alpha_i(k,l,h),$$

后者取决于顶点的类型，为 i ，并满足下文所述的相容条件。

幂零泡沫的一个分次 $\Bbbk$-线性标记数据 $\mathcal{C}$ 由一个集合 $\mathcal{C}_1$ 以及对每个$a \in \mathcal{C}_1$ 给出的分次交换 $\Bbbk$-代数 $\mathbf{Dec}(a)$ 和权重 $\alpha(a) \in \mathbb{Z}$ 组成，其中权重对应标签为 a 的面。

组合 $\mathcal{C}$-泡沫（闭合或带边界） Σ 的次数 定义如下：其中面集为 F，齐次装饰为 $\mathbf{Dec}(F)$ ：

$$\deg(\Sigma) = \deg(\mathrm{Dec}(F)) + \sum_f \alpha(f)\chi(f) - \sum_s \alpha(s)\chi(s) + \sum_v \alpha(v)\chi(v), \tag{3.10}$$

其中 $\chi(-)$ 是定理3.8中的欧拉示性数。

定理 3.13 现在自然给出一个分次 $\Bbbk$-模 $\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(W_1, W_2)$ 其由以下对象张成： $\mathcal{C}$在闭合组合 $\mathcal{C}$-网 W_1之间带齐次装饰的 W_2预泡沫。权必须相容，从而构造 3.15 中的复合运算保持分次，特别是恒等 $\mathcal{C}$-泡沫的次数为零。

同样，只考虑齐次装饰时， $\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing, \varnothing)$ 就成为一个分次$\Bbbk$-模。对于带分次 $\Bbbk$-线性标记数据的泡沫，若闭泡沫求值是分次的，则

$$\mathrm{eval}\colon \mathcal{C}\mathsf{PreFoam}(\varnothing, \varnothing) \to \Bbbk$$

是分次 $\Bbbk$-模之间的映射，即保持分次的 $\Bbbk$-线性映射。

从分次标记数据和分次泡沫求值出发，可以对第 3.3 节中的构造作相应调整。特别地，我们得到对称幺半分次 $\Bbbk$-线性范畴 $\mathcal{C}\mathsf{PreFoam}$、 $\mathcal{C}\mathsf{Foam}^1$ 和 $\mathcal{C}\mathsf{Foam}^2$。此处与引言中一样，分次 $\Bbbk$-线性 指以分次 $\Bbbk$-模为富化范畴。在分次情形下应用定理 3.26 中的性质 (A) 时，我们假设双积的结构态射是齐次的。函子eval 也因此扩展到分次情形。

例3.34。 对于分次标记数据 $\mathcal{C}$，考虑标签 k， $l \in \mathcal{C}_1$ 以及一个 $\mathcal{C}$-网 $\Theta_{k,\,l}$ ，它由三条分别标记为 k， l， $k+l$ 的边组成，并由一个分裂顶点和一个合并顶点连接。$\Theta_{k,\,l}$ 上的恒等泡沫为零次，这要求满足相容条件：

$$0 = 0 + \alpha(k) + \alpha(l) + \alpha(k+l) - \alpha(k,l) - \alpha(l,k)$$

[10]在全文中，我们只考虑 $\mathbb{Z}$-分次。[11]参见定理 2.5。

定义 3.35。 设 $\Bbbk$ 是一个分次交换环。一个次数为 $d \in \mathbb{Z}$ 的基于 $\Bbbk$的分次 *Frobenius* 代数是一个基于 $\Bbbk$ 的 Frobenius代数 $(A,\ m,\ \eta,\ \Delta,\ \varepsilon)$，其底层 $\Bbbk$-模 A 是分次的，且结构映射 m、η、Δ 和 ε 是齐次的，其次数如下

$$\deg(m) = 0, \qquad \deg(\Delta) = d,$$
$$\deg(\eta) = 0, \qquad \deg(\varepsilon) = -d.$$

注记 3.36。 我们常考虑非负分次 Frobenius 代数，其次数 d 也将是非负的。将底层的分次 $\Bbbk$-模 下移 $c \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，便得到 $(c,\ d-c)$分次 Frobenius 代数的概念，详见 [Cli25]，其中结构映射的次数为

$$\deg(m) = c, \qquad \deg(\Delta) = d - c,$$
$$\deg(\eta) = -c, \qquad \deg(\varepsilon) = c - d.$$

反过来，一个 $(c',\ d')$-分次 Frobenius 代数对应于一个次数为 $d = c' + d'$ 、向下移位了 $c = c'$ 的分次 Frobenius 代数。

根据上述定义，我们可以将定理3.32 细化如下。

推论 3.37。 考虑组合 $\mathcal{C}$-泡沫的分次泡沫求值，其标记数据为分次$\Bbbk$-线性的。假设该分次泡沫求值是可乘的，并满足引理 3.31中的性质 (A)。那么，对每个标签 $x \in \mathcal{C}_1$，都有 $A_x = \mathcal{Z}_x(\bigcirc)$ 是一个在 $\Bbbk$上自由的移位分次交换 Frobenius 代数。其次数为 $d(x) = -2\alpha(x)$ ，移位为 $c(x) = -\alpha(x)$。

证明。 我们将杯配边和帽配边 cup: $\varnothing \to \bigcirc$与 cap : $\bigcirc \to \varnothing$视为 $\mathcal{C}$PreFoam 中的态射，每个态射均由 $x \in \mathcal{C}_1$标记，并记录其次数 $\alpha(x)\chi(\text{cup}) = \alpha(x)\chi(\text{cap}) = \alpha(x)$。单位映射 $\eta_x = \mathcal{Z}_x(\text{cup})$ 和余单位映射 $\varepsilon_x = \mathcal{Z}_x(\text{cap})$ 继承这些次数，因此有 $\alpha(x) = \deg(\eta_x) = -c(x)$ 和 $\alpha(x) = \deg(\varepsilon_x) = c(x) - d(x)$。 □

例 3.38 (Khovanov–Bar-Natan 装饰曲面)。 回顾例 2.9 中 Khovanov–Bar-Natan 装饰曲面的情形，其中 $\Bbbk$-线性标记数据 $\mathcal{C}^A$ 由 $\mathcal{C}_1^A = \{*\}$ 以及交换 Frobenius 代数 $\text{Dec}(*) = A$构成。根据构造，我们有$\mathcal{Z}_*(\bigcirc) = A$。在分次情形下，我们得到一个定义在 $\Bbbk$ 上的、次数为 $d(*) = -2\alpha(*)$、带向下移位 $c(*) = d(*)/2 = -\alpha(*)$的分次交换 Frobenius 代数。Khovanov 同调原始构造所依据的例子由以下交换 Frobenius 代数给出$\mathbb{Z}[x]/(x^2)$，，它是 $\Bbbk = \mathbb{Z}$上的秩 2 自由模，其余单位和余乘法定义如下：

$$\varepsilon\colon 1 \mapsto 0,\ x \mapsto 1 \qquad \text{and} \qquad \Delta\colon 1 \mapsto 1 \otimes x + x \otimes 1,\ x \mapsto x \otimes x.$$

令 $\deg(1) = 0$ 和 $\deg(x) = 2$，Frobenius代数便成为次数为 $d(*) = 2$ 的分次代数，然后再向下平移 $c(*) = 1$。事实上， $\mathcal{Z}_*(\bigcirc)$ 此时等于 Khovanov 同调的平凡结不变量，并且每个（未装饰的）幂零泡沫都按其负欧拉示性数分次。

另一个值得关注的情形是，对于固定的 $N \in \mathbb{N}$，分次基环为 $\Bbbk = \mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_N]$，其中 $\deg(a_i) = 2i$，因此 $A = \Bbbk[x]/(x^N + a_1 x^{N-1} + \cdots + a_{N-1}x + a_N)$，其中 $\deg(x) = 2$，成为一个次数为 $2N-2$ 的分次 Frobenius 代数，其余单位为 $\Bbbk$-线性的 $\varepsilon\colon x^k \mapsto \delta_{k,N-1}$，并向下平移 $c = N - 1$。这恢复了该无色平凡结不变量：

GL(N)-等变 $\mathfrak{gl}_N$ 链环同调。幂零泡沫（不带装饰）按其欧拉示性数缩放 $1-N$ 后进行分次。

例 3.39（Robert–Wagner $\mathfrak{gl}_N$-泡沫）。设 $N \in \mathbb{N}$，并回顾 Robert–Wagner $\mathfrak{gl}_N$-泡沫，出自例 2.10，定义在交换环 $\Bbbk = \mathbb{Z}$ 上。回顾 $\Bbbk$-线性标记数据 $\mathcal{C}^N$ 的底半群为 $\mathcal{C}_1^N = (\mathbb{N}_0, +)$。装饰环 $\mathsf{Dec}(n) = \mathbb{Z}[x_1, \ldots\ldots, x_n]^{S_n}$ 上的分次由如下规定给出：所有变量 x_i 的次数均为 2。面、接缝和顶点的权分别由下式给出：

$$\begin{aligned}\alpha(k) &= -k(N-k),\\ \alpha(k,l) &= -((k+l)(N-k-l)+kl),\\ \alpha_i(k,l,h) &= -((k+l+h)(N-l-k-h)+kl+lh+kh).\end{aligned}$$

它们确定组合 $\mathcal{C}$-泡沫的次数，依据（3.10）（参见 [RW20，定义 2.3]）。注意 $k(N-k)$ 是 $\mathsf{Gr}_{\mathbb{C}}(k,N)$ 的复维数，亦即 k-平面在 $\mathbb{C}^N$ 中的格拉斯曼流形，而其余权则是 2 步与 3 步部分旗簇的负复维数。

与标签 $k \in \mathbb{N}_0$ 相关联的交换 Frobenius 代数 A_k 由整数上同调环给出

$$A_k = H^*(\mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(k,N);\mathbb{Z})$$

采用上述泡沫分次后，Frobenius代数 A_k 是分次的，其次数为 $d(k) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathsf{Gr}_{\mathbb{C}}(k, N)) = 2k(N-k)$ 并向下平移 $c(k) = \binom{d(k)}{2}$。

4. A semistrict monoidal 2-category

在本节中，我们固定一个交换环 $\Bbbk$、一个 $\Bbbk$-线性标记数据 $\mathcal{C}$，如定义 2.4所述，并固定一个闭泡沫求值，记为 eval，它是可乘的，并满足引理3.26中的性质 (A)[12]。我们只考虑三价和幂零情形。

本节的目标是严谨地构造一个局部 $\Bbbk$-线性的半严格幺半 2-范畴 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$，其灵感来自以下粗略描述：

- 对象应为由 $\mathcal{C}_1$ 中元素组成的有限序列，每个元素都带有指向内或指向外的定向数据 *inwards* 或*outwards*，幺半结构 $\boxtimes$ 通过串接作用于这些序列。我们可以将这些序列理解为编码单位区间 $[0,\ 1]$ 中带 $\mathcal{C}_1$ 标签的点的构型。• 1-态射应编码在单位正方形 $[0,\ 1]^2$ 中带边界的 $\mathcal{C}$ 标签网，并在两个边界序列之间建立映射。这些网应由带定向的恒等网、杯和帽，以及三价情形下的三价合并顶点和分裂顶点，在 $\boxtimes$ 和复合 $\circ$ 下生成。由网 S 和 T 给出的两个平行 1-态射之间的• 2-态射，应编码嵌入单位立方体 $[0,\ 1]^3$ 中的带角 $\mathcal{C}$-泡沫的线性组合，其顶边界为 T，底边界为 S，且定向相反。

我们参考 [MWW22，§6]，以了解辫状幺半2-范畴背景下的类似构造。

[12]因此 (M)、(M')、(M") 也成立。

4.1. **对象与1-态射**。我们描述待构造的局部 $\Bbbk$-线性严格2-范畴 $\mathcal{C}$**泡沫**的对象与1-态射。

定义 4.1（对象）。 $\mathcal{C}$**泡沫**的对象是由 $\mathcal{C}_1 \times \{\uparrow,\ \downarrow\}$中的有序对构成的有限序列，包括空序列 $\varnothing$; 我们将其项简记为 $\hat{x} := (x,\ \uparrow)$ 和 $\check{x} := (x,\ \downarrow)$，其中 $x \in \mathcal{C}_1$。序列连接的结合运算记为 $\boxtimes$。

For example, we have $(\hat{x}, \check{y}) \boxtimes (\check{z}) := (\hat{x}, \check{y}, \check{z})$.

定义 4.2（1-态射）。下面我们定义 $\mathcal{C}$**泡沫**中的*1-*态射。1-态射 W 的源对象记为 $s(W)$，其目标对象记为 $t(W)$。

（i）集合 $\mathcal{C}$-GenWeb由以下所有生成 $\mathcal{C}$-网组成，其中 $x \in \mathcal{C}_1$

$$\overleftarrow{\mathrm{cap}}_x\colon\ (\check{x}, \hat{x}) \to \varnothing \qquad\qquad \overleftarrow{\mathrm{cup}}_x\colon\ \varnothing \to (\hat{x}, \check{x})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{cap}}_x\colon\ (\hat{x}, \check{x}) \to \varnothing \qquad\qquad \overrightarrow{\mathrm{cup}}_x\colon\ \varnothing \to (\check{x}, \hat{x})$$

若 $\mathcal{C}$ 是零价。若 $\mathcal{C}$ 是三价，则对于所有 $x,\ y \in \mathcal{C}_1$，集合 $\mathcal{C}$-GenWeb还包含:

$$\widehat{\mathrm{split}}_{x,y}\colon\ \big(\widehat{x+y}\big) \to (\hat{x}, \hat{y}) \qquad\qquad \widehat{\mathrm{merge}}_{x,y}\colon\ (\hat{x}, \hat{y}) \to \big(\widehat{x+y}\big)$$

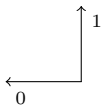
(ii) 集合 $\mathcal{C}$-BasicWeb（由基本 $\mathcal{C}$-网构成）包含对所有对象$o_l,\ o_r \in \mathcal{C}$**泡沫**以及生成网 $W' \in \mathcal{C}$-GenWeb（其中 W'）的下列符号: $s(W') \to t(W')$:

$$o_l \boxtimes W' \boxtimes o_r\colon o_l \boxtimes s(W') \boxtimes o_r \to o_l \boxtimes t(W') \boxtimes o_r.$$

(iii) $\mathcal{C}$**泡沫**中从 s到 t的*1-*态射是长度为 $k \geqslant 1$的有限序列 $(W_k, \ldots, W_1)$，其各项由基本网 $W_i \in \mathcal{C}$-BasicWeb 给出，并且在如下意义下可复合: 对 $1 \leqslant i < k$ 以及 $t = t(W_k)$ 和 $s = s(W_1)$ 有$s(W_{i+1}) = t(W_i)$。若 $s = t$，我们也允许空序列作为（恒等）自同态，并将其记为 id_s。

(iv) $\mathcal{C}$**泡沫**中 1-态射的复合 $\circ$ 由序列连接给出。它是严格结合且严格含幺的。

约定 4.3（图形演算）。 以下给出生成$\mathcal{C}$-网的图形演算，阅读方向为自下而上。在此及下文中，描绘 $\mathcal{C}$-网时，我们采用以下坐标轴:



0 轴的方向是 $\boxtimes$，1 轴的方向是复合。对于所有 $x \in \mathcal{C}_1$，我们有



$= \overleftarrow{\mathrm{cap}}_x$



$= \overleftarrow{\mathrm{cup}}_x$



$= \overrightarrow{\mathrm{cap}}_x$



$= \overrightarrow{\mathrm{cup}}_x$

若 $\mathcal{C}$ 为零价。若 $\mathcal{C}$ 为三价，则对于 x， $y \in \mathcal{C}_1$，我们还有



$= \widehat{\text{split}}_{x,y}$ 

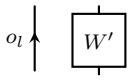
$= \widehat{\text{merge}}_{x,y}.$

有时，将弦标记为 $\mathcal{C}_1$ 的元素之外，也可以将其标记为 $s \in \mathcal{C}$**泡沫**中的对象。例如，恒等 1-态射 $\text{id}_s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}\textbf{Foam}}(s,\ s)$ 可画作



$= \text{id}_s.$

对于对象 o_l， $o_r \in \mathcal{C}$**泡沫** 以及生成网 $W' \in \mathcal{C}$-GenWeb，我们将基本的 $\mathcal{C}$-网画作



$= o_l \boxtimes W' \boxtimes o_r.$

注记 4.4。 正如定理 4.3的图示所强调的，定理 4.2仅将向上定向的或渐进的合并与分裂网连同杯和帽纳入生成元。我们选择这种呈示，是为了与 A 型反常层范畴的因子化族形式体系相兼容 [DW25]。旋转后的合并与分裂网可以通过复合得到，参见下文定理 4.10 。定理4.42中还评述了另一种定义，其中将向下定向的合并与分裂顶点纳入生成元。

约定 4.5. 下面我们将介绍一些有用的概念，以便处理 $\mathcal{C}$**Foam** 中的 1-态射。令 $W = (W_k, \ldots, W_1)$：$s \to t$ 为任意一个 1- 态射。这里我们允许 $k = 0$ 取 $s = t$。

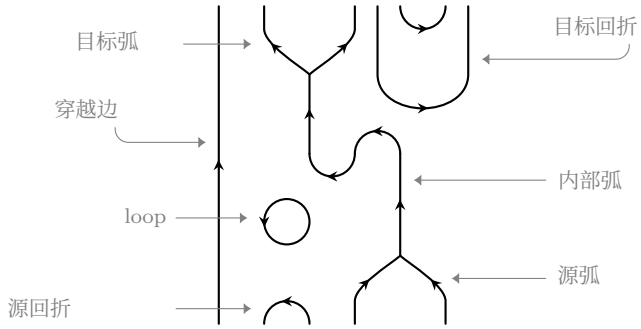
- 集合 $V(W)$ 由出现在 W 中的基本 $\mathcal{C}$-网构成，这些网的$\widehat{\quad}$底层生成 $\mathcal{C}$-网属于分裂 $*,*$ 或合并 $\widehat{\quad}_{*,*}$类型。
- 集合 $E(W)$ 的边定义如下。考虑构成基本网 W_i的源对象和目标对象的序列中的位置集合 $\mathcal{E}$ 。其元素编码为以下形式的有序对：$(p, s(W_i))$，其中 $p \in \{1, \ldots, \text{len}(s(W_i))\}$；或者 $(p, t(W_i))$，其中$p \in \{1, \ldots, \text{len}(t(W_i))\}$，这里 len $(-)$ 用于计算序列的长度。

  我们将 $E(W)$ 定义为由以下关系生成的 $\mathcal{E}$ 上等价关系的等价类集合：

  - $(p, s(W_i)) \sim (p+1, s(W_i))$（分别地，$(p, t(W_i)) \sim (p+1, t(W_i))$），如果它们在某个形如 cap_x, cup_x（分别地，cup_x, cap_x）的生成元中成对出现，其中 $x \in \mathcal{C}_1$ 任意。
  - $(p, s(W_{i+1})) \sim (p, t(W_i))$，将复合基本网的源点与目标点相识别。
  - $(p, s(W_i)) \sim (p, t(W_i))$，如果 p 位于 $s(W_i)$ 和 $t(W_i)$ 的共同 o_l 或 o_r 部分中。
- 对于一条边 e，我们用 $n_\partial(e)$ 表示 s 或 t中的表示位置数。注意，对于任意边 e，都有 $n_\partial(e) \in \{0, 1, 2\}$。我们根据 $n_\partial(e)$区分边的类型。如果边e 满足 $n_\partial(e) = 0$，则视为内部边；否则视为边界边。若边界边 e 满足 $n_\partial(e) = 1$，则称其为边界弧。若该位置位于 s（分别为 t）中，则称其为源弧（分别为目标弧）。注意，此时在一个类型为分裂$*$、$*$ 或合并$*$、$*$的生成 $\mathcal{C}$-网的源点或目标点中，也有一个$\widehat{\quad}$表示位置。若 $n_\partial(e) = 2$，则区分以下几种情况。若两个表示位置都在 s （分别为 t）中，则称其为源回折（分别为目标回折）。若 e 在 s 中有一个表示位置，在 t 中有一个表示位置，则称其为穿越边。若内部边的一个表示位置出现在类型为分裂$*$、$*$ 或合并$*$、$*$的生成 $\mathcal{C}$-网的$\widehat{\quad}$源点或目标点中，则称其为内部弧。否则称其为（内部）环。

内部弧的方向从其表示位置位于目标对象中的顶点，指向其表示位置位于源对象中的顶点。边界弧、穿越边以及源回折（分别为目标回折）的方向，从与 $\hat{x}$ 对应的位置指向与 $\check{x}$ 在 s（分别为 t）中对应的位置，其中 $x \in \mathcal{C}_1$。

下图展示了上述提及的所有类型的边的示例：



- 边的标签 定义为表示位置处符号 $\hat{x}$ 或$\check{x}$ 的底层标签 $x \in \mathcal{C}_1$ 。我们记作 $\mathrm{l}(e) = x$。

构造 4.6。 对任意 1-态射 $W = (W_k, \dots, W_1) \colon \varnothing \to \varnothing$ 中的 $\mathcal{C}$**Foam**，我们关联一个组合的闭合 $\mathcal{C}$-网 $\mathrm{abs}(W) \in \mathcal{C}$-ClWeb，其定义见定义 3.12。

- 顶点集为 $V^{\partial} := V(W)$。- 边集为 $E^{\partial} := E(W)$，如定理 4.5 中所示，划分为弧和环。
- 边上的标签及弧的定向按定理 4.5 定义。⌒•在分裂x、y 和 ⌒合并x处，y边按($[\hat{x}]$、$[\hat{y}]$、$[\widehat{x+y}]$)[13]循环排序。

若 $W' \colon \varnothing \to \varnothing$ 是 $\mathcal{C}$**泡沫**中的另一个 1-态射，那么显然

$$\mathrm{abs}(W' \circ W) = \mathrm{abs}(W') \sqcup \mathrm{abs}(W).$$

在第 4.6 节中，我们将证明，半严格幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$**泡沫** 具有对偶和伴随，遵循 [BMS24]。为此，我们在 $\mathcal{C}$**泡沫** 上引入两个运算，分别记为 # 和 $*$。

构造 4.7 (对象上的 # $*$**)**。 我们在 $\mathcal{C}$**泡沫**的对象集合上定义两个对合 # $*$。给定一个对象 $s \in \mathcal{C}$**泡沫**，对合 # : $s \mapsto s^{\#}$ 反转序列的顺序并交换条目 $\hat{x} \leftrightarrow \check{x}$，而对合 $*$ 在对象上定义为恒等映射。

注记 4.8. 对于对象 $s \in \mathcal{C}$**泡沫**，我们将 $s^{\#}$ 上的恒等态射 $\mathrm{id}_{s^{\#}}$ 画成以下两种形式：

$$\uparrow s \quad = \mathrm{id}_{s^{\#}} = \quad \downarrow s^{\#} \ .$$

[13]在嵌入情形中，这与左手定则相容；该定则将缝线定向、循环次序和环境定向联系起来，正如 Khovanov [Kho04] 和 Robert–Wagner [RW20]所做的那样。

构造 4.9. 设 $s \in \mathcal{C}$**泡沫** 为一个对象。我们按 s 所对应序列的长度归纳定义 1-态射 $\overleftarrow{\text{cup}}_s\colon \varnothing \to s \boxtimes s^{\#}$。当长度为 0 时，我们规定$\overleftarrow{\text{cup}}_{\varnothing} = \text{id}_{\varnothing}\colon \varnothing \to \varnothing$。当长度为 1 时，定义如下：

$$\overleftarrow{\text{cup}}_s = \begin{cases} \overleftarrow{\text{cup}}_x & \text{if } s = (\widehat{x}) \text{ for } x \in \mathcal{C}_1, \\ \overrightarrow{\text{cup}}_x & \text{if } s = (\check{x}) \text{ for } x \in \mathcal{C}_1. \end{cases}$$

对于长度为 $\ell \geqslant 2$ 的情形，我们将长度为 $\ell - 1$ 的 s' 记作 $s = s_1 \boxtimes s'$，并规定：

$$\overleftarrow{\text{cup}}_s = (s_1 \boxtimes \overleftarrow{\text{cup}}_{s'} \boxtimes s_1^{\#}) \circ \overleftarrow{\text{cup}}_{s_1}$$

此外，我们引入记号 $\overrightarrow{\text{cup}}_s := \overleftarrow{\text{cup}}_{s^{\#}}\colon \varnothing \to s^{\#} \boxtimes s$，并指出，这与我们先前对长度为 1 的词所用的记号一致。完全类似地，我们定义

$$\overleftarrow{\text{cap}}_s\colon s^{\#} \boxtimes s \to \varnothing \quad \text{and} \quad \overrightarrow{\text{cap}}_s := \overleftarrow{\text{cap}}_{s^{\#}}\colon s \boxtimes s^{\#} \to \varnothing.$$

上述 1-态射可绘制如下：



标签 $x \in \mathcal{C}_1$ 默认转换为具有相同定向的对象 $\widehat{x}$ 的标签；等价地，也可转换为具有相反定向的对象 $\check{x}$ 的标签。

构造 4.10（伴随态射）。设 $W\colon s \to t$ 是 $\mathcal{C}$**泡沫**中的一个 1-态射。那么，我们将 W 的（右）伴随态射定义为 1-态射 [14]

$$W^{\#} := (\overleftarrow{\text{cap}}_t \boxtimes s^{\#}) \circ (t^{\#} \boxtimes W \boxtimes s^{\#}) \circ (t^{\#} \boxtimes \overleftarrow{\text{cup}}_s)\colon t^{\#} \to s^{\#}$$

并且将 W 的（左）伴随定义为该 1-态射

$${}^{\#}W := (s^{\#} \boxtimes \overrightarrow{\text{cap}}_t) \circ (s^{\#} \boxtimes W \boxtimes t^{\#}) \circ (\overrightarrow{\text{cup}}_s \boxtimes t^{\#})\colon t^{\#} \to s^{\#}.$$

我们将左伴与右伴画作如下形式[15]：



[14]请注意，我们的术语与 Douglas–Reutter 在 [DR18第 2.2 节中所用的术语一致。2]他们的约定采用相同的复合，但张量积相反（见 [DR18，第11]页）。因此，1-态射的图形演算之间的转换对应于沿 1 轴的反射。[15]记忆提示：上标位于哪一侧，取决于连接到 W 源对象的线向上弯曲的一侧。

构造 4.11 (∗ 作用于 1-态射)。 我们将这两个运算 ∗扩展到 $\mathcal{C}$**泡沫**的 1-态射 W集合。我们令 $*\colon W \mapsto W^*$为 1-态射集合上的对合，其定义为对生成的 $\mathcal{C}$-网施加交换操作

$$\overleftarrow{\mathrm{cap}}_x \overset{*}{\leftrightarrow} \overrightarrow{\mathrm{cup}}_x, \quad \overrightarrow{\mathrm{cap}}_x \overset{*}{\leftrightarrow} \overleftarrow{\mathrm{cup}}_x, \quad \widehat{\mathrm{split}}_{x,y} \overset{*}{\leftrightarrow} \widehat{\mathrm{merge}}_{x,y}$$

然后通过设定将其扩展到基本 $\mathcal{C}$-网

$$(o_l \boxtimes W \boxtimes o_r)^* := (o_l \boxtimes W^* \boxtimes o_r)$$

并作用于一般态射，即 ∘基本网的复合，并逐项反转∘次序[16]:

$$(W_k \circ \cdots \circ W_1)^* := W_1^* \circ \cdots \circ W_k^*.$$

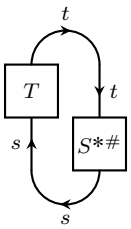
注记 4.12。 1-态射上的左伴或右伴运算在 ∘方向上也将是反变的，但仅在相差一个 2-同构的意义下成立。对于左伴，这些将在注记 4.41中描述。

4.2. **2-态射与垂直复合**。 在本小节中，对于任意一对对象 s, t ，我们定义小 $\Bbbk$-线性范畴 ${}_t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s$ ，它将构成 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$ 中的 1-态射范畴 $s \to t$ 。 ${}_t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s$ 中的复合将构成 $\mathcal{C}$ **Foam**中 2-态射的垂直复合。

构造 4.13 （内部 Hom）。 令 s， t 为 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$ 中的对象， S， $T\colon s \to t$ 为 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$中的 1-态射。我们将从 S 到 T 的内部 *Hom*定义为以下 1-态射:

$$\underline{\mathrm{Hom}}(S,T) := \overrightarrow{\mathrm{cap}}_t \circ (T \boxtimes t^{\#}) \circ (s \boxtimes S^{*\#}) \circ \overleftarrow{\mathrm{cup}}_s : \varnothing \to \varnothing$$

在图形演算中，$\mathrm{Hom}(S, \underline{T})$ 表示为:



构造 4.14 （内部 Hom 的顶点与边）。 令 S， $T\colon s \to t$ 为 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$中的 1-态射。存在一个双射

$$V(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T)) \cong V(S^{*\#}) \sqcup V(T)$$

对应于 S 和 T的内部 Hom 中的顶点。对于边，我们记作

$$E(S) = E(\mathring{S}) \sqcup E(\partial S)$$

°其中 $E(S)$是（内部）环与内部弧的集合，而 $E(\partial S)$ 是边界弧、边界回折与穿越边的集合。我们记

$$E(T|S) := E(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T)).$$

[16]在图形演算中，这对应于沿 1 方向反射，随后改变所有网络边的定向。

注意， $E(T|S)$ 只包含内部边。存在一个满射

$$\pi\colon E(T) \sqcup E(S^{*\#}) \to E(T|S) \tag{4.1}$$

其在 $E(\mathring{T}) \sqcup E(\mathring{S^{*\#}})$ 上是单射的，并将 $E(\partial T) \sqcup E(\partial S^{*\#})$ 映射到由以下关系生成的等价关系的等价类集合：边 $e \in E(\partial T)$ 和 $e' \in E(\partial S^{*\#})$ 如果在 s 或 t 中共享一个位置，则二者相关。 $E(\partial T) \sqcup E(\partial S^{*\#})$ 的像由新生成的内部环和内部弧的集合构成。我们称 $e \in E(T|S)$ 包含其原像中 $e \in E(T) \sqcup E(S^{*\#})$ 的所有边（在 4.1 下）。

引理 4.15。令 s、t 为对象，且令 S、T： $s \to t$ 为 $\mathcal{C}$**Foam** 中的 1-态射。以下内部 Hom 具有相同的底层组合闭合 $\mathcal{C}$-网：

$$\underline{\mathrm{Hom}}(S,T), \quad \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{id}_s, S^* \circ T), \quad \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{id}_t, T \circ S^*),$$
$$\underline{\mathrm{Hom}}(T^*, S^*), \quad \underline{\mathrm{Hom}}(S \circ T^*, \mathrm{id}_s), \quad \underline{\mathrm{Hom}}(T^* \circ S, \mathrm{id}_t).$$

此外，我们有

$$\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T)^{*\#}) = \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S^{*\#}, T^{*\#})).$$

证明。将构造4.6应用于构造4.13中定义的内部 Hom，底层的组合闭合 $\mathcal{C}$-网由 S^* 和 T 通过识别它们在 s 和 t中位置相同的边界边而得到。最后一个等式也可类似处理，此处取 S 和 T^*。□

注记 4.16。对于 W： $\varnothing \to \varnothing$ 中的一个 1-态射 $\mathcal{C}$**Foam**，有

$$\mathrm{abs}(W^{*\#}) = \mathrm{abs}(W)^r,$$

其中 $-^r$ 是定理3.5中组合闭合网络上的对合，它会反转所有边的定向。结合引理 4.15的最后一条陈述，可得

$$\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T))^r = \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S^{*\#}, T^{*\#})).$$

构造 4.17 (内部恒等**)**。设 s, t 是 $\mathcal{C}$**Foam** 中的对象，且 S： $s \to t$ 是 $\mathcal{C}$**Foam**中的一个 1-态射。我们将描述一个组合的 $\mathcal{C}$-泡沫

$$\mathrm{cup}_S\colon \varnothing \to \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,S)).$$

顶点： 泡沫杯$_S$ 没有内部顶点。边界顶点划分如下

$$V^\partial = V(S) \sqcup V(S^{*\#}).$$

缝与边： 不存在环缝。典范双射 $V(S) \cong V(S^{*\#})$将每个 v 与其伙伴 $v^{*\#}$对应起来，并用于定义弧缝 $E = E_{\mathrm{arc}} := \{s_v\}_{v \in V(S)}$对于每个合并/分裂顶点 $v \in V_2^\partial$，我们定义 s_v 为满足 $V(s_v) = \{v$ 的缝， $v^{*\#}\}$，方向从合并顶点指向分裂顶点。根据构造 4.14，边界边由下式给出

$$E^\partial = E(S|S) = E(\mathring{S}) \sqcup E(\mathring{S^{*\#}}) \sqcup \pi_{S|S}(E(\partial S) \sqcup E(\partial S^{*\#})).$$

面： 我们使用典范双射

$$E(S) \cong E(S^{*\#}), \quad e \mapsto e^{*\#}$$

用于描述由边 $e \in E(S)$ 参数化的面集：

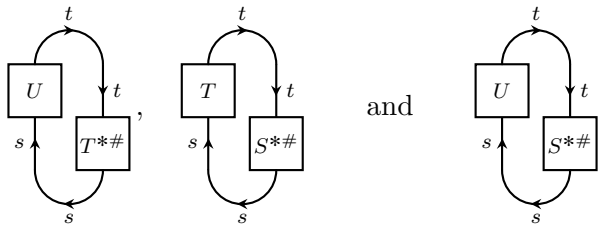
• 对于每个（内部）环 $e \in E(\mathring{S})$，考虑其配对伙伴 $e^{*\#} \in E(\mathring{S^{*\#}})$。我们有一个面 $f(e) \in F_{0,2}$，其标签为 $\mathrm{l}(e) = \mathrm{l}(e^{*\#})$，边界词为 $((e)、(e^{*\#}))$。• 对于每条弧 $e \in E(S)$，至多有两条边属于 $\mathsf{abs}(\mathsf{Hom}(S、S))$，并包含 e 或 $e^{*\#}$。这些边与 E 中至多两条接缝共同构成一个最小环；我们赋予它从 e 继承的定向（参见定理 2.2），并将其用作面 $f(e) \in F_{0,1}$ 的边界词，该面的标签为 $\mathrm{l}(e)$。[17]• 对于每条穿越边或边界回转 $e \in E(\partial S)$，在 $\mathsf{abs}(\mathsf{Hom}(S、S))$ 中存在一个包含 e 和 $e^{*\#}$ 的内部环 $e_\circ$。我们有一个面 $f(e) \in F_{0,1}$，其标签为 $\mathrm{l}(e)$，边界词为 (e)，并具有从 e 继承的定向。

所有面围绕接缝的循环次序继承自 $\mathsf{Hom}(S,\ S)$。

构造 4.18（内部垂直复合）。设 $s,\ t$ 为对象，$S,\ T,\ U\colon s \to t$ 为 $\mathcal{C}$**泡沫**中的 1-态射。我们将描述一个组合的 $\mathcal{C}$-泡沫：

$$\mathrm{vert}_{U,T,S}\colon \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(T,U)) \sqcup \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T)) \to \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,U)),$$

其中，源点和目标点中的底层内部 Hom 如图所示



顶点： 泡沫顶点 $U,\ T,\ S$ 不含内部顶点，边界顶点则分组为

$$V^\partial = V(U) \sqcup V(U^{*\#}) \sqcup V(T) \sqcup V(T^{*\#}) \sqcup V(S) \sqcup V(S^{*\#}).$$

接缝与边： 不存在环接缝。弧接缝由 $E = E_{\mathrm{arc}} = \{s_v\}_{v \in V(U) \sqcup V(T) \sqcup V(S)}$ 给出，其中对每个合并/分裂顶点 $v \in V_2^\partial$，我们将 s_v 定义为带有 $V(s_v) = \{v,\ v^{*\#}\}$ 的缝，方向从合并顶点指向分裂顶点。$\mathsf{vert}_{U,\ T,\ S}$ 的边界边为

$$E^\partial = E(\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(T,U))^r) \sqcup E(\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T))^r) \sqcup E(\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,U))).$$

由构造4.14与注记4.16，我们有

$$\begin{aligned} E^\partial = {} & E(\mathring{U}) \sqcup E(\mathring{U^{*\#}}) \sqcup E(\mathring{T}) \sqcup E(\mathring{T^{*\#}}) \sqcup E(\mathring{S}) \sqcup E(\mathring{S^{*\#}}) \\ & \sqcup \pi\left(E(\partial U^{*\#}) \sqcup E(\partial T)\right) \sqcup \pi\left(E(\partial T^{*\#}) \sqcup E(\partial S)\right) \sqcup \pi\left(E(\partial U) \sqcup E(\partial S^{*\#})\right). \end{aligned}$$

面： 面将使用典范双射由 E^∂ 参数化

$$E(U) \cong E(U^{*\#}), \quad E(T) \cong E(T^{*\#}), \quad E(S) \cong E(S^{*\#}), \quad e \mapsto e^{*\#}.$$

[17]有两种情形：（1）一条边界弧在粘合下产生一条内部弧，其端点由一条缝连接，该面沿这条弧与这条缝贴附。（2）一条内部弧及其在 $S^{*\#}$ 中的副本在粘合后产生两条内部弧，其端点由两条接缝按有序对连接。此时该面的边界词长度为四。

为此，考虑由以下规则生成的等价关系：如果两条边界边e，$e' \in E(\partial S) \sqcup E(\partial T) \sqcup E(\partial U)$ 在 s 或 t 中共享一个位置，则它们相关。对于每个等价类 P，考虑子集

$$E_P^\partial := \{\overline{e} \mid e \in P\} \sqcup \{\overline{e^{*\#}} \mid e \in P\} \subset E^\partial,$$

其中 $e \in E^\partial$（分别是 $\overline{e^{*\#}}$）在适当的满射 e（分别是 $e^{*\#}$）下的像 π，取自（4.1）。注意，E^∂ 由 S、T、U 的内部边与它们的$*\#$版本的不交并，以及集合$\bigsqcup_P E_P^\partial$组成。vert$_{U、T、S}$ 的面如下所示：

。 。 。• 对于每个（内部）环 $e \in E(U) \sqcup E(T) \sqcup E(S)$，考虑其规范对应的。 。 。伙伴 $e^{*\#} \in E(U^*\#) \sqcup E(T^*\#) \sqcup E(S^{*\#})$。我们有一个面 $f(e) \in F_{0,2}$，其标签为 $\mathrm{l}(e)$，边界词为 $((e)、(e^{*\#}))$。。 。 。• 对于每条（内部）弧$e \in E(U) \sqcup E(T) \sqcup E(S)$，我们有一个面$f(e) \in F_{0,1}$，其标签为 $\mathrm{l}(e)$，边界词由 e、$e^{*\#}$ 以及属于 e顶点的两条缝构成的圈给出，其定向继承自 e。• 每个等价类 P根据以下三种情况对应一个面 $f(P)$：(i) E_P^∂不包含任何环，只有弧。此时，对于任意 $e \in P$，我们有一个面$f(P) \in F_{0,1}$，其标签为 $\mathrm{l}(e)$，边界词由 E_P^∂ 中的弧与 E中的缝构成的唯一最小环给出，其定向继承自e。(ii) E_P^∂只包含环，不含弧。令 $E_P^\partial = \{e_1、\ldots、e_{|E_P^\partial|}\}$ 为这些环。此时，对于任意 i，我们有一个面$f(P) \in F_{0,|E_P^\partial|}$，其标签为 $\mathrm{l}(e_i)$，边界词为 $((e_1)、\ldots..、(e_{|E_P^\partial|}))$。(iii) E_P^∂同时包含环和弧。此时我们有一个面 $f(P) \in F_{0,\ell+1}$，其中 ℓ 是 E_P^∂中的环数。对于任意 $e \in P$，该面的标签为 $\mathrm{l}(e)$，边界词由前两种情况中的边界词合并而成。

所有面围绕接缝的循环次序继承自边界网。

定义 4.19。设 s,t 是 $\mathcal{C}$**泡沫** 中的对象，且 $S,T\colon s \to t$ 1-态射属于 $\mathcal{C}$**泡沫**。我们定义

$$\mathrm{Hom}_{{}_t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,T) := \mathsf{eval}(\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T))) \tag{4.2}$$

若 $U\colon s \to t$ 是 $\mathcal{C}$**泡沫**中的另一个 1-态射，则定义 $\Bbbk$-线性的垂直复合 映射：

$$\circ_v\colon \mathrm{Hom}_{{}_t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(T,U) \otimes \mathrm{Hom}_{{}_t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,T) \to \mathrm{Hom}_{{}_t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,U) \tag{4.3}$$

to b这是由函子 eva 下的内部复合 vert$_{U,T,S}$ 所诱导的映射 l.

若 $T = S$，我们定义元素

$$\mathrm{id}_S := \mathsf{eval}(\mathrm{cup}_S)(1) \in \mathrm{Hom}_{{}_t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,S) \tag{4.4}$$

并称其为 S 上的恒等泡沫。

命题 4.20。设 s，t 是 $\mathcal{C}$**泡沫** 的对象，则以下数据定义了一个小型 $\Bbbk$-线性范畴，我们将其记为 ${}_t\mathcal{C}$**泡沫**$_s$。• 该 对象是从 s 到 t 在 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$ 中定义的 1-态射，见定理 4.2 .

• 态射的 $\Bbbk$-模 $\mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,\ T)$ 定义见（4.2）。• 态射的复合律由（4.3）给出。• 对于每个 1-态射 $S\colon\ s \to t$ 在 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$中，恒等态射 $\mathrm{id}_S \in \mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,\ S)$在 S 上的定义见（4.4）。

证明。 我们只需证明垂直复合的单位性和结合性。对于单位性，设 s 和 t 为对象，且 $S,\ U\colon\ s \to t$ 为 1-态射。以下组合$\mathcal{C}$-泡沫等式成立

(4.5)
$$\mathrm{vert}_{U,S,S} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,U))} \sqcup \mathrm{cup}_S) = \mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,U))}\colon\ \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,U)) \to \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,U)).$$

为了证明等式，我们需要在顶点、边、接缝和面集合之间给出双射，并使其与定向、循环次序和标签相一致。

例如，对于缝的集合，上述等式可按如下方式验证。$\mathrm{vert}_{U,S,S}$ 和 cup_S 的接缝分别为

$$E_{\mathrm{vert}_{U,S,S}} = \{s'_v\}_{v\in V(U)} \sqcup \{s_v\}_{v\in V(S)} \sqcup \{s_v\}_{v\in V(S)},\quad E_{\mathrm{cup}_S} = \{s_v\}_{v\in V(S)}.$$

构造 3.15 中的组合 $\mathcal{C}$泡沫将属于同一顶点 $v \in V(S)$的三条缝 s_v连接起来。因此，(4.5) 两侧的缝集合相同。面片集合的相等性可以类似地证明，并且可以证明其与定向、循环次序和标签相容。因此，对于任意$\Sigma \in \mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,U)$，我们有

$$\mathsf{eval}(\mathrm{vert}_{U,S,S})(\Sigma \otimes \mathrm{id}_S) = \Sigma \in \mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,U).$$

左单位性类似。

对于结合性，需要检查对于所有 $S,T,U,V\colon\ s \to t$，作为组合 $\mathcal{C}$-泡沫，有

$$\mathrm{vert}_{V,T,S} \circ \mathrm{vert}_{V,U,T} = \mathrm{vert}_{V,U,S} \circ \mathrm{vert}_{U,T,S},$$

也就是说，顶点、缝和面片的集合相同，正如上面对单位性的处理。然后，通过应用求值，结合性得以成立。□

4.3. **水平复合。**

构造 4.21 （复合网络的顶点和边）。 设 $S\colon\ s \to t$ 和 $S'\colon\ t \to u$ 是 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$ 中的 1-态射。我们用 S' 和 S 的顶点和边来描述 $S' \circ S$ 的顶点和边的集合。对于顶点，我们有一个双射

$$V(S' \circ S) \cong V(S') \sqcup V(S).$$

对于这些边，存在一个满射

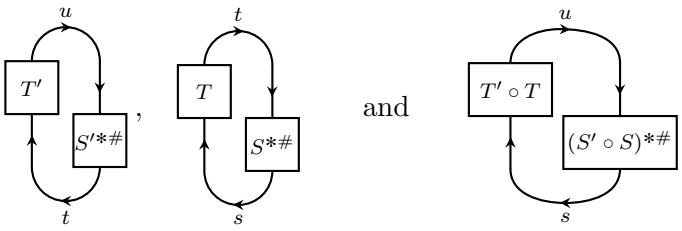
(4.6)
$$\rho\colon E(S') \sqcup E(S) \to E(S' \circ S)$$

。 。其在 $E(S')$和 $E(S)$上是单射的，并将 $E(\partial S')\sqcup E(\partial S)$ 映射到关于由以下关系生成的等价关系的等价类集合：若两条边 $e' \in E(\partial S')$ 和 $e \in E(\partial S)$ 在 t 中共享一个位置，则它们相关。

构造 4.22（内部水平复合）。设 s、t、u 是 $\mathcal{C}$**泡沫** 中的对象，且 S、T：$s \to t$ 和 S'、T'：$t \to u$ 是 $\mathcal{C}$**泡沫**中的 1-态射。下面我们构造一个组合的 $\mathcal{C}$-泡沫

$$\mathrm{hor}_{T,S}^{T',S'} : \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S',T')) \sqcup \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T)) \to \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S' \circ S, T' \circ T)),$$

其中，源点和目标点中的底层内部 Hom 如下所示：



顶点： 没有内部顶点。根据注记 4.16 以及构造 4.14 和 4.21，$\mathrm{hor}_{T\,S}^{T'\,S'}$ „的边界顶点被划分为

$$V^{\partial} = V(T') \sqcup V(T'^{*\#}) \sqcup V(T) \sqcup V(T^{*\#}) \sqcup V(S') \sqcup V(S'^{*\#}) \sqcup V(S) \sqcup V(S^{*\#}).$$

缝与边： 没有环缝。弧缝如下所示：

$$E = E_{\mathrm{arc}} = \{s_v\}_{v \in V(T') \sqcup V(T) \sqcup V(S') \sqcup V(S)}$$

其中，对于每个合并/分裂顶点 $v \in V_2^{\partial}$，我们将 s_v 定义为满足 $V(s_v) = \{v, v^{*\#}\}$ 的缝，其方向从合并顶点指向分裂顶点。根据构造4.14和4.21，以及注记 4.16，边界边的集合如下：

$$\begin{aligned} E^{\partial} &= E(\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S',T'))^r) \sqcup E(\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T))^r) \sqcup E(\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S' \circ S, T' \circ T))) \\ &= E(\overset{\circ}{T'}) \sqcup E(\overset{\circ}{T'^{*\#}}) \sqcup E(\overset{\circ}{T}) \sqcup E(\overset{\circ}{T^{*\#}}) \sqcup E(\overset{\circ}{S'}) \sqcup E(\overset{\circ}{S'^{*\#}}) \sqcup E(\overset{\circ}{S}) \sqcup E(\overset{\circ}{S^{*\#}}) \\ &\quad \sqcup \pi\left(E(\partial T'^{*\#}) \sqcup E(\partial S')\right) \sqcup \pi\left(E(\partial T^{*\#}) \sqcup E(\partial S)\right) \\ &\quad \sqcup \pi\left(\rho(E(\partial T') \sqcup E(\partial T)) \sqcup \rho(E(\partial S'^{*\#}) \sqcup E(\partial S^{*\#}))\right). \end{aligned}$$

面： 这些面将由 E^{∂}参数化。为此，考虑由以下关系生成的等价关系：若两个边界边 e, $e' \in E(\partial S) \sqcup E(\partial S') \sqcup E(\partial T) \sqcup E(\partial T')$ 在 s、t 或 u 中共享一个位置，则它们相关。对于每个等价类 P，考虑子集

$$E_P^{\partial} := \{\overline{e} \,|\, e \in P\} \sqcup \{\overline{e^{*\#}} \,|\, e \in P\} \subset E^{\partial},$$

其中 $e \in E^{\partial}$（分别是 $\overline{e^{*\#}}$）是 e（分别是 $e^{*\#}$）在适当的满射 π 下的像，该满射来自（4.1）。

注意，E^{∂}由 S的内部边的不交并、S'、T、T'及它们的 $*\#$版本，以及集合 $\bigsqcup_P E_P^{\partial}$构成。$\mathrm{hor}_{T\,S}^{T'\,S'}$、、的面如下：

。 。 。 。对于每个环 $e \in E(T') \sqcup E(T) \sqcup E(S') \sqcup E(S)$，都有一个由规范方式确定的伙伴。 。 。 。$e^{*\#} \in E(T'^{*\#}) \sqcup E(T^{*}{}_{\#}) \sqcup E(S'^{*\#}) \sqcup E(S^{*\#})$。我们有一个面 $f(e) \in F_{0,\ 2}$，其标签为 $\mathrm{l}(e) = \mathrm{l}(e^{*\#})$，边界词为 $((e),\ (e^{*\#}))$。

。 。 。 。• 对于每条弧 $e \in E(T') \sqcup E(T) \sqcup E(S') \sqcup E(S)$，都有一个由规范方式确定的伙伴。 。 。 。$e^{*\#} \in E(T'^{*\#}) \sqcup E(T^*{}_{\#}) \sqcup E(S'^{*\#}) \sqcup E(S^{*\#})$。我们有一个面 $f(e) \in F_{0,\ 1}$，其标签为 $\mathrm{l}(e) = \mathrm{l}(e^{*\#})$。它的边界词是由 e、 $e^{*\#}$ 以及属于 e各顶点的两条接缝构成的圈，其定向继承自 e。

• 每个等价类 P都对应一个面 $f(P)$，具体分为以下三种情况：

(i) E_P^∂仅包含弧，不包含环。此时，对于任意 $e \in P$，我们都有一个面 $f(P) \in F_{0,\ 1}$，其标签为 $\mathrm{l}(e)$，边界词由E_P^∂ 中的弧与 E中的接缝构成的唯一最小环给出。 (ii) E_P^∂仅包含环，不包含弧。设 $E_P^\partial = \{e_1, \ldots\ldots, e_{|E_P^\partial|}\}$ 为这些环。此时，对于任意 i，我们都有一个面 $f(P) \in F_{0,\ |E_P^\partial|}$，其标签为 $\mathrm{l}(e_i)$，边界词为$((e_1), \ldots\ldots, (e_{|E_P^\partial|}))$。 (iii) E_P^∂同时包含环和弧。此时我们有一个面 $f(P) \in F_{0,\ \ell+1}$，其中 ℓ是 E_P^∂中的环数。对于任意 $e \in P$，该面具有标签 $\mathrm{l}(e)$，其边界词由前两种情况中的边界词的并集给出。

The 所有面的循环次序沿缝继承自边界网 .

定义 4. **23.** 设 s, t, u 是 $\mathcal{C}$**Foam** 中的对象。定义 $\Bbbk$-线性的水平复合

$$\circ_h : \mathrm{Hom}_u \mathcal{C}\textbf{泡沫}_t(S', T') \otimes \mathrm{Hom}_t \mathcal{C}\textbf{泡沫}_s(S, T) \to \mathrm{Hom}_u \mathcal{C}\textbf{泡沫}_s(S' \circ S, T' \circ T) \tag{4.7}$$

作为由函子 eval 下的内部水平复合映射 $\mathrm{hor}_{T\ S}^{T'\ S'}$,,所诱导的映射。

引理 4.24 （交换律）**.** 设 s, t, u 为对象， $S, T, U\colon\ s \to t$ 和 $S', T', U'\colon\ t \to u$ 为 $\mathcal{C}$**Foam** 中的 1-态射。考虑 2-态射 $\Sigma\colon\ S \to T$, $\Theta\colon\ T \to U$, $\Sigma'\colon\ S' \to T'$， 以及$\Theta'\colon\ T' \to U'$。那么，

$$(\Theta' \circ_h \Theta) \circ_v (\Sigma' \circ_h \Sigma) = (\Theta' \circ_v \Sigma') \circ_h (\Theta \circ_v \Sigma). \tag{4.8}$$

证明。 对于 $\mathcal{C}$**泡沫**中的所有对象 s, t, u 以及 1-态射 $S, T, U\colon\ s \to t$和 $S', T', U'\colon\ t \to u$， 可以验证以下组合 $\mathcal{C}$-泡沫等式成立

$$\mathrm{vert}_{U' \circ U, T' \circ T, S' \circ S} \circ \left(\mathrm{hor}_{U,T}^{U',T'} \sqcup \mathrm{hor}_{T,S}^{T',S'} \right) = \mathrm{hor}_{U,S}^{U',S'} \circ \left(\mathrm{vert}_{U',T',S'} \sqcup \mathrm{vert}_{U,T,S} \right).$$

因此， $\mathcal{C}$-泡沫4.8式两边对应的组合求值即可得到该结论。 □

定理 4.25。 上述构造赋予 $\mathcal{C}$**泡沫**一个局部小、局部 $\Bbbk$-线性的（严格）2-范畴结构：

• 对象由定义4.1给出。• 1-态射的 $\Bbbk$-线性范畴 ${}_t\mathcal{C}$**泡沫**$_s$ 由命题 4.20定义。• 给定对象 s, t, u， 其 $\Bbbk$-线性水平复合函子

$$\circ_h : {}_u\mathcal{C}\textbf{Foam}_t \otimes {}_t\mathcal{C}\textbf{Foam}_s \to {}_u\mathcal{C}\textbf{Foam}_s$$

由 $\mathcal{C}$**Foam** 定义 4.2 中 1-态射的复合给出，作用在对象层面上。在态射层面上（即 $\mathcal{C}$**Foam** 的 2-态射）， 则由定义 $\Bbbk$4.23 中构造的线性水平复合映射给出。

证明。 水平复合函子 $\circ_h$ 在 2-态射垂直复合下的函子性，即引理 4.24 中的交换律。对于水平复合法则的单位性，设 $s = t$和 u是对象，且 S'、$T'\colon t \to u$是 1-态射。以下组合 $\mathcal{C}$-泡沫等式成立

$$\mathrm{hor}^{T',S'}_{\mathrm{id}_s,\mathrm{id}_s} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S',T'))} \sqcup \mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s}) = \mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S',T'))}\colon \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S',T')) \to \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S',T')).$$

事实上，与 $\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s}$ 复合会减少 $\mathrm{hor}^{T',S'}{}_{\mathrm{id}_s,\mathrm{id}_s}$各面的边界分支数量，使其与恒等 $\mathcal{C}$-泡沫 $\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\mathrm{Hom}(S',T'))}$相匹配。因此，对于 $\Sigma \in \mathrm{Hom}_{u\mathcal{C}\mathbf{Foam}_t}(S', T')$，我们有

$$\mathsf{eval}(\mathrm{hor}^{T',S'}_{\mathrm{id}_s,\mathrm{id}_s})(\Sigma \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{id}_s}) = \Sigma \in \mathrm{Hom}_{u\mathcal{C}\mathbf{Foam}_t}(S', T').$$

左侧的单位性类似。对于结合性，需要验证对所有 $S, T\colon s \to t$,$S', T'\colon t \to u$ 以及 $S'', T''\colon u \to v$，我们都有

$$\mathrm{hor}^{T''\circ T',S''\circ S'}_{T,S} \circ \mathrm{hor}^{T'',S''}_{T',S'} = \mathrm{hor}^{T'',S''}_{T'\circ T,S'\circ S} \circ \mathrm{hor}^{T',S'}_{T,S}$$

作为组合的 $\mathcal{C}$-泡沫。然后，结合性由应用求值得出。 □

4.4. **张量积**。 我们遵循引理 4 [BN96] ，赋予2-范畴 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$ 半严格幺半结构。

构造 4.26 （张量2-函子）。 我们将先前在对象上定义的运算 $\boxtimes$扩展到严格2-函子 $x \boxtimes -$ 和 $- \boxtimes x$，对每个对象 x都适用 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$。我们在下文的定理 4.29 中证明其2-函子性。设 $W\colon s \to t$ 是 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$中的一个1-态射，由序列 $W = (W_k, ..., W_1)$给出。我们定义1-态射

$$\begin{aligned} x \boxtimes W &\colon x \boxtimes s \to x \boxtimes t \quad \text{by} \quad x \boxtimes W := (x \boxtimes W_k, \ldots, x \boxtimes W_1), \\ W \boxtimes x &\colon s \boxtimes x \to t \boxtimes x \quad \text{by} \quad W \boxtimes x := (W_k \boxtimes x, \ldots, W_1 \boxtimes x), \end{aligned}$$

其中 $x \boxtimes W_i = x \boxtimes (o_l \boxtimes W_i' \boxtimes o_r) := ((x \boxtimes o_l) \boxtimes W_i' \boxtimes o_r)$和 $W_i \boxtimes x = (o_l \boxtimes W_i' \boxtimes o_r) \boxtimes x := (o_l \boxtimes W_i' \boxtimes (o_r \boxtimes x))$，对于适当的生成网 W_i'。

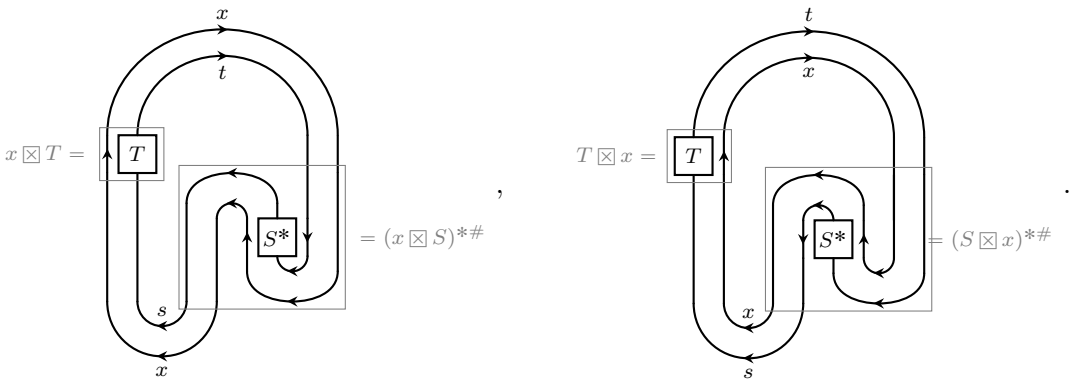
现在定义 $x \boxtimes -$ 和 $- \boxtimes x$ 对 2-态射的作用。设 s， t 为$\mathcal{C}$**泡沫**中的对象，且 S， T：$s \to t$ 为 $\mathcal{C}$**泡沫**中的 1-态射。对于 $x \in \mathcal{C}$**泡沫**中的每个对象，考虑组合的 $\mathcal{C}$-泡沫

$$\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T))} \sqcup \mathrm{cup}_{\mathrm{id}_x}\colon \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T)) \to \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T)) \sqcup \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{id}_x, \mathrm{id}_x))$$

并注意到以下组合的 $\mathcal{C}$-网等式成立

$$\mathsf{abs}(\underline{\mathsf{Hom}}(x \boxtimes S,\ x \boxtimes T)) = \mathsf{abs}(\underline{\mathsf{Hom}}(S,\ T)) \sqcup \mathsf{abs}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{id}_x,\ \mathsf{id}_x)) = \mathsf{abs}(\underline{\mathsf{Hom}}(S \boxtimes x,\ T \boxtimes x)).$$

上面等式中最右侧和最左侧的网所对应的内部 Hom 如下所示：



.

令 $\Sigma \in \mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\text{泡沫}_s}(S,\ T)$ 为一个 2-态射。我们将 $x \boxtimes \Sigma$ 定义为 Σ 在映射下的像

$$\mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,T) \to \mathrm{Hom}_{x\boxtimes t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_{x\boxtimes s}}(x\boxtimes S, x\boxtimes T)$$

由泡沫 $\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\mathrm{Hom}(S,\ T))} \sqcup$ 杯形$_{\mathrm{id}_x}$诱导，视为一个泡沫

$$\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T)) \to \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(x\boxtimes S, x\boxtimes T))$$

und通过函子 eval。类似地，我们将 $\Sigma \boxtimes x$ 定义为 Σ 在映 p

$$\mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,T) \to \mathrm{Hom}_{t\boxtimes x\mathcal{C}\mathbf{Foam}_{s\boxtimes x}}(S\boxtimes x, T\boxtimes x)$$

由泡沫 $\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\mathrm{Hom}(S,\ T))} \sqcup$ 杯形$_{\mathrm{id}_x}$ 通过函子 eval 诱导。

引理 4.27. 设 $S,T,U\colon\ s \to t$ 和 $S',T'\colon\ t \to u$ 是 $\mathcal{C}$**泡沫**中的 1-态射，并考虑 2-态射 $\Sigma \in \mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\text{泡沫}_s}(S,T)$, $\Theta \in \mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\text{泡沫}_s}(T,U)$ 和 $\Sigma' \in \mathrm{Hom}_{u\mathcal{C}\text{泡沫}_t}(S',T')$。对于所有对象 $x \in \mathcal{C}$**泡沫**，以下组合 $\mathcal{C}$-泡沫等式成立

$$\mathrm{vert}_{x\boxtimes U, x\boxtimes T, x\boxtimes S} = \mathrm{vert}_{U,T,S} \sqcup \mathrm{vert}_{\mathrm{id}_x,\mathrm{id}_x,\mathrm{id}_x} = \mathrm{vert}_{U\boxtimes x, T\boxtimes x, S\boxtimes x}, \tag{4.9}$$

$$\mathrm{hor}^{x\boxtimes T', x\boxtimes S'}_{x\boxtimes T, x\boxtimes S} = \mathrm{hor}^{T',S'}_{T,S} \sqcup \mathrm{hor}^{\mathrm{id}_x,\mathrm{id}_x}_{\mathrm{id}_x,\mathrm{id}_x} = \mathrm{hor}^{T'\boxtimes x, S'\boxtimes x}_{T\boxtimes x, S\boxtimes x}, \tag{4.10}$$

$$\mathrm{cup}_{x\boxtimes S} = \mathrm{cup}_S \sqcup \mathrm{cup}_{\mathrm{id}_x} = \mathrm{cup}_{S\boxtimes x}. \tag{4.11}$$

此外，若 $T''\colon\ s' \to t'$ 是 $\mathcal{C}$**泡沫**中的另一个 1-态射，则有

$$\mathrm{cup}_{(t\boxtimes T'')\circ(S\boxtimes s')} = \mathrm{cup}_{T''} \sqcup \mathrm{cup}_S. \tag{4.12}$$

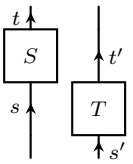
证明。 该陈述由构造 4.18, 4.22 和 4.17直接比较这些恒等式中出现的组合 $\mathcal{C}$-泡沫的定义数据即可得出。 □

构造 4.28 （张量器）。设 $S\colon\ s \to t$ 和 $T\colon\ s' \to t'$ 是 $\mathcal{C}$**泡沫**中的 1-态射。注意，下面的组合 $\mathcal{C}$-网相同：

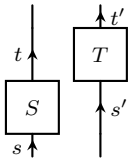
$$\begin{aligned} &\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}((t\boxtimes T)\circ(S\boxtimes s'), (t\boxtimes T)\circ(S\boxtimes s'))) \\ =\ &\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}((S\boxtimes t')\circ(s\boxtimes T), (t\boxtimes T)\circ(S\boxtimes s'))). \end{aligned} \tag{4.13}$$

事实上，这两个 $\mathcal{C}$-网由相同的组合数据构成，用以描述 $\mathsf{abs}(\mathsf{Hom}(S,\ S))\sqcup\mathsf{abs}(\underline{\mathsf{Hom}}(T,\ T))$。用图形演算表示，我们有

$$(S\boxtimes t')\circ(s\boxtimes T)=$$



and



$$=(t\boxtimes T)\circ(S\boxtimes s').$$

由（4.13），我们可以将构造 $\mathcal{C}$中定义的组合$(t\boxtimes T)\circ(S\boxtimes s')$ 泡沫杯4.17视为一个泡沫

$$\varnothing\to\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}((S\boxtimes t')\circ(s\boxtimes T),(t\boxtimes T)\circ(S\boxtimes s'))).$$

对象 S 和 T 上的张量器定义为以下 2-态射

$$\otimes_{S,T}:=\mathsf{eval}(\mathrm{cup}_{(t\boxtimes T)\circ(S\boxtimes s')})(1)\in\mathrm{Hom}_{t\boxtimes t'\mathcal{C}\mathbf{Foam}_{s\boxtimes s'}}((S\boxtimes t')\circ(s\boxtimes T),(t\boxtimes T)\circ(S\boxtimes s')).$$

定理 4.29。构造 4.26 和4.28 赋予 2-范畴 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$ 一个半严格幺半结构，其幺半单位为空序列 $\varnothing$。

证明。我们验证引理 4 中的 (i)-(viii)，见 [BN96]。设 x是 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$中的一个对象。对于 (i)，我们验证 $x\boxtimes-$ 和 $-\boxtimes x$的 2-函子性。

- 1-态射的复合：设 s、t、u 为对象，$S\colon s\to t$ 和 $T\colon t\to u$ 为 $\mathcal{C}$Foam 中的 1-态射。我们有 $x\boxtimes(T\circ S)=(x\boxtimes T)\circ(x\boxtimes S)$，因为在构造 4.26 中，$x\boxtimes-$ 定义为序列中每个元素内对象的串接（严格结合）。• 恒等 1-态射：对于 $\mathcal{C}$Foam 中的对象 s，我们有 $\mathsf{id}_{x\boxtimes s}=x\boxtimes\mathsf{id}_s$，因为两边都是空字。• 恒等 2-态射：对于 1-态射 $S\colon s\to t$，有 $x\boxtimes\mathsf{id}_S=\mathsf{id}_{x\boxtimes S}$。事实上，根据构造 4.17 和 4.26，两边所对应的组合 $\mathcal{C}$-泡沫分别为 $\mathsf{cup}^{\mathsf{id}_x}\sqcup\mathsf{cup}^S$ 和 $\mathsf{cup}^{x\boxtimes S}$，它们按构造相等。• 垂直复合的函子性：给定 1-态射 S、T、$U\colon s\to t$ 和 2-态射 $\Sigma\in\mathsf{Hom}_t\mathcal{C}\mathsf{Foam}_s(S$、$T)$ 以及 $\Theta\in\mathsf{Hom}_t\mathcal{C}\mathsf{Foam}_s(T$、$U)$，我们有

$$x\boxtimes(\Theta\circ_v\Sigma)=(x\boxtimes\Theta)\circ_v(x\boxtimes\Sigma).$$

The 该等式两边所对应的组合 $\mathcal{C}$-泡沫分别是 ly

$$(\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_x}\sqcup\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,U))})\circ\mathrm{vert}_{U,T,S}=\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_x}\sqcup\mathrm{vert}_{U,T,S}$$

and

$$\mathrm{vert}_{x\boxtimes U,x\boxtimes T,x\boxtimes S}\circ((\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_x}\sqcup\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(T,U))})\sqcup(\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_x}\sqcup\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T))})).$$

为了验证该等式，我们必须证明后一个组合 $\mathcal{C}$-泡沫等于前一个组合泡沫。这是定理 4.27 以及$\circ_v$的单位性所导致的结果，后者已在定理4.20中证明。

- 水平复合的函子性：给定平行的 1-态射 $S,T\colon s\to t$ 和$S',T'\colon t\to u$，以及 2-态射 $\Sigma\in\mathsf{Hom}_t\mathcal{C}_{\text{泡沫}_s}(S,T)$ 和 $\Sigma'\in\mathsf{Hom}_u\mathcal{C}_{\text{泡沫}_t}(S',T')$，我们有

$$x\boxtimes(\Sigma'\circ_h\Sigma)=(x\boxtimes\Sigma')\circ_h(x\boxtimes\Sigma).$$

The 构成等式两边基础的组合泡沫分别是 ly

$$(\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_x} \sqcup \mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S'\circ S, T'\circ T))}) \circ \mathrm{hor}_{T,S}^{T',S'} = \mathrm{cup}_{\mathrm{id}_x} \sqcup \mathrm{hor}_{T,S}^{T',S'}$$

and

$$\mathrm{hor}_{x\boxtimes T, x\boxtimes S}^{x\boxtimes T', x\boxtimes S'} \circ ((\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_x} \sqcup \mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S', T'))}) \sqcup (\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_x} \sqcup \mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S, T))})).$$

与垂直复合的函子性证明类似，这两个组合泡沫 $\mathcal{C}$-泡沫相等，是定理 4.27 以及定理 $\circ_h$ 4.25中的单位性所致。

2-函子 性完全类似地由构造的对称性得出。

对于 (ii)，令 $\varnothing$ 为由空序列给出的对象。对于每个对象 x，我们有 $\varnothing \boxtimes x = x \boxtimes \varnothing = x$，因为 $\boxtimes$ 在对象上执行串接。对于一个 1-态射 $S\colon s \to t$，我们有 $\varnothing \boxtimes S = S \boxtimes \varnothing = S$，因为该运算是与空序列进行逐元素串接。现在，令 $T\colon s \to t$ 为另一个 1-态射，且令 $\Sigma \in \mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\text{泡沫}_s}(S, T)$ 为一个 2-态射。组合的 $\mathcal{C}$-泡沫 $_{\varnothing\boxtimes}$ 在求值下诱导出与内部恒等相同的映射，因此， $\varnothing \boxtimes \Sigma = \Sigma$。类似地，我们也得到 $\Sigma \boxtimes \varnothing = \Sigma$。

对于 (iii)，对象和 1-态射之间的结合性显然成立，因为 $\boxtimes$ 运算是（逐元素）串接。令 $S, T\colon s \to t$ 为 1-态射，令 $\Sigma \in \mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\text{泡沫}_s}(S, T)$ 为一个 2-态射。给定两个对象 x, y，我们需要证明

$$x \boxtimes (y \boxtimes \Sigma) = (x \boxtimes y) \boxtimes \Sigma, \quad x \boxtimes (\Sigma \boxtimes y) = (x \boxtimes \Sigma) \boxtimes y, \quad \Sigma \boxtimes (x \boxtimes y) = (\Sigma \boxtimes x) \boxtimes y.$$

作为所有上述等式各项基础的组合 $\mathcal{C}$-泡沫均可证明等于恒等态射$\mathrm{abs}(\mathrm{Hom}(S, T))$ $\sqcup$杯id_x $\sqcup$杯 id_y。这直接由构造 4.26、定理3.10 和定理4.27得出。

对于（iv），设 $S\colon s \to s'$、$T\colon t \to t'$、$U\colon u \to u'$ 为 1-态射。我们需要证明以下等式：

$$\otimes_{s\boxtimes T, U} = s \boxtimes \otimes_{T,U}, \qquad \otimes_{S\boxtimes t, U} = \otimes_{S, t\boxtimes U}, \qquad \otimes_{S, T\boxtimes u} = \otimes_{S,T} \boxtimes u.$$

所有等式均由定理 4.27得出。

对于（v），设 x、y 为对象。我们需要证明 $\mathrm{id}_x \boxtimes y = x \boxtimes \mathrm{id}_y = \mathrm{id}_{x\boxtimes y}$，但这很明显，因为每个表达式都是空对象序列。现在，设 $S\colon s \to t$ 和 $T\colon s' \to t'$为 1-态射。我们需要证明 $\otimes_{\mathrm{id}_x, T} = \mathrm{id}_{x\boxtimes T}$ 以及 $\otimes_{S, \mathrm{id}_y} = \mathrm{id}_{S\boxtimes y}$。来自构造 $\mathcal{C}$的基础组合 $\mathcal{C}$-泡沫4.17 和4.28是相同的。因此，应用求值，即可得到该等式。

对于 (vi)，设 $S\colon s \to t$和 $T, T'\colon s' \to t'$为 1-态射，且 $\Sigma \in \mathrm{Hom}_{t'\mathcal{C}\text{泡沫}_{s'}}(T, T')$ 为 2-态射。我们需要证明

$$\otimes_{S,T'} \circ_v (\mathrm{id}_{S\boxtimes t'} \circ_h (s \boxtimes \Sigma)) = ((t \boxtimes \Sigma) \circ_h \mathrm{id}_{S\boxtimes s'}) \circ_v \otimes_{S,T}. \tag{4.14}$$

为了证明这个等式，我们将其转化为组合的 $\mathcal{C}$-泡沫来处理。由于与 $\otimes_{S, T'}$ 对应的组合 $\mathcal{C}$-泡沫是杯形 $_{(t\boxtimes T)\circ(S\boxtimes s')}$，根据定理 4.20，它也对应于 $\circ_v$ 的恒等态，因此与 $\otimes_{S, T'} \circ_v -$ 对应的 $\mathcal{C}$- 泡沫等于恒等态。类似地，与 $- \circ_v \otimes_{S, T}$ 对应的组合 $\mathcal{C}$- 泡沫也等于恒等态。

因此，我们只需证明构成（4.14）其余部分的组合 $\mathcal{C}$-泡沫相等，也就是说，根据定理4.27：

$$\mathrm{hor}^{S\boxtimes t',S\boxtimes t'}_{s\boxtimes T',s\boxtimes T}\circ(\mathrm{cup}_S\sqcup\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_{t'}}\sqcup\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s})=\mathrm{hor}^{t\boxtimes T',t\boxtimes T}_{S\boxtimes s',S\boxtimes s'}\circ(\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_t}\sqcup\mathrm{cup}_S\sqcup\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_{s'}}).$$

事实上，可以验证上述恒等式两边分别等于

$$(\mathrm{hor}^{S,S}_{\mathrm{id}_s,\mathrm{id}_s}\circ(\mathrm{cup}_S\sqcup\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s}))\sqcup(\mathrm{hor}^{\mathrm{id}_{t'},\mathrm{id}_{t'}}_{T',T}\circ(\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_{t'}}\sqcup\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(T,T'))}))$$

and

$$(\mathrm{hor}^{\mathrm{id}_t,\mathrm{id}_t}_{S,S}\circ(\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_t}\sqcup\mathrm{cup}_S))\sqcup(\mathrm{hor}^{T',T}_{\mathrm{id}_{s'},\mathrm{id}_{s'}}\circ(\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(T,T'))}\sqcup\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_{s'}})).$$

由 $\circ_h$的单位性，这两个 $\mathcal{C}$-泡沫都等于 $\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\mathrm{Hom}(T,\ T'))}\sqcup\underline{杯}_S$，从而证明了恒等式（4.14）。

对于 (vii)，设 S，$S'\colon s\to t$ 和 $T\colon s'\to t'$ 为 1-态射，且 $\Sigma\in\mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}泡沫s}(S,\ S')$ 为一个 2-态射。我们需要证明

$$\otimes_{S',T}\circ_v((\Sigma\boxtimes t')\circ_h\mathrm{id}_{s\boxtimes T})=(\mathrm{id}_{t\boxtimes T}\circ_h(\Sigma\boxtimes s'))\circ_v\otimes_{S,T}.$$

证明与前一点类似。

对于 (viii)，设 $S\colon s\to t$, $S'\colon t\to u$, $T\colon s'\to t'$ 和 $T'\colon t'\to u'$ 为 1-态射。我们需要证明以下恒等式成立：

$$\otimes_{S,T'\circ T}=(\mathrm{id}_{t\boxtimes T'}\circ_h\otimes_{S,T})\circ_v(\otimes_{S,T'}\circ_h\mathrm{id}_{s\boxtimes T}),$$
$$\otimes_{S'\circ S,T}=(\otimes_{S',T}\circ_h\mathrm{id}_{S\boxtimes s'})\circ_v(\mathrm{id}_{S'\boxtimes t'}\circ_h\otimes_{S,T}).$$

与前两点类似，第一个恒等式可以如下验证。首先，利用定理 4.27，注意到等式两边的组合 $\mathcal{C}$-泡沫都分裂为一个不交并，其中一部分是只涉及 $\mathcal{C}$-泡沫 T 和 T'，另一部分是只涉及 $\mathcal{C}$-泡沫 S。接着，由 $\circ_v$ 和 $\circ_h$ 的单位性，以及构造 4.13 和 4.22，即可推出该等式。第二个恒等式也可用类似方法证明。□

4.5. **局部分次与例子。** 我们将展示如何运用第 3.5 节，将局部线性半严格幺半 2-范畴 $\mathcal{C}$**Foam**的构造推广到分次情形。

原则上，我们可以追求两种结果：

(1) 一种半严格幺半 2-范畴，其同态范畴局部富化于分次 $\Bbbk$-模，如 主定理所述。我们可以称之为局部分次 $\Bbbk$-线性半严格幺半 *2*-范畴。*(2)* 一种局部 $\Bbbk$-线性半严格幺半 2-范畴，其同态范畴带有局部 $\mathbb{Z}$-作用，该作用由分次移位自等价给出。

事实上，最直接的方法是先构造一个类型（1）的例子，然后通过以下标准步骤转到类型（2）：形式地添加 1-态射的分次移位，随后将 2-态射模限制为零次。

假设 $\Bbbk$ 是一个分次交换环，$\mathcal{C}$ 是一个分次的 $\Bbbk$-线性标记数据，并且我们考虑一个分次泡沫求值，使得性质 (A) 的分次版本成立。那么，$\mathcal{C}$Foam 按照第 3.5 节的方式带有分次，而 eval 是一个分次的 $\Bbbk$-线性函子。在此情形下逐字重复定义 4.19，平行 1-态射 S、$T\colon s\to t$ 之间的 2-态射构成的 $\Bbbk$-模 $\mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\mathrm{Foam}s}(S,T)$ 自然继承一个分次。然而，式 (4.3) 中的垂直复合 $\circ_v$ 和式 (4.7) 中的水平复合映射 $\circ_h$，在此情形下只能是某个齐次 $\Bbbk$-线性映射，其次数由抽象的

$\mathcal{C}$-泡沫决定相应的运算。因此，要得到一个局部富化于分次 $\Bbbk$-模的半严格幺半 2-范畴，关键在于系统地对 2-态射空间进行分次平移，使得垂直复合和水平复合在 2-态射层面上保持分次。

例 4.30（幂零分次情形）。 考虑用于幂零泡沫的分次 $\Bbbk$-线性标记数据 $\mathcal{C}$。令 $s = (s_1, \dots, s_k)$ 为 $\mathcal{C}$**泡沫** 中的一个对象，并对所有的 i，令 x_i 为 $\mathcal{C}_1$中由 $s_i \in \mathcal{C}_1 \times \{\uparrow, \downarrow\}$确定的元素。我们将 s 的移位 定义为

$$c(s) := \sum_i c(x_i)$$

其中 $c(x_i)$是定义 3.35中的分次 Frobenius 代数 $\mathcal{Z}_{x_i}(\bigcirc)$ 的移位。

于是，对于 $\mathcal{C}$**泡沫**中的 1-态射 $S, T\colon s \to t$，我们定义

$$\mathrm{Hom}_{\iota\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,T) := \mathsf{eval}(\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T)))\{\tfrac{1}{2}(c(s)+c(t))\}$$

这里，右侧花括号中的分次 $\Bbbk$-模的向上移位记作如此。可以验证，经过此移位， $\mathcal{C}$**泡沫**的复合 $\circ_v$ 和 $\circ_h$ 以及半严格幺半结构均保持分次。

例 4.31（定向装饰 Khovanov–Bar-Natan 曲面）。 将例 4.30 中特殊化到只有一个标签和一个分次 Frobenius 代数的 A零价情形，我们得到一个局部分次的 $\Bbbk$-线性幺半 2-范畴，其对象为 定向 装饰 Khovanov–Bar-Natan 曲面。这给出了主定理第 (1) 部分的定向版本：

$$\overrightarrow{\mathrm{BN}_A} \in \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_1}(\mathrm{Cat}[\mathrm{Cat}[\Bbbk\text{-grmod}]]).$$

例 4.32（无定向装饰 Khovanov–Bar-Natan 曲面）。 主定理中的陈述 (1) 依赖于对无定向数据的零价组合 $\mathcal{C}$-泡沫及其求值进行完全平行的处理，详见第 2 节和第 3节。事实上，这给出了一个局部分次的 $\Bbbk$-线性幺半 2-范畴，其对象为 无定向[18] 装饰 Khovanov–Bar-Natan 曲面

$$\mathrm{BN}_A \in \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_1}(\mathrm{Cat}[\mathrm{Cat}[\Bbbk\text{-grmod}]]).$$

存在一个幺半 2-范畴之间的函子

$$\overrightarrow{\mathrm{BN}_A} \to \mathrm{BN}_A$$

忘却定向。特别地，对于对象而言，这会忘却序列各项中的 $\{\uparrow, \downarrow\}$。因此，BN_A 的对象仅仅是对应于唯一标签的生成对象的 $\boxtimes$-次幂。

例 4.33（Robert–Wagner $\mathfrak{gl}_N$-泡沫）。 给定 $N \in \mathbb{N}$，回顾 Robert–Wagner $\mathfrak{gl}_N$-泡沫及其分次标记数据 $\mathcal{C}^N$（定义在 $\Bbbk$ 上）这一情形，出自定理 3.39。我们将相伴的局部 $\Bbbk$-线性半严格幺半2-范畴的记号简记为

$$N\mathbf{Foam} := \mathcal{C}^N\mathbf{Foam}$$

[18]对于无定向装饰 Khovanov–Bar-Natan 曲面，装饰的自然输入是 *orientable* 按照 [GW25]意义下协边的二维拓扑量子场论。这些对应于元组 (A, ϕ) 由一个交换 Frobenius 代数 A 以及一个对合 ϕ组成，其中对合可取为 $\phi = \mathrm{id}$.

对于一个1-态射 $W\colon\ s \to t$，我们注意到，泡沫杯W（来自构造 4.17，并作为恒等2-态射 id_W的底层）的次数可（利用（3.10））计算为加权欧拉示性数

$$\deg(\mathrm{cup}_W) = -\sum_{k\in\mathcal{C}_1}\ \sum_{\substack{\text{non-loop edges}\\ \text{in } W \text{ labeled } k}} k(N-k) + \sum_{k,l\in\mathcal{C}_1}\ \sum_{\substack{\text{vertices in } W\\ \text{labeled } k,l,k+l}} ((k+l)(N-(k+l))+kl)\,.$$

于是，2-态射的分次 $\Bbbk$-模 $\mathrm{Hom}_{tN\text{泡沫}_s}(S,\ T)$ 由下式给出

$$\mathrm{Hom}_{tN\mathbf{Foam}_s}(S,T) := \mathsf{eval}(\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T)))\{-\tfrac{1}{2}(\deg(\mathrm{cup}_S)+\deg(\mathrm{cup}_T))\}.$$

在 [QR16]，中，Queffelec–Rose 描述了一个由渐进式 $\mathfrak{gl}_N$-泡沫构成的局部分次线性2-范畴。特别地，2-态射的分次平移在 [QR16，定义 3.3] 中以其源网和目标网的加权欧拉示性数表示，该数与相应杯泡沫的负次数一致。平移 $\{-\frac{1}{2}(\deg(\mathrm{cup}_S)+\deg(\mathrm{cup}_T)\}$对应于 [QR16]，中的平移；这里将渐进式 $\mathfrak{gl}_N$-泡沫稍作扩展，纳入了 Robert–Wagner $\mathfrak{gl}_N$-泡沫。渐进式泡沫可通过范畴化斜 Howe 对偶得到。在[QR16，引理 3.4]，中证明，这种分次选择与水平复合和垂直复合相容。由于 $\deg(\mathrm{cup}_W)$ 在网的不交并 W下具有可加性，因此分次平移也与幺半结构相容。

总之，我们由此为幺半 2-范畴 $N\mathbf{Foam}$中的 $\mathfrak{gl}_N$-泡沫赋予了一个局部富集，其取值于分次的 $\Bbbk$-模中，正如主定理第（2）部分所述。在以局部分次 $\Bbbk$-线性替换为局部 $\Bbbk$-线性并配以局部 $\mathbb{Z}$-作用之后，我们得到了引言中所述的另一版本。

注记 4.34。 的生成对象的 2-自同态代数 $N\mathbf{Foam}$ 是 Grassmann 流形的上同调环 $H^*(\mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(k,\ N);\ \mathbb{Z})$ 因此对于 $0 < k < N$而言是非半单的。这阻碍了 $N\mathbf{Foam}$ 按照 [DR18定义 1.4 中的意义产生一个半单2-范畴，1] 即使改变基环并进行通常的 2-范畴完备化运算也是如此。类似的论证也可应用于 BN_A （以及 $\longrightarrow\mathrm{BN}_A$），其中生成对象的 2-自同态代数为 A。

4.6. **对偶与伴随**。 回顾一下，半严格幺半2-范畴可以视为具有一个对象的 Gray 范畴。本节中，我们按照[BMS24]在 $\mathcal{C}$**泡沫**上定义对偶结构，其中对象具有对偶，1-态射具有伴随。具体而言，我们证明以下定理。

定理 4.35. 运算 $*$ 和 #（定义于第 4.1 节）扩展为 $\mathcal{C}$**泡沫**上的空间对偶结构，按照 [BMS24定义 3.10 和 4.8]，如下所示。

(1) $*$**-对偶性：**

(a) 一个（严格的）2-函子 $*\colon\ \mathcal{C}$**泡沫** $\to \mathcal{C}$**泡沫**$^{\mathrm{hop},\ \mathrm{vop}}$ 它在对象上为恒等，并将垂直复合与水平复合的顺序反向。(b) 对每个 1-态射 $S\colon\ s \to t$ 以及对象$s,\ t$ 在 $\mathcal{C}$**泡沫** 中，存在一个 2-态射 $\varepsilon_S \in \mathrm{Hom}_{t\mathcal{C}\text{泡沫}_t}(\text{恒等}_t,\ S\circ S^*)$ 满足以下性质：(i) $*\circ *$ 是恒等 2-函子。

(ii) 对所有 1-态射 $U\colon\ r \to s$ 和 $S,\ T\colon\ s \to t$，以及 2-态射 $\Sigma \in \mathrm{Hom}_{tC泡沫s}(S,\ T)$，有

$$(\Sigma \circ_h \mathrm{id}_{S*}) \circ_v \varepsilon_S = (\mathrm{id}_T \circ_h \Sigma^*) \circ_v \varepsilon_T, \tag{4.15}$$

$$(\mathrm{id}_S \circ_h (\varepsilon_{S*})^*) \circ_v (\varepsilon_S \circ_h \mathrm{id}_S) = \mathrm{id}_S, \tag{4.16}$$

$$(\mathrm{id}_S \circ_h \varepsilon_U \circ_h \mathrm{id}_{S*}) \circ_v \varepsilon_S = \varepsilon_{S\circ U}. \tag{4.17}$$

(iii) 对所有对象 x、y、s、t 以及 1-态射 $S\colon s \to t$，我们有

- $(x \boxtimes S \boxtimes y)^* = x \boxtimes S^* \boxtimes y$
- $\varepsilon_{x\boxtimes S\boxtimes y} = x \boxtimes \varepsilon_S \boxtimes y$。

(2) #-对偶性： 对于每个对象 s，存在一个 1-态射 $\eta_s\colon \varnothing \to s \boxtimes s^{\#}$，称为折叠，以及一个可逆 2-态射 $\triangledown_s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathbf{Foam}}\big((\eta_s^* \boxtimes s) \circ (s \boxtimes \eta_{s^\#}),\ \mathrm{id}_s\big)$，称为三角化器，使得：

(i) $s^{\#\#} = s$，对所有对象 s。(ii)
$\varnothing^{\#} = \varnothing$, $\eta_\varnothing = \mathrm{id}_\varnothing$ 和 $\triangledown_\varnothing = \mathrm{id}_{\mathrm{id}_\varnothing}$。(iii)
对所有对象 $s,\ t$:

- $(s \boxtimes t)^{\#} = t^{\#} \boxtimes s^{\#}$
- $\eta_{s\boxtimes t} = (s \boxtimes \eta_t \boxtimes s^{\#}) \circ \eta_s$
- $\triangledown_{s\boxtimes t} = ((\triangledown_s \boxtimes t) \circ_h (s \boxtimes \triangledown_t)) \circ_v (\mathrm{id}_{\eta_s^*\boxtimes s\boxtimes t} \circ_h \otimes_{s\boxtimes\eta_t^*,\eta_{s^\#}\boxtimes t} \circ_h \mathrm{id}_{s\boxtimes t\boxtimes\eta_{t^\#}})$

(iv) 对于对象 s:

$$\mathrm{id}_{\eta_s^*} = (\mathrm{id}_{\eta_s^*} \circ_h (\triangledown_s \boxtimes s^{\#})) \circ_v (\otimes_{\eta_s^*,\eta_s^*} \circ_h \mathrm{id}_{s\boxtimes\eta_{s^\#}\boxtimes s^\#}) \circ_v (\mathrm{id}_{\eta_s^*} \circ_h (s \boxtimes \triangledown_{s^\#}^*)).$$

(3) 空间性： 运算 # 可扩展为一个弱 2-函子 $\#\colon\ \mathcal{C}\mathbf{Foam} \to \mathcal{C}\mathbf{Foam}^{\mathrm{hop},\ \boxtimes\mathrm{op}}$。它之所以是弱的，是因为它保持水平复合和张量积，但会反转它们的顺序，且这种保持仅在给定的 2-同构意义下成立。

自然同构[19] 来自 [BMS24，引理 4.6 和定义 4。8]

$$\Delta\colon \# \to *\#* \qquad \text{and} \qquad *\Delta*\colon \# \to *\#*$$

相等。

注记 4.36。 $*$-对偶性为 1-态射提供左伴随和右伴随。方程

$$(\mathrm{id}_S \circ_h (\varepsilon_{S*})^*) \circ_v (\varepsilon_S \circ_h \mathrm{id}_S) = \mathrm{id}_S$$
$$((\varepsilon_{S*})^* \circ_h \mathrm{id}_{S*}) \circ_v (\mathrm{id}_{S*} \circ_h \varepsilon_S) = \mathrm{id}_{S*}$$

是 S 与其左伴随 S^*之间伴随的之字形恒等式，其中 2-态射 ε_S 和 $(\varepsilon_{S*})^*$ 分别充当单位和余单位。第一个方程是（4.16），第二个方程可用类似方法证明。请参见下文定理 4.35 的证明。或者，注意第二个方程可由对偶结构推出：在 [BMS24，引理 3。3] 中对 id_S应用（13）即可。

类似地，S^* 是 S 的右伴随，其单位和余单位分别为 ε_{S*} 和 $(\varepsilon_S)^*$，并满足之字形恒等式

$$(\mathrm{id}_{S*} \circ_h (\varepsilon_S)^*) \circ_v (\varepsilon_{S*} \circ_h \mathrm{id}_{S*}) = \mathrm{id}_{S*}$$
$$((\varepsilon_S)^* \circ_h \mathrm{id}_S) \circ_v (\mathrm{id}_S \circ_h \varepsilon_{S*}) = \mathrm{id}_S.$$

[19]这些是 [BMS24定义 A 中所说的自然同构10]。

这些方程可以通过交换上述左伴随的之字形恒等式中的 S 和 S^*得到，也可以再次应用 [BMS24，引理 3。3]

#-对偶为对象提供对偶，这由折叠见证；在这些折叠中，三角化算子充当之字形同构。作用于 1-态射的运算 # 会反转（水平）复合以及幺半结构的顺序。

回忆一下，在幺半 2-范畴中，如果一个对象2-可对偶，是指存在左对偶对象和右对偶对象，也就是说，存在由单位和余单位 1-态射组成的有序对，使之字形关系在 2-同构意义下成立；此外，单位和余单位 1-态射还具有左伴随与右伴随。由定理 4.35可直接得到以下结论。

推论 4.37。 $\mathcal{C}$**泡沫** 中的每个对象都是 2-可对偶的。

特别地，N**泡沫**、$\longrightarrow$BN$_A$ 和 BN$_A$ 中的每个对象都是 2-可对偶的。此外，在 BN$_A$ 中，每个对象都是自对偶的。

证明。 #-对偶性为对象计算左对偶和右对偶，相应的单位与余单位态射由适当的杯与帽 1-态射给出，而它们的 zig-zag 关系由三角化器的相应版本见证。这些杯与帽 1-态射的左伴随与右伴随分别仍是适当的帽与杯 1-态射（在带有局部 $\mathbb{Z}$-作用的版本中伴有分次平移）。这些伴随的单位与余单位 2-态射可以用 ε_S 和 $*$表示，并可视化为二维杯、马鞍和帽 2-态射。它们的 zig-zag 关系已在上方的注记中讨论。□

下面我们证明定理 4.35。为此，我们先给出以下构造。

构造 4.38 （$*$-对偶）。 接下来，我们通过 $*$-对偶性定义 $\mathcal{C}$**泡沫** 中 1-态射的伴随数据。

（a）对于一个 1-态射 $W\colon s \to t$ 属于 $\mathcal{C}$**泡沫**，我们已在构造 $W^*\colon t \to s$ 中定义了。现在，令 s，t 为 $\mathcal{C}$**泡沫** 的对象，并考虑 1-态射 S，$T\colon s \to t$。由引理 4.15，可得

$$\operatorname{abs}(\underline{\operatorname{Hom}}(S,T)) = \operatorname{abs}(\underline{\operatorname{Hom}}(T^*,S^*)),$$

因此，我们可以将定理 $\mathcal{C}$-泡沫恒等态射$_{\operatorname{abs}(\operatorname{Hom}(S,\ T))}$ 中的组合3.16 视为泡沫绝对(Hom(S, T)) → 绝对(Hom(T^*, S^*))。我们定义映射

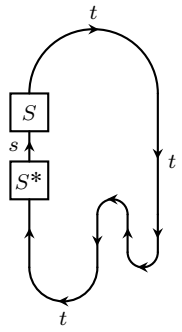
$$-^*\colon \operatorname{Hom}_{t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}(S,T) \to \operatorname{Hom}_{s\mathcal{C}\mathbf{Foam}_t}(T^*,S^*) \tag{4.18}$$

为由恒等态射$_{\operatorname{abs}(\operatorname{Hom}(S,\ T))}$ 经函子 求值诱导的映射。令 $\Sigma \in \operatorname{Hom}_{t\mathcal{C}\text{泡沫}_s}(S,\ T)$为一个 2-态射，并将其在 Σ 下的像 $-^*$ 记作 $\Sigma^* \in \operatorname{Hom}_{s\mathcal{C}\text{泡沫}_t}(T^*,\ S^*)$。（b）给定对象 s，t 属于 $\mathcal{C}$**泡沫**，以及一个 1-态射 $S\colon s \to t$，同样由引理 4.15，可得

$$\operatorname{abs}(\underline{\operatorname{Hom}}(\mathrm{id}_t, S\circ S^*)) = \operatorname{abs}(\underline{\operatorname{Hom}}(S,S)).$$

随后，定理 $\mathcal{C}$-泡沫杯$_S$ 4.17的组合可以看作一个泡沫 $\varnothing \to$abs(Hom(id$_t$, $S \circ S^*$))。用图形演算表示，我们对其中的内部 Hom 有：

目标点：



我们定义 2-态射

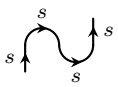
$$\varepsilon_S := \mathsf{eval}(\mathrm{cup}_S)(1) \in \mathrm{Hom}_{{}_t\mathcal{C}\mathbf{Foam}_t}(\mathrm{id}_t, S \circ S^*). \tag{4.19}$$

注意，根据 [BMS24，引理 3。3]，函子 $*$ 在 2-态射上的取值由所选择的 ε_S 中定义的4.19)。

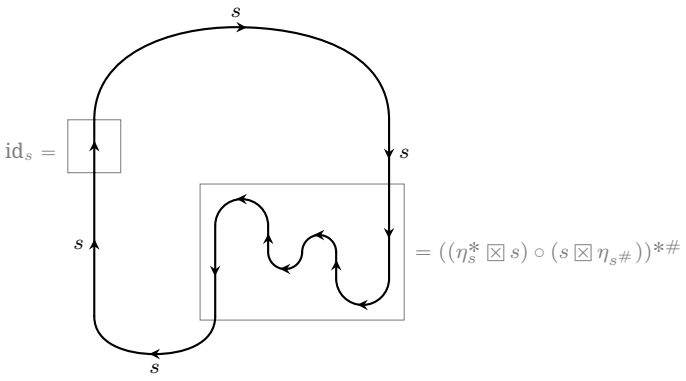
构造 4.39 (#-对偶)。 下面我们定义 #-对偶，它为对象提供对偶。对于任意对象 s，属于 $\mathcal{C}$ **Foam**，元素 $s^\#$ 在构造 4.7中定义，而 折叠 定义为 $\eta_s := \longleftarrow\!\mathrm{cup}_s$，其中 $\longleftarrow\!\mathrm{cup}_s$ 是构造 4.9中的 1-态射。于是，我们有 $\eta_s^* = \longrightarrow\!\mathrm{cap}_s$ 和 $\eta_{s^\#} = \longrightarrow\!\mathrm{cup}_s$。现在注意到，与引理 4.15中的论证类似，我们也有

$$\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}\big((\eta_s^* \boxtimes s) \circ (s \boxtimes \eta_{s^\#}), \mathrm{id}_s\big)) = \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{id}_s, \mathrm{id}_s)). \tag{4.20}$$

我们用图形演算来表示左侧的内部 Hom。为此，注意内部 Hom 中的源点和目标点表示为

$(\eta_s^* \boxtimes s) \circ (s \boxtimes \eta_{s^\#}) =$  and  $= \mathrm{id}_s.$

对于内部 Hom，我们有：



根据（4.20），定理 $\mathcal{C}$-泡沫杯id_s 4.17 中的组合泡沫 $\varnothing \to \mathrm{abs}(\mathrm{Hom}\big((\eta_s^* \boxtimes s) \circ (s \boxtimes \eta_{s^\#}), \mathrm{id}_s\big))$。我们将 三角化器 $\triangledown_s$ 定义为如下 2-态射

$$\triangledown_s := \mathsf{eval}(\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s})(1) \in \mathrm{Hom}_{{}_s\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}\big((\eta_s^* \boxtimes s) \circ (s \boxtimes \eta_{s^\#}), \mathrm{id}_s\big). \tag{4.21}$$

注 4.40。 构造 4.38和 4.39 可以扩展到第 4.5 节中的两类分次环境。由第 4.5 小节中的陈述，我们进而得到，运算 $*$和 # 在局部分次的 $\Bbbk$-线性情形下扩展为一种对偶结构。式（4.18）中定义在 2-态射上的 $\Bbbk$-模对偶性，以及 ε_S 对于一个 1-态射$S\colon\ s \to t$ 变成一个齐次 2-态射，通常具有非零次数。对于两个例子 4.30 和 4.33，元素的次数 ε_S 可以由其中所述的权计算得到。由推论 4.37 并专门应用于相关例子，定理 4.35 因而证明了 主定理 的其余断言。

为适应带有局部 $\mathbb{Z}$-作用的情形，我们希望重新定义 1-态射上的 $*$-运算，使其包含补偿性的分次平移，从而使所有 ε_S 都保持分次。然而，此时 2-函子 $*$ 通常不再是对合，而是其平方等于恒等函子的一个分次平移。

定理 *4.35* 的证明。 **$*$-对偶性：** 我们首先证明 $*\colon \mathcal{C}$**泡沫** $\to \mathcal{C}$**泡沫**$^{\mathrm{hop},\ \mathrm{vop}}$确实是一个 2-函子。

- 1-态射的复合：设 s、t、u为对象，且 $S\colon\ s \to t$和 $T\colon\ t \to u$为 $\mathcal{C}$泡沫中的 1-态射。由构造 4.11 以及定义 4.2 中（水平）复合的定义，我们有 $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$。
- 恒等 1-态射：设 s 为一个对象，并考虑由空序列给出的恒等 1-态射 $\mathrm{id}_s \in_s \mathcal{C}$泡沫$_s$。显然，我们有 $(\mathrm{id}_s)^* = \mathrm{id}_{s*}$。
- 恒等 2-态射：设 $S\colon\ s \to t$为一个 1-态射，并考虑 $S^*\colon\ t \to s$。由引理 4.15，$\mathrm{Hom}(S,S)$ 和 $\mathrm{Hom}(S^*,S^*)$ 中的组合闭合 $\mathcal{C}$-网相同。由构造 4.38，作用于 2-态射上的 $-^*$ 所对应的组合 $\mathcal{C}$-泡沫~~,~~是 $\mathrm{abs}(\mathrm{Hom}(S,S))$上的恒等泡沫。因此，由构造 4.17 可得$(\mathrm{id}_S)^* = \mathrm{id}_{S^*} \in \mathrm{Hom}_t\mathcal{C}$泡沫$_s(S^*,S^*)$。
- 2-态射的垂直复合：给定 2-态射 $\Sigma \in \mathrm{Hom}_t\mathcal{C}$泡沫$_s(\overline{S,T})$和$\Theta \in \mathrm{Hom}_t\mathcal{C}$泡沫$_s(T,U)$，我们需要证明 $(\Theta \circ_v \Sigma)^* = \Sigma^* \circ_v \Theta^*$。由于描述作用于 2-态射上的 $-^*$ 的组合 $\mathcal{C}$-泡沫是恒等的，因此等式两边所对应的组合 $\mathcal{C}$-泡沫都等于 $\mathrm{vert}_{U,T,S} \circ (\Theta \sqcup \Sigma)$，这就证明了该结论。
- 2-态射的水平复合：给定 2-态射 $\Sigma \in \mathrm{Hom}_t\mathcal{C}$泡沫$_s(S,T)$和 $\Sigma' \in \mathrm{Hom}_u\mathcal{C}$泡沫$_t(S',T')$，我们需要证明 $(\Sigma' \circ_h \Sigma)^* = \Sigma^* \circ_h \Sigma'^*$。与前一点类似，这源于在组合$\mathcal{C}$-泡沫层面上，$-^*$ 由恒等给出。

现在我们证明性质 (i)、(ii) 和 (iii)。

(i) 首先，我们证明 $* \circ *$ 是恒等 2-函子。在对象和 1-态射上，这直接由构造 $*$ 中的定义得出，见 4.7和 4.11。对于 2-态射，设 $\Sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathbf{Foam}}(S,T)$ 其中 $S,T\colon\ s \to t$ 是 1-态射。那么，

$$\begin{aligned}(\Sigma^*)^* &= \mathsf{eval}(\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(T^*,S^*))}) \circ \mathsf{eval}(\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T))})(\Sigma) \\ &= \mathsf{eval}(\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(T^*,S^*))} \circ \mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T))})(\Sigma) = \mathsf{eval}(\mathrm{id}_{\mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}(S,T))})(\Sigma) = \Sigma.\end{aligned}$$

(ii) 我们需要证明三个等式：

- $(\Sigma \circ_h \mathrm{id}_{S^*}) \circ_v \varepsilon_S = (\mathrm{id}_T \circ_h \Sigma^*) \circ_v \varepsilon_T$对于所有 1-态射 $S,\ T\colon\ s \to t$ 以及 2-态射$\Sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathbf{Foam}}(S,\ T)$。通过验证（利用构造 4.13 和

4.22）可证明，等式两边对应的组合 $\mathcal{C}$-泡沫均等于 Σ。• (id $_S \circ_h (\varepsilon_{S^*})^*) \circ_v (\varepsilon_S \circ_h \mathrm{id}_S) = \mathrm{id}_S$ 对于所有 1-态射 $S\colon\ s \to t$。事实上，利用构造 3.15、4.17、4.18 和 4.22，可以验证等式左边对应的组合 $\mathcal{C}$-泡沫等于 cup$_S$。• (id $_S \circ_h \varepsilon_U \circ_h \mathrm{id}_{S^*}) \circ_v \varepsilon_S = \varepsilon_{S \circ U}$ 对于所有 1-态射 $S\colon\ s \to t$ 以及 $U\colon\ r \to s$。与前一点类似，可以逐一检查构造 3.15、4.17、4.18 和 4.22 来验证这一点。

(iii) 等式 $(x \boxtimes S \boxtimes y)^* = x \boxtimes S^* \boxtimes y$ 可直接由构造 4.7 和4.11 得出。等式 $\varepsilon_{x \boxtimes S \boxtimes y} = x \boxtimes \varepsilon_S \boxtimes y$ 可由构造 4.19 中的（4.38 ）和引理4.11中的（4.27）得出。

#-对偶性： 我们首先证明 ∇_s 可逆。给定一个对象 s，我们定义 2-态射

$$\nabla_s^{-1} := \mathsf{eval}(\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s})(1) \in \mathrm{Hom}_{s\mathcal{C}\mathbf{Foam}_s}\big(\mathrm{id}_s, (\eta_s^* \boxtimes s) \circ (s \boxtimes \eta_{s^\#})\big),$$

其中 cup$^{\mathrm{id}_s}$ 被视为一个泡沫

$$\varnothing \to \mathrm{abs}(\underline{\mathrm{Hom}}\big(\mathrm{id}_s, (\eta_s^* \boxtimes s) \circ (s \boxtimes \eta_{s^\#})\big)),$$

通过观察 abs(Hom(id$_s$, $\underline{(\eta_s^* \boxtimes s) \circ (s \boxtimes \eta_{s^\#})}$)) = abs(Hom(id$_s$, $\underline{\mathrm{id}_s}$))。由此可得 $\nabla_s \circ_v \nabla_s^{-1} = \mathrm{id}^{\mathrm{id}_s}$ 和 $\nabla_s^{-1} \circ_v \nabla_s = \mathrm{id}^{(\eta_s^* \boxtimes s) \circ (s \boxtimes \eta_{s^\#})}$。事实上，根据 $\circ_v$的单位性，这两个等式左侧所对应的组合 $\mathcal{C}$-泡沫是

$$\mathrm{vert}_{\mathrm{id}_s, \mathrm{id}_s, \mathrm{id}_s} \circ (\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s} \sqcup \mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s}) = \mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s} = \mathrm{cup}_{(\eta_s^* \boxtimes s) \circ (s \boxtimes \eta_{s^\#})}.$$

现在证明性质 (i) 至 (iv)。

(i) 对于所有对象 $s^{\#\#} = s$，s，我们有此结论。这直接由构造 4.7 得出。(ii) 等式 $\varnothing^\# = \varnothing$，$\eta_\varnothing = \mathrm{id}_\varnothing$ 以及 $\nabla_\varnothing = \mathrm{id}^{\mathrm{id}_\varnothing}$ 显然由定义可得。(iii) 对所有对象 s，t:

- 根据定义，我们有 $(s \boxtimes t)^\# = t^\# \boxtimes s^\#$。• 由构造 4.9 可归纳得出 $\eta_{s \boxtimes t} = (s \boxtimes \eta_t \boxtimes s^\#) \circ \eta_{s \circ}$ • 对于 $\nabla_{s \boxtimes t} = ((\nabla_s \boxtimes t) \circ_h (s \boxtimes \nabla_t)) \circ_v$ (id $_{\eta_s^* \boxtimes s \boxtimes t} \circ_h \otimes_{s \boxtimes \eta_t^*, \eta_{s^\#} \boxtimes t} \circ_h \mathrm{id}_{s \boxtimes t \boxtimes \eta_{t^\#}}$)，注意到根据定理 4.27，左侧对应的组合 $\mathcal{C}$-泡沫等于 cup$^{\mathrm{id}_s} \sqcup$cup$^{\mathrm{id}_t}$。对于右侧，注意到根据定理 4.27 以及 $\circ_h$的单位性，$(\nabla_s \boxtimes t) \circ_h (s \boxtimes \nabla_t)$ 所对应的组合 $\mathcal{C}$-泡沫等于 cup$^{\mathrm{id}_s} \sqcup$cup$^{\mathrm{id}_t}$。此外，可以验证，与之对应的组合 $\mathcal{C}$-泡沫

  $$\mathrm{id}_{\eta_s^* \boxtimes s \boxtimes t}, \quad \mathrm{id}_{s \boxtimes t \boxtimes \eta_{t^\#}}, \quad \otimes_{s \boxtimes \eta_t^*, \eta_{s^\#} \boxtimes t}$$

  分别等于

  $$(\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s})^{\sqcup 2} \sqcup \mathrm{cup}_{\mathrm{id}_t}, \quad \mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s} \sqcup (\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_t})^{\sqcup 2}, \quad (\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s})^{\sqcup 2} \sqcup (\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_t})^{\sqcup 2}.$$

  现在，第三个 $\circ_h$ 将四个杯形$_{\mathrm{id}_t}$ 合并为一个，而第二个 $\circ_h$ 将四个杯形$_{\mathrm{id}_s}$ 合并为一个。根据 $\circ_v$的单位性，我们得出，等式右边的 $\mathcal{C}$-泡沫等于杯形$_{\mathrm{id}_s} \sqcup$杯形$_{\mathrm{id}_t}$，正如所期望的那样。

（iv）最后，我们证明

$$\mathrm{id}_{\eta_s^*} = (\mathrm{id}_{\eta_s^*} \circ_h (\nabla_s \boxtimes s^\#)) \circ_v (\otimes_{\eta_s^*, \eta_s^*} \circ_h \mathrm{id}_{s \boxtimes \eta_{s^\#} \boxtimes s^\#}) \circ_v (\mathrm{id}_{\eta_s^*} \circ_h (s \boxtimes \nabla_{s^\#}^*))$$

对所有对象 s 均成立。首先，注意到该等式左侧所对应的组合 $\mathcal{C}$-泡沫等于 $\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s}$。与前一点类似，通过将每一项分解为 $\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s}$ 的不交并，并利用 $\circ_h$ 和 $\circ_v$的单位性，可以证明描述右侧的 $\mathcal{C}$-泡沫等于 $\mathrm{cup}_{\mathrm{id}_s}$。

空间性： # 可扩展为一个在水平复合和幺半方向上反变的弱 2-函子，这一事实见 [BMS24, 定理 4。3]为此，1-态射和 2-态射上的运算 # 定义于 [BMS24，方程 (17)]。对于 1-态射$W\colon s \to t$，这与左伴一致

$$\#(W) = {}^{\#}W \colon t^{\#} \to s^{\#}$$

根据构造4.10。注意，运算 $*\#*(W) = W^{\#}$将右伴赋给W。如 [BMS24，方程 (32)], 我们定义自然同构的 2-态射分量

$$\Delta_W \in \mathrm{Hom}_{{}_{s^{\#}}\mathcal{C}\mathbf{Foam}_{t^{\#}}}({}^{\#}W, W^{\#})$$

如下 Δ

$$\begin{aligned}\Delta_W = {} & (\mathrm{id}_{W^{\#}} \circ_h (\nabla^*_{t^{\#}})^{-1}) \circ_v (\mathrm{id}_{W^{\#}} \circ_h \mathrm{id}_{t^{\#}\boxtimes\eta_t^*} \circ_h t^{\#} \boxtimes \varepsilon^*_W \boxtimes t^{\#} \circ_h \mathrm{id}_{\eta_{t^{\#}}\boxtimes t^{\#}}) \\ & \circ_v (\mathrm{id}_{W^{\#}} \circ_h \mathrm{id}_{(t^{\#}\boxtimes\eta_t^*)\circ(t^{\#}\boxtimes W\boxtimes t^{\#})} \circ_h t^{\#} \boxtimes \nabla_s \boxtimes t^{\#} \circ_h \mathrm{id}_{(t^{\#}\boxtimes W^*\boxtimes t^{\#})\circ(\eta_{t^{\#}}\boxtimes t^{\#})}) \\ & \circ_v (\mathrm{id}_{W^{\#}} \circ_h \otimes_{t^{\#}\boxtimes\eta_s^*,\eta_t^*\circ(W\boxtimes t^{\#})} \circ_h \mathrm{id}_{(t^{\#}\boxtimes s\boxtimes\eta_{s^{\#}}\boxtimes t^{\#})\circ(t^{\#}\boxtimes W^*\boxtimes t^{\#})\circ(\eta_{t^{\#}}\boxtimes t^{\#})}) \\ & \circ_v (\mathrm{id}_{W^{\#}} \circ_h \mathrm{id}_{t^{\#}\boxtimes\eta_s^*} \circ_h \otimes_{(t^{\#}\boxtimes W^*)\circ\eta_{t^{\#}},{}^{\#}W}) \circ_v (\varepsilon_{W^{\#}} \circ_h \mathrm{id}_{{}^{\#}W}).\end{aligned}$$

还需验证右伴与左伴之间的自然变换 Δ和$*\Delta*$ 的 2-态射分量相等。这依赖于这样一个事实：构造这些 2-态射时所用的底层组合 $\mathcal{C}$-泡沫等于恒等$\mathcal{C}$-泡沫，并且应用 $*$ 与描述垂直复合和水平复合的组合 $\mathcal{C}$-泡沫相容。□

注 4.41. 定理 4.35.(3) 中使用的弱 2-函子 #: $\mathcal{C}\mathbf{Foam} \to \mathcal{C}\mathbf{Foam}^{\mathrm{hop},\boxtimes\mathrm{op}}$ [BMS24, 定理 4.3] 在网的复合的 $\circ$方向上弱反变。特别地，对于每一对可复合的 1-态射 $W_1\colon s \to t$和 $W_2\colon t \to u$，都有一个 2-同构 $\#_{W_1} \circ {}^{\#}W_2 \to \#(W_2 \circ W_1)$。该 2-同构由恒等 2-态射、三角化器 ∇_t 以及两个张量器构造而成。此外，2-态射 $(\nabla_{s^{\#}})^*$给出了一个 2-同构 $\mathrm{id}_{s^{\#}} \to (\mathrm{id}_s)^{\#}$。请比较 [BMS24, 定理 4.3] 的证明。

注 4.42 （严格化）。 回顾我们针对 1-态射的二维图形演算，以及图 11中针对 2-态射的三维图形演算。用图形演算来表示，Construction 4.11 中的操作 $*$ 是绕 0 轴旋转 π，同时反转每条边的定向。然则，# 操作——它将左伴 ${}^{\#}W$ 赋给 1-态射 W——并不对应图形演算中的旋转。不过，考虑绕 2 轴旋转 π会更为自然。下文将讨论如何在 $\mathcal{C}\mathbf{Foam}$上定义此类操作。

一种选择是使用 [BMS24第 5] 节中为带对偶的空间 Gray 范畴所发展的严格化过程。为此，首先形式地添加对象的旋转副本以及

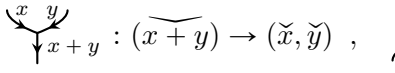
1-态射[20]。随后定义运算 #，用以交换原始副本与旋转副本，该运算进而可延拓为一个使运算 # 严格化的严格 2- 函子。由此得到一个在 [BMS24 定义 5 的意义下具有严格对偶的等价 Gray范畴。1], 其代价是引入重复的对象与 1-态射。参见 [BMS24，定理 5.2 与定理 5。3]。

另一种选择是组合地定义一个作用 $\#$on $\mathcal{C}$**泡沫**，使其类似于旋转。对于一个基本的 $\mathcal{C}$-网 $o_l \boxtimes W' \boxtimes o_r$，其包含一个生成的 $\mathcal{C}$-网，我们定义

$$\#(o_l \boxtimes W' \boxtimes o_r) := o_r^{\#} \boxtimes (^{\#}W') \boxtimes o_l^{\#}$$

对于一个 1-态射 $W = (W_1, \ldots, W_k)$，我们令 $\#(W) := (\#(W_k), \ldots, \#(W_1))$。为保持一致性，我们还要求 $\#(\mathrm{id}_s) := \mathrm{id}_{s^{\#}}$。注意，与 # 不同，作用 $\#$ 与 1-态射的复合相容。然而，根据此定义，作用 $\#$ 仅在使连续取两次左伴平凡化的 2-同构意义下是对合的。

最后，作为前两种尝试之间的一种折中，为了定义一个真正对应于绕 π 2 轴旋转的作用 #，我们可以扩充 $\mathcal{C}$**泡沫**，但这种扩充比 [BMS24第 5]节中的做法温和得多。我们可以重复 $\mathcal{C}$**泡沫** 的构造，但另外为每个生成的合并网和分裂网 $\mathcal{C}$添入一个旋转后的对应物。具体而言，对于所有标签 $x, y \in \mathcal{C}_1$，这些额外的生成元定义如下：



其余构造以类似方式进行。随后可以证明，新的向下定向合并顶点和分裂顶点分别同其向上定向对应顶点的左伴与右伴同构，因此所得的半严格幺半 2-范畴等价于$\mathcal{C}$**Foam**。然而，在新模型中，运算 # 可以定义为互换所有合并、分裂、杯与帽网的向上和向下版本。由此便在修改后的 $\mathcal{C}$**Foam** 上得到一个严格 2-函子 #，它是一个对合；而 $*$ 与 # 的复合（对应于绕 1 轴旋转 π ）也同样是对合。因此，我们得到一个具有严格对偶的 Gray范畴。

—

注4.43（球性）。 按照 Douglas–Reutter [DR18，定义 2.2.3 和 2.2。4], 的表述，我们在幺半平面枢轴 2-范畴$\mathcal{C}$**Foam**上构造了一个枢轴结构。在此情形下，可以考虑给定 1-态射的各种 2-球面迹 W： $s \to t$，见 [DR18，第 2.2 节。3]。作为枢轴性的结果，所谓的左迹和右迹总是相等，见 [DR18，命题 2.2。9]。非正式地说，在相关的图形演算中，这使得我们可以通过在嵌入的 2-球面上进行同伦，自由地操作由该球面上的图示表示的 2-态射。

除此之外，还可以考虑一项额外的 3-球面性 [DR18，定义 2.3。2]。为陈述这一性质，请注意，在图形演算中，可以通过沿前方或后方闭合 2-球面，以两种方式构造对象的 2-自同态的 2-球面迹。幺半对偶2-范畴的 3-球面性 [DR18，定义 2.3。2]要求任意 2-自同态的前迹与后迹相等。正如我们接下来将论证的， $\mathcal{C}$**泡沫** 满足这一条件。

[20]用 Gray 范畴的术语来说，它们分别是 1-态射和 2-态射。

事实上，2-自同态 $\Sigma \in \mathrm{Hom}_{s\mathcal{C}\text{泡沫}_s}(\mathrm{id}_s、\mathrm{id}_s)$ 中一个对象 s 在 $\mathcal{C}$**泡沫** 的前迹 和后迹 分别定义为

$$\mathrm{Tr}_F(\Sigma) = (\varepsilon_{\overrightarrow{\mathrm{cap}}_s})^* \circ_v (\mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathrm{cap}}_s} \circ_h (\Sigma \boxtimes s^{\#}) \circ_h \mathrm{id}_{\overleftarrow{\mathrm{cup}}_s}) \circ_v \varepsilon_{\overrightarrow{\mathrm{cap}}_s} \in \mathrm{Hom}_{\varnothing\mathcal{C}\mathbf{Foam}_\varnothing}(\mathrm{id}_\varnothing, \mathrm{id}_\varnothing)$$

$$\mathrm{Tr}_B(\Sigma) = (\varepsilon_{\overleftarrow{\mathrm{cap}}_s})^* \circ_v (\mathrm{id}_{\overleftarrow{\mathrm{cap}}_s} \circ_h (s^{\#} \boxtimes \Sigma) \circ_h \mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathrm{cup}}_s}) \circ_v \varepsilon_{\overleftarrow{\mathrm{cap}}_s} \in \mathrm{Hom}_{\varnothing\mathcal{C}\mathbf{Foam}_\varnothing}(\mathrm{id}_\varnothing, \mathrm{id}_\varnothing).$$

它们相等，因为底层的组合 $\mathcal{C}$-泡沫相同。

References

[BN96] J. C. Baez 和 M. Neuchl： *Higher-dimensional algebra. I. Braided monoidal 2-categories*，《Adv. Math.》121 (1996)，第 2 期，196–244。[BN05] D. Bar-Natan： *Khovanov's homology for tangles and cobordisms*，《Geom. Topol.》9 (2005)，1443–1499。arXiv:math.GT/0410495。[BMS24] J. W. Barrett、C. Meusburger 和 G. Schaumann： *Gray categories with duals and their diagrams*，《Adv. Math.》450 (2024)，论文编号 109740，共 129 页。[BHMV95] C. Blanchet、N. Habegger、G. Masbaum 和 P. Vogel： *Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket* **34** 1995 4, 883 927 ，《Topology》（），第 – 期。[Bla10] C. Blanchet： *An oriented model for Khovanov homology*，《J. Knot Theory Ramifications》19 (2010)，第 2 期，291–312。arXiv:1405.7246。[CKM14] S. Cautis、J. Kamnitzer 和 S. Morrison： *Webs and quantum skew Howe duality*，《Math. Ann.》360 (2014)，第 1-2 期，351–390。arXiv:1210.6437。[Cli25] J. Clivio： *Graded Frobenius Algebras*，《Q. J. Math.》76 (2025)，第 4 期，1105–1157。[DR18] C. L. Douglas 和 D. J. Reutter： *Fusion 2-categories and a state-sum invariant for 4-manifolds*，2018 1812 11933。arXiv:。。[DSPS20] C. L. Douglas、C. Schommer-Pries 和 N. Snyder： *Dualizable tensor categories*，《Mem. Amer. Math. Soc.》268 (2020)，第 1308 号，vii+88。[DW25] T. Dyckerhoff 和 P. Wedrich： *Perverse schobers of exceter type A*, 2025。[Goe25] L. J. Goertz： *A construction of surface skein TQFTs and their extension to 4-dimensional 2-handlebodies* 2025 2511 19352 ，。arXiv:。。[GW25] L. J. Goertz 和 P. Wedrich： *A note on TQFTs for orientable 2-dimensional cobordisms*，2025。arXiv:2511.19373。[GPS95] R. Gordon、A. J. Power 和 R. Street： *Coherence for tricategories*，《Mem. Amer. Math. Soc.》117 (1995)，第 558 号，vi+81。[Gur13] N. Gurski： *Coherence in three-dimensional category theory*，剑桥数学专题丛书，第 201 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2013。[HRW24] M. Hogancamp、D. E. V. Rose 和 P. Wedrich： *Bordered invariants from Khovanov homology*，2024 2404 06301。arXiv:。。[Jon85] V. F. R. Jones： *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*，《Bull. Amer. Math. Soc.》（新系列）12 (1985)，第 1 期，103–111。MR766964 DOI:10.1090/S0273-0979-1985-15304-2。[KL03] A. Kapustin 和 Y. Li： *Topological correlators in Landau-Ginzburg models with boundaries*，《Adv. Theor. Math. Phys.》7 (2003)，第 4 期，727–749。[Kho00] M. Khovanov： *A categorification of the Jones polynomial* **101** 2000 3, , 《Duke Math. J.》（），第 – 期。arXiv:math.QA/。[Kho02] M. Khovanov： *A functor-valued invariant of tangles*，《Algebr. Geom. Topol.》2 (2002)，665–741。arXiv:math.GT/0103190。[Kho20] M. Khovanov： *Universal construction of topological theories in two dimensions*，2020。[KR07] M. Khovanov 和 L. Rozansky： *Topological Landau-Ginzburg models on the world-sheet foam*，《Adv. Theor. Math. Phys.》11 (2007)，第 2 期，233–259。[KR08]： *Matrix factorizations and link homology*，《Fund. Math.》199 (2008)，第 1 期，1–91。arXiv:math.QA/0401268。[KS25] M. Khovanov 和 D. Solovyev： *Lectures on sl(3) foams and link homology*，2025。

[Kho04] M. Khovanov: $\mathfrak{sl}(3)$ *link homology*, 《Algebr. Geom. Topol.》4 (2004), 1045–1081。arXiv:math.QA/0304375。[KM19] P. B. Kronheimer 和 T. S. Mrowka: *Tait colorings and an instanton homology for webs and* , , 《欧洲数学学会杂志》 *foams* **21** 2019 1, 55 119 （） , 第 – 期。[Lic92] W. B. R. Lickorish: *Calculations with the Temperley-Lieb algebra*, 《赫尔维蒂数学评论》67 (1992), 第 4 期, 571–591。MR1185809 DOI:10.1007/BF02566519。[LMGR+24] Y. L. Liu、A. Mazel-Gee、D. Reutter、C. Stroppel 和 P. Wedrich: *A braided monoidal* $(\infty\ 2)$*-* , , 。arXiv:。。[MSV09] *category of Soergel bimodules* 2024 2401 02956 M. Mackaay、M. Stošić、P. Vaz: *$\mathfrak{sl}_N$-link homology ($N \geqslant 4$) using foams and the Kapustin–Li formula* **13** 2009 2, 1075 1128 0708 2228 , 《Geom. Topol.》 （） , 第 – 期。arXiv:。。[MW12] S. Morrison 和 K. Walker: *Blob homology*, 《Geometry & Topology》16 (2012), 第 3 期, 1481–1607。[MWW22] S. Morrison、K. Walker 和 P. Wedrich: *Invariants of 4-manifolds from Khovanov–Rozansky link homology* **26** 2022 8, 3367 3420 1907 12194 , 《Geom. Topol.》 （） , 第 – 期。arXiv:。。[MOY98] H. Murakami、T. Ohtsuki 和 S. Yamada: *Homfly polynomial via an invariant of colored plane graphs* 2 **44** 1998 3 4, 325 360 , 《数学教学》 （） （） , 第 - – 期。[QR16] H. Queffelec 和 D. Rose: *The $\mathfrak{sl}_n$ foam 2-category: a combinatorial formulation of Khovanov–Rozansky homology via categorical skew Howe duality* **302** 2016 1251 1339 , 《Adv. Math.》 （） , –。arXiv:1405.5920。[RW20] L.-H. Robert 和 E. Wagner: *A closed formula for the evaluation of foams*, 量子拓扑 11 (2020), 第 3 期, 411–487。arXiv:1702.04140。[Rou08] R. Rouquier: *2-Kac-Moody algebras*, 2008。arXiv:0812.5023。[SW24] C. Stroppel 和 P. Wedrich: *Braiding on type a soergel bimodules: semistrictness and naturality*, 2024 2412 20587。arXiv:。。[TVW15] D. Tubbenhauer、P. Vaz 和 P. Wedrich: *Super q-Howe duality and web categories*, ArXiv 电子预印本（2015）, 3703–3749。[Wed25] P. Wedrich: *From link homology to topological quantum field theories*, 2025。arXiv:2509.08478。

Fachbereich Mathematik Universität Hamburg Bundesstrasse 55 20146 Hamburg Germany , , , , leonjgoertz.github.io
Email address: leon.goertz@uni-hamburg.de

Fachbereich Mathematik Universität Hamburg Bundesstrasse 55 20146 Hamburg Germany , , , , sites.google.com/view/laura–marino
Email address: laura.marino@uni-hamburg.de

Fachbereich Mathematik Universität Hamburg Bundesstrasse 55 20146 Hamburg Germany , , , , paul.wedrich.at
Email address: paul.wedrich@uni-hamburg.de