arXiv:2602.11134v1 [math.LO] 11 Feb 2026

自我编码集合

Taeyoung Em

Abstract. 给定一个集合的部分信息，我们关心如何从已知信息中完整恢复原始集合。如果一个集合能够稳健地自我编码，那么关于该集合的任何部分信息都足以完整恢复原集合的信息。Jockusch 将满足以下条件的集合 A 称为内可枚举集：A 的每个无限子集都能枚举 A；这是集合自我编码的一个例子。还有其他一些以不同方式刻画自我编码的概念。若 A的每个无限子集都能一致地枚举 A，我们就称 A为一致内可枚举；而若 A 的每个无限子集都能计算 A，则称 A 为内可约。我们研究了各种自我编码概念的性质，并证明了它们相互关系的新结果。
Greenberg、Harrison-Trainor、Patey 和 Turetsky 证明，我们总能从一个内可枚举集中找到某种一致性。我们证明了这一结论可以反过来：通过补足一致性，我们可以构造一个内可枚举集。这带来了一种构造非平凡内可枚举集或内可约集的新方法。

1. Introduction

对于一个无限集 $A \subseteq \omega$，记 $[A]^{\omega}$ 为 A 的所有无限子集所组成的集合，记 $[A]^{<\omega}$ 为 A 的所有有限子集所组成的集合。若每个 $C \in [A]^{\omega}$ 都能计算 A，则无限集 A 是内可约的。若每个 $C \in [A]^{\omega}$ 都在 A 之上枚举 [2]，则它是内可枚举的[1]。如果 A 能被任意一个主导 p_A（A 的主函数）的函数 f 计算，则它是主可归约的。同样地，如果每个 $f \geqslant p_A$ 都在 A 之上枚举，则 A 是主可枚举的。这些概念都有一致版本，即，如果每个 $C \in [A]^{\omega}$ 都能以一致的方式计算 A，则 A 是一致内可约的；也就是说，存在一个图灵算子 Φ，使得对于 $C \in [A]^{\omega}$，$\Phi^C = A$。其他概念的一致版本也类似地定义。

构造一个非平凡内可枚举集是一项艰巨的任务，因为与一致内可枚举集不同，后者有一个单一的枚举算子作为见证 $\leqslant_e$，非平凡内可枚举集 A 可能不存在这种一致性，因此我们必须确保每个无限子集 A 都在 A之上可枚举。Lachlan 在 [Joc68b的定理 4 中构造了一个内可约集，但它并非一致内可约集。1], 这似乎是文献中唯一介绍如何构造非平凡内可枚举/内可约集之处。另一方面，也有人尝试从内可枚举集中寻找某种一致性

[1]Jockusch 最初以不同的方式定义了内可枚举性的概念：无限集A 是内可枚举的，当且仅当对于每个 $C \in [A]^{\omega}$，A 是 C-可计算可枚举集。尽管如此，在一致情形下，根据 [GHTPT20，命题 2. 1], ，这两个定义是等价的；在非一致情形下，借助 Selman 定理，通过类似论证也可证明它们等价。
[2]枚举算子 Θ 是由序对 $\langle u、n\rangle$ 构成的可计算可枚举集。对于一个集合 A，$\Theta(A)$ 表示集合 $\{n : \exists u\ D_u \subseteq A \wedge \langle u、n\rangle \in \Theta\}$。如果存在一个枚举算子 Θ 使得$\Theta(B) = A$，我们就称 $A \leqslant_e B$。当 $A \leqslant_e B$ 时，我们称 B 在 A 之上枚举。

集。Greenberg、Harrison-Trainor、Patey 和 Turetsky 证明，若 A 是内可枚举的，则存在一个子集 $C \in [A]^\omega$ 和一个枚举算子 Γ，使得 $\Gamma(C_0) = A$ 对所有 $C_0 \in [C]^\omega$ [GHTPT20，命题 3。7]。我们证明这一结论可以反向成立，由此得到一种构造非平凡内可枚举集的新方法。

1.1. 背景。Dekker 和 Myhill 引入了刻画自编码概念的一阶版本。事实上，可回溯性是 Dekker 和 Myhill 论文的主要主题；他们将内可约性定义为可回溯集的一种性质，尽管内可约性本身也非常有趣。若无限集 A 满足 A 可写作 $A = \{a_0、a_1、\dots\}$，其中 a_i 彼此不同，且存在一个部分可计算函数 φ，使得对于所有 $n \geqslant 0$ 和 $\varphi(a_0) = a_0$，都有 $\varphi(a_{n+1}) = a_n$，则称该集为递归集。若这些 a_i 可以按递增方式选取，即 $a_0 < a_1 < \cdots$，则称该集为可回溯集。 [DM58] 对可回溯集进行了深入研究，并证明每个可计算可枚举度都有一个余可计算可枚举可回溯代表，而且每个度都有一个可回溯代表。Mansfield（未发表）证明，互补的[3]可回溯集是可计算的。Appel 和 McLaughlin 在 [AM65] 中深入研究了递归集，并证明若 A 和 A 是互补递归集，则其中一个是可计算可枚举的。Mansfield 的结果可以作为该结论的推论得出。值得注意的是，确实存在不可计算的互补递归集，这与可回溯集不同。任何余可计算可枚举可回溯集都是互补递归集，并且每个可计算可枚举度都有这样的集合。

这些刻画自我编码的概念之间存在一些显而易见的蕴含关系。显然，每个可回溯集都是一致内可约的，而每个递减集都是内可枚举的。此外，每个（统一）主可约集都是（统一）内可约的，因为任意子集的主函数都比原集合的主函数稀疏。有趣的是，递减集与可回溯集之间的关系，以及内可枚举集与内可约集之间的关系，都令人想起可枚举集与可计算集之间的关系。事实上，每个递减集都有一个可回溯子集 [Dek62], ，且每个一致可内枚举集都有一个一致内可约子集 [GHTPT20，定理 1。4]。可以将这些结果视为如下事实的类比：每个无限可计算枚举集都有一个无限可计算子集。

1.2. **动机**。了解这些之后，自然会寻求递减集与内可约集之间的相似之处，以及递归集与内可枚举集之间的相似之处。正如可回溯集一样，补内可约集也是可计算的，见 [SS95，定理 2。19]。这是内可约集的一项有趣性质，因为即使是一致内可枚举集也不具有这一性质[Joc68b，定理 5。2], ，递归集也不具有这一性质。从这个意义上说，可回溯集与内可约集有一些共同性质，而递归集与内可枚举集也有一些共同性质。但显然，可回溯性不同于内可约性，递归性也不同于内可枚举性。如果 A 和 A 是免疫半可计算集，那么 A 和 A 是超免疫的一致内可枚举集[Joc68b，定理 5。2]。因此，与递归集不同，一致内可枚举集可以是补免疫的。本文还展示了若干实例，说明可回溯性与内可约性并不相同。

[3]令 P 为诸如递减这样的性质。若 A 和 A 都具有 P，则集合 A 是互补的 P。2

1.3. **本文的主要结果。** Jockusch 在其论文 [Joc68b], 中提出了若干有趣的开放问题，其中一些已由 Greenberg、Harrison-Trainor、Patey 和 Turetsky 在 [GHTPT20] 中作答。本文将探讨 [Joc68b] 和 [GHTPT20], 中的一些开放问题，并改进其中一些结果；随后仔细分析（一致）intro-e/T[4], 、（一致）major-e/T、递归集/可回溯集以及可计算可枚举集/可计算集彼此重合或相去甚远的情形，并研究它们的一些性质。因此，本文的主要关注点如下：

令 P, Q 为以下类别中的两个不同类别：（一致）intro-e/T 集、（一致）major-e/T 集、递减/可回溯集，以及可计算可枚举/可计算集。

(1) P中的集合具有什么性质？(2) P 中的每个集合是否都有一个属于 Q的子集？(3) P 中的每个集合是否也属于 Q？若否，它们在什么情况下相同？

本文各节均探讨第一和第二个问题，最后一节则主要聚焦于第二和第三个问题。第3节重点讨论递减集和可回溯集，以及它们与主可归约集的关系。第4节重点讨论内可枚举集和内可约集，并在此介绍一种构造内可枚举集的新方法。本文的开放问题见第4节“开放问题”4.17。

图1——它表示可内枚举集合的全集——说明了条目（3）。例如，梯形内部的直角三角形表示可回溯、具有一致内可约性但不可枚举的集合，而梯形外部的直角三角形表示递减、具有一致内可约性但不可回溯的集合。左上角的方框表示既非一致内可枚举也非内可约的内可枚举集。在图中的每个区域内，我们标明了证明该区域非空之处。对于（一致）主可枚举/T 集合，也有类似的图景，这一点在最后一节中得到证明，但为便于看清图形而未在图中画出。

对于两个概念 P, Q，我们记作 $P \subseteq Q$ 并称 P 是 Q 的子集，如果P 中的每个集合都属于 Q。我们称 P 可细化为 Q，如果 P 中的每个集合都有一个子集属于 Q。如果两个概念 P, Q 不同，是指其中一个概念中存在一个集合不属于另一个概念。因此，结合图1，我们得到：

定理 1.1。 一致主 *T/e*、主 *T/e*、一致内 *T/e*、内 *T/e*、递减、可回溯、可计算可枚举和可计算，都是彼此不同的概念。以下四种概念中的任意两种 P, Q 都可以相互细化。

$$major\text{-}T/e \text{ and } uniformly\ major\text{-}T/e.$$

最后一个断言在第 2 节末尾证明。一致主 T/e 与主 T/e 这两个概念彼此不同，这一点在第 5 节开头得到证明。对于不能从上图直接得出的情形，我们在下文指出其证明位置。

- 一种不是内可约的、一致主可枚举集：根据推论5.8。• 一种不是递减的一致主可约集：根据注3.15。• 一种不是主可枚举的可回溯集：根据推论5.13。

[4] 同样，我们在内可枚举/可枚举的缩写 intro-e/T 是内可枚举/可枚举的缩写 ‘主可归约’代替‘主可归约’。

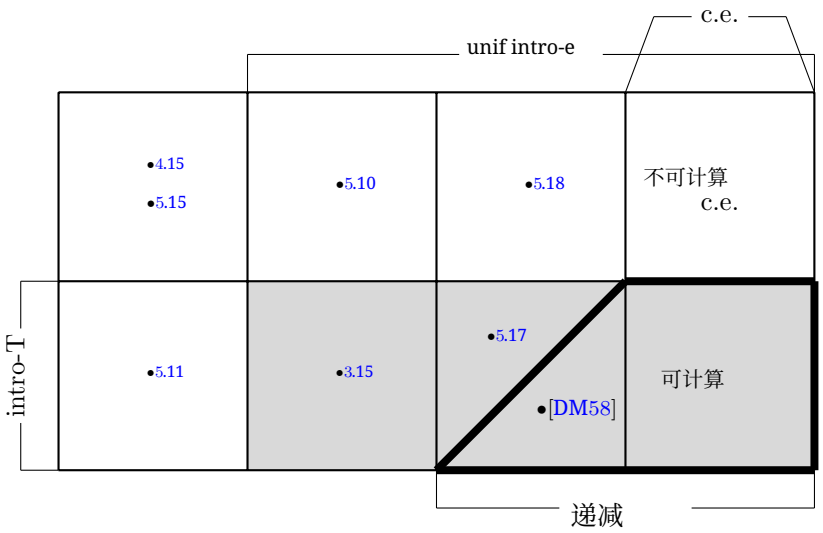

FIGURE 1.可内枚举集合的全集。底部的四个方框（位于“intro-T”标签右侧）是内可约集，右侧的六个方框（位于“unif intro-e”标签下方）是一致内可枚举集。同样，最右侧的四个方框是递归集，最右侧的两个方框是可枚举集。一致内可枚举集对应的方框与内可约集对应的方框的交集以灰色标出，恰好对应一致内可约集。粗线围成的梯形表示可回溯集。

1.4. **二元关系**。为了捕捉自编码的概念，定义二元关系很有用。此处定义的大多数二元关系（与主 T/e 有关的除外）均引自 [GHTPT20]。

定义 1.2。对于无限集 A，$B \subseteq \omega$，我们称 $A \leqslant_T^i B$ 若每个 $C \in [B]^\omega$都能计算 A，读作 B 内计算 A。同样，我们可以定义一致版本 $A \leqslant_T^{ui} B$。当然，也可以针对图灵归约以外的其他归约来定义：$A \leqslant_e^i B$ 若每个 $C \in [B]^\omega$ 都是在 A之上的枚举；$A \leqslant_T^m B$ 若任意$f \geqslant p_B$ 都能计算 A，其中预言机取为 f的图；$A \leqslant_e^m B$ 若任意 $f \geqslant p_B$ 都是在 A之上的枚举。我们也以类似方式定义它们的一致版本。

GHTPT20 的命题 2 证明了 [GHTPT20。1] 其中 $\leqslant_e^{ui}$与 $\leqslant_{c.e.}^{ui}$ 重合；类似的论证（结合 Selman 定理）表明 $\leqslant_e^i$ 与 $\leqslant_{c.e.}^i$ 重合。同样，类似的论证表明 $\leqslant_e^{um}$ ($\leqslant_e^m$) 与 $\leqslant_{c.e.}^{um}$ ($\leqslant_{c.e.}^m$)重合。

2. MAJORENUMERABLE AND MAJORREDUCIBLE SETS

本节证明，每个主可枚举集都有一个一致主可约子集。这是 Solovay 的结果 [Sol78]：超算术集恰好是具有一致模函数的集合。由他的结果可得，B 是超算术的，当且仅当 $B \leqslant_T 0^{(\beta)}$ 对于某个 $\beta < \omega_1^{ck}$，并且存在某个 $f \equiv_T 0^{(\beta)}$ 使得 $B \leqslant_T^{um} f$ 当且仅当存在某个 f 使得 $B \leqslant_T^{um} f$。下述定理是

[GHTPT20，命题 2。3]一个集合 A 是 Π^1_1(或 Σ^1_1) 当且仅当存在 f 使得 $A \leqslant^{um}_{\text{c.e.}}$ (或 $\leqslant^{um}_{\text{co-c.e.}}$ 分别)f。

在下面的证明和后续证明中，我们使用强迫法，并会用到术语充分泛。对于强迫概念 $\mathbb{P}$ 以及 $\mathbb{P}$上的滤子 $\mathbb{G}$ ，如果滤子 $\mathbb{G}$ 与我们所考虑的一个可数稠密集合集合相交，则称其为充分泛滤子——集合 $(D_i, i \in \omega)$ ，具体含义应能从上下文中看出。若对每个 $p \in \mathbb{G}$，都存在 $q \leqslant_{\mathbb{P}} p$ 使得 $q \in D$，则称集合 $D \subseteq \mathbb{P}$ 在 $\mathbb{G}$ 之上稠密。设R 是我们希望充分泛滤子具备的性质。只需证明 $\{p \in \mathbb{P} : p, R\}$ 在 $\mathbb{G}$ 之上稠密，因为 $\{p \in \mathbb{P} : p, R \vee p, \neg R\}$ 是一个稠密集，并且当 $\{p \in \mathbb{P} : p, R\}$ 在$\mathbb{G}$之上稠密时， $\mathbb{G} \cap \{p \in \mathbb{P} : p, \neg R\}$ 为空。

定理 2.1. 设 A 是一个无限集。以下条件等价。

- A 是 $\Pi^1_1(\Sigma^1_1)$。• 存在 f 使得 $A \leqslant^{um}_{c.e.} (\leqslant^{um}_{co\text{-}c.e.})f$。• 存在 f 使得 $A \leqslant^{m}_{c.e.} (\leqslant^{m}_{co\text{-}c.e.})f$。

证明。 只需证明 Π^1_1 情形。第一项与第二项等价是由于 [GHTPT20，命题 2。3]。而从第二项到第三项的蕴含是显然的。

对于从第三项到第一项的蕴含，假设存在 f 使得$A \leqslant^{m}_{c.e.} f$。若字符串 $\sigma \in \omega^{<\omega}$ 在函数 g之上，记作 $\sigma \geqslant g$，则称其满足$\sigma(n) \geqslant g(n)$ 对所有 n （其中 σ 有定义）。我们考虑如下强迫概念 $\mathbb{P}$，它是 Hechler 强迫的一种形式。 $\mathbb{P}$由满足 $\sigma \geqslant g \geqslant f$的序对 $(\sigma、 g)$ 组成。若 $\sigma_2 \succ \sigma_1$ 且 $g_2 \geqslant g_1$，则称 $(\sigma_2、 g_2)$ 延伸 $(\sigma_1、 g_1)$。令 $\mathbb{G}$ 为 $\mathbb{P}$ 上的一个充分泛滤子，并令 $G = \bigcup\{\sigma : \text{对某个 } g)\}$有 $\exists p \in \mathbb{G}\ (p = (\sigma、 g)$。显然，$G$是一个主导 f的全函数。由 $A \leqslant^{m}_{c.e.} f$，存在某个 e使得$W^G_e = A$。于是根据充分泛型性，必然存在某个 $(\sigma、 g) \in \mathbb{G}$、$(\sigma、 g)$、 $W^G_e = A$——否则， $(\sigma、 g)$、 $W^G_e \neq A\}$将在 $\mathbb{G}$之上稠密，其中 $\{(\sigma、 g) \in \mathbb{P}$。这意味着：

> (1) 对每个 $m \in A$ 以及每个满足 $\sigma \geqslant h \geqslant g$ 的 h，都存在满足$\tau \succ \sigma$ 的 τ，以及满足 $m \in W^\tau_e$ 的 $\tau \geqslant h$。(2) 对每个 m 以及每个，$h)$，若其扩展了，$g)$ 且属于 $\mathbb{P}$，并且 $m \in W^\tau_e$，则 $m \in A$。

Fr由此，我们得到对 A 的一种 Π^1_1 描述：

$$\forall n[n \in A \leftrightarrow \forall h \leqslant \sigma\ \exists \tau(\tau \succ \sigma \wedge \tau \geqslant h)\ n \in W^\tau_e].$$

□

每个主可约集都有一个模数。注意，拥有模数意味着它是超算术的。

推论 2.2 (Solovay)。 一个无限集 A是超算术的，当且仅当存在 f 使得$A \leqslant^m_T f$，也当且仅当存在 f 使得 $A \leqslant^{um}_T f$。特别地，每个主可约集都是超算术的。

Jockusch 证明，每个无限 Π^1_1 集合都有一个一致主可约子集；其依据是，每个无限 Π^1_1 集合都有一个无限的超算术子集。反过来也是如此。

推论 2.3 (Jockusch、Solovay)。 A 有一致主可约子集，当且仅当 A有主可约子集，当且仅当 A 有一个 Δ^1_1 子集。

证明。 若 A 有主可约子集 B，则由推论 2.2， B 是超算术的。反之，若 A 有一个Δ^1_1 子集 B，则 A 有一致主可约子集 [Joc68b，推论 6。。 □

推论 2.4。 每个主可枚举集合都是 Π^1_1。

下面的论证证明了定理 1.1 的最后一个断言。

推论 2.5。 每个主可枚举集合都有一个一致主可约子集。

证明。 注意到 Luckham 的结果：每个无限 Π^1_1 集合都有一个无限的超算术子集，因此该结论立即由推论 2.3 得出。 □

我们将看到，可回溯性与一致主可约性截然不同。然而，我们证明，在某些条件下二者是一致的。

3. Regressive and retraceable sets

本节重点讨论递减集和可回溯集。我们证明，每个带有见证其回归性的全函数的余免疫递减集都是一致主可约的，并且存在这样一个全函数这一假设是必要的。

定义 3.1。 部分函数 φ_e 是递减集$A = \{a_0, a_1, \dots\}$的回归函数，如果 $\varphi_e(a_{n+1}) = a_n$ 对所有 $n \geqslant 0$ 和 $\varphi_e(a_0) = a_0$都成立。此外， φ_e 是 A 的回溯函数，如果 A 是可回溯的。

定义 3.2。 设 $A = \{a_0, a_1, \dots\}$ 是由f见证的回归/可追溯集。若对所有 $a \in$属于定义域(f)， fˆf[5]$(a) := \{x\colon \exists n\ f^n(a) = x\}$都成立，则称 f为特殊 的，其中f^n 表示将 f 应用 n 次。

引理 3.3. 每个回归/可追溯集都有一个特殊的回归/可追溯函数。

证明。 若 $A = \{a_0, a_1, \dots\}$ 被 f 回归，则我们可以定义一个部分可计算的 ˆ 函数 g，使得 g 在 n 上停机当且仅当 $a_0 \in f(n)$。 □

因此，从现在起，除非另有说明，我们将假定每个回归/可追溯函数都是特殊的。

定义 3.4. 对于由 f 见证的回归/可追溯集 $A = \{a_0, a_1, \dots\}$，可计算可枚举树 $T_{f,A} \subseteq \omega^{<\omega}$ 是回归/可追溯树，如果 $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in T_{f,A}$ 当且仅当 $f(b_n) = b_{n-1}, \dots, f(b_1) = b_0$ 且 $b_0 = a_0$。 我们称 $b \in \omega$ 在 树 $T_{f,A}$上，如果存在某个节点 $\sigma \in T_{f,A}$，使得 $\sigma(i) = b$ 对某个 $i < |\sigma|$成立。

注意，每个回归/可追溯集都有一个回归/可追溯树。

3.1. **余免疫回归/可追溯集**。 如果一个递归集有一个可计算可枚举子集，那么它就是可计算可枚举的；同样地，如果一个可回溯集有一个可计算可枚举子集，那么它就是可计算的。从这个意义上说，免疫递归集或免疫可追溯集才是值得研究的。另一方面，事实证明，如果回归/可追溯集的补集没有可计算可枚举子集，那么分析这些集合会更容易。

命题 3.5. 如果 A 是余免疫的、递减/可回溯的，则其回归/可追溯树是一棵具有唯一无限路径的有限分支树，该路径就是 A 本身。

[5]贯穿本文，对于一个函数 f，ˆf 指的是这个集合。

证明。 如果 $T_{f,A}$ 有一个节点 σ，且该节点具有无限多个后继节点 $\sigma^\frown b_0, \sigma^\frown b_1, \cdots \in T_{f,A}$，则 $b_0, b_1, \ldots$ 中至多有一个是 A 的成员。由于我们可以可计算地枚举这些 b_i，根据余免疫性，不应存在无限多个 b_i。同样，如果存在一个节点 $\sigma \in T_{f,A}$，使得它具有无限多个节点 $\tau \in T_{f,A}$，且满足 $\tau \succ \sigma$，则根据余免疫性，必有 $A \succ \sigma$。特别地，如果 $B \in [T_{f,A}]$，则 $B = A$。□

命题 3.6 (McLaughlin)。 如果 $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ 是一个余免疫递归集，那么 A 是 $0'$-可计算的。

证明。 令 f 递减 A，并令 $T_{f,\,A}$ 为其回归树。我们首先证明 $0'$ 可以列出这些 a_i。给定 a_n，令 $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$。由于余免疫性，只有有限多个数 $x \in \omega$ 满足 $f(x) = a_n$。因此，$0'$ 可以列出所有满足 $f(x) = a_n$ 的数 $x \in \omega$：不断询问“是否还有满足 $f(x) = a_n$ 的数？”，并持续列出这样的 x，直到答案为“没有”。在列表中的数里，$0'$ 可以剔除所有满足 $\sigma^\frown x \in T_f$ 的 x，A，因为它在树上只有有限多个节点延伸于其上，直到列表中恰好剩下一个数。

设剩余的数为 x_0。与命题 3.5 的证明一样，我们有 $x = a_{n+1}$ 当且仅当 $\sigma^\frown x$ 在 $T_{f,A}$ 上有无限多个节点延伸于其后。并且必有 $x_0 = a_{n+1}$，因为列表必须包含一个等于 a_{n+1} 的数。

为了枚举 A 的元素，当且仅当以下任一条件成立时，将 a 枚举进 A：a 不在树 $T_{f,A}$ 上；或者树上存在一个节点 $\sigma \in T_{f,A}$，只有有限多个节点延伸于其后，并且 $\sigma(|\sigma| - 1) = a$。□

在 [AM65，推论 3.1] 中，通过证明没有简单集能够具有全回归函数，说明了并非每个递归集都有全回归函数，[6] ——注意，每个可枚举集都是递减集，因为可枚举集有可计算的枚举 $a_0, a_1, \ldots\ldots$。因此，自然会问，可回溯集是否也会出现这种情况。答案是肯定的，而且我们还可以进一步要求该集合是余免疫的。

命题 3.7。 存在一个余免回溯集 $\leqslant_T 0'$，它没有全回溯函数。

证明。 我们构造一个部分可计算函数 f，它将成为某个余免回溯集 A的特殊回溯函数。同时，我们确保 A没有全回溯函数。函数 f 的定义域将是一棵具有唯一无限路径的可计算可枚举树，该路径将是 A，如命题3.5所述。如果我们成功构造出这样的 f 和 A，那么根据命题 $A \leqslant_T 0'$ 3.6，$A \leqslant_T 0'$ 就自动成立。我们的思路是对所有全可计算函数进行对角化，同时确保 f 仍能回溯某个集合。我们通过有限伤害论证来实现这一点，所需满足的要求如下：

$$P_e : \text{if } \varphi_e \text{ is total, then } \varphi_e \text{ is not a retracing function for } A,$$
$$Q_e : \text{if } W_e \text{ is infinite, then } A \cap W_e \neq \varnothing.$$

在阶段 $s+1$，每个带有 $e \leqslant s$ 的要求都会连接到一个数。令 $p_{e,\,s}$ 表示与 P_e 相连接的数，并令 $q_{e,\,s}$ 表示在阶段 $s+1$与 Q_e 相连接的数。此外，在阶段 $s+1$，每个带有 $e \leqslant s$ 的 P_e 要求都会持有一个见证 $w_{e,\,s}$。每当某个 Q_e 要求在阶段 s 采取行动并变为已满足时，它都会被分配一个见证 $x_{e,\,s}$，并将其保留为

[6] 全回归函数是既全定义又回归的函数。7

只要 Q_e 保持满足，它就会作为 Q_e 的见证。需求优先级为 $P_0 > Q_0 > P_1 > Q_1 > \cdots$。

构造。 在阶段 0，令 $w_{0,0} = 2$ 和 $p_{0,0} = 0 = q_{0,0}$。我们设定 $f_0(0) = 0$。在阶段 $s+1$，寻找满足 $e \leqslant s$ 、需要关注且尚未满足的最高优先级要求，然后令其如下行动。否则，如果不存在这样的要求，则转到构造的最后一段。

它们如何行动。 我们称 P_e 在阶段 $s{+}1$ 需要关注，当且仅当 $e \leqslant s$ 且$\varphi_{e,s}(w_{e,s})\downarrow$。如果 P_e 是阶段 $s+1$需要关注的最高优先级要求，我们令P_e 按以下方式行动:

(1) If $\varphi_{e,s}(w_{e,s}) \neq p_{e,s}$, then set $f_{s+1}(w_{e,s}) = p_{e,s}$.
(2) If $\varphi_{e,s}(w_{e,s}) = p_{e,s}$, then set $f_{s+1}(w_{e,s}) = w_{e,s}-1$. And set $f_{s+1}(w_{e,s}-1) = p_{e,s}$.

在这种情况下，每个较低优先级要求都会受损；如果它原本已满足，则将其声明为未满足。我们设定 $w_{e+1,s+1}$ 为大于目前为止提及的任何数的最小偶数。然后，对于 $e+1 < d \leqslant s+1$，我们将 $w_{d,s+1}$ 设为 $w_{e+1,s+1}+2(e+1-d)$。令每个满足 $e < d \leqslant s+1$ 的 P_d 要求通过设定 $p_{d,s+1} = w_{e,s}$，与 $w_{e,s}$ 相连。对于 $d \geqslant e$, $x_{d,s+1}$ 未定义，因为较低优先级要求已受损。对 $e \leqslant d \leqslant s+1$，设定 $q_{d,s+1} = w_{e,s}$。

接下来，我们考虑 Q 要求。在阶段 $s+1$，我们称数 $x \in \mathrm{Dom}(f_s)$在以下范围内遵循优先级： P_e ，如果

- $0 \in f_s(x)$，
- $f_s(x)$ 包含 $w_{d,s}$ 对每个满足以下条件的 d 都成立： P_d 目前已满足且 $d \leqslant e$；并且
- $f_s(x)$ 包含 $x_{d,s}$ 对每个满足以下条件的 d 都成立： Q_d 目前已满足且 $d < e$。

非正式地说，这意味着，放入 $x \in A$——或者相信 x 位于$T_{f,A}$的唯一无限路径上——不会与已满足的更高优先级要求相冲突。如果 $e \leqslant s$，并且存在某个 $m \in W_{e,s}$ 使得满足以下任一条件，我们就称 Q_e 在阶段 $s+1$ 需要关注:

(1) $m \notin \mathrm{Dom}(f_s)$ 且 $m > w_{e,s}$；或 (2) $m \in \mathrm{Dom}(f_s)$ 且 m 在优先级截至 P_e 的范围内遵循优先级。

假设 Q_e 是在阶段 $s+1$需要关注的最高优先级要求。如果情况是 (1)，我们就让 Q_e 采取行动，设置 $x_{e,s} = m$ 和 $f_{s+1}(m) = q_{e,s}$。如果情况是 (2)，我们就让 Q_e 采取行动，只设置 $x_{e,s} = m$。无论哪种情况，所有较低优先级要求都会受损；我们将 $w_{e+1,s+1}$ 设为比目前提到的任何数都大的偶数中第二小的一个。然后，对于 $e+1 < d \leqslant s+1$，我们将 $w_{d,s+1}$ 设为 $w_{e+1,s+1} + 2(e+1-d)$。为 $e < d \leqslant s+1$ 设置 $q_{d,s+1} = p_{d,s+1} = x_{e,s+1}$。

最后，为结束阶段 $s+1$ 构造，对于每个 $d \leqslant s$，如果 $p_{d,s+1}$、$q_{d,s+1}$、$w_{d,s+1}$，或 $x_{d,s+1}$ （如果 $x_{d,s}$ 已定义）尚未定义，则将它们定义为与之前的值相同，例如，如果 $p_{d,s+1}$ 迄今尚未定义，则令 $p_{d,s+1} = p_{d,s}$。同样，对于定义域 (f_s) 中尚未在 f_{s+1}上定义的元素，在 f_{s+1} 上定义它们，使得 f_{s+1} 扩展 f_s。如果没有任何要求需要关注，则定义 $p_{s+1,s+1} = p_{s,s}$、 $q_{s+1,s+1} = q_{s,s}$以及 $w_{s+1,s+1} = w_{s,s} + 2$。

验证。 显然，我们所构造的函数 $f = \bigcup_s f_s$ 是部分可计算的。为检验该构造是良定义的，我们只需检验 $w_{e,s}$ 与$w_{e,s}-1$ 在阶段 $s+1$开始时不在定义域(f_s) 中。不可能是$w_{e,s} \in$定义域(f_s) 由某个 P 要求的动作所造成：若 $d > e$ 且 P_d 采取动作，这只会把元素 $> w_{e,s}$ 放入定义域(f_s)，而若 $d < e$且 P_d 采取动作，该动作将 $w_{e,s}$ 设为

某个大于 P_d 放入定义域(f_s)的任何数的偶数。并且$w_{e,s}$ 也不能经由某个 Q 要求被放入定义域(f_s) 。若 Q_d 连同 $d \geqslant e$ 按情形 (1)采取动作，则它只能把大于$w_{e,s}$ 的数放入定义域(f_s)。若 Q_d连同 $d < e$ 按情形 (1)采取动作，则该动作将 $w_{e,s}$ 设为某个大于 Q_d 放入定义域(f_s)的任何数的偶数。而且我们不必担心某个 Q要求按情形 (2)的动作——譬如在阶段 $t < s+1$——因为我们可以用归纳法假定 $w_{e,s} \notin$ 定义域(f_t)；注意，某个 Q 要求按情形 (2) 的动作并不改变 f的定义域。我们可以类似地证明，$w_{e,s} - 1$ 在阶段 $s+1$开始时不在定义域(f_s) 中。

函数 f 回溯唯一无限集。我们首先证明，只要 W_e 是一个无限可计算枚举集，那么从某个阶段开始， Q_e 就会永久满足。假设 W_e 是无限的，并令 s 为一个足够大的阶段，使得从此以后没有优先级高于 Q_e 的要求会采取行动。令 $N = = \max(\{w_{e,s}\} \cup$ 定义域 $(f_s))$。那么存在一个数 $z > N$，使得 $z \in W_e \backslash W_{e,s}$。设 z 在阶段 $t > s$ 加入 W_e 。如果 Q_e 在阶段 t 已经满足，那么此后它就不会受损。否则，由于 N 和 z 的选取， Q_e 在阶段 $t+1$ 需要关注。事实上，我们有 $N > w_{e,t} = w_{e,s}$，并且集合定义域(f_t)\定义域(f_s) 中的任何数都遵循截至 P_e 的优先级。因此，从阶段 $t+1$ 开始， Q_e 永久满足，并且 $x_e := \lim_s x_{e,s}$ 存在。

注意到存在无穷多个无限可计算枚举集，因此存在无穷多个e，使得 Q_e 永久满足，从而 x_e 有定义。此外，若 x_e^和 x_d 有定义且 $e < d$，则 $x_e \in f(x_e)$。为说明这一点，设 t_e 和 t_d 分别是使 Q_e 和 Q_d 永久满足的最小阶段。由于所有较低优先级要求在 Q_e 行动后都会受损，因此必有 $t_e < t_d$。于是，在阶段 t_d，无论该行动是按照情形 (1) 还是 (2)进行的，我们都有^$x_e \in f_{t_d+1}(x_d)$。令 E 为所有指标 e 的集合，其中 W_e 是一个无限可计算枚举集。^那么 $A := \bigcup_{e \in E} f(x_e)$ 是将定义域 (f) 视为一棵树时的唯一无限路径。可以利用对阶段的归纳法证明 f 重访 A 。

A 是余免疫的。假设 $W_e \subseteq A$ 是一个无限可计算枚举集。但正如我们刚才所证明的， Q_e 从某个阶段起便会始终得到满足。这意味着 W_e 中的一个元素必定也是 A中的元素，从而产生矛盾。

不存在 A的全回溯函数。假设 φ_e 是一个回溯 A的全可计算函数。令 s 为一个足够大的阶段，使得此后没有优先级高于 P_e 的要求采取行动。接着注意，对于所有 $t > s$，都有$w_{e,\,t} = w_{e,\,s}$ 以及$p_{e,\,t} = p_{e,\,s}$。令 $t > s$ 满足 $\varphi_{e,\,t}(w_{e,\,t}) \downarrow$。如果 P_e 在阶段 t已经得到满足，那么 P_e 便已成功完成对角化，此后也不会再受损，因此会产生矛盾。如果 P_e 在阶段 t尚未得到满足，那么 P_e 就是阶段 $t+1$需要关注的最高优先级要求。因此， P_e 在阶段$t+1$采取行动，再次对角化以反驳 φ_e，从而产生矛盾。
□

尽管引理 3.3指出，当 A 是一个具有全回归函数 f的递归集时，这并不一定意味着 A 具有一个同时也是全函数的特殊递减函数，因为将 f 变为特殊函数可能会使其定义域中的某些元素被删去——参见下文命题3.10。尽管如此，下文的命题表明，对于可回溯集，具有全回溯函数意味着具有特殊全回溯函数；而对于余免疫递归集，具有全回归函数意味着具有全回归函数。

命题 3.8。 设 A 是一个可回溯集。若存在一个全可计算函数，对 A进行回溯，则存在一个特殊全可计算函数，对 A进行回溯。

证明。 令 f 为一个回溯 A的全可计算函数。不失一般性，假设 $0 \in A$，因此对于所有 $a \in A$，都有 $0 \in f(a)$。我们定义全可计算函数 g如下：令 $g(0) := 0$。假设我们已经定义了 $g(0)$、.....、 $g(n)$。如果$f(n+1) \geqslant n+1$，那么令 $g(n+1) := 0$。否则，如果 $f(n+1) < n+1$，那么令 $g(n+1) := f(n+1)$。

显然， g是一个全可计算函数。而且，对于所有$m \in A$， g都会回溯 A，因为 $g(m) = f(m)$。最后， g是特殊的，因为对于 $n \notin A$，必定存在某个 $m \in \omega$ 使得$f^{m+1}(n) \geqslant f^m(n)$。令 m^*为最小的此类 m。于是 $g(f^{m^*}(n)) = 0 = g^{m^*+1}(n)$，因此 $0 \in \hat{}g(n)$。□

命题 3.9。 若 $A = \{a_0, a_1, \dots\}$ 是一个余免疫递归集，且它有一个全回归函数（这里不假设该回归函数是特殊的），那么 A 有一个特殊全回归函数。

证明。 令 f 为 A的一个（不一定特殊的）全回归函数，并考虑它的回归树 $T_{f,A}$。对于不在树中某个节点上的元素 b （也就是说，$\hat{}\hat{}$满足 $a_0 \notin f(b)$的元素 b），如果 $f(b)$_是无限的，那么我们就得到 A的一个无限可计算可枚举子集。因此，对所有这样的 b， $f(b)$ 都是有限的。这样的 $b\hat{}\hat{}$唯一可能的情形是 $f(b)$ 包含某个 m-环，也就是说， $f(b)$ 包含一个元素 c，使得对某个 m， $f^m(c) = c$ 成立。

$\hat{}$此外，我们可以可计算地枚举满足以下条件的元素 b： $f(b)$ 包含某个 m-环，且 $a_0 \notin f(b)$。因此，依据余免疫性，这样的元素也只有有限多个。所以，满足 $a_0 \notin f(b)$的 b 也只有有限多个。因此，$\mathrm{Dom}(f) = \omega$ 中不在树 $T_{f,A}$ 某个节点上的元素只有有限多个。于是，将这些有限多个不在 $T_{f,A}$ 上的元素直接连接到 a_0，我们就可以取一个部分可计算函数 g，它是一个特殊全函数，并使 ω 的每个元素都出现在树 $T_{g,A}$ 的某个节点上。□

命题 3.10。 存在一个递归集 A，它有一个全回归函数，但没有特殊全回归函数。

证明。 我们声称 $A = 0'$ 就是这样一个递归集。为此，我们按阶段构造一个全可计算函数 $f = \bigcup_s f_s$，以此见证 A 是一个递归集。在构造中，在每个阶段 $s+1$，如果我们不确定 $\varphi_s(s)$ 是否会收敛，就先令 s 映射到某个适当的指标 $S \in \omega$，使得 $s \in 0'$ 当且仅当 $S \in 0'$。如果之后我们知道 $\varphi_s(s)$ 收敛了，这就意味着 s 以及所有通过 f 与 s 相连的数都应属于 $0'$。因此，在这种情况下，我们通过将它们适当地定义为某些 a_i 的值，令它们属于 A。

构造。 不失一般性，假设 $0 \in 0'$。我们令 $f_0 = \{(0,\ 0)\}$、$a_0 = 0$和 $A_0 = \{a_0\}$。在阶段 $s+1$，假设对于某个 $m \geqslant s$， $\{0,\ \dots,\ s\} \subseteq \mathrm{Dom}(f_s)$以及 $a_0,\ \dots,\ a_m$ 已定义；因此目前我们有 $A_s = \{a_0,\ \dots,\ a_m\}$。

步骤 *1.* 如果 $s+1$ 已经在定义域(f_s)中，则转到步骤 *2.* 否则，如果 $s+1 \notin$定义域(f_s)，令 S 为一个足够大的数，使得

(1) S 到目前为止尚未提及；**(2)** φ_S 满足：对于所有 $n \in \omega$， $\varphi_S(n)$ 收敛当且仅当 $\varphi_{s+1}(s+1)$收敛。

定义 $f_s(s+1) := S$，使得 $s+1$ 现在属于定义域(f_s)。请转到下面的步骤 *2.* 并遵循其中的说明。

步骤 *2.* 现在已知 $s+1 \in$ 定义域(f_s)，寻找一个尚未提及的大数 N，并且 $\varphi_N(N)\downarrow$。令 $a_{m+1} = N$。此外，对于定义域(f_s) 中的每个数$n \in$ ，满足 $n \notin A_s$，检查是否有 $\varphi_{n,s}(n)\downarrow$。如果存在这样的 n ，且满足$\varphi_{n,s}(n)\downarrow$，那么对于每个这样的 n，执行以下过程：

令 n^* 为满足以下条件的数：

- $n^* \notin \mathrm{Dom}(f_s)$ and
- $n^* \in \hat{f}_s(n)$

对于每个（适用的） i，令 n_i满足 $f_s^{i+1}(n_i) = n^*$——例如，如果 $f_s^2(5) = n^*$，那么$n_1 = 5$。称 n_i在 $i \leqslant I$上有定义，并称到目前为止我们已为某个$M \geqslant m+1$ 定义了 a_0、……、 a_M。令 $a_{M+1} = n^*$，并令 $a_{M+i+2} = n_i$ 用于 $i \leqslant I$。

若上述过程已针对每个这样的 n如上所述完成，并且到目前为止我们已为某个 k定义了 $a_0, \ldots, a_k$，则令 $A_{s+1} = \{a_0, \ldots, a_k\}$。并以显而易见的方式定义 f_{s+1}： $f_{s+1} = f_s \cup \{(a_{m+1}, a_m), \ldots, (a_k, a_{k-1})\}$。

验证。显然，构造出的 $f = \bigcup_s f_s$ 是全可计算函数，而 $A = \bigcup_s A_s$ 是无限集。为说明 f 回归 $0'$, ，注意从构造中显然可知 f回归 A：我们知道 $f(a_1) = a_0$, $f(a_2) = a_1$，等等。因此，只需证明 $A = 0'$。同样，根据构造， $A \subseteq 0'$ 显然成立。要证明 $0' \subseteq A$，令 $n \in 0'$。取足够大的阶段 s ，使得 $\varphi_{n,s}(n)\downarrow$且 $n \in$Dom (f_s)。那么，根据步骤 *2*。中的过程，必有 $n \in A_s$ 。

最后，我们断言， A不可能具有特殊全回归函数。因为如果确实如此，那么 $A = 0'$ 将是可计算的，这就产生了矛盾。事实上，如果 g 是一个使 $0'$, 回归的特殊全可计算函数，那么，数 n 不属于 $0'$，当且仅当存在 $m \neq n$ ，使得 $\varphi_m(m)\downarrow$ ，并且对于某个k有 $g^k(m) = g^k(n)$ 。□

在接下来的命题中，我们将证明，在某些条件下，余免疫回归/可追溯集是主可归约的。另一方面，我们稍后将看到，对于内可枚举集而言，我们所需要的不是余免疫性，而是余可计算可枚举性，才能得到它是主可归约的。

命题 3.11。 设 $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ 是一个具有全回溯函数的余免回溯集。那么 A是一致主可约的。

证明。 令 f 为见证A的可回溯性的特殊全可计算函数，这可由命题 3.5 和命题 3.9得到。令 G 为主导 p_A的函数，并假设我们已计算出 a_0、……、 a_n。注意，我们知道 $a_{n+1} \leqslant G(n+1)$。因此，对于每个 b满足 $a_n < b \leqslant G(n+1)$的情形，以下之一成立：

(1) $b = a_{n+1}$ 或；(2) 对于 $j > n+1$， $b = a_j$；或；

(3) $b \notin A$。

而且，我们可以可计算地判定每个 b 是属于情形 (1)，还是属于情形 (2)/(3)——特别是，我们可以判定每个这样的 b 是否属于情形 (1) 。若$f(b) \neq a_n$，则 b 属于情形 (2) 或 (3)。若 $f(b) = a_n$，则 b 要么属于情形 (1)，要么属于情形 (3)。当 $f(b) = a_n$ 时， b 属于情形 (3) ，当且仅当在由余免疫性得到的树上，只有有限多个节点延伸自 $(a_0, \ldots, a_n, b) \in T_{f, A}$。因此，我们考虑以下过程：

若对于某个 $m > n$， $x \in \omega$ 是 a_m 的候选项，就称 $x \in \omega$ 是 a_m 的候选项，当且仅当 $f(x)$ 是 a_{m-1}的候选项；我们将 a_0、……、a_n 设为它们自身的候选项，因为根据假设，我们知道这些候选项是什么。若 x 是 a_m 的候选项，并且不存在（x 中的数 y 使得 $f(y) = x$，那么 x 就是坏候选项，也就是说，在这种情况下，x 不能属于 A。同理，若 $\sigma \in T_f$，A 满足 $\sigma(|\sigma|-1) = x$ 是 a_m的候选项，则当以下条件成立时，我们称 x 为坏候选项：对于所有 $b \in \omega$，若$\sigma^\frown b \in T_f$，A，则 b 是坏候选项。这是因为在这种情况下，必有$x \notin A$。设 b_0、……、b_N 是 $(a_n$、$G(n+1)]$中 a_{n+1} 的所有候选项组成的列表。若 b_i 不属于 A，则在树T_f、A上，只有有限多个节点延伸自 $(a_0$、……、a_n、$b_i)$。因此，根据紧致性，b_i 必定是 a_{n+1}的坏候选项。于是，我们可以枚举 $m > n$ 对应的 a_m的候选项，直到 b_0、……、b_N 中恰好有N个候选项被判定为坏候选项；根据紧致性，这必定会在某个时刻发生。令 b_j 为剩下的候选项。于是 $a_{n+1} = b_j$。

利用预言机 G，这表明对于每个 $b \in (a_n, G(n+1)]$，我们可以计算地判定 b 是否属于情形 (1)，并计算 a_{n+1}。由于 A 是可回溯的，这表明 A 可由 G计算得出。□

我们可以将命题 3.11 的假设弱化为递减，而不削弱其结论。

命题 3.12. 如果 $A = \{a_0, a_1, \dots\}$是一个具有全回归函数的余免疫递归集，那么 A是一致主可约的。

证明。令 f 为一个递归 A的特殊全可计算函数。令 G 为一个主导 p_A的函数。采用与命题 3.11类似的证明，我们可以表明 a_i可以使用 G 作为预言机来计算。唯一的区别在于，我们必须考虑区间 $(a_n, G(n+1)]$，而不是考虑区间 $[0, G(n+1))$，因为回归函数不一定在 A上递减。利用与命题 3.11 中类似的论证，并根据 $A \cap [0, G(n+1)]$ 包含一个不同于 $a_0, \dots, a_n$的元素这一事实，我们可以使用 G 作为预言机来计算 a_i。

要看出 A 可由 G计算，令 $b \in \omega$。注意，b 属于 A，当且仅当存在某个 $m \in \omega$ 使得 $f^m(b) = a_0$ 且 $b = a_m$。又由于 f 是一个特殊全可计算函数，对于任意 $b \in \omega$，都存在 $m \in \omega$ 使得 $f^m(b) = a_0$。因此可知，G 能够计算 A。□

推论 3.13. 如果 A 是一个具有全回归/追踪函数的余免疫递归/可追踪集，那么 A 要么是超免疫的，要么是可计算的。

证明。根据命题3.12，这样的集合 A是一致主可约的。如果 A不是超免疫的，那么存在一个全可计算函数 φ主导 A。φ 的图也是可计算的，因此根据主可约性，A 是可计算的。□

注意，如果 A 是一个足够稀疏的余免疫递归集，那么根据命题 A，它是一致主可约的3.6：如果它的主函数增长得比 $0'$ 稳定时间函数更快，那么任何主导 p_A 的函数都能计算 $0'$，因此 A。另一方面，如果不假设存在全回归函数，余免疫递归集甚至可能不是内可约的。

命题 3.14. 存在一个余免疫递归集，它不是内可归约的，因而也不是主可归约的。

证明。我们在定理5.18 中构造的集合就是这样一个集合。□

我们以一条注记结束本节。

注 3.15。 Jockusch 指出，存在一个极大集 M 使得 M 一致主可约于 [Joc68b, 推论 6。3]。这样的 M 是超超单纯的，因此根据 Yates M， [Yat62，定理 6]，它没有可回溯子集。Dekker 证明，每个无限回归集都有一个无限可回溯子集 [Dek62]。由此可知， M 没有回归子集。这也表明，存在一个一致主可约但并非回归的集合。此外，这一结果表明，存在没有回归子集的（一致）内可约集。

定理 3.16 (Jockusch)。 存在一个没有回归子集的一致主可约集。

4. Introenumerable and introreducible sets

本节中，我们采用与命题 3.11证明类似的思路，证明每个余可计算可枚举内可枚举集都是主可约的。随后，我们介绍一种构造内可枚举集或内可约集的新方法，并讨论一些相关的开放问题。值得注意的是，内可枚举性和一致内可枚举性是不同的概念。若集合 A 是内可枚举的，那么给定某个 $C \in [A]^\omega$，我们只能说 $A \leqslant_e C$ 通过某个枚举算子。因此，构造内可枚举集是一项困难的问题。

当 A 是内可枚举的，因此 $A \leqslant_e^i A$，使用失败的迫使方法，我们可以证明存在 $C \in [A]^\omega$ 满足 $A \leqslant_e^{ui} C$ [GHTPT20，命题 3。7]。从某种意义上说，推论4.14 断言这一过程可以逆转：我们可以将一些集合拼接起来 B_0，……， $B_n \subseteq A$ 其中每个 B_i 都是 $\geqslant_e^{ui} A$，从而得到一个内可枚举集。这是一个令人惊讶的事实，因为即使 B_0，……，B_n 都通过一个固定的枚举算子 $\geqslant_e^{ui} A$ 枚举得到 Θ，也不一定 Θ 见证 $\bigcup_{i\leqslant n} B_i \geqslant_e A$。此外，集合 $\bigcup_{i\leqslant n} B_i$ 甚至为何能在 A之上枚举，也并不显而易见。这种方法为构造具有某些预期性质（例如非一致自可枚举性）的内可枚举集提供了途径。

4.1. 余 c.e. 自可枚举集。在以下证明及后续证明中，我们按如下方式将字符串视为集合。对于每个字符串 $\sigma \in 2^{<\omega}$，我们可以将σ 视为集合 $\{n : \sigma(n) = 1\}$。因此，对于某个集合 S， $\sigma \cap S = \varnothing$ 意味着对所有n， $\sigma(n) = 1$ 蕴含 $n \notin S$。同样， $\sigma \subseteq S$ 意味着对所有 n，$\sigma(n) = 1$ 蕴含$n \in S$。对于字符串 σ 和 $n \in \omega$， $\sigma \cup \{n\}$ 表示长度为 $\max\{|\sigma|, n + 1\}$ 的字符串 τ，并且 $\tau(k) = 1$ 当且仅当 $k = n$ 或 $\sigma(k) = 1$。对于两个字符串 σ 和 τ，$\sigma \cup \tau$ 表示长度为 $\max\{|\sigma|, |\tau|\}$ 的字符串 δ，使得 $\delta(n) = 1$ 当且仅当 $\sigma(n) = 1$ 或 $\tau(n) = 1$。注意，对于一棵树 $T \subseteq 2^{<\omega}$， $[T]$ 表示 T 的无穷分支集合。按照上述理解，每个元素 $x \in [T]$ 都可以视为一个集合，其特征函数等于 x。

引理4.1。 设 $A \leqslant_e^i B$ 为无限集。若存在可计算树 $T \subseteq 2^{<\omega}$，使得 $[T] \neq \varnothing$ 且 $[T] \subseteq [B]^\omega$，则存在可计算子树 $S \subseteq T$，使得 $[S] \neq \varnothing$，并且每个 $X \in [S]$ 都一致枚举高于 A；也就是说，存在枚举算子 Γ，使得对于所有 $X \in [S]$，都有 $\Gamma^X = A$。

证明。 设 Γ_i's 为所有枚举算子的列表。从树 $T_0 = T$开始。在 defied T_n之后，我们需要考虑三种情况。

情况 *1.* 存在 $\tau \in T_n$，使得有一条无穷分支从 τ 延伸至 T_n，并且对于某个 $m \notin A$，$m \in \Gamma_n^\tau$。

在这种情况下，令 T_{n+1} 为 T_n 的子树，它仅由那些相容的节点组成 e
到 τ。继续构造 T_{n+2}。

情况 *2*。存在 $m \in A$，使得对于某个 $X \in [T_n]$，$m \notin \Gamma_n^X$。在这种情况下，令 $T_{n+1} := \{\sigma \in T_n : m \notin \Gamma^{\sigma}_{n,\,|\sigma|}\}$。注意，对于每个 $X \in [T_{n+1}]$，$m \notin \Gamma_n^X$。继续构造 T_{n+2}。

情况 *3*。情况 1 和情况 2 均不成立。
在这种情况下，我们只需令 $T_{n+1} = T_n$，并停止构造。

注意，每个 T_n（如果有定义）都是一棵具有无穷分支的可计算树。并且构造必定会在某个 n 处停止，否则，$\bigcap_n [T_n]$ 非空，且任意 $X \in \bigcap_n [T_n]$ 都是 B 的无限子集，使得 $X \not\geqslant_e A$。假设构造在定义 T_n 后停止。那么 T_n 是一棵可计算树，$[T_n]$ 非空，并且每个 $X \in [T_n]$ 都满足 $\Gamma_n^X = A$。□

在 [Joc68b，推论 6。5], Jockusch 证明，每个余可计算可枚举的一致可内枚举集实际上都是一致主可约的。注意到每个非超免疫的主可约集都是可计算的，他得出结论：每个余可计算可枚举的一致可内枚举集要么是可计算的，要么是超免疫的。以下结果去掉了一致性假设。

定理 4.2。设 A 是一个余 *c.e.* 自可枚举集。则 A 是主可归约的。

证明。设 $A \overline{=} W_e$。给定一个主导 p_A 的函数 f，为证明 f 计算 A，只需证明 A 是 f-可计算可枚举的，因为 A 是可计算可枚举的。考虑如下 f-可计算树 T，其节点是满足以下条件的那些 σ:

(1) $\sigma \cap [0,\ f(n)]$ 对每个满足 $f(n) <\max(\sigma)$ 的 n 至少有 $(n+1)$ 个元素，且 (2) 对所有 s，$|\sigma| = s$ 蕴含 $\sigma \cap W_{e,\,s} = \varnothing$。

注意，$[T]$ 非空，因为作为一条无限二进制串，A是 T的一条无限分支。若 $X \in [T]$，则根据上面的条件 (2)，$X \subseteq A$。因此，根据引理4.1的相对化版本，我们可以令 $S \subseteq T$ 为一个 f-可计算子树，使得 $[S] \neq \varnothing$，且每个 $X \in [S]$ 都一致地 $\geqslant_e A$。于是根据[AM15，命题 3.6]，A 是 f-可计算可枚举的。事实上，数 n 属于 A 当且仅当$\{X \in 2^{\omega} :\ n \in \Gamma^X$ 或 $X \notin [S]\} = 2^{\omega}$。并且根据紧致性，后一个条件在 f中是 Σ^0_1。□

推论 4.3. 设 A 是一个余 *c.e.* 自可枚举集。那么 A 要么是可计算的，要么是超免疫的。

证明。这可由定理 4.2 立即得出，因为每个主可约集要么是可计算的，要么是超免疫的。□

从推论 4.3来看，我们很容易相信更强的结论：每个余 c.e. 内可枚举集实际上都是一致主可约的。然而，事实不应如此，因为 Lachlan（在私下交谈中 [Joc68b], 证明见 [Joc68b，定理 4。1]）构造了一个余 c.e. 内可约集，它并非一致内可约。我们将此结果称为 Lachlan 构造。

当然，存在不可计算的余 c.e. 内可枚举集。一个简单的例子是不可计算的余可计算可枚举可回溯集。根据 Dekker 和 Myhill 在 [DM58，定理 T3]中的结果，每个可计算可枚举度都包含一个余可计算可枚举可回溯集。

推论 4.4. 如果 A 是余 *c.e.* 自可枚举集，那么 A 是内可约的。

推论 4.5. 存在一个主可约集，它不是一致主可归约的。

证明。 设 A 是一个余可计算可枚举的内可枚举集，但它不是一致内可枚举的；这样的集合确实存在，例如 Lachlan 构造。因此，根据定理4.2， A 是主可约的。因为如果 A 也是一致主可约的，那么 A也会是一致内可约的，从而是一致内可枚举的。因此 A 不是一致主可约的。 □

推论 4.6。 存在一个主可枚举集，但它不是一致主可枚举的。

证明。 推论 4.5 证明中考察的集合满足要求。 □

4.2. **由 Jockusch 的工作引出的问题**。 现在我们来讨论一个由 Jockusch 的工作引出的问题。在 [Joc68b], 中，他证明了，同一图灵度的任意有限多个一致内可约集的并都是内可约集——这是 [Joc68b，定理 3 的一个推论。6], 本文的主要结果之一如下:

定理 4.7 (Jockusch 定理)。 假设 $A_0, \ldots, A_n$ 是无限集，且 A_1 一致内可枚举，$A_1, \ldots, A_n$ 一致内可约。对每个 $C \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} A_i$，只要 C 中有无限多个元素属于 $A_0 \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_n)$， A_0 就是可在 C 中可计算可枚举的。特别地，根据归纳法，任何无限的 $C \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ 都能枚举某个 A_i。

我们将此定理称为 Jockusch 定理。

推论 4.8 (Jockusch)。 若 $A_0, \ldots, A_n$ 是具有相同图灵度的一致内可约集，则其并集 $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ 是内可约的。此外，该并集也具有相同的图灵度。

证明。 令 A 为 $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ 的并集，并考虑一个无限子集 $C \in [A]^{\omega}$。根据 Jockusch 定理， C 可以枚举某个 A_i，因此能够计算出一个无限子集 $C_0 \in [A_i]^{\omega}$。由 A_i 的内可约性可知，这意味着 C 能够计算 A_i，而后者能够计算 A_0、 $\ldots$、 A_n，进而计算出 A。要证明 $A \equiv_T A_0$， $A \leqslant_T A_0$ 是显然的。我们刚刚证明了，A 的任意无限子集都能计算出某个 A_i，且该集合与 A_0 具有相同的图灵度。□

问题在于，逆命题是否成立。

开放问题 4.9。

(1) 每个内可约集都是有限个一致内可归约集的并吗? (2) 能否进一步假设这些集合具有相同的图灵度?

我们提出一个相关观察：如果第一项成立，那么第二项就自然成立。也就是说，要么每个内可约集都是若干个具有相同图灵度的一致内可约集的并，要么存在一个不能表示为若干个一致内可约集之并的内可约集。考虑一个无限集 A，并假设 A是有限个集合 A_0、.....、 A_n的并，且这些集合全都一致内可约。显然，如果这个并$\bigcup_{i=09}^{n} A_i$是非平凡并，也就是说，每个 $A_i \backslash (\bigcup_{j \neq i} A_j)$ 都是无限的，那么根据 Jockusch 定理，每个 A_i 都是 A 可计算可枚举的，因此 A 能够计算每个A_i的一个无限子集。于是，由于 A_i的内可约性，可得 $A_i \leqslant_T A$ 对每个 i都成立。如果我们

进一步假设 A 是内可约的，那么 $A \leqslant_T A_i$ 也如此，因此对每个 i，我们都有$A_i \equiv_T A$ 。因此， A实际上是有限个一致内可约集的并，而且这些集合的图灵度都相同。

现在，假设我们的无限集 A 是并集 $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ ，其中 A_i 都是均匀内可约的，但这个并不一定是非平凡并。我们声称，可以找到均匀内可约的集合 D_0、……、$D_m \subseteq A$，使得 $A = \bigcup_{i \leqslant m} D_i$ 是一个非平凡并，且对于 $i \leqslant m$，有 $A \equiv_T D_i$ 。若 $A_0 \backslash (\bigcup_{i \neq 0、\ i \leqslant n} A_i)$ 是有限集，则将 $A_0 \backslash (\bigcup_{i \neq 0、\ i \leqslant n} A_i)$ 中有限多个元素加入 A_1 ，并忽略 A_0。然后将这些集合重新编号为 $A_0 = A_1$、$A_1 = A_2$、……、$A_{n-1} = A_n$。否则，若 $A_0 \backslash (\bigcup_{i \neq 0、\ i \leqslant n} A_i)$ 是无限集，则令 $C_0 := A_0$。定义了 C_k，并且有 C_0、……、C_k、A_{k+1}、……、A_l（其中某个 l）后，检查 $A_{k+1} \backslash [(\bigcup_{i \leqslant k} C_i) \cup (\bigcup_{k+1 < i \leqslant l} A_i)]$ 是有限还是无限。若为有限集，则将其中有限多个元素加入 A_{k+2}，并将剩余的 A_i 重新编号为 $A_{k+1} = A_{k+2}$、……、$A_{l-1} = A_l$。若为无限集，则令 $C_{k+1} = A_{k+1}$。注意，最后可能只定义了 C_0：例如，我们可能有 $A_0 = \omega$ 和 $A_1 = \omega \backslash \{0\}$ ，其中 $A = \omega$。在这种情况下，我们会忽略 A_0，将 0 加入 A_1，把 $A_1 \cup \{0\}$ 重新编号为 A_0，然后令$C_0 = A_0 = \omega$。还要注意，最后 A 中可能有一些元素不属于任何一个 C_i：例如，我们可以有 $A_0 = \{$偶数$\} \backslash \{0\}$、 $A_1 = \{$奇数$\}$，以及$A_2 = \{0\} \cup \{$奇数$\} \backslash \{4n+1 : n \in \omega\}$ ，其中 $A = \omega$。在这种情况下，最后我们会得到 $C_0 = A_0$、 $C_1 = A_1$，而 C_2 未定义，因此 0 不属于 $C_0 \cup C_1$。

因此，如果我们按上述方式进行，最终会得到 $C_0, \ldots, C_m$，其中 m 满足 $A \backslash (\bigcup_{i \leqslant m} C_i)$ 是有限集。注意到，对一致内可约集进行有限调整后，所得集合仍是一致内可约的，因此我们可以令 $A = \bigcup_{i \leqslant N} D_i$，其中 N，且令 D_i 为满足以下条件的集合：每个 $D_i \backslash (\bigcup_{j \neq i, j \leqslant N} D_j)$ 都是无限集，且每个 D_i 都是一致内可约的——例如，我们令 $D_0 = C_0, \ldots, D_{m-1} = C_{m-1}$ 和 $D_m = C_m \cup (A \backslash (\bigcup_{i \leqslant m} C_i))$。接着，对 A 和每个 D_i 应用 Jockusch 定理（分别代替 C 和 A_1），可得每个 D_i 都是可由 A 可计算枚举的。根据 D_i 的内可约性，这意味着 A 可以计算每个 D_i。如果进一步假设 A 是内可约的，那么对每个 i， $A \leqslant_T D_i$ 也成立。

因此，将这一观察与推论 4.8结合起来，我们得到：

推论 4.10。 设 $A = A_0 \cup \cdots \cup A_n$，其中每个 A_i 都是无限集。假设所有 A_i都是一致内可约的。那么， A 是内可约集，当且仅当存在一致内可约集 D_0、……、$D_m \subseteq A$，其中某个 m 满足 $A = \bigcup_{i=0}^{m} D_i$且 $A \equiv_T D_i$ 对每个 i都成立。注意，对于“若”方向，根据推论 *4.8*，只需假设 $D_0 \equiv_T D_i$ 对每个 i 成立，而不必假设 $A \equiv_T D_i$ 对每个 i 成立。

因此，自然会问：每个内可约集是否都是有限个一致内可约集的并，且它们的图灵度都相同。Lachlan 构造证明了一个更强的断言是错误的：并非每个内可约集都是一致内可约的。值得注意的是，Lachlan 构造的集合虽然不是一致内可约的，却仍是两个一致内可约集的并；事实上，它们是不交并。

4.3. **构造一个内可枚举集**。下面的定理引出了许多更有趣的相关问题；我们指出，证明的核心思想源自 Jockusch 定理的证明。

定理 4.11。 如果 A、B_0、……、B_n 是满足对于每个 $i \leqslant n$ 都有 $A \leqslant_e^{ui} B_i$ 的无限集，那么 $A \leqslant_e^{i} \bigcup_{i=0}^{n} B_i$。

证明。 证明对 n 进行归纳——基例 $n=0$ 是显然的。假设该定理对 $n-1$ 成立，并证明其对 n 成立。设 Θ_i 是一个枚举算子，对于每个 $i \leqslant n$，它见证了 $A \leqslant_e^{ui} B_i$ 。设 $C \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} B_i$ 是一个无限子集，并假设 A 不是 C-可计算可枚举的，以导出矛盾。考虑适当关系语言中的理论 T，其中 T 的公理表明

- $E \subseteq B_i \to A(k)=1$ （对每个 E，k 使得 $k \in \Theta_i(E)$）；
- $B_0(k)=1 \vee \cdots \vee B_n(k)=1$ （对每个 $k \in C$）。

显然， A，B_0，……，B_n 在假设中的自然解释模型 T下成立，因此 $\{n : T \vdash A(n)=1\} \subseteq A$。根据假设，由于 T是一个 C-可计算可枚举理论，存在 $m \in A$使得 $T \nvdash A(m)=1$。若一个公式 φ 是形如“$l \in B_i$”的语句（其中 $l \in C$ 使得 $T \nvdash (\varphi \to A(m)=1)$）的真合取，则称其为特殊 公式；例如，若 $\mathbf{1}$，$3 \in C, 1 \in B_0$，$3 \in B_2$，且 $T \nvdash (B_0(1)=1 \wedge B_2(3)=1 \to A(m)=1)$，则 $\varphi := (B_0(1)=1 \wedge B_2(3)=1)$ 是一个特殊公式。对于公式 φ 和 ψ，若 φ和 ψ 都是特殊公式，且 ψ 中出现的语句构成的集合是真包含 φ中出现的语句所构成的集合的超集，则称 ψ 是 φ的真特殊扩展。注意，我们的假设表明空公式是特殊的。

注意，我们不可能有一个由真扩张特殊公式组成的无限序列。因为如果 $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$都是真扩张特殊公式，那么存在某个 $j \leqslant n$ ，使得出现在 φ_i 中的陈述构成 B_j 的一个无限子集。由于 $A \leqslant_e^{ui} B_j$ 通过 Θ_j，必定存在某个数 N，使得 $T \cup \{\varphi_N\} \vdash A(m)=1$。因此，我们可以令 φ 为一个没有真特殊扩展的特殊公式。

对于每个 k、$j \in \omega$，令 $\varphi_{k,j}$ 为公式“$(B_k(j)=1 \wedge \varphi) \to A(m)=1$”。如果 $j \in B_k \cap C$，且“$B_k(j)=1$”没有出现在 φ 中，那么 $T \vdash \varphi_{k,j}$；否则，$\varphi_{k,j}$ 将是 φ 的一个真特殊扩展。对于每个固定的 $j \in C$，令 $p(j)$ 为满足 $T \vdash \varphi_{kj}$ 的 k 的数目。因此，对于 C 中除有限多个 j 之外的所有 j，都有 $p(j) \geqslant 1$。此外，对于每个 $j \in C$，都有 $p(j) < n$。因为如果 $j \in C$ 且 $p(j)=n$，那么由于“$B_0(j)=1 \vee \cdots \vee B_n(j)=1$”是 T 的一条公理，$T \vdash (\varphi_{0j} \wedge \cdots \wedge \varphi_{nj})$ 意味着 $T \vdash (\varphi \to A(m)=1)$，这与 φ 是特殊的相矛盾。令 $J \in \omega$ 为满足存在无限多个 $j \in C$ 使得 $p(j)=J$ 的最大数。令 $\mathcal{B}$ 为一个集合，其中包含 J 个 B_k，并且存在无限多个 $j \in C$ 使得$T \vdash \varphi_k$，且对于每个满足 $B_k \in \mathcal{B}$ 的 k，都有 $_j$。令 s 足够大，使得对于所有满足 $j \geqslant s$ 的$j \in C$，都有 $p(j) \leqslant J$，并且 s 大于出现在 φ 中的所有陈述。定义

$$S = \{j : j \geqslant s \ \&\ j \in C \ \&\ T \vdash \varphi_{k,j} \text{ for each } k \text{ with } B_k \in \mathcal{B}\}.$$

显然， S 是 $\bigcup \mathcal{B}$的一个无限子集：若 $j \in S$ 且 $j \notin \bigcup \mathcal{B}$，则令 $j \in B_l$，其中$B_l \notin \mathcal{B}$。于是可得$T \vdash \varphi_{l,\ j}$，这与 s的选取相矛盾。

注意， S 是一个 C-可枚举集。因此，我们可以令 $S_0 \subseteq S$ 为一个无限的 C-可计算子集。根据归纳假设，由于 $\mathcal{B}$ 包含 $< n$ 个集合， A 是 S_0-可枚举的，因此 A 是 C-可枚举的，这与我们的假设相矛盾。□

推论 4.12. 若 A、B_0、……、B_n 是无限集，且对每个$i \leqslant n$都有 $A \leqslant_T^{ui} B_i$，则 $A \leqslant_T^{i} \bigcup_{i=0}^{n} B_i$。

证明。 回忆$\leqslant_{c.e.}^{ui}$ 和 $\underline{\ \ } \leqslant_e^{ui}$是等价的。此外，注意到 $X \leqslant_T^{ui} Y$ 当且仅当 $\underline{X} \leqslant_{c.e.}^{ui} Y$ 且 $X \leqslant_{c.e.}^{ui} \overline{Y}$，并且 $X \leqslant_T^{i} Y$ 当且仅当 $X \leqslant_{c.e.}^{i} Y$ 且$X \leqslant_{c.e.}^{i} Y$。因此，该推论可直接由定理 4.11 以及刚才提到的两个事实得出。 □

推论 4.13。 假设 $B = B_0 \cup \cdots \cup B_n$，其中 B_0、...、B_n 是一致内可枚举集。如果 B_i 的枚举度相同，那么 B 是内可枚举的。

证明。 在这种情况下，我们有 $B_j \leqslant_e^{ui} B_i$ 对所有 i， $j \leqslant n$，因此 $\bigcup_{j=0}^{n} B_j \leqslant_e^{ui} B_i$对所有 $i \leqslant n$。由定理 4.11，我们有 $B \leqslant_e^{i} B_0$。 □

下文在定理 A 中令 4.11 等于并集 $\bigcup_{i\leqslant n} B_i$。这为构造非平凡的内可枚举集或内可约集提供了一种新方法。

推论 4.14。 若 $A, B_0, \ldots, B_n$ 是无限集，且对每个 i， $A = \bigcup_{i\leqslant n} B_i$ 和 $A \leqslant_e^{ui} B_i$，则 A 是内可枚举的。同样，若对每个 i， $A \leqslant_T^{ui} B_i$，则 A 是内可约的。

事实上，下面的定理表明，由推论4.14 得到的内可枚举集不一定是一致内可枚举的。

定理 4.15。 存在一个内可枚举集，它不是一致内可枚举的、不是内可约的，也不是主可枚举的。

注意，这样的内可枚举集在非平凡性方面已经达到了极致，因为它避开了所有能够避开的概念。我们对 [GHTPT20，定理 1.3(b)] 中引入的强迫概念作了修改。

证明。 对于每个 $i \in \omega$， 令 X_i 为能被第 $(2i)$ 个素数整除的数的集合，并令 Y_i 为能被第 $(2i+1)$ 个素数整除的数的集合。令 Θ_0 为这样的枚举算子：对于有限集 $E \subseteq \omega$，当且仅当 $n \in \Theta_0(E)$时， $E \cap X_n \neq \varnothing$。类似地，令 Θ_1 为这样的枚举算子：当且仅当 $n \in \Theta_1(E)$ 时， $E \cap Y_n \neq \varnothing$。我们将构造无限集 G_0 和 G_1，使得 $G := G_0 \cup G_1$ 通过 Θ_0 是 $\leqslant_e^{ui} G_0$，而 $G \leqslant_e^{ui} G_1$ 通过 Θ_1是 $\leqslant_e^{ui} G_0$。注意，对于每个有限 $E \subseteq \omega$， $\bigcap_{m\in E} X_m \cap \bigcap_{m\notin E} X_m$ 是一个无限集；对手~~Y_m~~的情形也同样如此。令 $A_E := \bigcap_{m\in E} X_m \cap \bigcap_{m\notin E} X_m$，并令 ~~$B_E$~~$:= \bigcap_{m\in E} Y_m \cap \bigcap_{m\notin E} Y_m$。注意，对于有限集 E_1， $E_2 \subseteq \omega$， $A_{E_1} \cap B_{E_2}$ 也是无限的。

强迫概念 $\mathbb{P}$由满足以下条件的三元组 $(\sigma、\ \tau、\ k)$组成： $\sigma、\ \tau \in 2^{<\omega}$和$k \in \omega$：

- If $(\sigma \cup \tau)(n) = 0$, then $X_n \cap \sigma = \varnothing$ and $Y_n \cap \tau = \varnothing$.
- $k < |\sigma|, |\tau|$.

对于 $(\sigma_0、\ \tau_0、\ k_0)、\ (\sigma_1、\ \tau_1、\ k_1) \in \mathbb{P}$，如果 $(\sigma_1、\ \tau_1、\ k_1) \leqslant_{\mathbb{P}} (\sigma_0、\ \tau_0、\ k_0)$，我们称

- $\sigma_0 \preceq \sigma_1, \tau_0 \preceq \tau_1, k_0 \leqslant k_1$.
- $\forall n < k_0$, $(\sigma_0 \cup \tau_0)(n) = 1$ implies $(\sigma_1 \backslash \sigma_0) \subseteq X_n$ and $(\tau_1 \backslash \tau_0) \subseteq Y_n$.

对于条件 $p \in \mathbb{P}$，我们用 (σ_p, τ_p, k_p) 表示相应的三元组。令 $E_p \subseteq \omega$表示有限集 $\{n \in \omega : (\sigma_p \cup \tau_p)(n) = 1\}$。显然，对于每个 $p \in \mathbb{P}$，我们都能在 $\mathbb{P}$ 中找到一个非平凡扩张 $q \leqslant_{\mathbb{P}} p$。例如，可以令 $n_0 \in A_{E_p}$ 大于$|\sigma_p|$，并令 $n_1 \in B_{E_p}$ 大于 $|\tau_p|$。那么， $(\sigma_p \cup \{n_0\}, \tau_p \cup \{n_1\}, k_p + 1)$ 在 $\mathbb{P}$中扩张p。令 $\mathbb{G}$ 为 $\mathbb{P}$ 上的一个足够泛的滤子，并令 $G_0 = \bigcup\{\sigma_p : p \in \mathbb{G}\}$， $G_1 = \bigcup\{\tau_p : p \in \mathbb{G}\}$。令 $G = G_0 \cup G_1$。那么， G_0 和 G_1 被强迫为无限集，且 $G \leqslant_e^{ui} G_0$ 通过 Θ_0 以及 $G \leqslant_e^{ui} G_1$ 通过 Θ_1，因此根据推论 4.14， G 是内可枚举的。

我们断言，根据$\mathbb{G}$的充分泛型性， G不是一致内可枚举的。反设不然，即 G可通过一个枚举

算子 Γ一致内可枚举。我们证明集合

$$D := \{q \in \mathbb{P} : \exists n\ n \notin E_q\ \&\ n \in \Gamma(E_q)\}$$

在 $\mathbb{G}$ 上稠密，这会导致矛盾。固定 $p \in \mathbb{G}$，并取大于 $|\sigma_p|$ 和 $|\tau_p|$的 $n \in G_0 \backslash G_1$ —— 容易证明，空条件迫使两个集合 $G_0\backslash G_1$ 和 $G_1\backslash G_0$ 都是无限集。注意，对于每个有限 $F \subseteq \omega$，空条件已经迫使 $G_0 \cap B_F$ 成为无限集：给定任意 $p \in \mathbb{P}$，我们可以令 $m \in A_{E_p} \cap B_F$大于 $|\sigma_p|$，使得 $(\sigma_p \cup \{m\},\ \tau_p,\ k_p)$ 是一个扩展p的条件。因此，$Y := (G_0 \cap B_{E_p}) \cap (n,\ \infty)$ 是 G 的一个无限子集。根据假设，$n \in \Gamma(Y)$，因此我们可以取一个有限子集 $u \subseteq Y$，使得 $n \in \Gamma(u)$。那么$q := (\sigma_p,\ \tau_p \cup u,\ k_p) \in \mathbb{P}$ 是一个扩展 p 的条件，并且注意到 $n \in \Gamma(E_q)$，而$n \notin E_q$。因此，我们有 $q \in D$。

为了证明 G 不是内可约的，我们证明以下断言：给定 $p \in \mathbb{G}$、一个图灵算子 Φ 和 $S \subseteq E_p$，以下情况之一成立：

(1) 存在 $q \leqslant_{\mathbb{P}} p$ 和 $S^* \subseteq E_q$，使得 S^* 是 S 的端延拓，并且 Φ^{S^*} 与 E_q 不同；或者 **(2)** 存在 n、$p_0 \leqslant_{\mathbb{P}} p$ 和 $S_0 \subseteq E_{p_0}$，其中 $S_0 \subseteq E_{p_0}$ 是 S 的端延拓，并且对所有作为 S_0 的端延拓的 $p_1 \leqslant_{\mathbb{P}} p_0$ 和 $S_1 \subseteq E_{p_1}$，都有 $\Phi^{S_1}(n)\uparrow$。

若该断言成立，则由充分泛型性可知，空条件迫使存在一个无限子集 $Y \subseteq G$，使得 $G \not\leqslant_T Y$。因此，固定 p、Φ 和 $S \subseteq E_p$。假设对于 p、Φ 和 S，(2) 不成立。令 $n \in A_{E_p}$ 为一个大于 $|\sigma_p|$ 和 $|\tau_p|$的数。考虑 p 的扩张 p_0，它是通过将若干个 0 连接到 σ_p 和 τ_p 上，直到 n 得到的。由于 (2) 不成立，我们可以取 $p_1 \leqslant_{\mathbb{P}} p_0$ 和 $S_1 \subseteq E_{p_1}$，使得 S_1 是 S 的端延拓，且 $\Phi^{S_1}(n)\downarrow$。若 $\Phi^{S_1}(n) = 1$，则 $q := p_1$ 是所需的扩张。若 $\Phi^{S_1}(n) = 0$，则 $q := (\sigma_{p_1} \cup \{n\},\ \tau_{p_1},\ k_p)$ 是所需的扩张。

最后，充分泛型性保证 G 不是主可枚举的。事实上，设 $(H_i, i \in \omega)$ 是所有超算术集的一个列表。设 $p \in \mathbb{G}$ 是一个条件，并设$i \in \omega$。若 H_i是一个无限集，取一个大于 $n \in H_i$ $|\sigma_p| + |\tau_p|$的数。考虑将若干个 0 连接到 $q \leqslant_{\mathbb{P}} p$后得到的 σ_p，以及直到 τ_p n。显然，$q \Vdash H_i \not\subseteq G$。因此，充分泛型性保证 G 没有无限超算术子集。由推论2.3 和推论2.5 可知，G不是主可枚举的。□

定义 4.16. 若存在$A_0, \ldots, A_n$，使得 $A = A_0 \cup \cdots \cup A_n$ 且对每个 $i \leqslant n$都有 $A \leqslant_e^{ui} A_i$，则内可枚举集 A 是有限可分解的。若存在 $A_0, \ldots, A_n$，使得 $A = A_0 \cup \cdots \cup A_n$ 且对每个 i都有 $A \leqslant_T^{ui} A_i$，则内可约集 A 是有限可分解的。

在 [GHTPT20 的定理 1.5], 中，他们证明：若 A 是内可枚举的，则存在 $B \in [A]^\omega$ 使得 $A \leqslant_T^{ui} B$。若 $\hat{}B$ 是 B的有限修改，则 $A \leqslant_T^{ui} \hat{}B$ 仍成立。因此，每个内可枚举集（或内可约集）都是一些集合 B_0、B_1、.....的可数并，并且对所有 $i \in \omega$都有 $A \leqslant_T^{ui} B_i$。如果可以将这样的并选为有限并，那么根据推论 4.12，该并就是内可约的。因此，任何不是内可约集的内可枚举集，都不能表示为有限个这样的集合的并。另一方面，每个内可枚举集 A 是否都是有限个集合 A_0、.....、A_n的并，且满足 $A \leqslant_e^{ui} A_i$对 $i \leqslant n$成立，这仍是一个开放问题；换言之，每个内可枚举集是否都是有限可分解的，尚无定论。因此，我们提出以下开放问题。

开放问题 4.17。

(1) 是否存在一个内可约集，它不能表示为有限个一致内可约集的并？(2) 是否存在一个内可约集，它没有与自身图灵度相同的一致内可约子集？若存在，这样的集合就是一个不能表示为有限个一致内可约集之并的内可约集。(3) 是否存在一个内可枚举集，它没有与自身枚举度相同的一致内可枚举子集？若存在，这样的集合就是一个不能表示为有限个具有相同枚举度的一致内可枚举集之并的内可枚举集。(4) 是否存在一个不是有限可分解的内可约集？(5) 是否存在一个不是有限可分解的内可枚举集?

与条目 (2) 相关的问题是：能否找到一个内可约集 A，使其不存在满足 $B \equiv_T A$ 且 $A \leqslant_T^{ui} B$的无限子集 $B \subseteq A$？事实上，这个问题等价于条目 (2)。当将“内可约”替换为“内可枚举”，并将 $\equiv_T$ 替换为 $\equiv_e$时，我们对该问题给出了肯定回答。

命题 4.18。存在一个一致内可枚举集 G，使得对于任意满足 $A \leqslant_e G$的无限集 A，都有 $\neg[A \geqslant_T^{ui} G]$。

证明。令 X_i 和 A_E分别如定理 4.15的证明中所述。我们在此证明中考虑的强迫概念是集合 $\mathbb{P}$，由满足 $\sigma \in 2^{<\omega}$且 $k \in \omega$ 满足以下条件的有序对 $(\sigma$组成：$k)$

- 如果 $\sigma(n) = 0$，则 $X_n \cap \sigma = \varnothing$。
- $k < |\sigma|$。

对于 $(\sigma_0,\ k_0),\ (\sigma_1,\ k_1) \in \mathbb{P}$，我们称 $(\sigma_1,\ k_1) \leqslant_{\mathbb{P}} (\sigma_0,\ k_0)$，如果

- $\sigma_0 \preceq \sigma_1$，$k_0 \leqslant k_1$.• $\forall n < k_0$，$\sigma_0(n) = 1$ 蕴含 $(\sigma_1 \backslash \sigma_0) \subseteq X_n$。

对于一个条件 $p \in \mathbb{P}$，我们将 $(\sigma_p,\ k_p)$ 记作相应的有序对。令 $E_p \subseteq \omega$表示这个有限集，它被 σ_p 视为一个集合。对于每个 $p \in \mathbb{P}$，在 $\mathbb{P}$中存在一个非平凡扩张 $q \leqslant_p p$。例如，我们可以选取一个大于 $|\sigma_p|$ 的数 $n_0 \in A_{E_p}$，并考虑 $(\sigma_p \cup \{n_0\},\ k_p + 1) \in \mathbb{P}$。令 $\mathbb{P}$上的一个充分泛的滤子为 $\mathbb{G}$，并令 $G = \bigcup\{\sigma_p : p \in \mathbb{G}\}$。令 Θ_0 为在定理 4.15 的证明中定义的枚举算子。于是，空条件已经迫使 G成为一个无限集，并且 k_p 增长到无穷大，因此 G通过 Θ_0是一致内可枚举的。

设 Φ 是一个图灵算子，Γ 是一个枚举算子。我们断言，空条件通过 Φ]迫使 $\neg[\Gamma(G) \geqslant_T^{ui} G$。反过来，假设对所有 $C \in [\Gamma(G)]^\omega$，都有 $\Phi^C = G$。我们证明集合

$$D := \{p \in \mathbb{P} : \exists n\ \exists F \subseteq \Gamma(E_p)\ \Phi^F(n) = 0\ \&\ n \in E_p\}$$

在 $\mathbb{G}$ 之上是稠密的，从而得到一个矛盾——因为若 $p \in \mathbb{G} \cap D$，则 $F \subseteq \Gamma(E_p)$ 可以扩展为 $\Gamma(G)$的一个无限子集，同时保留所有见证计算 $\Phi^F(n) \downarrow = 0$的比特。固定 $p \in \mathbb{G}$。注意，对每个有限集 $E \subseteq \omega$，空条件迫使 $A_E \backslash G$成为一个无限集，因为对每个 $p \in \mathbb{P}$，$(\sigma_p^\frown 0, k_p + 1) \in \mathbb{P}$ 扩展 p。因此，我们可以令 $m > |\sigma_p|$ 使得 $m \notin G$ 且 $m \in A_{E_p}$。根据假设，我们有 $\Phi^{\Gamma(G)}(m) = 0$，因此我们可以令 $q \in \mathbb{G}$ 使得

使得 $q \leqslant_{\mathbb{P}} p$ 且 $\Phi^{\Gamma(E_q)}(m) = 0$。于是 $r :=(\sigma_q \cup \{m\}, k_p)$ 是 $\mathbb{P}$ 中的一个条件，它扩展 p。此外， $\Gamma(E_q) \subseteq \Gamma(E_r)$，因此 $r \in D$。□

如果能够证明命题4.18 中将 $\geqslant_T^{ui}$ 替换为 $\geqslant_e^{ui}$，并将“ 一致内可枚举”替换为“ 内可枚举”，那么这就证明存在一个内可枚举集，却不存在与之具有相同枚举度的一致内可枚举集；特别地，这回答了问题（3）。注意， $\leqslant_e$ 不能替换为 $\leqslant_T$，因为每个图灵度都包含一个一致内可约集。

当 A 是内可枚举的，即 $A \leqslant_e^i A$时，存在某个无限子集 $B \subseteq A$，满足 $A \leqslant_T^{ui} B$ [GHTPT20，命题 5。3]。粗略地说，通过对右侧进行稀疏化，我们可以找到一个子集，其中 A的正面和负面信息都被非常稠密地编码其中。反过来又如何呢？若改为对左侧进行稀疏化，我们能否找到一个满足 $B \subseteq A$ 且 $B \leqslant_T^{ui} A$的无限子集？下面的结果表明，答案是否定的，而且是否定得很彻底。

命题 4.19。 存在一个一致可内枚举集 G，使得不存在满足 $C \leqslant_T^i G$ 的 $C \in [G]^\omega$ 。

下面的证明是对 [GHTPT20，定理 1.3(b)] 证明的略微修改，该定理指出：存在 A和 B 满足 $A \leqslant_e^{ui} B$ ，使得不存在$C \in [A]^\omega$ 满足 $C \leqslant_T^i B$。

ˆ 证明。我们考虑强迫概念 $\mathbb{P}$，它与命题 4.18 的证明中所用的强迫概念 $\mathbb{P}$几乎相同，但有如下区别： $\mathbb{P}$ 的条件 ˆ ˆ 是三元组 $(\sigma、\ \tau、\ k)$，满足 $(\sigma、\ \tau、\ k) \in \mathbb{P}$ 当且仅当 $(\sigma、\ k) \in \mathbb{P}$ 且 $\tau \subseteq \sigma$。ˆ 对于 $\mathbb{P}$中的两个条件 $(\sigma_0、\ \tau_0、\ k_0)$和 $(\sigma_1、\ \tau_1、\ k_1)$，我们按如下方式定义 $\leqslant_{\hat{\mathbb{P}}}$： $(\sigma_1、\ \tau_1、\ k_1) \leqslant_{\hat{\mathbb{P}}} (\sigma_0、\ \tau_0、\ k_0)$ 当且仅当 $(\sigma_1、\ k_1) \leqslant_{\mathbb{P}} (\sigma_0、\ k_0)$ 且 $\tau_1 \geq \tau_0$。对于ˆ 条件 $p \in \mathbb{P}$，令 $(\sigma_p、\ \tau_p、\ k_p)$ 表示与 p对应的三元组。令 $\mathbb{G}$ 为 $\mathbb{P}$上的一个充分泛滤子。我们令 $G = \bigcup\{\sigma_p :\ p \in \mathbb{G}\}$ 且 $X = \bigcup\{\tau_p :\ p \in \mathbb{G}\}$。

与命题4.18的证明中一样， G 是一致内可枚举的。显然，空条件迫使 $X \subseteq G$ 成为一个无限子集。反设存在某个 $C \in [G]^\omega$ 使得 $C \leqslant_T^i G$。于是特别地，存在图灵算子 Φ 和 Ψ 使得 $\Phi(G) = \Psi(X) = C$。

设 $p \in \mathbb{G}$ 是一个条件。由于充分泛型性，我们可以在必要时考虑一个扩张，并假设 p 强迫 $\Phi(G)$ 是全函数且无限，并且 $\Psi(X)$ 是全函数且为 G 的子集。因此，存在 $i > |\sigma_p|$ ，使得对于某个条件 $q \leqslant_{\hat{p}} p$，有 $\Phi^{\sigma_q}(i) \downarrow = 1$。令 $j := i + |\sigma_q|$。注意，$r_0 := (\sigma_p^\frown 0^j,\ \tau_p^\frown 0^j,\ k_p)$ 是一个条件，它在 ˆ$\mathbb{P}$ 中扩张 p；其中 0^j 表示 j 个 ˆ 0。因此，存在一个条件 $r \in \mathbb{P}$ 扩张 r_0 ，使得 $\Psi^{\tau_r}(i) \downarrow = 0$ ，这是因为根据假设，$\Psi(X)$ 被强迫为全函数且是 G 的子集。

现在，我们可以结合条件 q 和 r 得出矛盾。令 ˆ$\sigma^* := \sigma_q \cup \sigma_r$。首先，我们声称 $p^* := (\sigma^*,\ \tau_r,\ k_p)$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个条件。显然，我们有 $\tau_r \subseteq \sigma^*$。又由于 $(\sigma_q,\ k_q)$ 和 $(\sigma_r,\ k_r)$ 是 $\mathbb{P}$ 的条件，ˆ$(\sigma^*,\ k_p)$ 也是 $\mathbb{P}$ 的一个条件。其次，我们检查 p^* 在 $\mathbb{P}$ 中扩张了 p。显然，我们有 $\tau_r \geq \tau_p$。注意， $(\sigma^* \backslash \sigma_p) = (\sigma_q \backslash \sigma_p) \cup (\sigma_r \backslash \sigma_p)$。因此，$q$ 和 r 都扩张了 p 这一事实意味着，对于每个满足 $\sigma_p(n) = 1$的 $n < k_p$ ，都有 $(\sigma^* \backslash \sigma_p) \subseteq X_n$ 。最后，$\Phi^{\sigma^*}(i) \downarrow = 1$ ，因为 $\sigma^* \upharpoonright_{|\sigma_q|} = \sigma_q$。所以，我们找到了一个条件 $p^* \leqslant_{\hat{\mathbb{P}}} p$，使得“ $\Phi(G) = \Psi(X)$”在其上不成立。由充分泛型性，这就产生了矛盾。□

下一个命题表明，我们无法使用推论 4.14 中的工具构造一个没有一致内可约子集的内可约集。因此，如果存在一个没有一致内可约子集的内可约集，那么开放问题 4.17 中的第 (4) 项就有肯定答案。

命题 4.20. 设 A 是一个内可约集。若 A 有限可分解，则 A 有一个一致内可约子集。

证明。 设 $A = \bigcup_{i\leqslant n} A_i$ 是 A 的一个有限分解。令 $(2^{<\omega})^{n+1}$ 表示 $(n+1)$ 个 $2^{<\omega}$ 的乘积。固定一个 A-可计算双射 $\pi\colon (2^{<\omega})^{n+1} \to A$。令

$$\hat{A} := \{\pi(\sigma_0, \dots, \sigma_n) : |\sigma_0| = \cdots = |\sigma_n| \ \&\ \sigma_i \prec A_i \text{ for each } i \leqslant n\}.$$

那么对某个 $i \leqslant n$， $A \hat{\cap} A_i$ 是无限的。设 $A_i := \hat{A} \cap \hat{A_i}$ 是无限的。我们证明 $\hat{}$ A_i 是一致内可约的。设 C 是 A_i 的一个无限子集。那么 C 是 A 和 A_i 的一个无限子集。因此， C 可以一致地计算出 A 和 π，所以 $C\hat{}$ 可以从 A 的无限多个元素中一致地计算出 A_0，…， A_n。因此， C 可以 $\hat{}$ 一致地计算出 A 和 A_i。□

当然，推论 4.14 并不能在可能存在一个非有限可分解的内可枚举集或内可约集时，构造出具有完全泛性的内可枚举集或内可约集。上述命题还表明，每个有限可分解的内可约集都有一个一致内可约子集。本节最后指出，对于内可枚举集 A，如果可以从 A超算术地找到一种一致性，那么 A 就有一个一致内可枚举子集——而在定理 5.15 中构造内可枚举集时，情况正是如此。

引理 4.21 ([GHTPT20])。 若 $A \leqslant_T^{ui} B$ 且 $B \in \Delta_1^1(A)$，则 B 有一个一致内可约子集，该子集同时也是 $\Delta_1^1(A)$。

命题 4.22 ([GHTPT20])。 假设 A是内可枚举的，并且 $A \leqslant_e^{ui} B$。那么存在 $C \in [B]^\omega$ 使得 $C \in \Delta_1^1(B)$ 且 $A \leqslant_T^{ui} C$。

推论 4.23。 假设 A 是内可枚举的，并且存在 $A_0 \in [A]^\omega$ 使得$A_0 \in \Delta_1^1(A)$ 且 $A \leqslant_e^{ui} A_0$。那么 A 有一个一致内可约子集。

5. Remaining separations

本节将补全引言中图 1的论证。Jockusch 证明了内可约性 + 一致内可枚举性蕴含一致内可约性 [Joc68b，定理 5。3]；我们将这一结果称为 Jockusch 交定理。他声称，对于 major-T/e 集，类似的结论也成立。为完整起见，我们给出证明。

定理 5.1。 如果 A 是主可归约且一致主可枚举的，那么它是一致主可归约的。

证明。 我们证明，如果 A 是一致主可枚举但并非一致主可归约，那么它就不是主可归约的。我们将通过构造其初始段来构造 $g \geqslant p_A$，使得 $g \not\geqslant_T A$。令 σ_0 为空字符串。定义好 $\sigma_n \in \omega^{<\omega}$后，按如下方式定义 σ_{n+1}：

(1) 如果存在 $\sigma \succ \sigma_n$ 满足 $\sigma \geqslant p_A$ (其中 $\geqslant$ 与定理 2.1中的定义相同)，使得Φ_n^σ 在某个输入上与 A 不一致，则令 $\sigma_{n+1} = \sigma$。

(2) 如果存在 $\sigma \succ \sigma_n$ 满足 $\sigma \geqslant p_A$ ，且存在一个 $m \in A$ ，使得不存在满足 $\tau \geqslant p_A$ 且具有 $\Phi_n^\tau(m)\downarrow$的 $\tau \succ \sigma$ ，则令 $\sigma_{n+1} = \sigma$。

我们断言，对于所有 n，上述两种情况必有其一。若无法使用上述算法定义 σ_{n+1}，则对于所有 m，$m \in A$ 当且仅当存在 $\sigma \succ \sigma_n$，使得 $\sigma \geqslant p_A$，且 $\Phi_n^\sigma(m)\downarrow = 1$。同样，若无法定义 σ_{n+1}，则 $m \notin A$ 当且仅当存在 $\sigma \succ \sigma_n$，使得 $\sigma \geqslant p_A$，且 $\Phi_n^\sigma(m)\downarrow = 0$。令 Γ 为见证一致主可枚举性的一个枚举算子。令 g 为主导 p_A 的函数。那么对于所有 m,

$$m \in A \leftrightarrow \exists \sigma, s(\sigma \succ \sigma_n \wedge \sigma \geqslant p_{\Gamma_s^g} \wedge \Phi_{n,s}^\sigma(m) = 1)$$

and

$$m \notin A \leftrightarrow \exists \sigma, s(\sigma \succ \sigma_n \wedge \sigma \geqslant p_{\Gamma_s^g} \wedge \Phi_{n,s}^\sigma(m) = 0)$$

这表明 A 是一致主可约的，与我们的假设矛盾。证明了该断言后，取 $\bigcup_n \sigma_n = G$，此函数主导 p_A，且不能计算 A。□

推论 5.2。若 A 是内可约且一致主可枚举的，则它是一致主可约的。

证明。根据定理，只需证明这样的 A 是主可约的。给定一个函数 $f \geqslant p_A$，我们知道 f 能够计算出 A 的一个无限子集 $f \geqslant_e A$。根据内可约性，A 的任何无限子集都能计算出 A。□

此外，这个证明还表明，任何既是主可枚举又是内可约的集合，实际上都是主可约的。

定理 5.3. 主可约集恰好是同时为主可枚举且内可约的集合。

引理 5.4. 设 A 是免疫的且半可计算的[7]。那么存在一个枚举算子 Γ，使得 Γ^f 对于任意 $f \geqslant p_A$，都是 A 的无限子集。

证明。取 A 为免疫且半可计算的，并令 α 为见证其半可计算性的部分可计算函数。令 f 为主导 p_A的函数。注意，$[0,\ f(n)] \cap A$ 至少包含 $n+1$ 个元素。我们证明，对每个n，都能一致地列出 A中的一些 $n+1$ 个元素。给定 $n \in \omega$，我们可以（以某种一致的方式）列出 $[0,\ f(n)]$ 中的元素 x_0、……、x_N，使得对于$i \leqslant n-1$，$\alpha(x_i, x_{i+1}) = x_i$。于是 x_0、……、x_n必定属于 A；否则，由于 f的选取，存在 $j > n$ 使得 $x_j \in A$。然后，半可计算性以及我们列出 x_i的方式意味着 x_0、……、$x_j \in A$，从而导致矛盾。□

根据 [Joc68a，定理 5.2], 任意非零图灵度 $\leqslant_T 0'$ 都包含一个集合 A使得 A和 $\overline{A}$均为免疫的且半可计算。

定理 5.5（Jockusch）。若 A 是免疫的且半可计算的，则 A 是超免疫的且一致内可枚举。

证明。设 A是免疫的且半可计算的。为看出 A 是超免疫的，假设不然，从而存在可计算函数 g 优超 p_A。则由引理5.4，可令 Γ为一个枚举算子，使得 Γ^g 是 A的一个无限子集。这与免疫性矛盾。

[7]如果存在一个可计算函数 α，使得对所有 $x,\ y \in \omega$，1） $\alpha(x,\ y) \in \{x,\ y\}$ 且 2）如果 $x \in A$ 或 $y \in A$，那么 $\alpha(x,\ y) \in A$，则集合 A 是半可计算的。

为看出 A 是一致内可枚举的，令 $C \in [A]^{\omega}$。对每个 $a \in A$，注意 $\{b \in \omega : \alpha(a, b) = b\}$ 由免疫性必为有限集。因此，对 C的无限多个元素 c，必有 $\alpha(a, c) = a$。因此，下列一致过程枚举 A：枚举 a 当且仅当存在 $c \in C$ 使得$\alpha(a, c) = a$。□

推论 5.6。 如果 A 是免疫的且半可计算的，那么 A 是超免疫的且一致主可枚举。

证明。 根据引理 5.4 和定理5.5，可知如果 A是免疫的且半可计算的，那么任何 $f \geqslant p_A$ 都能一致地枚举出 A的一个无限子集，而该子集一致地枚举出 A。□

推论 5.7（Jockusch）。 存在互为补集的超免疫一致主可枚举集。

推论 5.8。 存在一个一致主可枚举集，它不是内可约的，因此也不是一致主可归约的。

证明。 设 A 和 $\overline{A}$ 都是免疫且半可计算的集合。那么它们都不是内可约的。因为如果 A（或 $\overline{A}$）是内可约的，那么根据推论 5.2，$\overline{A}$（或 A）将是一致主可归约的。回想一下，Jockush 证明了，如果 A是一致内可约的，且 A 是一致内可枚举的，那么其中一个是可计算可枚举的。 [Joc68b，推论 3。10]因此，由于免疫性，这种情况不可能发生。□

推论 5.9。 存在一个主可枚举集，它不是主可归约的。

证明。 根据定理5.1，任何一致主可枚举但非一致主可约的集合都必然不是主可归约的。□

命题 5.10。 存在一个一致可内枚举集，它既不是内可约的，也不是递减的。

证明。 令 A 为一个集合，使得 A 和 $\overline{A}$ 都是一致超免疫的一致内可枚举集。那么，A 和 $\overline{A}$ 都不是内可约的。因为如果其中一个是内可约的，那么根据 Jockusch 的交定理，它就会是一致内可约的。在这种情况下，如推论 5.8的证明中所述，其中一个将是可计算可枚举的。回忆一下，如果 A 和 $\overline{A}$ 都是递减的，那么其中一个就是可计算可枚举的。 [AM65，定理 1]。这说明 A 和 $\overline{A}$不可能同时都是递减的。因此， $\overline{A}$和 A 中的一个既不是内可约的，也不是递减的。□

命题 5.11。 内可约性与一致内可枚举性是不同的概念。

证明。 根据 Jockusch 交定理，如果 A 是一个非一致内可约的内可约集，那么 A 就不可能是一致内可枚举的。

而如果 A 是命题 5.10 中的一致内可枚举集，那么 A 就不是内可约的。□

定理 5.12。 存在一个可回溯集 A，使得没有 $B \in [A]^{\omega}$ 是一致主可约的。

证明。 只需证明存在一个可回溯集 A，它没有无限的超算术子集，这是推论 2.2的结论。令 $(H_n, n \in \omega)$ 为所有无限超算术集合的列表。固定一个可计算双射 $\pi : 2^{<\omega} \to \omega$，使得 $\pi(\sigma) > \pi(\tau)$

每当 $|\sigma| > |\tau|$ 时。我们构造一个字符串序列 $\sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \cdots$，并令 A 为集合 $\{\pi(\rho) : \exists n\ \rho \preceq \sigma_n\}$。这样，$A$ 显然是可回溯的，因为我们可以考虑映射 $\omega \to \omega$：当 $|\sigma| > 0$ 时取 $\pi(\sigma) \to \pi(\sigma^-)$，当 $|\sigma| = 0$ 时取 $\pi(\sigma) \to \pi(\sigma)$，其中 σ^- 表示去掉 σ 最后一位后的字符串。令 $\sigma_0 = \varnothing$。有了 σ_n 后，我们可以选取一个字符串 $\tau \in 2^{<\omega}$，使得 $|\tau| > |\sigma_n|$ 且 $\pi(\tau) \in H_n$。接着选取一个字符串 $\rho \in 2^{<\omega}$，使得 $\rho \succ \sigma_n$，并且 ρ 与 τ 不可比较。我们定义 $\sigma_{n+1} = \rho$。因此，H_n 不可能是 A 的子集，因为 $\pi(\tau) \notin A$。□

注意，集合 A 根据命题 3.11，上面提到的集合必然不是余免疫的。

推论 5.13。存在一个可回溯集（因此也是一致内可约集），它不是主可枚举集。

证明。根据推论 2.5，每个主可枚举集都有一个一致主可约子集。因此，上述可回溯集不可能是主可枚举集。□

因此，可回溯性以及内可约性等其他较弱的概念，都不能细化为主可枚举性。

到目前为止，我们已经看到一致主 T/e 和主 T/e 是彼此不同的概念，并考察了它们与其他概念之间的关系。现在我们将重点转向一致内 T/e、内 T/e、可回溯集／递减集以及可计算可枚举集／可计算集这些概念。为区分可计算可枚举性与内可约性，请注意，每个图灵度都包含一个内可约集，而每个非可计算可枚举集都不可能是内可约的。

注 5.14. 关于（一致）内可约性与递减/可回溯性的关系，注3.15表明，一致内可约集并不一定能细化为递减集。

由定理 4.15可知，非平凡内可枚举集确实存在。我们介绍另一种构造非平凡内可枚举集的方法——下面给出 Lachlan 构造的一个“内可枚举”版本，该构造证明存在一个内可约集，但它不是一致内可约的。

定理 5.15. 存在一个内可枚举集，它既不是一致内可枚举的，也不是内可约的。

证明。设 B 是一个不可计算的递减集，其补集是可计算可枚举的；由 [DM58, 定理 T3]可知这样的集合存在。设 B 是通过部分可计算函数 f递减的，且 B是可计算可枚举集 W。我们将构造 A，使其内可枚举，但既非内可约，也非一致内可枚举。令 b^n 表示见证 n递减性的递归递减序列中的第 B个元素，即对所有 n，$f(b^{n+1}) = b^n$ 且 $B = \{b^0,\ b^1,\ \ldots\}$。我们构造 $A \leqslant_e B$，使其满足

(1) $\forall n\ \langle n, \langle x, y\rangle\rangle \in A \to x = b^n$; (2) $\forall n\ \forall^\infty y\ [\langle n, \langle b^n, y\rangle\rangle \in A \leftrightarrow y \in B]$; (3) $\forall n\ \Gamma_n(A^n) \neq B$ 其中，A^n 表示这样一个集合：其第 n 列与 A 的列相同，且其他所有列均为空。此处，$(\Gamma_n, n \in \omega)$ 是所有枚举算子的列表；(4) 存在某个无限 $S \subseteq A$，使得 $A \not\leqslant_T S$。

如果我们成功构造出这样的 A，注意到我们也有 $B \leqslant_e A$ 和 $B \leqslant_T A$。此外，这样的 A 是内可枚举的，因为给定任意无限 $C \subseteq A$，C 要么与 A 的无限多列相交，要么与某一列中的无限多个元素相交

A。无论哪种情况， C 都能枚举 B，而 B又枚举 A。第三个条件保证 A 不是一致内可枚举的，因为如果它是一致内可枚举的，那么 A 的任意无限子集都会一致枚举 B，因此我们有 $A \geqslant_e^{ui} B$，这与第三个条件矛盾。要看出 A 不是内可约的，直接由第四个条件即可。

下文中，我们用 $\Gamma_n(\omega^{[e]} = F)$ 表示枚举算子 Γ_n ran，其预言机中除第 e 列外，每一列都是空的，而第 e 列为 F。

如果给定了由 $B = \bigcup_s B_s$ 对 B 的枚举，请注意，我们也可以利用 B 的回归性来枚举 b^0， b^1， $\ldots$。因此，要构造 $A \leqslant_e B$，只需利用由 $B_s = \{b^i$ 特别给出的 B 的枚举来构造 A： $i \leqslant s\}$。

的构造 A。设我们有由 $(B_s = \{b^i$ 对 B 的枚举： $i \leqslant s\}$， $s \in \omega)$。我们有如下要求

$$N_e : \Phi_e^S \neq A$$

这将给出第四个条件，并且

$$P_e : \Gamma_e(A^e) \neq B$$

这将给出第三个条件。对于 N 要求，我们在第 s 阶段构造 σ_s， 使得 S： $= \bigcup_s \sigma_s$ 见证 $A \nleqslant_T S$。这些要求按如下方式分配优先级： $P_0 > N_0 > P_1 > \cdots$

阶段 0：从 $A_0 = \varnothing$ 和 $\sigma_0 = \varnothing$开始。

阶段 $s+1$：将所有形式为 $\langle m, \langle b^m, y\rangle\rangle$ 的非受限元素枚举进 A_{s+1} （哪些元素受限将在后文说明），其中 $m \leqslant s$ 和 $y \in B_{s+1}$。对于每个满足以下条件的 N_e： $e \leqslant s$，其见证 $n_{e,s}$ 未定义；定义 $n_{e,s}$ 为尚未枚举进 A_{s+1}且形式为 $\langle e, \langle b^e, y\rangle\rangle$ 的最小元素；并限制$n_{e,s}$ 进入 A。然后让需要关注且$e \leqslant s$ 的最高优先级要求行动。

它们如何行动。 如果 N_e 尚未得到满足且$\Phi_e^{\sigma_s}(n_{e,s}) \downarrow$，我们就说它需要关注，其中 $n_{e,s}$ 是阶段 $s+1$时 N_e 的见证。并且 N_e 通过以下方式行动:

(1) 如果 $\Phi_e^{\sigma_s}(n_{e,s}) = 0$，则将 $n_{e,s}$ 枚举进 A。(2) 如果 $\Phi_e^{\sigma_s}(n_{e,s}) = 1$，则继续限制 $n_{e,s}$ 加入 A。

如果尚未满足，并且存在某个 $n \in W_s$ 以及某个有限的 $F \subseteq \{b^e\} \times \omega$ 使得 $n \in \Gamma_e(\omega^{[e]} = F)$，我们就说 P_e 需要关注。而 P_e 通过将 F 的元素枚举到 e列中来发挥作用——注意， P_e 可以覆盖 N_e 设定的限制，并且 N_e 是唯一会限制e列中元素的要求。

一旦 P_e 发挥作用，它就不会再发挥作用；而 N_e 可能会受损（最多被 P_e损坏一次），并再次发挥作用。如果 P_e 发挥了作用，则清除$n_{e,\ s}$ ，并为 $i \neq e$ 和 $i \leqslant s$设置 $n_{i,\ s+1} = n_{i,\ s}$。如果 N_e 发挥了作用，或者没有要求发挥作用，则对所有 $i \leqslant s$设置$n_{i,\ s+1} = n_{i,\ s}$。 在这两种情况下，都通过向 σ_s 中枚举 A_s^s的一个元素，将 σ_s 扩展为 σ_{s+1}。

验证。 显然， $B \leqslant_e A$ 和 $A \leqslant_e B$。第一个条件由该构造满足。由于 P 要求最多发挥作用一次，而 N 要求最多发挥作用两次，第二个条件也得到满足。

条件（3）得到满足。 如果 P_e 曾经采取行动，比如将 F 枚举进 A的第 e列，那么对于某个 n，我们有 $n \in \Gamma_e(\omega^{[e]} = F) \subseteq \Gamma_e(A^e)$ 和 $n \in B$，因此条件（3）得到满足。 如果 P_e 从未采取行动，我们也必须有 $\Gamma_e(A^e) \neq B$ 。因为如果

$\Gamma_e(A^e) = B$，那么 B 是可计算可枚举的，这就导致矛盾，因为我们得到如下对 B的 Σ^0_1 描述：

$$\forall m[m \in B \leftrightarrow \exists F \subseteq \{b^e\} \times \omega\ (m \in \Gamma_e(\omega^{[e]} = F))].$$

条件 ***(4)*** 得以满足。取 $S = \bigcup_s \sigma_{s\circ}$ 我们证明 $A \not\leqslant_T S$。反设 $A = \Phi^S_e$。令 $s+1$ 为一个足够大的阶段，使得从那以后 N_e 不会再受损，因此 $n_{e,\ s} = n_{e,\ t}$ 对 $t \geqslant s$成立。由于 Φ^S_e 是全函数，$\Phi^S_e(n_{e,\ s})\downarrow$ 会在某个更晚的阶段 t出现，而 N_e 会在某个更晚的阶段采取行动，并在对角化中成功，从而产生矛盾。□

注意，在上述证明和定理 4.15的证明中构造的内可枚举集，根据推论 4.4，都不是余可计算可枚举的。值得注意的是，上文构造的集合 A 仍然是两个 集合 $\geqslant^{ui}_e$ A的不交并，正如定理 4.15所述。事实上，对于每个 $n \in \omega$，令 x_n 为一个数，使得：对于 $y > x_n$，有 $\langle n,\ \langle b^n,\ y\rangle\rangle \in A$ 当且仅当 $y \in B$。换言之， x_n可以看作是标记受损情况的数。于是我们可以将 A 分成两个集合，如下所示：

$$A_0 = \{\langle m, \langle b^m, y\rangle\rangle : m \in \omega\ \&\ y \leqslant x_m\}$$

and

$$A_1 = \{\langle m, \langle b^m, y\rangle\rangle : m \in \omega\ \&\ y > x_m\}.$$

接着， $B \leqslant^{ui}_e A_0$ ，因为 A_0 的任意无限子集都必须与 A_0 的无限多列相交。而 $B \leqslant^{ui}_e A_1$ ，因为尽管 A_1 的无限子集可能只与 A_1 的有限多列相交，但此时该子集会包含来自 A_1 某一列的无限多个元素。并且，按照我们选择 x_n 的方式， A_1 某一列中的任何元素都是真 元素。特别地，任何元素 $\langle n,\ \langle b^n,\ y\rangle\rangle \in A_1$ 都告诉我们 $b^n \in B$ 和 $y \in B$，这表明 $B \leqslant^{ui}_e A_1$。 $A \leqslant_e B$ 这一事实意味着 A_0 和 A_1 是 $\geqslant^{ui}_e A$。

另一个值得注意之处是，我们可以选择 x_n，使它们是B'-可计算的，因为上述构造是 B-可计算的。因此， A_0 和A_1 是 B'-可计算的。特别地， A_0 是 $\Delta^1_1(A)$，并且根据推论 4.23， A有一个一致内可约子集。

5.1. **构造一个非平凡的递归集**。 现在，为完成对图 1 的论证，我们使用有限伤害论证来构造一个非平凡的递归集。到目前为止，我们所见到的递归集例子要么是可回溯的，要么是可计算可枚举的。下文构造一个新的递归集，并对定理 1.1加以补充。

定理 5.16. 存在一个既非可计算可枚举也不可回溯的递归集。

证明. 我们用有限伤害论证构造这样一个集合 A （它将是 $\leqslant_T 0'$）。我们将满足这些要求

$$P_e : \text{if } W_e \text{ has infinitely many even numbers, } W_e \neq A$$
$$N_e : A \text{ is not retraceable via } \varphi_e$$

其中需求优先级按 $P_1 > N_1 > P_2 > \cdots$ 指定；不失一般性，我们忽略 P_0, N_0 。

我们将构造一个递减集合 A ，使得 A 包含无限多个偶数，从而如果所有 P 和 N 要求都得到满足，那么 A 便如我们所需。在下面的构造中，我们构造一个部分可计算函数 $f = \bigcup_s f_s$ 以及数$a_{e,\ s}$，其中最终有 $a_e = \lim_s a_{e,\ s}$ 以及 $A = \{a_0,\ a_1,\ \ldots\}$。某些 N_e 要求将在阶段 s拥有一个见证 $n_{e,\ s}$ 。每个见证一旦定义，便不能被移除

from A 较低优先级的要求。此外，将以一种方式选取这些见证，使得只要 N_e 尚未行动，$n_{e,s}-1$ 始终不属于 A_s，这样如果我们愿意，之后便可以灵活地将 $n_{e,s}-1$ 放入 A_{s+1}。

构造。 阶段 0：从 $A_0=\{a_{0,0}=0,\ a_{1,0}=2\}$ 和 $f_0=\{(0,0),(2,0)\}$开始。令 N_1 持有见证 $n_{1,0}=2$；令 N_1 限制 $a_{0,0}$，$a_{1,0}$ 被移除。

阶段 $s+1$：给定 $A_s=\{a_{0,s},\ldots,a_{k,s}\}$，$k\leqslant s$和 f_s，令需要关注的最高优先级要求 $e\leqslant s$ 执行；如果没有这样的要求，则转到此构造的最后一段。

若存在某个未受更高优先级要求限制的偶数 $m\neq 0$，使得 $\varphi_e(m)\downarrow$，则称 P_e 在阶段 $s+1$ 需要关注。如果 $m\notin A_s$，它会通过限制 m 加入 A 来执行。如果对于某个 i，有 $a_{i,s}=m$，那么 P_e 会通过清除$a_{j,s}$ 来执行 $j\geqslant i$，也就是说，将它们从 A_s 中移除并取消其定义。然后令 P_e 限制 m 加入 A。

我们称 N_e在阶段 $s+1$需要关注，当且仅当 $n_{e,s}\in A_s$有定义且 $\varphi_e(n_{e,s})\downarrow$。称 $n_{e,s}=a_{l,s}\in A$ 对于某个 l成立。令 $a_{m,s}\in A$ 为 A 中小于 $a_{l,s}$的最大数；根据构造，$a_{m,s}$ 存在且 $a_{m,s}\leqslant n_{e,s}-2$。$N_e$ 的作用如下：

- 如果 $\varphi_e(a_{l,s})=a_{m,s}$，那么注意到 $a_{l,s}-1$ 不受限制（因为见证总是偶数）。对于 $j\geqslant l+1$，取消 $a_{j,s}$ 的定义，并将其从 A_s中移除。重新定义 $a_{l+1,s}=a_{l,s}-1$，并置入 $a_{l+1,s}\in A_{s+1}$。定义$f_{s+1}(a_{l+1,s})=a_{l,s}$。令 N_e限制 $a_{0,s}$、.....、$a_{l+1,s}$不被移除。然后清除所有见证 $n_{j,s}$、$j\geqslant e+1$。
- 如果 $\varphi_e(a_{l,s})\neq a_{m,s}$，则令 N_e 继续限制 $a_{l,s}=n_{e,s}$ 不被移除。此外，令 N_e 限制对于 $i\leqslant$ 的任意 $a_{i,s}$ $\max\{m$不被移除。

为完成对 A_{s+1} 和 f_{s+1}的定义，令 j 为使得 $a_{j,s}$ 目前未定义的最小数。定义 $a_{j,s}$ 为大于目前为止提到的所有数的最小偶数，并将其放入 A_{s+1}。将 A_{s+1} 中的每个 $a_{j,s}$ 重新记为 $a_{j,s+1}$。定义 $f_{s+1}(a_{j,s+1})=a_{j-1,s+1}$。对于 $\mathrm{Dom}(f_s)$ 中尚未在 f_{s+1}上定义的数，在 f_{s+1} 上定义它们，使得 f_{s+1} 扩展 f_s。令 i 为尚未满足且没有见证的最小数。令 $n_{i,s+1}=a_{j,s+1}$，并让 N_i 限制 $a_{0,s+1},\ldots,a_{j,s+1}$，使其不会被移除。

验证。 显然，这是一个有限伤害构造——一旦某个要求采取行动，所有较低优先级要求都会受损，也就是说，它们的限制和见证都会被清除。我们证明 A 有无限多个偶数，并且每个 $a_e:=\lim_s a_{e,s}$ 都有定义。对于 $e>0$，令 $s+1$ 为一个足够大的阶段，使得从那时起 N_e 不再受损。令 $n_{e,s+1}=a_{l,s+1}$ 为 N_e 成立的见证，它是一个偶数。那么，无论 N_e 此后是否采取行动，对所有 $t\geqslant s$，$n_{e,t}=a_{l,t}$，这表明 $a_l=n_e$ 有定义且是一个偶数。因此，每个 a_i，$i\leqslant l$ 也都有定义。由于 a_i 两两不同，我们看到 A 有无限多个偶数。现在我们证明 A 不是可计算可枚举的、不可回溯的，并且通过 $f=\bigcup_s f_s$ 是递减的。

A 不是可计算可枚举的。因为如果它是，那么 $A=W_e$ 对于某个 W_e 成立，而该数有无限多个偶数。令 $s+1$ 为一个足够大的阶段，使得从那时起，优先级高于 P_e 的所有要求都不再行动。如果 P_e 自阶段$s+1$以来曾经行动过，显然我们就会得到一个矛盾。如果 P_e 自阶段$s+1$以来从未行动过，令$n_{e,s+1}$ 为见证，表明 N_e 在阶段 $s+1$成立。由于 P_e 从那时起从未行动过，我们有$n_e=n_{e,s+1}$ 和 $\varphi_e(n_e)\uparrow$，这就产生了矛盾。

A 不可回溯。假设 A 可通过 φ_e回溯。令 $s+1$ 为一个足够大的阶段，使得从那时起，没有优先级高于 N_e 的要求会行动。令$n_{e,s+1}$ 为见证，表明 N_e 在阶段 $s+1$成立。那么在某个更晚的阶段，我们必有$\varphi_e(n_{e,s+1})\downarrow$，因为届时会有$n_e = n_{e,s+1} \in A$。但这样一来， N_e 就会行动，从而对角化，反驳 φ_e 是 A的回溯函数这一点。

A 通过 f 递减。显然， f 是一个部分可计算函数。因此，只需证明对于所有的 $e+1$, $f(a_{e+1}) = a_e$。注意，根据构造， $f(a_{e+1}) = a_e$意味着对于所有的 $d \leqslant e$， $f(a_{d+1}) = a_d$。因此，只需证明对于某个 k， $f(a_{e+1}) = a_e$对所有满足 n_{k+1} 的 a_{e+1}都成立。对于 $k > 0$, 令 $s+1$ 为一个足够大的阶段，使得从那时起，没有优先级高于 N_k 的要求会采取行动，并且满足 $n_k = n_{k,s+1}$。设 $n_{k,s+1} = a_{l,s+1} \in A_{s+1}$。无论从那时起 N_k 是否采取行动，我们都有 $f(a_{l,s+1}) = a_{l-1,s+1}$，并且 $a_l = a_{l,s+1}$, $a_{l-1} = a_{l-1,s+1}$，因为从那时起 N_k 不会受损。□

注意，在定理 5.16的证明中，损伤可能来自 P_e 和N_e 要求。还要注意，定理 A中构造的集合5.16 并不可回溯，不过它非常接近可回溯，具体来说，对于那些满足 $n \in A$且 $f(n) > n$的数 $f(n) = n+1$，必有 A 。事实上，利用这一点，我们可以证明

推论 5.17。 存在一个递减的（一致）内可约集，它既不是可计算可枚举的，也不可回溯。

证明。我们证明定理 5.16 中构造的集合 A 是内可约的。令f 为定理 5.16 的证明中构造的函数。令 $C \in [A]^\omega$。对于 $\hat{}n \in \omega$，令 n_0 为大于 n的 C 中第二小的数。回忆一下， $f(n_0)$表示集合 $\{m \in \omega\colon\ \exists k\ (m = f^k(n_0))\}$，其中 f^k表示应用 f k 次。$\hat{}\hat{}$ 若 $n \in f(n_0)$，则显然有 $n \in A$。若 $n \notin f(n_0)$，利用上述观察不难看出 $n \notin A$。因此，我们可以计算出 $n \in A$ 还是 $n \notin A$，而且该过程关于 $C \in [A]^\omega$是一致的。□

为了得到一个同时不可内可约的递减集合，我们需要修改这些要求，使得我们构造的集合 A 更不可能是可回溯的。此外，我们还可以要求该集合是余免疫的。

定理 5.18. 存在一个余免疫递减集合，它不可内可约、不可计算可枚举，也不可回溯。

证明。 要确保我们构造的集合（记作 B）不可内可约，根据 Jockusch 交定理，只需确保它不是一致内可约；注意到我们确保 B 是递减的，因此它是一致内可枚举的。此外，若 B 不可内可约，则它也不可回溯。

我们将定理 N_e 中的要求作如下修改： 5.16 要求如下

$$\hat{N}_e:\ \text{if there is a finite } F \subseteq B \text{ such that } \min\{F\} > n_e \text{ and } \Phi_e^F(n_e)\downarrow,$$
$$\text{then } B(n_e) \neq \Phi_e^F(n_e)$$

$\hat{}$ 其中 $n_e = \lim_s n_{e,s}$ 是我们将在下文为要求定义的见证 N_e。对于余免疫性，如命题 3.7所示，我们有以下要求

$$S_e : \text{if } W_e \text{ is infinite, then } W_e \cap B \neq \varnothing.$$

并且，如定理 5.16所示，为确保 B 不是可计算可枚举的，我们满足以下要求

$$R_e : \text{if } W_e \text{ has infinitely many even numbers, } W_e \neq B.$$

一个区别在于，在定理5.16中，一旦某个 P 要求采取行动，它就会永久得到满足；而在此证明中， R 要求可能会被更高优先级的共同免疫要求所损害。

目标是确保我们构造的集合 B 不能通过 Φ_e一致内可约，其中见证 n_e 将对 Φ_e进行对角化。为确保B 仍然是递减的，我们构造一个部分可计算函数 $F = \bigcup_s F_s$ 以及数 $b_{e,\,s}$。最终，我们将得到 $b_e = \lim_s b_{e,\,s}$ 以及 $B = \{b_0,\ b_1,\ \dots\}$。^^要求 R_e， S_e 以及 N_e的优先级被指定为 $R_1 > S_1 > N_1 > R_2 > S_2 > N_2 > \cdots$。我们确保 $b_{0,\,0} = b_0 = 0$，并且在 F 的定义域中定义的每个数 m 都满足对某个 n 有 $F^n(m) = b_0$。

构造。阶段 0：从 $B_0 = \{b_{0,0} = 0, b_{1,0} = 2\}$ 和 $F_0 = \{(0,0),(2,0)\}$开始。^我们认为 0 始终处于受限制状态。令 N_1 持有其见证 $n_{1,0} = 1$。每个由 N_e 要求持有的见证，在其采取行动之前，都受到限制，不能加入 B。

阶段 $s+1$：在有 $B_s = \{b_{0,s}, \dots, b_{k,s}\}$ 且 $k \leqslant s$ 对某个 k 成立，并且有 F_s 的情况下，令满足 $e \leqslant s$ 的最高优先级要求按照以下指示采取行动。如果没有这样的要求，则转到本构造的最后一段。

它们如何行动。 R 要求与定理 5.16 中的要求类似。若存在某个偶数 m，它不受更高优先级要求的限制，且满足 $\varphi_e(m)\downarrow$，则称R_e 在阶段 $s+1$ 需要关注。若 R_e 是需要关注的最高优先级要求，则令其在$m \notin B_s$时采取行动：限制 m加入 B。若b_i，则对于某个 i，$s = m$，此时 R_e 通过取消定义 $b_{j,s}$ （对于 $i \leqslant j \leqslant k$）来采取行动，即将它们从 B_s 中移除并取消定义。然后令 R_e 限制 m 加入 B。此外，在后一种情况下，为确保 B 拥有无限多个偶数，我们将 $b_{i,s+1} < \cdots < b_{k,s+1}$ 定义为大于迄今提及的所有数的偶数，并令 R_e 限制所有这些数被移除。定义 $F_{s+1}(b_{k,s+1}) = b_{k-1,s+1}, \dots, F_{s+1}(b_{i,s+1}) = b_{i-1,s}$。

我们称在阶段 $s+1$ 需要关注，当且仅当此前已定义 $n_{e,\,s}$，并且存在一个有限集合 $F \subseteq B_s$，使得 $\min\{F\} > n_{e,\,s}$ 且 $\Phi_{e,\,s}^F(n_{e,\,s})\downarrow$。^当 N_e 是需要关注的最高优先级要求时，它按如下方式起作用：

(1) 如果 $\Phi_e^F(n_{e,\,s})\downarrow = 0$，则定义 $b_{k+1,\,s+1} = n_{e,\,s}$。那么，^ N_e 要求限制移除 $b_{0,\,s}, \dots, b_{k+1,\,s+1}$。我们令 $F_{s+1}(b_{k+1,\,s+1}) = b_{k,\,s}$。(2) 如果 $\Phi_e^F(n_{e,\,s})\downarrow = 1$，则^ N_e 要求限制 $n_{e,\,s}$ 加入 B。此外，^N_e限制移除元素 $b_{0,\,s}, \dots, b_{k,\,s}$——这确保使用的 F 是 B 的子集。

现在我们描述 S 要求如何起作用。 S 要求与命题 Q 的3.7 中的要求类似。与命题 3.7 一样，在阶段 $s+1$，我们称数 $x \in$定义域(F_s) 满足截至 R_e 的优先级，当且仅当

- 对于每个数 y，若由于在阶段 $s+1$具有不低于 R_e 优先级的要求， y 不能从 B 中移除，则有 ^$y \in F_s(x)$。

我们称 S_e 在阶段 $s+1$ 需要关注，当且仅当存在某个 $m \in W_{e,\,s}$ 使得$m > n_{i,\,s}$ 对于 $i < e$，并且满足以下任一条件

(1) m尚未属于定义域(F_s)，或者 (2) m 属于定义域(F_s)，

且 m满足优先级要求，直到 R_e。

如果 S_e 是需要关注的最高优先级要求，那么在情形 (1) 中，让它通过设置 $b_{k+1,s+1} = m$ 和 $F_{s+1}(b_{k+1,s+1}) = b_{k,s}$来起作用。在这种情形下，让 S_e 限制m，并阻止$b_{i,s}$ 被移除（对于 $i \leqslant k$）。

在情形 (2) 中，我们有 $m \in$ 定义域(F_s)；设 l 是满足 $F_s^l(m) = 0$的最小数。然后令 $b_{i,s+1} = F_s^{l-i}(m)$（对于 $0 \leqslant i \leqslant l$）。此外，如果 $l < k$，定义 $b_{l+1,\,s+1} < \cdots < b_{k,s+1}$ 为大于迄今为止提及的任何数的最小偶数，以确保 B 包含无限多个偶数。定义 $F_{s+1}(b_{k,s+1}) = b_{k-1,s+1}, \ldots, F_{s+1}(b_{1,s+1}) = b_{0,s+1}$，并让 S_e 限制 $b_{i,s+1}$，以防止 $i \leqslant k$ 被移除。

为完成对 B_{s+1} 和 F_{s+1}的定义，令 j 为最小的数，使得此时 $b_{j,s}$ 未定义。定义 $b_{j,s}$ 为大于目前为止提及的所有数的最小偶数。对于每个尚未定义 $b_{i,s+1}$的 i，将每个$b_{i,s}$ 重新记作 $b_{i,s+1}$。定义 $F_{s+1}(b_{j,s+1}) = b_{j-1,s+1}$。对于 $\mathrm{Dom}(F_s)$中尚未在 F_{s+1}上定义的数，在 F_{s+1} 上定义它们，使得 F_{s+1} 扩展 F_s。我们令 B_{s+1}为集合 $\{b_{0,s+1}, \ldots, b_{j,s+1}\}$。令 i为最小的数，使得 $\hat{}\, N_i$ 尚未满足且没有见证。令 $n_{i,\,s+1} = b_{j,s+1} - 1$。

验证。显然，这是一个有限伤害构造——一旦某个要求采取行动，所有较低优先级要求都会受损，也就是说，它们的限制会被清除，见证也会被清除。我们证明每个 $b_e := \lim_s b_{e,\,s}$ 都有定义，并且 B 有无限多个偶数。

要证明 $b_e = \lim_s b_{e,s}$ 存在，令 s 为 $b_{e,s}$ 首次有定义的阶段。注意，N 要求永远不会移除或取消定义$b_{e,s}$。如果没有 R 和S 要求从 B中移除 $b_{e,s}$，那么 $b_e = b_{e,s}$。如果在某个阶段 $t > s$，某个R_i（或 S_i）要求从 B_t中移除 $b_{e,s}$，那么令 $T > t$ 为一个足够大的阶段，使得从阶段 T起，没有优先级高于 R_i（或 S_i）的要求会采取行动。于是 $b_e = b_{e,T}$，因为 $b_{e,T}$ 受到某个优先级高于或等于 R_i（或 S_i）的要求限制，不会被移除：注意，从阶段t起，每当 $b_{e,-}$ 发生变化时，新的$b_{e,-}$ 都会受到某个更高优先级要求的限制，不会被移除。要证明每个 $n_e = \lim_s n_{e,s}$ 都存在，令 s 为一个阶段，从该阶段起 N_e 不再受损。于是 $n_e = n_{e,s}$。

要看出 B 有无限多个偶数，只需注意，在构造过程中，每当某个要求采取行动并从 B 中移除一些偶数时，它也会向 B 中加入新的偶数，并限制这些数不被移除。现在我们通过 $F = \bigcup_s F_s$ 证明，B 不是可计算可枚举的、不是内可约的、是余免疫的，且是递减的。

B 不是可计算可枚举的。因为如果它是，那么 $B = W_e$ 对某个 W_e 成立，而该集合有无限多个偶数。令 $s+1$ 为一个足够大的阶段，使得从那时起，所有优先级高于 R_e 的要求都不再采取行动。如果 R_e 在阶段 $s+1$之后曾采取行动，那么显然会导致矛盾。如果 R_e 在阶段 $s+1$之后从未采取行动，我们可以令 $M \in B$ 为一个足够大的偶数，并且该数在阶段 $s+1$之前从未被提及。由于 R_e 在阶段 $s+1$之后从未采取行动，因此有 $\varphi_e(M)\uparrow$，这就导致矛盾。

B 通过 $F = \bigcup_s F_s$ 是递减的。显然，F 是一个部分可计算函数。因此，只需证明对于所有 $e+1$，$F(b_{e+1}) = b_e$。注意，根据构造，fo r

对于所有 e， s，只要 $b_{e+1,\ s}$ 有定义，就有 $F_s(b_{e+1,\ s}) = b_{e,\ s}$。此外，当 e， s 满足以下条件：对于所有 $t \geqslant s$，$b_{e+1,\ t} = b_{e+1,\ s} = b_{e+1}$，那么对于所有 $t \geqslant s$，也必有 $b_{e,\ t} = b_{e,\ s} = b_e$；因为 $b_{e,\ s}$ 的值唯一可能发生变化的情况是 $b_{e,\ s}$ 被移除，而这也会使 $b_{e+1,\ s}$被移除。因此，令 s 为一个足够大的阶段，使得对于所有 $t \geqslant s$，$b_{e+1,\ s} = b_{e+1,\ t}$。于是 $b_{e,\ s} = b_e$，并且有 $F_s(b_{e+1}) = F_s(b_{e+1,\ s}) = b_{e,\ s} = b_e$。由于 F 扩展了 F_s，这表明 F 是 B的一个递减函数。

$\hat{}A$ 是余免疫的。我们证明，对于每个满足 W_e为无限的 e， B 都不包含 W_e。如果存在某个阶段 s，使得 S_e 采取行动，并且此后再也没有受损，那么显然 $W_e \nsubseteq B$。如果不存在这样的阶段，那么必定存在某个阶段 s，使得 S_e 未满足，并且此后再也不采取行动。令 $t > s$ 为足够大的阶段，使得从阶段 t起，没有优先级高于 S_e 的要求采取行动。因为，如果 $W_e \subseteq B$ 且 W_e 是无限的，那么我们可以令 $x \in W_e$ 为一个大于构造在阶段 t 提及的任何数的数。令 $t_0 \geqslant t$ 为一个满足$\varphi_{e,\ t_0}(x)\downarrow$的阶段。那么无论 x 是否属于定义域 $\mathrm{Dom}(F_{t_0})$， S_e 都需要关注，并在阶段 t_0采取行动——如果 $x \in$ 属于 $\mathrm{Dom}(F_{t_0})$，这意味着某个要求在阶段 t之后将 x放入定义域，因此 x 必然遵循截至R_e 的优先级。这是一个矛盾。

B 不可内可约。如前所述，只需证明对于每个 $e \in \omega$， B 不能通过 Φ_e 一致内可约。反设 B 通过 Φ_e 一致内可约，从而导出矛盾。取足够大的阶段 s，使得从此以后，$n_e = n_{e,\ s}$，并且 $\hat{}$ 不会有优先级高于 N_e 的要求采取行动。注意，存在一个有限集合 $F \subseteq B$，使得 $\min\{F\} > n_e$ 且 $\Phi_e^F(n_e)\downarrow$，这是由一致内可约性得出的——否则， $\{k \in B :\ k > n_e\}$ 就是 B 的一个无限子集，却不能作为“B 通过 Φ_e一致内可约”的见证。但于是我们可以找到一个足够大的阶段 $s_0 > s$，使得 $F \subseteq B_{s_0}$，$\min\{F\} > n_e$，且 $\Phi_{e,\ s_0}^F(n_e)\downarrow$。那么 $\hat{}N_e$ 要求将在该阶段采取行动，对 Φ_e 进行对角化。□

References

[AM65] Kenneth Appel 和 Thomas G. McLaughlin。关于递减集的性质。 *Trans-*
actions of the American Mathematical Society 115 83 93, 1965

ANDREWS 和 JOSEPH S. MILLER。理论和结构的谱。 *Pro-*
ceedings of the American Mathematical Society 143 3 1283 1298, 2015

Dekker。孤立集的无限级数。见 *Proc. Sympos. Pure Math.*, *Vol. V*，第 77–96 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1962 年。[DM58] J. C. E. Dekker 和 J. Myhill。可回溯集。 *Canadian Journal of Mathematics*, 10 357 373, 1958 : – 。[GHTPT20] Noam Greenberg 、 Matthew Harrison-Trainor 、 Ludovic Patey 和 Dan Turetsky。从所有无限子集计算集合，2020 年。[Joc68a] Carl G. Jockusch。半递归集与正可约性。 *Transactions of the*
American Mathematical Society 131 2 420 436, 1968

G. Jockusch。一致内可归约集。 *The Journal of Symbolic Logic*, 33 4 521( ): –536, 1968。[Mcl67] T. G. Mclaughlin。关于某些递归可枚举图的可扩展性、路径汇合性、分支性质和指标集的一些评论。 *Annals Journal*
of Mathematics 11 2 257 279, 1967

Hartley Rogers。递归函数与有效可计算性理论。 *Journal*
of Symbolic Logic 36 1 141 146, 1971

M. Solovay。超算术可编码集。 *Transactions of the Ameri-*
can Mathematical Society 239 99 122, 1978

Seetapun 和 Theodore A. Slaman。关于 Ramsey 定理的强度。*Notre Dame Journal of Formal Logic*, 36(4):570–582, 1995。

[Yat62] C. E. M. Yates。《递归可枚举集与回溯函数》。 *Mathematical Logic Quarterly* 8 3 4 331 345, 1962 , (-): – .