arXiv:2602.11178v1 [math.GN] 21 Jan 2026

通过乌雷松引理将正规空间刻画为一种提升性质

Robert Maxton

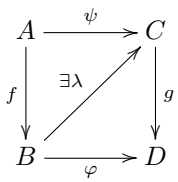
2026年2月13日

摘要

我们将乌雷松对正规空间的描述（即不相交的闭子集可由连续函数分离）转化为**Top**中的提升性质语言，并纠正了一种被频繁引用的错误转化。我们还将遗传正规空间定义为每个开子空间都是正规的这一表述转化为提升性质；我们认为，这种表述更为简洁，也能更直接地从经典定义推出。

1 引言

在 [1], Misha Gavrilovich 中，他用范畴论的提升性质 ——一族形如以下形式的交换方块——来等价地重新表述拓扑空间及其间连续映射的许多性质：



其中，若对每一种可能的 ψ, φ，都存在某个态射 $\lambda : B \to C$ 使上述图表交换，则称 f对 g具有左提升性质，或称 g对 f具有右提升性质，或称 $f \pitchfork g$。特别是，大多数标准分离公理都对应着提升性质。

作者还引入了一种简洁实用的记法，用于描述特化拓扑之间的连续映射：给定一个以其特化预序图表示的拓扑，我们只需重复顶点标签，指出定义域中的每个点被映射到哪里；当两个点被映射到陪域中的同一点时，必要时用 $=$ 边表示，而陪域中原像为空的点则使用新的顶点标签。随后，映射的连续性可由其单调性推出，也就是说，有向边被映射为方向相同的边。例如，假设我们定义了五点拓扑 $\tau = L \quad \succ 0 \prec \quad M \quad \succ 1 \prec \quad R$及其对偶序的拓扑 $\tau^\dagger := L^\dagger \prec \quad 0^\dagger \quad \succ M^\dagger \prec \quad 1^\dagger \quad \succ R^\dagger$；那么：

$$\left\{ L \searrow 0 \swarrow M \searrow 1 \swarrow R \right\} \longmapsto \left\{ L' \swarrow L \searrow 0 = M = 1 \swarrow R \searrow R' \right\}$$

表示函数

$$f : \tau \to \tau^\dagger$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0^\dagger & x = L \\ 1^\dagger & x = R \\ M^\dagger & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中连续性从图中即可显而易见。

本文聚焦于将分离公理转化为提升性质的两种表述：刻画正规空间的乌雷松引理，以及遗传正规空间的定义。乌雷松引理指出，空间 X 是正规的，当且仅当每一对不交闭集都可由一个连续函数分离；也就是说，对每一个 s, t 不交且

闭的，则存在连续函数 $f\colon\ X \to \mathbb{R}$，使得 $f(s) = \{0\}, f(t) = \{1\}$。我们略微滥用记号；尽管单位区间并非特化拓扑，我们仍用 $0 \mid \ \mid 1$表示单位区间到特化预序的包含，并定义一个修改后的单位区间，其拓扑大致由

$$\left\{\ 0' \leftrightarrow 0 \longmapsto 1 \leftrightarrow 1'\ \right\}.$$

也就是说，在原来的闭区间 $[0,1]$, 上“粘上”额外的 0，1，使它们在拓扑上分别与原来的端点不可区分。 [1] 接着声称[1] ，乌雷松引理等价于提升性质

$$\varnothing \longrightarrow X \ \swarrow \left\{\ 0' \leftrightarrow 0 \longmapsto 1 \leftrightarrow 1'\ \right\} \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} & (0,1) & \\ 0' = 0 \swarrow & & \searrow 1 = 1' \end{array} \right\}.$$

不过，这样做并不完全奏效。现在我们给出一个稍作修改的表述；在证明这一修改忠实地复现了乌雷松引理时，我们也会说明原来的表述为何行不通。

2 一种修改

我们来定义“端点加倍区间” I_0^1，它是在原论文基础上稍作修改的：取闭单位区间 $[0,1],$，再在其上粘上一个 $0'$, $1'$；不过这里我们只令 $0 \rightsquigarrow 0'$ 和 $1 \rightsquigarrow 1'$，而不是让它们不可区分。于是我们可以用乌雷松引理为正规空间定义一种提升性质：空间 X 是正规空间，当且仅当对所有 χ，下列方块都有提升：

$$\begin{array}{ccc} \varnothing & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccc} & 0 \longmapsto 1 & \\ 0' \swarrow & & \searrow 1' \end{array} \right\} \overset{\iota}{\longmapsto} \left\{\ 0' = 0 \longmapsto 1 = 1'\ \right\} \\ \downarrow & \overset{\exists\lambda}{\nearrow} & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\chi} & \left\{ \begin{array}{ccc} & 0 = 1 & \\ 0' \swarrow & & \searrow 1' \end{array} \right\} \end{array}$$

证明。 我们可以将 X 中选定的一对闭集读作闭点 $0', 1'$ 在底部箭头 χ 下的纤维 $s \equiv \chi^{-1}(0')$ $t \equiv \chi^{-1}(1')$；沿 π 的提升 λ 随即给出一个到修改后的区间 I_0^1 的连续映射。由于图表可交换，这两个闭集现在是 I_0^1 中的原像 $\lambda^{-1}($ $0')$ $\lambda^{-1}(1')$。与 $\iota = \left\{\ 0' \prec \ \ 0 \mid \ \mid 1 \ \ \succ 1'\ \right\} \mapsto \left\{\ 0' = 0 \mid \ \mid 1 = 1'\ \right\}$ 复合后，我们得到一个到通常区间 I 的连续映射，其中$\lambda^{-1}(0') \subseteq (\iota \circ \lambda)^{-1}(0)$，而 $\lambda^{-1}(1') \subseteq (\iota \circ \lambda)^{-1}(1)$；换言之， s, t 可由连续映射$\iota \circ \lambda$分离；根据乌雷松引理， X 是正规空间。

反过来，假设 X 是正规空间，因此对于任意一对不交闭集 s， t ，都存在一个分离它们的连续映射 $\lambda' : X \to I$。于是我们可以定义

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0' & x \in s \\ 0 & \lambda'(x) = 0 \wedge x \notin s \\ 1' & x \in t \\ 1 & \lambda'(1) = 1 \wedge x \notin t \\ \lambda'(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

由此可知， $\lambda' = \iota \circ \lambda$，而选择 $\chi = \pi \circ \lambda$ 即可使上述提升方块交换。 □

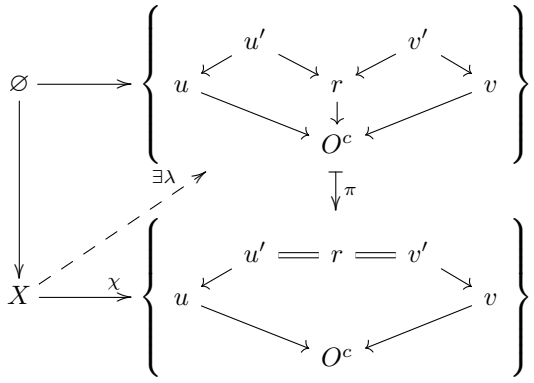
请注意，要使这一构造成立， I_0^1需要一个从 π到 $\{L\prec \ \ 0 \ \ \succ R\}$的态射，以及一个从 ι到 $[0,1]$的态射，使得纤维 $\pi^{-1}($ $L)$ 是 $\subsetneq \iota^{-1}(0)$ 的真子集，对于 $\pi^{-1}(R) \subsetneq \iota^{-1}(1)$ 也同样如此。如果像 $[1],$那样，我们将I_0^1定义为带有 $0' \leftrightarrow 0$和 $1 \leftrightarrow 1'$，那么 $[0,1]$ 的像在 I_0^1中就不会是开集，我们将不得不只将

[1]事实上，作者声称 $\varnothing \to X$ 可相对于 $\cdots \mapsto \left\{\ 0' \quad 0 \quad \succ [0,1] \prec \quad 1 \quad 1'\ \right\}$提升。反转箭头，并假设作者本意是仅将开区间 $(0,1)$ 映至中心点，这样一来该映射就是连续的，但也许作者另有所指。

开区间 (0，1) 映到 $\{L< \quad 0 \quad >R\}$中的开中心点，并且我们会有 $\pi^{-1}(L) = \iota^{-1}(0)$，对于 R，1 也同样如此。在这种情况下，我们改为复现完全正规空间的论证，其中不交闭集恰好可以由一个连续函数分离。

3 一种简化

作为补充，我们还注意到，将遗传正规空间刻画为提升性质的表述可以加以简化。回顾一下，遗传正规空间可以定义为这样一种空间：其中每个开子空间本身都是正规的。于是，我们可以机械地将正规空间的提升性质转换为遗传正规空间的提升性质：将定义态射“提升”到一个新的闭点之上，该闭点成为每个所考虑开集的补集的目标。也就是说，由下式给出的提升方块



直接翻译了该定义。

4 结论

在这里，我们给出了将标准拓扑分离公理翻译为范畴语言的两种方式。使用 Mathlib 在 Lean 中完成的形式化版本可见于 https://github.com/robertmaxton42/mathlib4/tree/separation。

参考文献

[1]Misha Gavrilovich, 《提升性质在初等数学中的不合理威力》, 2017（arXiv:1707.06615）