arXiv:2602.11206v1 [cs.LG] 10 Feb 2026

UltraLIF：通过超离散化与极大-加代数实现完全可微的脉冲神经网络

Jose Marie Antonio Mi˜noza [1]

摘要

脉冲神经网络（SNN）具有能效高、生物学合理的计算优势，但脉冲生成不可微，因此不得不依赖启发式替代梯度。本文提出**UltraLIF**，这是一个原理清晰的框架，以超离散化取代替代梯度。超离散化是源自热带几何的一种数学形式体系，可为离散动力学提供连续松弛。其核心洞见在于，超离散化所基于的最大加法半环能够自然地描述神经元阈值动力学：对数和指数函数充当可微的软最大值，并在可学习温度参数 $\varepsilon \to 0$ 的作用下趋近于硬阈值化。本文根据不同的动力系统推导出两种神经元模型：UltraLIF源自LIF常微分方程（时序动力学），UltraDLIF则源自描述神经元群体间缝隙连接耦合的扩散方程（空间动力学）。两者均得到完全可微的脉冲神经网络，可通过标准反向传播进行训练，且不存在前向与反向传播不匹配的问题。理论分析证明，该方法逐点收敛至经典LIF动力学，并具有定量误差界和有界非消失梯度。在涵盖静态图像、神经形态视觉和音频的六项基准测试中，实验结果表明，该方法优于替代梯度基线；在神经形态和时序数据集的单时间步长（T=1）设置中，优势尤为显著。可选的稀疏性惩罚能够在保持准确率具有竞争力的同时，大幅降低能耗。

1. 引言

脉冲神经网络（SNN）是实现高能效机器学习的一种前景广阔的范式，在能耗方面具有显著潜力——在神经形态硬件部署方面潜力巨大（Maass，1997；Roy 等人，2019）。与通过连续激活进行通信的人工神经网络（ANN）不同，SNN 通过离散的脉冲事件处理信息，模拟生物神经计算。这种由事件驱动的特性能够大幅降低能耗；英特尔的 Loihi 芯片在某些任务上的能耗比图形处理器降低多达 1000×（Davies 等人，2018）。

然而，由于脉冲生成不可微，脉冲神经网络的训练仍然具有挑战性。标准的漏积分发放（LIF）神经元遵循以下动力学：

$$v^{(t+1)} = \tau v^{(t)} + I^{(t)} \tag{1}$$

$$s^{(t+1)} = H(v^{(t+1)} - \theta) \tag{2}$$

其中，海维赛德阶跃函数 $H(\cdot)$ 几乎处处梯度为零。主流方法采用替代梯度，在反向传播过程中以平滑近似替代真实梯度（Neftci 等人，2019；Zenke 与 Vogels，2021年）。尽管在经验上效果显著，替代梯度仍使前向（离散）与反向（连续）传播过程存在根本性不匹配（图1a），且对收敛性质的理论理解有限（Li 等人，2021年；Gygax 与 Zenke，2025年）。

本文提出了**UltraLIF**，这是一种具有理论依据的替代方案，其基础是超离散化——一种热带几何中的极限过程，可将连续动力系统转化为离散最大加系统，同时保留其结构性质（Tokihiro 等人，1996年；Grammaticos 等人，2004年）。主要贡献如下：

1. **有理论依据的可微性**：对数和指数 函数为脉冲生成所依赖的最大值运算提供了自然的软松弛，并给出了明确的收敛界（$\varepsilon \to 0$引理3.2）。

2. **前向-反向一致性**：与替代方法不同，UltraLIF 在前向传播和反向传播中采用相同的动力学，从而消除梯度不匹配（备注 5.6）。

3. **有界梯度**：对于 $\varepsilon > 0$，梯度始终有界且不会消失，从而能够实现稳定优化（命题 5.4）。

[1]Center for AI Research PH。通信作者：Jose Marie AntonioMi˜noza <jminoza@upd.edu.ph>。

预印本。*2026*年*2*月*13*日。

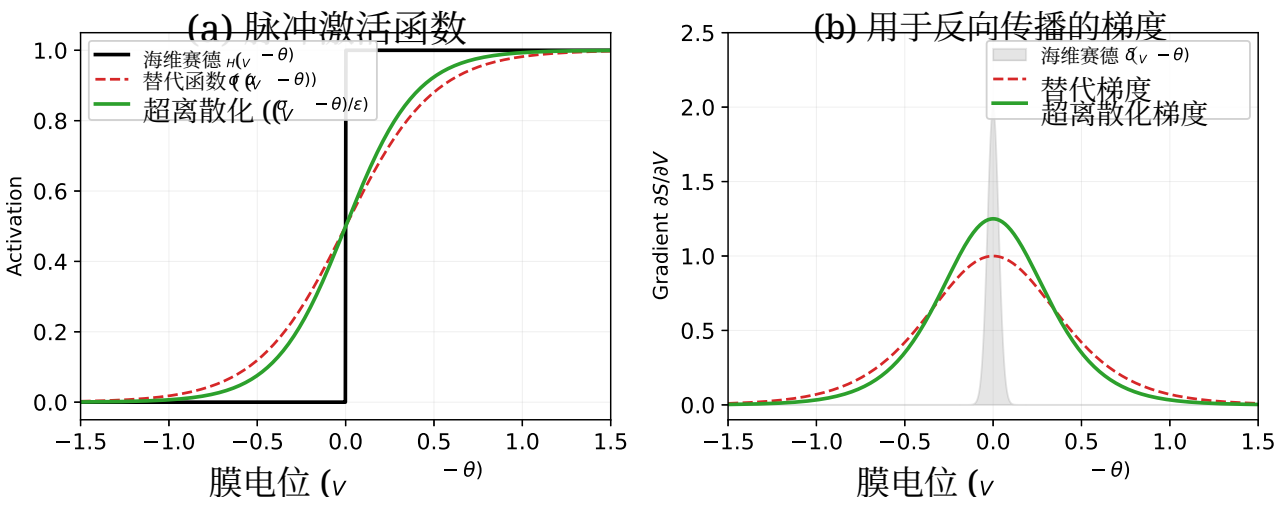


图 *1.* **(a)** 脉冲激活函数：海维赛德（硬阈值）、替代梯度（平滑近似）和超离散化（有理论依据的软松弛）。**(b)** 梯度：海维赛德几乎处处梯度为零（阈值处为狄拉克δ函数）；替代函数和超离散化均提供平滑梯度，但只有超离散化能够保持前向-反向一致性。

4.**低时间步长下的稳定提升**：在涵盖静态、神经形态和音频模态的六项基准测试中，超离散化模型在 T=1 下的表现优于代理梯度基线方法；在时间序列和事件驱动数据上提升最大（SHD 提升 +11.22%，DVS-Gesture 提升 +7.96%，N-MNIST 提升 +3.91%）。

2. 相关工作

替代梯度方法。 脉冲神经网络直接训练的主流范式，是用平滑替代函数取代不可微的脉冲梯度（Neftci 等人，2019）。常见选择包括分段线性函数（Bellec 等人，2018）、Sigmoid函数（Zenke 和 Ganguli，2018）和反正切函数（Fang 等人，2021）。近期研究引入了可学习的替代参数（Lian 等人，2023）和自适应形状（Li 等人，2021）。尽管这种方法在实证研究中取得了成功，前向传播与反向传播之间的不匹配在理论上仍然存在问题。 Gy- gax 和 Zenke (2025) 通过随机神经元提供了部分理论依据，表明替代梯度在期望意义上与逃逸噪声导数相匹配。

脉冲时序方法。 SpikeProp（Bohte 等人，2002年）及其变体（Mostafa，2018；Kheradpisheh 和 Masquelier，2020年）计算相对于脉冲时间的精确梯度。这些方法需要仔细初始化，且难以处理静默神经元。近期关于通过脉冲时序计算精确平滑梯度的研究（G¨oltz 等人，2021年）解决了部分局限，但计算开销仍然很大。

人工神经网络到脉冲神经网络的转换。 另一种方法是先训练传统人工神经网络，再将其转换为脉冲神经网络（Cao 等人，2015；Rueckauer 等人，2017；Bu 等人，2022年）。虽然这种方法避免了脉冲神经网络直接训练，但转换方法通常需要许多时间步才能达到人工神经网络的准确率，并且会牺牲时间步长——时间动力学。

热带几何与神经网络。 热带几何研究的是这样一种代数结构：其中加法变为取最大值（或最小值），乘法变为加法（Maclagan 和 Sturmfels，2015）。Zhang 等人（2018）证明，ReLU网络计算的是热带有理函数。近期研究将这一结论扩展至图神经网络（Pham 和 Garg，2024年）和神经网络压缩（Fotopoulos 等人，2024年）。通过超离散化建立脉冲网络与热带几何之间的联系，似乎是一个新颖的发现。

超离散化。 起源于可积系统（Tok- ihiro 等人，1996年），超离散化将差分方程转化为元胞自动机，同时保留解的结构。应用包括孤子系统（Takahashi 与 Sat- suma，1990）和极限环分析（Yamazaki 与 Ohmori，2023；2024年）。此前尚未探索其在神经网络中的应用。

3. 预备知识

3.1. 最大加法半环

定义 3.1（最大加法半环）。最大加法半环 是代数结构 $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ \oplus,\ \odot)$，其中：

- $a \oplus b := \max(a,\ b)$（热带加法）
- $a \odot b := a + b$ (热带乘法)

其中加法单位元为 $-\infty$，乘法单位元为 0。

这个半环是热带几何的基础，并为超离散化提供了极限结构。

3.2. 对数和指数作为软最大值

温度为 $\varepsilon > 0$ 的对数和指数函数定义如下：

$$\mathrm{LSE}_\varepsilon(\mathbf{x}) := \varepsilon \log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i/\varepsilon}\right) \tag{3}$$

下面的引理阐明了其作为最大值的平滑近似的作用。

引理 3.2（LSE 收敛）。设 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 且 $M := \text{最大值}_i\, x_i$。则 $M \le \text{对数和指数}_\varepsilon(\mathbf{x}) \le M + \varepsilon$ 对数 n，因此 $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \text{对数和指数}_\varepsilon(\mathbf{x}) = M$。此外，$\nabla \text{对数和指数}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathrm{softmax}(\mathbf{x}/\varepsilon) \in (0,\ 1)^n$。

证明。对于下界，由于求和中包含 $e^{M/\varepsilon}$，因此对数和指数$_\varepsilon(\mathbf{x}) \ge \varepsilon \log(e^{M/\varepsilon}) = M$。对于上界，由于 $x_i \le M$ 对所有 i均成立，因此对数和指数$_\varepsilon(\mathbf{x}) \le \varepsilon \log(n \cdot e^{M/\varepsilon}) = M + \varepsilon \log n$。根据夹逼定理可得该极限。梯度公式可通过直接求导得到：$\frac{\partial \text{对数和指数}_\varepsilon}{\partial x_j} = \frac{e^{x_j/\varepsilon}}{\sum_i e^{x_i/\varepsilon}} = \mathrm{softmax}(\mathbf{x}/\varepsilon)_j$。□

注释 3.3。当最大值唯一且间隔为 $\delta := M - \max_{i:x_i \ne M} x_i > 0$ 时，误差呈指数衰减：$\mathrm{LSE}_\varepsilon(\mathbf{x}) - M = O(\varepsilon e^{-\delta/\varepsilon})$。

4. 方法：超离散化脉冲神经元

本研究的关键创新是应用超离散化——一种源自热带几何的极限过程——来推导可微分的脉冲神经元。本节展示了超离散化可应用于不同的神经动力学，从而为时间和空间计算生成不同的模型。

4.1. 超离散化框架

超离散化将连续动力系统转化为 max-plus（热带）系统，同时保留其结构性质（Tokihiro 等人，1996 年）。该过程通过代换 $x = e^{X/\varepsilon}$，再取极限$\varepsilon \to 0^+$:

$$x + y = e^{X/\varepsilon} + e^{Y/\varepsilon} \to e^{\max(X,Y)/\varepsilon} \quad (\text{addition} \to \max) \tag{4}$$

$$x \cdot y = e^{X/\varepsilon} \cdot e^{Y/\varepsilon} = e^{(X+Y)/\varepsilon} \quad (\text{multiplication} \to \text{addition}) \tag{5}$$

对于有限的 $\varepsilon > 0$，对数和指数函数 LSE_ε（方程 3）为 max 运算提供了一种可微的软松弛。这是本文所介绍的所有超离散化神经元的基础。

4.1.1. 时间动力学：UltraLIF

UltraLIF 源自标准的单神经元 LIF 常微分方程。膜电位的演化遵循：

$$\tau_m \frac{dv}{dt} = -(v - v_{\text{rest}}) + R \cdot I(t) \tag{6}$$

其中，τ_m 为膜时间常数，v_{rest} 为静息电位，R 为膜电阻，$I(t)$为输入电流。

采用时间步长为 Δt 的前向欧拉离散化，并令 $v_{\text{rest}} = 0$，得到：

$$v^{(t+1)} = \underbrace{\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_m}\right)}_{=:\tau_0} v^{(t)} + I^{(t)} \tag{7}$$

其中，泄漏因子 $\tau_0 \in (0,1)$ 控制时间衰减。

超离散化变换（Tokihiro 等人，1996年）通过代入 $v = e^{V/\varepsilon}$，$I = e^{J/\varepsilon}$，并将泄漏参数化为 $\tau = e^{T/\varepsilon}$ 其中 $T = \log \tau_0 < 0$:

$$e^{V^{(t+1)}/\varepsilon} = e^{T/\varepsilon} \cdot e^{V^{(t)}/\varepsilon} + e^{J^{(t)}/\varepsilon} = e^{(V^{(t)}+T)/\varepsilon} + e^{J^{(t)}/\varepsilon} \tag{8}$$

对两边取 $\varepsilon \cdot \log$，并取极限 $\varepsilon \to 0^+$，可恢复最大加动力学：

$$V^{(t+1)} = \max\left(V^{(t)} + T,\ J^{(t)}\right) = \max\left(V^{(t)} + \log \tau_0,\ J^{(t)}\right) \tag{9}$$

为实现可微训练，对于有限的 $\varepsilon > 0$，将硬最大值放宽为对数和指数：

$$V_\varepsilon^{(t+1)} = \mathrm{LSE}_\varepsilon\left(V^{(t)} + \log \tau_0,\ I^{(t)}\right) \tag{10}$$

该二**项对数和指数** 刻画了带有可学习泄漏的时序膜积分。请注意，ε参数化的泄漏$\tau = e^{T/\varepsilon}$ 会随着 $\varepsilon \to 0$ 增强，从而在热带极限下产生更尖锐的时序动力学。

4.1.2. 空间动力学：UltraDLIF

一种类似的推导将超离散化应用于空间动力学，以刻画神经元群体中的横向相互作用。考虑一种简化的扩散耦合，其中膜电位在局部扩散：

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\nabla^2 v \tag{11}$$

其中 $D > 0$ 为扩散系数。这模拟了缝隙连接（电突触）耦合：离子电流直接在神经元之间流动，从而使电压扩散（Connors 和 Long，2004年；Spek 等人，2020年）。扩散

方程对这种横向相互作用提供了一阶近似。

通过有限差分 $\nabla^2 v \approx (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1})/\Delta x^2$ 对拉普拉斯算子进行离散化，并在时间上应用前向欧拉法，得到：

$$v_i^{(t+1)} = v_i^{(t)} + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}(v_{i-1}^{(t)} - 2v_i^{(t)} + v_{i+1}^{(t)}) \tag{12}$$

在 $D\Delta t/\Delta x^2 = 1/3$的平衡扩散区间，这可简化为均匀的空间平均，即每个神经元及其邻居的贡献相等：

$$v_i^{(t+1)} = \frac{1}{3}v_{i-1}^{(t)} + \frac{1}{3}v_i^{(t)} + \frac{1}{3}v_{i+1}^{(t)} \tag{13}$$

这种 $1/3$ 的取值处于应用于一维扩散方程的显式有限差分格式的冯·诺依曼稳定性界限内；数值稳定性要求满足 $D\Delta t/\Delta x^2 \leq 1/2$。值 $1/3$ 既能确保稳定性，又能对神经元及其直接邻居进行对称处理，从而为侧向耦合提供自然的平衡。

关于减法的说明。标准超离散化无法直接处理减法，因为最大加法半环中不存在 $x - y$ 的热带类比（Ochiai & Nacher, 2005）。这一限制可通过选择 $\alpha = 1/3$来规避：展开方程（12）后，三个项的系数分别为 α、$(1-2\alpha)$、 α ；当 $\alpha = 1/3$ 时，它们都会变成 $1/3 > 0$，从而完全消除减法（方程（13））。对于更一般的扩散区间，可逆最大加代数可通过 $x - y \to \max(X,\ Y + \eta)$来扩展这一框架，以处理减法，其中 η 是一个逆元（Ochiai&Nacher, 2005）。

应用超离散化变换，并取 $v = e^{V/\varepsilon}$ 和 $\varepsilon \to 0^+$:

$$V_i^{(t+1)} = \max\left(V_{i-1}^{(t)}, V_i^{(t)}, V_{i+1}^{(t)}\right) \tag{14}$$

该极限对应于 形态学膨胀，这是一种在空间邻域上进行的最大池化操作。

将硬最大值放宽为有限 $\varepsilon > 0$ 下的对数和指数，得到：

$$V_{i,\varepsilon}^{(t+1)} = \mathrm{LSE}_\varepsilon\left(V_{i-1}^{(t)}, V_i^{(t)}, V_{i+1}^{(t)}\right) \tag{15}$$

这三**项对数和指数**体现了神经元之间的侧向空间平滑。外部输入 $I_i^{(t)}$ 单独添加（公式19），遵循标准的神经场惯例：扩散负责侧向耦合，而加性项表示外部驱动。

4.1.3. 推导比较

两种模型共享相同的理论基础（超离散化、对数和指数软松弛），但捕捉的是不同的

	UltraLIF	UltraDLIF
来源	LIF常微分方程	扩散偏微分方程
方程	$dv/dt = -v/\tau_m + I$	$\partial v/\partial t = D\nabla^2 v$
LSE项	2（时间）	3（空间）
软形式	对数和指数($V + \log\ \tau_0,\ I$)	对数和指数($V_{-1},\ V_0,\ V_{+1}$)
模型	膜衰减	横向扩散

表 *1.* 将超离散化应用于时间和空间动力学。

生物现象。UltraLIF对单神经元时间动态进行建模；UltraDLIF对群体层面的空间相互作用进行建模。

4.2. 神经元模型

基于超离散化框架，定义了包含脉冲生成和重置机制的完整神经元模型。两种变体共享相同的脉冲和重置逻辑，仅膜动力学不同。

定义 4.1（UltraLIF神经元（时间型））。 对于温度 $\varepsilon > 0$、泄漏因子 $\tau_0 \in (0,\ 1)$ 和阈值 $\theta > 0$:

$$\tilde{V}_\varepsilon^{(t+1)} = \mathrm{LSE}_\varepsilon\left(V_\varepsilon^{(t)} + \log\tau_0,\ I^{(t)}\right) \tag{16}$$

$$s_\varepsilon^{(t+1)} = \sigma\left(\frac{\tilde{V}_\varepsilon^{(t+1)} - \theta}{\varepsilon}\right) \tag{17}$$

$$V_\varepsilon^{(t+1)} = \tilde{V}_\varepsilon^{(t+1)} \cdot (1 - s_\varepsilon^{(t+1)}) + V_{\text{reset}} \cdot s_\varepsilon^{(t+1)} \tag{18}$$

其中， $\sigma(z) = (1 + e^{-z})^{-1}$ 是逻辑S形函数，且 $V_{\text{reset}} = 0$。

定义 4.2（UltraDLIF神经元（空间））。 对于温度 $\varepsilon > 0$、阈值 $\theta > 0$和神经元索引 i:

$$\tilde{V}_{i,\varepsilon}^{(t+1)} = \mathrm{LSE}_\varepsilon\left(V_{i-1,\varepsilon}^{(t)}, V_{i,\varepsilon}^{(t)}, V_{i+1,\varepsilon}^{(t)}\right) + I_i^{(t)} \tag{19}$$

$$s_{i,\varepsilon}^{(t+1)} = \sigma\left(\frac{\tilde{V}_{i,\varepsilon}^{(t+1)} - \theta}{\varepsilon}\right) \tag{20}$$

$$V_{i,\varepsilon}^{(t+1)} = \tilde{V}_{i,\varepsilon}^{(t+1)} \cdot (1 - s_{i,\varepsilon}^{(t+1)}) + V_{\text{reset}} \cdot s_{i,\varepsilon}^{(t+1)} \tag{21}$$

对数和指数运算在空间邻域上进行（采用循环边界条件）。

软脉冲机制。 软脉冲 $s_\varepsilon \in (0,1)$ 在不发放脉冲（$s_\varepsilon \approx 0$）和发放脉冲（$s_\varepsilon \approx 1$）之间进行插值。这与替代函数梯度方法有本质区别：

- **替代函数**：前向传播使用硬 $H(V - \theta)$；反向传播使用平滑的 $g'(V)$
- **超离散化**：前向传播和反向传播都使用相同的平滑 $\sigma((V - \theta)/\varepsilon)$

关于软脉冲与二值脉冲。一个自然的疑问是$s_\varepsilon \in (0,1)$ 并不代表"真正的"二值脉冲。然而，实际应用中，这种偏离二值行为的情况并不会造成问题。训练期间使用软脉冲来计算梯度，而在推理时，可以采用小ε或硬阈值化（$s = H(V-\theta)$）进行神经形态部署，这遵循了标准的训练与推理分离方式，类似于丢弃法或批归一化。此外，输出层使用平均脉冲率$\hat{y} = \frac{1}{T}\sum_t s^{(t)}$，由于分类决策取决于聚合活动，而非精确的脉冲值，因此它对单个脉冲是软是硬具有内在鲁棒性。稀疏性惩罚 $\lambda \cdot \bar{s}$ 会促使软激活保持稀疏，并在极限情况下对应于稀疏的硬脉冲，从而确保实现高能效推理。最重要的是，命题5.2 保证了 $s_\varepsilon \to H(V-\theta)$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时成立，为从软训练动态到二值推理行为提供了理论依据。

可学习参数。温度 ε 通过 $\varepsilon = \exp(\log \varepsilon_{\text{param}})$设为可学习，并初始化为 $\varepsilon_0 = 1.0$。对于UltraLIF，泄漏因子 τ_0 也可学习（UltraPLIF变体）。对于UltraDLIF，类似地，UltraDPLIF学习 τ_0以用于可选的时间成分。训练过程中，网络会发现最优的软硬折中，从而实现自动课程学习。

4.3. 网络架构

构建一个具有 L 层UltraLIF 神经元的前馈脉冲神经网络：

$$I_l^{(t)} = W_l \cdot s_{l-1}^{(t)} + b_l \tag{22}$$

$$V_l^{(t+1)} = \text{LSE}_\varepsilon\left(V_l^{(t)} + \log\tau_0,\, I_l^{(t)}\right)(1 - s_l^{(t)}) + V_{\text{reset}} \cdot s_l^{(t)} \tag{23}$$

$$s_l^{(t+1)} = \sigma\left((V_l^{(t+1)} - \theta)/\varepsilon\right) \tag{24}$$

其中 $l \in \{1,\ldots,L\}$ 为层索引。输出层采用脉冲率编码：

$$\hat{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} s_L^{(t)} \tag{25}$$

5. 理论分析

5.1. 向 LIF 动力学收敛

引理 5.1 (Sigmoid 收敛)。 令 $\sigma_\varepsilon(x) := \sigma(x/\varepsilon)$。对于 $x \neq 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sigma_\varepsilon(x) = H(x)$，其指数收敛速率为 $|\sigma_\varepsilon(x) - H(x)| \le e^{-|x|/\varepsilon}$。

证明。 对于 $x > 0$: $\sigma_\varepsilon(x) = (1+e^{-x/\varepsilon})^{-1} \to 1$，因为 $\varepsilon \to 0^+$。对于 $x < 0$: $\sigma_\varepsilon(x) = e^{x/\varepsilon}/(e^{x/\varepsilon}+1) \to 0$，因为 $\varepsilon \to 0^+$。误差界由 $|1-\sigma_\varepsilon(x)| = e^{-x/\varepsilon}/(1+e^{-x/\varepsilon}) \le e^{-x/\varepsilon} = e^{-|x|/\varepsilon}$ 得出，其中 $x > 0$。对于 $x < 0$: $|\sigma_\varepsilon(x)| = 1/(1+e^{-x/\varepsilon}) \le e^{x/\varepsilon} = e^{-|x|/\varepsilon}$。 □

命题 *5.2*（向 *LIF* 收敛）。令 $\{V_\varepsilon(t)\}$ 表示温度为 $\varepsilon > 0$ 的 *UltraLIF* 轨迹，且$\{v(t)\ s(t)\}$ 表示具有 $V_{\text{reset}} = 0$ 的标准 *LIF* 轨迹。假设 *(A1)* 有界输入 $|I(t)| \le I_{\max}$，以及 *(A2)* 阈值裕量 $\delta_t := |v(t) - \theta| > 0$。则对于每个 t，有 $\lim_{\varepsilon\to 0^+} V_\varepsilon(t) = v(t)$ 和 $\lim_{\varepsilon\to 0^+} s_\varepsilon(t) = s(t)$，其中 $|V_\varepsilon(t) - v(t)| \le t \cdot \varepsilon \log 2$，且 $|s_\varepsilon(t) - s(t)| \le e^{-\delta_t/\varepsilon}$。误差的线性增长源于 *LSE* 的 *1-Lipschitz* 性质*ε*(引理 *C.1)*以及重置插值的非扩张性。违反 *(A2)* 的输入集合的勒贝格测度为零。

证明。对 t 进行强归纳。基例：$V_\varepsilon(0) = v(0)$；根据引理 5.1，脉冲收敛。对于归纳步骤，满足以下条件的更新 $F_\varepsilon(V) = V(1-s_\varepsilon) + V_{\text{reset}} \cdot s_\varepsilon$ with $V =$ 对数和指数$\varepsilon(V + \log\tau_0, I)$: (i) 无脉冲（$s_\varepsilon \to 0$）：$F_\varepsilon \to \max(v(t) + \log\tau_0, I(t)) = v(t+1)$; (ii) 有脉冲（$s_\varepsilon \to 1$）：$F_\varepsilon \to V_{\text{reset}} = 0$，与 LIF 重置相符。每一步最多增加 $\varepsilon\log 2$ 的误差（引理 3.2 ）；凸重置插值不会放大误差。完整细节见附录 C。

□

推论 5.3 (UltraDLIF 收敛)。 对于 *UltraDLIF*，也有类似结果：当 $\varepsilon \to 0^+$时，*3* 项对数和指数$\varepsilon(V_{i-1}, V_i, V_{i+1}) \to \max(V_{i-1}, V_i, V_{i+1})$，根据引理 *3.2*，误差为 n=3；完整的 *UltraDLIF* 轨迹收敛于极大加扩散动力学（式*14*），误差界为$|V_{i,\ \varepsilon}(t) - V_i(t)| \le t \cdot \varepsilon\log 3$。

5.2. 梯度性质

命题 5.4 (有界非消失梯度)。 对于任意 $\varepsilon > 0$，考虑单步脉冲输出 $s_\varepsilon = \sigma((V_\varepsilon - \theta)/\varepsilon)$，其中 V_ε 是重置前电压。对于所有有限的 $\tilde{V}_\varepsilon$，梯度满足 $0 < \frac{\partial s_\varepsilon}{\partial \tilde{V}} \le \frac{1}{4\varepsilon}$。对于权重 W *with input* x *at a single layer:* $\left|\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial W_{ij}}\right| \le \frac{\|x\|_\infty}{4\varepsilon}$.

证明。 令 $z = (V_\varepsilon - \theta)/\varepsilon$。则 $\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial V_\varepsilon} = \frac{\sigma(z)(1-\sigma(z))}{\varepsilon}$。函数 $\sigma(1-\sigma)$ 在 $\sigma = 1/2$ 处取得最大值 $1/4$，由此得出上界。对于有限的 z，由于$\sigma(z) \in (0,1)$，因此其为正。权重梯度的界可由链式法则得出：$\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial W_{ij}} = \frac{\partial s_\varepsilon}{\partial V_\varepsilon} \cdot \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial I} \cdot x_j$，其中 LSE 梯度为 softmax，其值介于 (0,1) 之间。 □

推论 5.5 (梯度缩放)。 温度 ε 控制梯度中的偏差-方差权衡：

- *Larger ε: smaller gradients, smoother optimization landscape*

• 较小的 ε：阈值附近的梯度更大，*LIF* 近似效果更好

5.3. 前向-反向一致性

备注 5.6（梯度一致性）。 对于任意 $\varepsilon > 0$，Ultra-LIF 是一系列平滑运算（对数和指数$_\varepsilon$、Sigmoid函数、仿射映射）的复合，因此链式法则可精确适用：反向传播对前向计算的同一函数求导。替代方法在前向传播时使用 $H(V-\theta)$，但在反向传播时对替代函数 $g(V-\theta)$ 求导；Gygax 与 Zenke (2025年) 指出，这可以解释为对带有逃逸噪声的随机前向传播求导。UltraLIF 避免了这种不匹配：$\nabla_W \mathcal{L}(f_\varepsilon(\mathbf{x};\ W))$ 是实际前向计算的精确梯度。

5.4. 与热带几何的联系

定理 5.7（热带极限）。 映射 $D_\varepsilon : (\mathbb{R}_{>0}, +, \cdot) \to (\mathbb{R}, \oplus_\varepsilon, +)$ 由 $D_\varepsilon(x) = \varepsilon$对数 x定义，其中 $a \oplus_\varepsilon b =$对数和指数$_\varepsilon(a, b)$，是一个半环同态。当 $\varepsilon \to 0^+, \oplus_\varepsilon \to \oplus =$取最大值（热带加法）时，*UltraLIF* 动力学收敛到 $\mathbb{R}_{\max}$ 上的分段线性映射，决策边界则趋近于热带超曲面。

证明。 $D_\varepsilon(x \cdot y) = \varepsilon\log(xy) = D_\varepsilon(x) + D_\varepsilon(y)$（乘法 $\to$ 加法），而 $D_\varepsilon(x + y) = \varepsilon\log(x + y) =LSE_\varepsilon$ $(D_\varepsilon(x)\ D_\varepsilon(y))$（加法 $\to$ soft-max）。令 $\varepsilon \to$0，依据引理 3.2 可得热带半环。分段线性极限和热带超曲面结构由 Zhang 等人（2018）得出。 □

6. 实验

设置。 评估涵盖六个基准测试：静态图像（MNIST、Fashion-MNIST、CIFAR-10）、神经形态视觉（N-MNIST、DVS-Gesture）和音频（SHD）。所有实验均使用包含 64 个神经元的单个隐藏层，时间步数为 $T \in \{1, 10, 30\}$。基线方法包括 LIF、PLIF、AdaLIF、FullPLIF 和 DSpike/DSpike+，并采用替代梯度。评估了全部四种超离散化变体（UltraLIF、UltraPLIF、UltraDLIF、UltraDPLIF）。可选的稀疏性惩罚 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{CE}} + \lambda \cdot \bar{s}$ 可实现明确的准确率-效率权衡。能耗通过相对突触运算（SOP）计数进行估算 (Lemaire 等人，2023)。由于所有模型共享相同的架构（附录D），该计数与计算能耗成正比。

单时间步优势。 超离散化模型的优势在 T=1 （表 9）中最为显著，此时模型必须从单次前向传播中提取最大信息。尤为重要的是，**在神经形态和时序数据集上，性能提升幅度最大**：SHD（+11.22%）、DVS-Gesture（+7.96%）、N-MNIST（+3.91%）和 CIFAR-10（+3.01%）。在较简单的静态数据集上，提升幅度较小，但

表 *2.* CIFAR-10 上的测试准确率（%）。UltraPLIF（时间）在所有时间步上均取得最佳。

模型	T=1	T=10	T=30
LIF	39.83	44.27	45.69
PLIF	39.83	45.06	46.15
AdaLIF	39.83	44.86	45.83
FullPLIF	39.60	<u>45.43</u>	46.28
DSpike	40.26	44.78	45.34
DSpike+	<u>40.26</u>	45.42	<u>46.29</u>
时间型（*LIF*常微分方程）			
UltraLIF	40.72	45.15	45.69
UltraPLIF	**43.27**	**46.19**	**46.58**
空间（扩散偏微分方程）			
UltraDLIF	43.11	45.65	45.00
UltraDPLIF	43.11	45.75	45.74

表 *3.* CIFAR-10 上的能效。能耗 = 相对SOP计数 ($T \cdot \bar{s}$)。稀疏性惩罚 λ 可在准确率损失极小的情况下降低脉冲率。在 T=30下，采用 λ=0.1 的 UltraPLIF 达到**最佳准确率**，同时将能耗降低 50%。

模型	T	准确率 (%)	脉冲	能耗
LIF	1	39.83	0.404	0.40
DSpike+	1	40.26	0.386	0.39
UltraPLIF	1	43.27	0.458	0.46
UltraPLIF (λ=0.1)	1	**43.60**	**0.240**	**0.24**
PLIF	10	45.06	0.356	3.56
UltraDPLIF	10	45.75	0.469	4.69
UltraDPLIF (λ=0.1)	10	**45.32**	**0.338**	**3.38**
PLIF	30	46.15	0.377	11.30
UltraPLIF	30	46.58	0.500	15.01
UltraPLIF (λ=0.1)	30	**46.98**	**0.248**	**7.44**

表现稳定：Fashion-MNIST（+0.35%）、MNIST（+0.09%）。两种推导方式中，UltraDLIF（空间）在 N-MNIST、SHD 和 MNIST 上表现更佳，而 UltraPLIF（时间）在 CIFAR-10、Fashion-MNIST 和 DVS-Gesture 上表现更佳（表15），这表明两种变体各有优势，能够互为补充。

神经形态数据集性能。表6、7和8 表明，在 T=1上，超离散化模型在神经形态基准测试中的表现远超基线方法。在 N-MNIST 上，UltraDLIF 的准确率达到 94.14%，高于 DSpike 的 90.23%（+3.91%）。在 DVS-Gesture 上，UltraPLIF（时间）的表现最佳：准确率为 60.23%，高于 PLIF 的 52.27%（+7.96%）。这些数据集捕获了动态视觉传感器产生的异步事件，其中时间结构至关重要。与硬阈值替代方法相比，软最大加法动力学似乎更适合从稀疏的事件驱动输入中提取信息。

稀疏性-准确率权衡。 如果不施加稀疏性惩罚，超离散化模型的脉冲率往往高于基线方法（例如，CIFAR-10 T=1：UltraPLIF 为 0.458，LIF

表 4. MNIST 上的测试准确率（%）。UltraDLIF（空间）在 T=1 时表现最佳；UltraPLIF（时间）在 T=30 时表现最佳。

模型	T=1	T=10	T=30
LIF	95.34	**97.45**	97.45
PLIF	95.34	97.40	97.33
AdaLIF	95.34	97.43	97.45
FullPLIF	95.27	97.33	97.31
DSpike	95.58	97.38	97.48
DSpike+	95.58	97.39	97.27
时间型（*LIF*常微分方程）			
UltraLIF	94.37	97.14	97.46
UltraPLIF	95.60	97.30	**97.55**
空间（扩散偏微分方程）			
UltraDLIF	**95.67**	97.35	97.38
UltraDPLIF	**95.67**	97.35	97.40

表 6. N-MNIST（神经形态）上的测试准确率（%）。Ultra-DLIF 在 T=1 时比基线方法高出 **+3.91%** 。

模型	T=1	T=10	T=30
LIF	88.54	97.48	97.29
PLIF	88.54	97.53	97.61
AdaLIF	88.54	97.38	97.30
FullPLIF	89.00	97.50	97.48
DSpike	90.23	97.39	97.59
DSpike+	90.23	**97.55**	97.65
时间型（*LIF*常微分方程）			
UltraLIF	90.41	96.10	95.87
UltraPLIF	93.11	96.33	95.77
空间（扩散偏微分方程）			
UltraDLIF	**94.14**	97.38	97.46
UltraDPLIF	**94.14**	97.38	**97.68**

表 5。 MNIST 上的能效。能耗 = 相对SOP计数 ($T \cdot \bar{s}$)。使用 λ=0.1 的 UltraDLIF 将脉冲率降低了 40% (0.446 → 0.268)。在 T=10下，使用 λ=0.1 的 UltraDPLIF 实现了 50% 的能耗降低。

模型	T	准确率 (%)	脉冲	能耗
LIF	1	95.34	0.388	0.39
DSpike+	1	95.58	0.403	0.40
UltraDLIF	1	95.67	0.446	0.45
UltraDLIF (λ=0.1)	1	**95.71**	**0.268**	**0.27**
DSpike+	10	97.39	0.415	4.15
UltraDLIF (λ=0.01)	10	**97.56**	0.448	4.48
UltraDPLIF (λ=0.1)	10	97.35	**0.237**	**2.37**

表 7. DVS-Gesture（神经形态）的测试准确率（%）。Ul- traPLIF 在 T=1 时达到 **+7.96%** 。

模型	T=1	T=10	T=30
LIF	52.27	67.05	**79.92**
PLIF	52.27	68.94	78.79
AdaLIF	47.73	68.94	78.79
FullPLIF	47.73	68.56	77.27
DSpike	51.14	67.42	78.79
DSpike+	51.14	66.67	78.41
时间型（*LIF*常微分方程）			
UltraLIF	58.33	**69.32**	75.00
UltraPLIF	**60.23**	68.94	75.76
空间（扩散偏微分方程）			
UltraDLIF	58.33	**69.32**	78.41
UltraDPLIF	58.33	68.56	**79.92**

为 0.404），因为软脉冲 $s_\varepsilon \in (0,\ 1)$ 即使低于阈值，也会产生非零活动。稀疏性惩罚 λ 解决了这一问题，并实现了灵活的能量-准确率权衡（表 3、5）。在 CIFAR-10 上，λ=0.1 将脉冲率降低了 48%（0.458 → 0.240），同时还提升了准确率（43.27% → 43.60%）。在 MNIST 上，λ=0.1 将脉冲率降低了 40%，达到 T=1 (0.446 → 0.268)，同时保持或略微提升了准确率。值得注意的是，在 CIFAR-10 上，UltraPLIF 在 λ=0.1 下实现了 兼具最高准确率（46.98%）和相较于无惩罚基线降低 50% 能耗的效果。

时间步缩放。 在更大的 T下，性能差距缩小，基线方法往往会反超：在 CIFAR-10 上， T=1 的优势（UltraPLIF 为+3. 01%）仍然存在，但在 T=10和 T=30时有所减弱。在 SHD 上，超离散化模型在 T=1 时大幅领先（+11.22%），但在$T\geq$10时被基线方法反超。这种模式具有一致性：在 N-MNIST 上，UltraDLIF 在 T=1 时领先 +3.91%，但在 T=10时基线方法领先。原因在于替代梯度存在前向与反向传播不匹配的问题，但当 T足够大时，脉冲率编码的平均效应会掩盖单个脉冲误差。在较低的 T下，每个脉冲承载的信息更多，因此超离散化的一致性更有价值。

可学习温度。 温度 ε 实现自动课程学习：从较软的状态（较大的 ε）开始以便于优化，然后逐渐变尖锐（较小的 ε），从而逼近离散脉冲。与 DSpike 的启发式锐度参数不同，ε 具有理论依据充分的收敛保证（命题 5.2）。消融研究（附录E.1）证实，学习得到的 ε 始终优于固定值，并收敛至 0.66–1.08 的范围。

计算成本。 与标准 LIF 相比，对数和指数运算仅带来少量额外开销（墙钟时间增加 ∼5%），但可在 GPU/TPU 上完全并行化。

7. 讨论

时间与空间实现。 UltraLIF 和 Ul- traDLIF 是通过对不同源方程（LIF 常微分方程与扩散偏微分方程）应用超离散化而得到的，形成了计算特性各异的模型。UltraLIF（两项对数和指数）刻画时间上的膜动力学；Ul- traDLIF（三项对数和指数）则对横向空间扩散进行建模。两者

表8。 SHD（音频）上的测试准确率（%）。在 T=1，UltraDLIF 比最佳基线方法（FullPLIF）高出 **+11.22%** 。基线方法在 $T \geq 10$ 领先。

模型	T=1	T=10	T=30
LIF	27.69	72.66	72.66
PLIF	27.69	71.69	73.19
AdaLIF	27.69	**74.03**	71.07
FullPLIF	40.02	71.69	72.48
DSpike	38.21	72.04	70.89
DSpike+	38.21	72.75	**73.85**
时间型（*LIF*常微分方程）			
UltraLIF	44.88	58.79	59.14
UltraPLIF	46.91	57.73	59.45
空间（扩散偏微分方程）			
UltraDLIF	**51.24**	67.62	71.60
UltraDPLIF	**51.24**	68.90	67.84

表9。 摘要： T=1 各数据集上的准确率（%）。括号内显示最佳基线和最佳超离散化模型。完整结果见表 2–8 和附录 E。

数据集	基线	最佳超离散模型	Δ
MNIST	95.58 (DSpike)	**95.67** (DLIF)	+0.09
Fashion	82.67 (DSpike)	**83.02** (PLIF)	+0.35
CIFAR-10	40.26 (DSpike)	**43.27** (PLIF)	+3.01
N-MNIST	90.23 (DSpike)	**94.14** (DLIF)	+3.91
DVS	52.27 (PLIF)	**60.23** (PLIF)	+7.96
SHD	40.02 (FullPLIF)	**51.24** (DLIF)	+11.22

共享第5节中引理和定理所提供的相同理论保证。

与替代梯度的关系。 软脉冲（17）表面上类似于Sigmoid替代函数。关键区别在于一致性：超离散化神经元在前向和反向传播中采用相同的软动力学，而替代方法在前向传播中使用硬脉冲，在反向传播中使用软梯度。这种一致性消除了 Gygax 与 Zenke(2025年) 分析的梯度失配。

生物学解释。 温度 ε 可解释为神经噪声或随机性。生物皮层神经元表现出高度不规则的放电模式（Softky &Koch，1993）；超离散化框架提供了一个有原则的模型，其中 ε 量化了这种变异性。

热带几何视角。 定理5.7 将脉冲神经网络动力学与热带代数几何联系起来。这为应用牛顿多胞体、贝祖界和热带零点定理等热带技术来分析脉冲神经网络表达能力和决策边界开辟了途径。

推论：一种新的激活函数族。超离散化框架的一个直接推论是，UltraLIF 涵盖了经典激活函数：$\mathrm{LSE}_\varepsilon(0,\ x)$可还原为 Softplus（而 ReLU 对应 $\varepsilon \to 0$），而 s_ε 则是一个缩放后的Sigmoid函数。可学习的 ε 因此能够在硬脉冲与平滑状态之间进行插值。详情及其与形态学神经网络的联系见附录B。

局限性。在我们的实验中，UltraDLIF 和 UltraDPLIF 得出了相同结果，这表明可学习泄漏τ 并未使空间变体产生差异；三项对数和指数主导了动力学。对于需要精确脉冲时序的任务，时间变体（UltraLIF）与空间变体（UltraDLIF）可能会带来不同效果。训练期间的软脉冲 $s_\varepsilon \in (0,\ 1)$偏离二值脉冲；不过，如第4.2节所述，可通过以下方式解决： (1) 在推理阶段采用硬阈值化，以便进行神经形态部署；(2) 收敛保证 $s_\varepsilon \to H(V-\theta)$ 随着 $\varepsilon \to 0$而实现；(3) 学得的 ε 收敛至适中值（0.66–1.08），在可微性与脉冲尖锐度之间取得平衡（图3）。

8. 结论

本文提出了 UltraLIF，这是一种基于热带几何超离散化理论、用于构建可微脉冲神经网络的系统化框架。两种神经元模型——UltraLIF（时间变体，源自描述膜衰减的 LIF常微分方程）和 UltraDLIF（空间变体，源自对神经元群体间缝隙连接耦合进行建模的扩散偏微分方程）——将对数和指数作为最大加动力学的软松弛，从而构建出无需替代梯度的全可微脉冲神经网络。理论分析证明了其收敛至经典LIF动力学、有界梯度以及前向-反向一致性。在六项基准测试中的实验表明，该方法优于替代梯度基线方法，在 T=1 神经形态和音频数据任务上提升最大（SHD +11.22%，DVS +7.96%，N-MNIST+3.91%）。可选的稀疏性惩罚能够在保持准确率的同时显著降低能耗。与热带几何的联系为脉冲计算的系统化分析开辟了新方向。

影响声明

本文提出了一项理论研究，旨在推动机器学习领域的发展，尤其是节能脉冲神经网络这一方向。超离散化框架为神经形态计算系统的加速部署提供了数学基础，有望降低机器学习应用的能耗。所有实验均在现有的公开基准数据集上进行了验证。这项研究可能带来诸多社会影响，但无需在此特别强调其中任何一种。

参考文献

Bellec, G.、Salaj, D.、Subramoney, A.、Legenstein, R. 和 Maass, W. 脉冲神经元网络中的长短期记忆与学会学习。载于神经信息处理系统进展，第 31 卷，2018。

Bohte, S. M., Kok, J. N., 和 La Poutr´e, H. 时间编码脉冲神经元网络中的误差反向传播。神经计算，48(1-4):17–37，2002年。doi: 10.1016/S0925-2312(01)00658-0.

Bu, T., Fang, W., Ding, J., Dai, P., Yu, Z., 和 Huang, T. 面向高准确率和超低延迟脉冲神经网络的最优人工神经网络到脉冲神经网络的转换。发表于国际学习表征会议，2022年。arXiv:2303.04347.

Cao, Y., Chen, Y., 和 Khosla, D. 用于高能效目标识别的脉冲深度卷积神经网络。国际计算机视觉期刊，113: 54–66，2015。doi: 10.1007/s11263-014-0788-3.

Connors, B. W. 和 Long, M. A. 哺乳动物大脑中的电突触。神经科学年度评论，27：393–418，2004年。doi：10.1146/annurev.neuro.26.041002. 131128。

Davies, M., Srinivasa, N., Lin, T.-H., Chinya, G., Cao, Y., Choday, S. H., Dimou, G., Joshi, P., Imam, N., Jain, S. 等。Loihi：一种支持片上学习的神经形态众核处理器。*IEEEMicro*，38(1)：82–99，2018。doi：10.1109/MM.2018.112130359。

Fang, W., Yu, Z., Chen, Y., Masquelier, T., Huang, T. 和 Tian, Y. 融入可学习膜时间常数，以增强脉冲神经网络的学习能力。载于*IEEE/CVF*计算机视觉国际会议论文集，第2661–2671页，2021年。doi：10.1109/ICCV48922.2021.00266。

Fotopoulos, K.、Maragos, P. 和 Misiakos, P. TropNNC：利用热带几何进行结构化神经网络压缩。*arXiv*预印本 *arXiv:2409.03945*，2024年。

Franchi, G.、Fehri, A. 和 Yao, A. 深度形态学网络。《模式识别》，102:107246，2020年。doi: 10.1016/j.patcog.2020.107246。

G¨oltz, J.、Kriener, L.、Baumbach, A.、Billaudelle, S.、Bre- itwieser, O.、Cramer, B.、Dold, D.、Kungl, A. F.、Senn, W.、Schemmel, J. 等。利用首次脉冲时间实现快速且节能的神经形态深度学习。自然机器智能，3(9):823–835，2021年。doi: 10.1038/s42256-021-00388-x。

Grammaticos, B.、Kosmann-Schwarzbach, Y. 和 Tamizhmani, T.（编）。离散可积系统，第 644 卷，出自《物理学讲义》．施普林格, 2004. doi: 10.1007/b94662。Gygax, J. 和 Zenke, F. 阐明脉冲神经网络中替代梯度学习的理论基础。*NeuralComputation*，37(5):886–925，2025年。doi: 10.1162/neco a 01752。arXiv:2404.14964。

Horowitz, M. 1.1 计算的能耗问题（以及我们能做些什么）。*IEEE*国际固态电路会议论文集，第 10–14 页，2014年。doi: 10.1109/ISSCC.2014.6757323。

Kheradpisheh, S. R. 和 Masquelier, T. 针对每个神经元一个脉冲的脉冲神经网络的时间反向传播。《国际神经系统杂志》，30(06): 2050027，2020年。doi: 10.1142/S0129065720500276。

Lemaire, E., Cordone, L., Castagnetti, A., Novac, P.-E., Courtois, J., and Miramond, B. 对脉冲神经网络能效的解析估算。载于神经信息处理国际会议，第 574–587 页。施普林格，2023。doi: 10.1007/978-3-031-30105-6 48。

Li, Y., Guo, Y., Zhang, S., Deng, S., Hai, Y., and Gu, S. 可微分脉冲：重新思考脉冲神经网络训练中的梯度下降。载于神经信息处理系统进展，第 34 卷，第 23426–23439 页，2021年。

Lian, S., Shen, J., Liu, Q., Wang, Z., Yan, R., and Tang, H. 用于直接训练脉冲神经网络的可学习替代梯度。载于第三十二届国际人工智能联合会议论文集，第 3002–3010 页。IJCAI，2023。doi: 10.24963/ijcai.2023/ 335。

Maass, W. 脉冲神经元网络：神经网络模型的第三代。《神经网络》，10(9):1659–1671，1997。doi: 10.1016/S0893-6080(97) 00011-7。

Maclagan, D. 和 Sturmfels, B. 热带几何导论，第 161 卷。美国数学会，2015。doi: 10.1090/gsm/161。

Mostafa, H. 基于脉冲神经网络中时间编码的监督学习。*IEEE*《神经网络与学习系统汇刊》，29(7):3227–3235，2018。doi: 10.1109/TNNLS.2017.2726060。

Neftci, E. O., Mostafa, H. 和 Zenke, F. 脉冲神经网络中的替代梯度学习：将基于梯度的优化能力带入脉冲神经网络。*IEEE*《信号处理杂志》，36(6):51–63，2019。doi: 10.1109/MSP.2019.2931595。

Ochiai, T. 和 Nacher, J. C. 可逆极大加代数与可积系统。数学物理学杂志，46(6):063507，2005。doi: 10.1063/1.1925247。

Pham, T. A. 和 Garg, V. 图神经网络学到了什么？来自热带几何的见解。载于神经信息处理系统进展，第 37 卷，2024年。doi: 10.5555/3737916.3738267。

Roy, K.、Jaiswal, A. 和 Panda, P. 借助神经形态计算迈向基于脉冲的机器智能。自然，575(7784):607–617，2019。doi: 10.1038/ s41586-019-1677-2。

Rueckauer, B.、Lungu, I.-A.、Hu, Y.、Pfeiffer, M. 和 Liu, S.-C. 将连续值深度网络转换为用于图像分类的高效事件驱动网络。神经科学前沿，11:682，2017。doi: 10.3389/ fnins.2017.00682。Softky, W. R. 和 Koch, C. 皮层细胞高度不规则的放电模式与随机兴奋性突触后电位的时间积分理论不相符。神经科学杂志，13(1):334–350，1993。doi: 10.1523/JNEUROSCI.13-01-00334.1993。Spek, L.、Kuznetsov, Y. A. 和 van Gils, S. A. 带有传输延迟和扩散的神经场模型。数学神经科学杂志，10(1):21，2020年。doi: 10. 1186/s13408-020-00098-5。Takahashi, D. 和 Satsuma, J. 孤子元胞自动机。日本物理学会学报，59(10):3514–3519，1990。doi: 10.1143/JPSJ.59.3514。Tokihiro, T.、Takahashi, D.、Matsukidaira, J. 和 Satsuma, J. 从孤子方程到可积元胞自动机：通过极限过程实现。物理评论快报，76(18):3247–3250，1996年。doi: 10.1103/PhysRevLett.76. 3247。Yamazaki, Y. 和 Ohmori, S. 离散极限环中由鞍结分岔引起的相位锁定所导致的超离散状态涌现。理论与实验物理进展，2023(8):081A01，2023。doi: 10. 1093/ptep/ptad099。Yamazaki, Y. 和 Ohmori, S. 热带离散化模型与极大加 Sel'kov 模型的离散极限环中的超离散化。*JSIAMLetters*，16:85–88，2024年。doi: 10.14495/jsiaml.16.85。Yan, Z.、Bai, Z. 和 Wong, W.-F. 重新审视脉冲神经网络的能效。*arXiv* 预印本 *arXiv:2409.08290*，2024年。Zaslavsky, T. 正视超平面配置：超平面划分空间的面数公式。美国数学会回忆录，1(154)，1975。doi: 10.1090/memo/0154。

Zenke, F. 和 Ganguli, S. Superspike：多层脉冲神经网络中的监督式学习。*NeuralComputation*，30(6):1514–1541，2018。doi: 10.1162/ neco a 01086。Zenke, F. 和 Vogels, T. P. 替代梯度学习在脉冲神经网络中实现复杂函数时表现出的非凡鲁棒性。*Neural Computation*，33(4): 899–925，2021年。doi: 10.1162/neco a 01367。Zhang, L.、Naitzat, G. 和 Lim, L.-H. 深度神经网络的热带几何。载于国际机器学习会议，第 5824–5832 页。PMLR，2018。

A. 脉冲机制比较

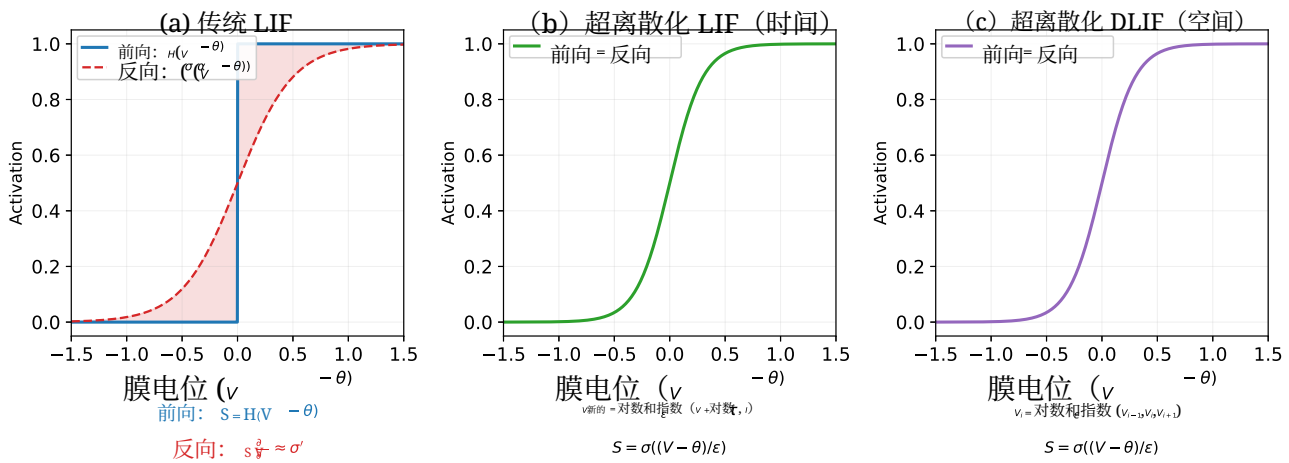


图 2. 脉冲机制比较。**(a)** 传统 LIF 在前向传播中使用海维赛德 $H(V-\theta)$，但在计算梯度时使用平滑替代函数 σ'，从而导致前向-反向不匹配（阴影区域）。**(b)** 超离散化 LIF（时间维度，源自 LIF 常微分方程的两项对数和指数）和**(c)** 超离散化 DLIF（空间维度，源自扩散偏微分方程的三项对数和指数）在两个传播过程中使用相同的平滑函数，从而确保梯度一致性。每个面板下方的膜电位方程展示了不同的推导过程。

B. 补充讨论

UltraLIF：一种新的激活函数族。 超离散化框架产生了一种新颖的激活函数族，与现有架构有着深刻的联系。注意，$\mathrm{LSE}_\varepsilon(0,\ x) = \varepsilon\log(1+\exp(x/\varepsilon))$ 恰好是*Softplus* 函数，当 $\varepsilon \to 0$ 时，它收敛到 $\mathrm{ReLU}(x) = \max(0,\ x)$。因此，UltraLIF 中的膜动力学将 ReLU 激活函数族推广到了脉冲域。同时，脉冲函数 $s_\varepsilon = \sigma((V-\theta)/\varepsilon)$ 是经过平移和缩放的 Sigmoid函数，即一种软阶跃函数。总之，UltraLIF 将软最大 聚合（ReLU 函数族）与软阶跃阈值化（Sigmoid 函数族）结合起来，并由可学习温度 ε 共同控制。这提供了一个有理论依据的激活函数谱系：

- $\varepsilon \to 0$：硬最大值 + 硬阶跃（经典LIF，不可微）
- $\varepsilon \to \infty$：线性 +常数（没有非线性）
- ε 可学习：最优锐度（UltraLIF，完全可微）

与启发式替代梯度不同，这类激活函数具有热带几何学的严谨理论基础，并且能够按设计保持前向-反向一致性。

与形态学神经网络的联系。 UltraDLIF 中的空间最大值运算（式 14）对应于形态学膨胀，这是数学形态学中的一项基本运算。深度形态学网络（Franchi 等人，2020年）表明，最大池化等价于使用平坦结构元素进行膨胀。这一联系表明，UltraDLIF 对神经激活模式执行可学习的形态学运算，为其提供了一种基于图像处理理论的替代性解释。

C. 证明

C.1. 命题的证明 5.2

证明通过对 t的强归纳法进行，并在每一步显式跟踪误差。

在基础情形 $t=0$，电压误差根据初始化为零（$V_\varepsilon(0) = v_0 = v(0)$），且脉冲误差 $|s_\varepsilon(0) - s(0)| \le e^{-\delta_0/\varepsilon} \to 0$ 由引理 5.1 以及阈值裕量假设 (A2) 得出。

对于归纳步骤，假设对所有 $k \le t$，$|V_\varepsilon(k) - v(k)| \le k \cdot \varepsilon\log 2$ 均成立，并考虑第 $t+1$ 步的 UltraLIF 更新 $\tilde{V}(1-s_\varepsilon) + V_{\text{reset}} \cdot s_\varepsilon$，其中 $V = \mathrm{LSE}_\varepsilon(V + \log\ \tau_0, I)$。当 t 处未发生脉冲时，归纳假设 $\tilde{}$ 和引理 5.1 可推出 $s_\varepsilon(t) \to 0$，因此重置插值化简为 $V_\varepsilon(t+1) \approx V_\varepsilon(t+1) = \mathrm{LSE}_\varepsilon(V_\varepsilon(t) + \log\ \tau_0, I(t))$。

由于 LSE$_\varepsilon$ 是 1-Lipschitz 函数（引理 C.1），累积误差的传播因子至多为 1，而 LSE 的固有近似误差至多为 $\varepsilon \log 2$（由引理 3.2，取 $n=2$），因此得到 $|V_\varepsilon(t+1) - v(t+1)| \le |V_\varepsilon(t) - v(t)| + \varepsilon \log 2 \le (t+1)\varepsilon \log 2$。当发生脉冲时，$s_\varepsilon(t) \to 1$ 会推动重置插值趋向 $V_{\text{reset}} = 0$，从而与标准 LIF 重置完全一致；因此误差重置为 $O(\varepsilon)$，其上界为 $(t+1)\varepsilon \log 2$。

~关键在于，重置插值 $V(1-s) + V_{\text{reset}} \cdot s$ 对于 $s \in (0,1)$ 是凸组合，因此不会扩张：~中扰动的影响会被因子 $(1-s) \le 1$所抑制。结合对数和指数$_\varepsilon$的 1-Lipschitz 性质，单步映射不会放大误差，从而得到线性增长 $C_t = t$。根据引理 5.1，$t+1$ 处的脉冲收敛$|s_\varepsilon(t+1) - s(t+1)| \le e^{-\delta_{t+1}/\varepsilon}$ 可在假设 (A2) 下推出。 □

C.2. 利普希茨性质

引理 C.1. 对于固定的 $\varepsilon > 0$，对数和指数$_\varepsilon$：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 关于 $\|\cdot\|_\infty$ 是 *1-Lipschitz* 的，而 σ_ε：$\mathbb{R} \to (0,1)$ 是$(4\varepsilon)^{-1}$-*Lipschitz* 的。

证明。根据中值定理，|对数和指数$_\varepsilon$(x) − 对数和指数$_\varepsilon$(y)| ≤ 上确界$_{\mathbf{z}}$ |⟨∇对数和指数$_\varepsilon$(z)，x − y⟩|。由于 ∇对数和指数$_\varepsilon$ = softmax(·/ε) 具有 $\|\nabla$对数和指数$_\varepsilon\|_1 = 1$（引理 3.2），Holder 不等式给出 |⟨∇对数和指数$_\varepsilon$，x − y⟩| ≤ $\|\nabla$对数和指数$_\varepsilon\|_1 \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$。Sigmoid函数界由 $|\sigma_\varepsilon'(x)| \le 1/(4\varepsilon)$推出（命题 5.4）。 □

C.3. 热带几何分析

定理 5.7 表明，UltraLIF动力学在最大加法半环上收敛于分段线性映射，其决策边界趋近于热带超曲面。下文将介绍利用这一联系发展的三个具体扩展，分别给出明确的表达能力界、时间动力学分析和容量结果。

C.3.1. 决策边界的热带刻画

一项解释了热带极限下 UltraLIF 决策边界的显式几何刻画。 .

设定。 考虑一个单隐藏层 UltraLIF 网络，其中包含 h 个神经元、n 个输入和 C 个输出类别，处于热带极限下的 T=1 （$\varepsilon \to 0^+$）。从 $V^{(0)} = \mathbf{0}$ 开始，每个隐藏神经元 $j \in [h]$ 计算：

$$V_j^{(1)} = \max(\log \tau_0,\ \mathbf{w}_j^\top \mathbf{x}) \tag{26}$$

其中，$\mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n$ 是神经元 j的权重向量。

定义 C.2（超平面排列）。每个神经元 j 定义一个超平面 $\mathcal{H}_j := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w}_j^\top \mathbf{x} = \log \tau_0\}$。这些超平面 $\mathcal{A} = \{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_h\}$ 将 $\mathbb{R}^n$ 划分为若干连通区域，在每个区域中，脉冲模式 $\mathbf{s} \in \{0,1\}^h$ 保持不变。

命题 C.3（超平面排列界）。单隐藏层 *UltraLIF* 将 $\mathbb{R}^n$ 划分为至多 $R(h,n) := \sum_{k=0}^{\min(n,h)} \binom{h}{k}$ 个线性区域。在每个区域内，网络输出都是常数。

证明。每个神经元定义一个半空间 $\mathcal{H}_j^+ = \{\mathbf{x} : \mathbf{w}_j^\top \mathbf{x} \log \tau_0\}$ 其中 $s_j = 1$。脉冲模式由点是否属于这些半空间的交集决定。在一般位置下，h 个超平面在 $\mathbb{R}^n$ 中所形成的区域数为（定理C.6）（Zaslavsky，1975）：

$$r_n(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{h}{k}$$

当 $h < n$ 时，含有 $k > h$ 的项会消失，因为对于 $k > h$，$\binom{h}{k} = 0$，从而得到等价公式 $\sum_{k=0}^{\min(n,h)} \binom{h}{k}$。在每个区域内，$\mathbf{s}$ 为常数，因此输出 ˆ$y_c = \sum_{j:\ s_j=1} W_{cj}^{\text{out}}$为常数。 □

热带超曲面结构。决策边界 $\mathcal{B}_{ij} = \{\mathbf{x} : \hat{y}_i(\mathbf{x}) = \hat{y}_j(\mathbf{x})\}$ 是排列中类别得分相等的$(n-1)$-面之并。这体现了定理 5.7的关联：$\mathcal{B}_{ij}$ 从热带超曲面的意义上说，是两条分段线性函数取值相等的点集。

C.3.2. 时间表达能力增强

命题 C.4(指数　　增长)。展开 T 个时间步的单隐藏层 *UltraLIF* 将 $\mathbb{R}^n$ 至多划分为 $R(h,\ n)^{\ T}$ 个区域。

证明。令 $\phi^{(t)}:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 表示在时间步 t时，从输入到隐藏层膜电位的映射。每个 $\phi^{(t)}$ 都是分段线性的，且根据命题 $R(h,\ n)$，至多有C.3 个区域。T 步计算是复合映射 $\phi^{(T)} \circ \cdots \circ \phi^{(1)}$。
对 T 使用归纳法，该复合映射至多有 $R(h,\ n)^T$ 个线性区域。基础情形（$T=1$）：由命题 C.3 可立即得出。归纳步骤：假设结论对 $T-1$ 成立。那么 $\phi^{(T-1)} \circ \cdots \circ \phi^{(1)}$ 至多有 $R(h,\ n)^{T-1}$ 个区域。与 $\phi^{(T)}$（其有 $R(h,\ n)$ 个区域）复合后，至多得到 $R(h,\ n)^{T-1} \cdot R(h,\ n) = R(h,\ n)^T$ 个区域，因为（$T-1$）步映射的每个区域都可以被 $\phi^{(T)}$ 的 $R(h,\ n)$ 个超平面细分。

□

T=1 与 T≥10 分析。在 $T{=}1$ 处，表达能力为 $R(h,\ n) \approx 10^{19}$，在典型设置下远超数据集规模。这一优势源于梯度质量：UltraLIF 的前向-反向一致性避免了由替代梯度失配导致的伪局部极小值。

在 $T{\geq}10$ 处，表达能力增长至 $R(h,\ n)^{10}$。输出平均 $\hat{y} = \frac{1}{T}\sum_t W^{\text{out}}\mathbf{s}^{(t)}$ 平滑了单个脉冲误差。随着误差在各时间步间相互抵消，梯度失配变得不那么关键，这解释了基线方法为何能够恢复（SHD：UltraLIF 在 $T{=}1$ 时为 +11.22%，但在 $T{=}30$ 时为 -2.16%）。

C.3.3. 带状多面体体积与表达能力

定义 C.5（带状多面体）。由 $\mathbf{w}_1$、……、$\mathbf{w}_h \in \mathbb{R}^n$ 生成的带状多面体为 $\mathcal{Z}(\mathbf{w}_1$、……、$\mathbf{w}_h) := \{\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \mathbf{w}_i :\ \lambda_i \in [0,1]\}$。

体积 $\text{vol}_n(\mathcal{Z})$ 量化了权重方向的几何多样性。当 $\text{vol}_n(\mathcal{Z}) = 0$ 时，权重线性相关，排列会退化。

定理 C.6 (体积—表达能力关系)。令 $W = [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_h]^\top \in \mathbb{R}^{h\times n}$ 为权重矩阵。当且仅当超平面处于一般位置时，超平面排列达到最大区域数量 $R(h,n) = \sum_k \binom{h}{k}$。当且仅当满足以下条件时，超平面处于一般位置：

1. 对于任意 $n{+}1$ 权重向量 $\mathbf{w}^{i_1}$, .. . ,$\mathbf{w}^{i_{n+1}}$，不存在点 $\mathbf{x}$ 能同时满足所有 $n{+}1$ 超平面方程。
2. 任意 n 权重向量子集 $\{\mathbf{w}^{i_1}$, .. . ,$\mathbf{w}_{i_n}\}$，若其大小为 $n \leq \min(h,\dim(\mathbb{R}^n))$，则当$n = \dim(\mathbb{R}^n)$时，$\det(\mathbf{w}^{i_1}$, .. . , $\mathbf{w}^{i_n}) \neq 0$。

此外，若 $h \geq n$ 且权重矩阵 W的秩为 n，则 体积$_n(\mathcal{Z}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_h)) > 0$ 意味着该排列是非退化的，且至少有 2^n 个区域。

证明。 第一条结论源于 Zaslavsky 对一般位置的刻画（Zaslavsky，1975）：当没有任何 $n{+}1$ 个超平面交于同一点，且所有交集均为横截时，排列达到最大数量。条件 (1) 确保不存在 $n{+}1$ 个超平面的公共交点。条件 (2) 确保横截性：任意 n 个超平面相交于唯一一点（当 n 权重向量线性无关时），而不是形成更高维的面。

对于体积结论，设 $h \geq n$ 且 $\text{rank}(W) = n$。那么存在 n 个线性无关的权重向量，记为$\mathbf{w}^{i_1}, \ldots, \mathbf{w}^{i_n}$。带状多面体包含由这些向量张成的平行六面体：

$$\mathcal{P} = \{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{w}_{i_j} : \lambda_j \in [0,1]\}$$

体积满足 $\text{vol}_n(\mathcal{Z}) \geq \text{vol}_n(\mathcal{P}) = |\det(\mathbf{w}^{i_1}, \ldots, \mathbf{w}^{i_n})| > 0$，这是由线性无关性得到的。

这 n 个线性无关的超平面将 $\mathbb{R}^n$ 至少划分为 2^n 个区域（当超平面经过原点时为 2^n 个正交象限，或其平移后的类似区域）。因此，当 $\text{vol}_n(\mathcal{Z}) > 0$ 时，$R \geq 2^n$。
反之，如果 $\text{vol}_n(\mathcal{Z}) = 0$，则权重向量位于维度为 $< n$ 的真子空间中，从而形成一个具有 $R < 2^n$（至多关于 h 线性）的退化排列。

□

推论 C.7(Capaci ty 下界)。对于具有 $h \geq n$ 个神经元且 秩$(W) = n$ 的单隐藏层 *UltraLIF* :

$$\textit{Expressivity} \geq 2^n \quad \textit{if } \mathrm{vol}_n(\mathcal{Z}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_h)) > 0$$

启示。 初始化。 标准随机初始化（Kaiming、Xavier）从各向同性高斯分布中采样，在高维情况下以高概率得到近乎正交的权重。这确保了 vol$_n(\mathcal{Z})$ > 0 以及非退化排列。显式正交化（QR 分解）可在范数固定时使体积最大化。

正则化。 体积正则化损失 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{CE}} - \alpha \log \text{vol}_n(\mathcal{Z})$ 鼓励权重方向多样化，从而防止秩塌缩。

剪枝。 如果 $\mathbf{w}_j \approx c \cdot \mathbf{w}_k$，移除神经元 j 对 vol$_n(\mathcal{Z})$ 的影响微乎其微，因此可基于几何冗余制定合理的剪枝准则。

D. 实验设置

D.1. 数据集与预处理

评估在涵盖静态图像、神经形态视觉和音频的六个基准测试上进行:

静态图像数据集。

- **MNIST**： 28×28 灰度手写数字，10 个类别。60,000 个训练样本 / 10,000 个测试样本。归一化：均值 0.1307，标准差 0.3081。
- **Fashion-MNIST**： 28×28 灰度服饰图像，10 个类别。60,000 个训练样本 / 10,000 个测试样本。归一化：均值 0.2860，标准差 0.3530。
- **CIFAR-10**： 32×32 RGB自然图像，10 个类别。50,000 个训练样本 / 10,000 个测试样本。按通道归一化：均值 (0.4914, 0.4822, 0.4465)，标准差 (0.247, 0.243, 0.262)。训练数据增强：随机裁剪(32×32 填充 4 个像素)，随机水平翻转。

神经形态数据集。

- **N-MNIST**：使用DVS相机采集的神经形态MNIST。60,000个训练集样本 / 10,000个测试集样本。输入维度：$2\times34\times34$（ON/OFF极性通道）。
- **DVS-Gesture**：使用DVS128相机记录的11种手势类别。1,176个训练集样本 / 288个测试集样本。输入维度：$2\times128\times128$。

音频数据集。

- **SHD**：脉冲海德堡数字，包含20个口语数字类别。8,156个训练集样本 / 2,264个测试集样本。输入维度：700个频率通道。

时间编码。 对于静态数据集，频率编码将像素强度转换为脉冲序列:

$$P(\text{spike at } t) = \text{gain} \cdot x_{\text{pixel}}, \quad \text{gain} = 0.5 \tag{27}$$

其中 $x_{\text{pixel}} \in [0, 1]$ 为归一化像素值。对于神经形态数据集，使用 Tonic库 的 ToFrame变换 将事件划分为 T 时间帧，时间分箱数为 $= T$。 - -

D.2. 模型超参数

D.3. 架构

单个隐藏层包含 64 个神经元。输入到隐藏层和隐藏层到输出层均为全连接层。时间步长为 $T \in \{1, 10, 30\}$，用于评估不同时间区间内的性能。输出按时间平均脉冲率计算:

$$\hat{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} W_{\text{out}} \cdot s^{(t)} \tag{28}$$

表10。 所有神经元模型的超参数。

参数	值	描述
通用参数		
θ (阈值)	0.5	脉冲阈值
τ_0 (泄漏)	0.9	膜时间常数
V_{reset}	0.0	重置电位
替代梯度（基线方法）		
β (锐度)	10.0	Sigmoid 替代函数陡峭度
AdaLIF 专属		
β_{adapt}	0.1	阈值适应强度
τ_{adapt}	0.9	适应衰减常数
DSpike 专属		
b_0 (初始化)	4.0	初始陡峭度参数
超离散化模型		
ε_0 （初始化）	1.0	初始温度
ε 范围	[0.1, 20.0]	训练期间钳制

D.4. 基线模型定义

所有基线方法均使用替代梯度：前向传播时使用硬脉冲 $s = H(v - \theta)$，反向传播时使用平滑梯度 $\partial s/\partial v = \sigma'((v - \theta)\beta)$。

LIF （漏积分发放）：

$$v^{(t+1)} = \tau v^{(t)} + I^{(t)} \tag{29}$$

$$s^{(t+1)} = H(v^{(t+1)} - \theta), \quad v \leftarrow v(1 - s) \tag{30}$$

PLIF（参数化LIF，Fang 等人，2021年）：

$$v^{(t+1)} = \tau v^{(t)} + I^{(t)}, \quad \tau = \sigma(\tau_{\text{param}}) \text{ learnable} \tag{31}$$

AdaLIF （自适应LIF，Bellec 等人，2018）：

$$v^{(t+1)} = \tau v^{(t)} + I^{(t)} \tag{32}$$

$$\theta^{(t+1)} = \theta_0 + \beta_{\text{adapt}} \cdot b^{(t)} \tag{33}$$

$$b^{(t+1)} = \tau_{\text{adapt}} \cdot b^{(t)} + (1 - \tau_{\text{adapt}}) \cdot s^{(t)} \tag{34}$$

其中， b 是适应变量，会在脉冲发放后增加。

FullPLIF（全参数化LIF）：

$$v^{(t+1)} = \tau v^{(t)} + I^{(t)} \tag{35}$$

$$\tau = \sigma(\tau_{\text{param}}), \quad \theta = \sigma(\theta_{\text{param}}) \tag{36}$$

τ 和 θ 均为可学习参数，并通过Sigmoid函数将其限制在(0，1)范围内。

DSpike（Li 等人，2021年）：

$$v^{(t+1)} = \tau v^{(t)} + I^{(t)} \tag{37}$$

$$s^{(t+1)} = \frac{\tanh(k(v_{\text{norm}} - 0.5)) + \tanh(k/2)}{2\tanh(k/2)} \tag{38}$$

其中， $v_{\text{norm}} = v/(2\theta)$ 将膜电位归一化至 $[0, 1]$, , 而 k 是可学习的锐度参数（初始化为4.0）。

DSpike+：具有可学习 $\tau = \sigma(\tau_{\text{param}})$的 DSpike。

D.5. 提出的方法

超离散化离散化变体在前向和反向传播中均使用软脉冲（不使用替代梯度）：

UltraLIF（时间，基于 LIF 常微分方程的二项对数和指数）：

$$V^{(t+1)} = \mathrm{LSE}_\varepsilon(V^{(t)} + \log \tau_0,\, I^{(t)}) \tag{39}$$

$$s_\varepsilon^{(t+1)} = \sigma((V^{(t+1)} - \theta)/\varepsilon) \tag{40}$$

UltraDLIF（空间，基于扩散偏微分方程的三项对数和指数）：

$$V_i^{(t+1)} = \mathrm{LSE}_\varepsilon(V_{i-1}^{(t)}, V_i^{(t)}, V_{i+1}^{(t)}) + I_i^{(t)} \tag{41}$$

$$s_{i,\varepsilon}^{(t+1)} = \sigma((V_i^{(t+1)} - \theta)/\varepsilon) \tag{42}$$

UltraPLIF 和 UltraDPLIF 添加可学习的 $\tau = \sigma$（τ_{param}）。

D.6. 稀疏性惩罚

为提高能效，超离散化变体支持可选的稀疏性惩罚 ：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{CE}} + \lambda \cdot \bar{s} \tag{43}$$

其中， $\bar{s}$ 是平均脉冲率， $\lambda \in \{0, 0.01, 0.1\}$。这使得可以显式控制准确率-效率权衡。

D.7. 训练详情

表 *11.* 训练配置。

参数	值
优化器	Adam
学习率	10^{-3}
批量大小	128
训练轮数	100
学习率调度器	余弦退火
权重初始化	PyTorch 默认（Kaiming）
Seed	42

损失函数。 基于平均脉冲率的交叉熵：

$$\mathcal{L}_{\text{CE}} = -\sum_c y_c \log(\text{softmax}(\hat{y})_c) \tag{44}$$

能耗估算。 脉冲神经网络的能耗采用标准突触操作（SOP）框架进行估算（Lemaire 等人，2023）。在脉冲神经网络中，脉冲驱动计算以仅累加（AC）操作取代乘加（MAC）操作，因为突触前激活是二值的：

$$E_{\text{SNN}} = T \cdot \bar{s} \cdot N_{\text{syn}} \cdot E_{\text{AC}} \tag{45}$$

$$E_{\text{ANN}} = N_{\text{syn}} \cdot E_{\text{MAC}} \tag{46}$$

其中 T为时间步数， $\bar{s}$ 为平均脉冲率， N_{syn} 为突触连接数， $E_{\text{AC}} \approx 0.9$皮焦耳，且$E_{\text{MAC}} \approx 4.6$在 45 纳米制程下为Horowitz，2014年）。由于本文中的所有模型采用相同的架构（因此具有相同的 N_{syn}），结果表中的能耗列报告的是**相对SOP计数** $T \cdot \bar{s}$，其与 E_{SNN} 成正比，比例因子为常数。这使得不同模型之间可以直接比较能耗。请注意，该估算侧重于计算能耗，不包含内存访问或数据搬移开销，而这些开销在实际应用中可能相当显著（Yan 等，2024年）。

D.8. 硬件与计算

所有实验均在英伟达 T4 图形处理器（16GB 显存）上使用 PyTorch 2.0+ 进行，并通过 torch.compile 加速。每个模型的训练时间：

- MNIST/Fashion： ∼3分钟（100 训练轮数）
- CIFAR-10： ∼8 分钟（100 训练轮数）
- N-MNIST： ∼15分钟（100 训练轮数）
- DVS-Gesture： ∼20 分钟（100 训练轮数）
- SHD： ∼10分钟（100 训练轮数）

所有实验的总计算量：约 50 GPU小时，使用三台 T4虚拟机。

关于神经形态硬件的说明。本文中的所有实验均在传统 GPU 上进行。尚未评估将模型部署到专用神经形态硬件（例如 Intel Loihi 2、IBM TrueNorth、SpiNNaker 2、BrainScaleS-2）上的效果。由于超离散化脉冲函数会在 $\varepsilon \to 0$ （命题 5.2）条件下收敛为硬阈值化，原则上可在推理时将软脉冲量化为二值，从而将训练好的模型映射到神经形态基底上。在神经形态平台上对延迟、能耗和准确率进行基准测试，是未来一项重要的研究方向。

E. 补充实验

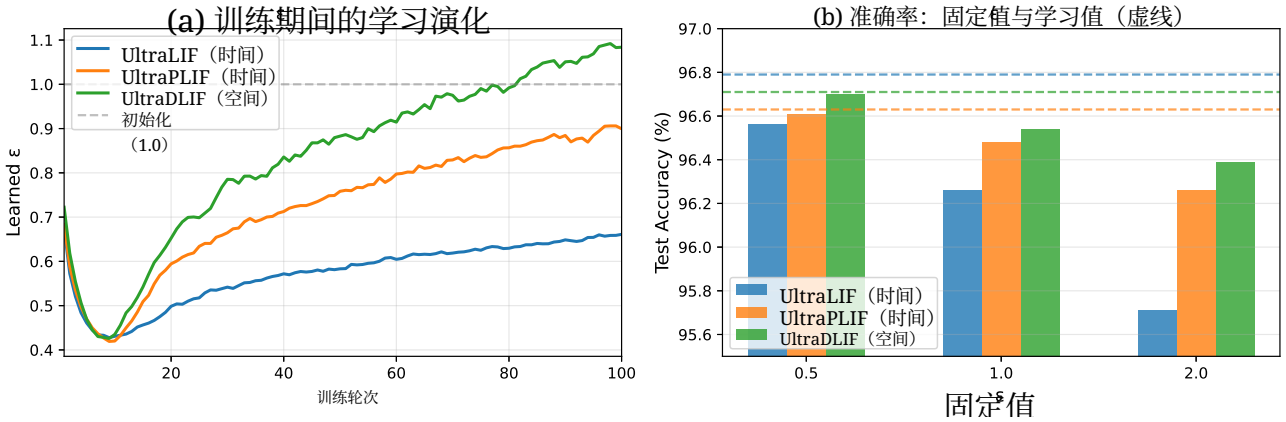


图3。MNIST 上的 ε消融实验（T=1，100 个训练轮次）。(a) 学到的 ε 呈现出典型的 U形轨迹：先从 1.0 降至 ∼0.42（锐化阶段），随后回升至各模型特定的最优值（0.66–1.08）。这表明网络先学会进行锐利的判别，再通过软化来提升泛化能力。(b) 学到的 ε （虚线）始终与所有固定值持平或优于它们，验证了可学习温度的优势。

E.1. 消融实验：可学习温度 ε

超离散化神经元的一项关键设计选择是，温度参数 ε 应固定，还是在训练过程中学习。本消融实验在 T=1 的 MNIST 上比较了四种超离散化变体中的固定值 $\varepsilon \in \{0.5, 1.0, 2.0\}$ 与学习得到的 ε （初始化为 1.0）。

主要发现： (1) 学习得到的 ε 能在所有模型上稳定提升准确率，不过在 MNIST 上提升幅度较小。(2) 较小的固定值 ε (0.5) 优于较大的值（2.0），这与引理 3.2一致：对最大值的逼近越紧密，LIF模拟效果越好。(3) 学习得到的 ε 收敛至 0.66–1.08 的范围（表 14），自动找到最佳的软硬折中。(4) 空间模型在学习得到的 ε下脉冲率最低，这表明网络学会了平衡准确率与效率。

表 15 报告了 Fashion-MNIST 上的完整结果。UltraPLIF（时间）在 T=1 时取得最高准确率，而基线方法在更高的时间步长下表现领先。

表 *12.* 消融实验：.....的影响 可学习 ε 对准确率（%）的影响。学习得到的 ε 在所有模型中始终取得最高或并列最高的准确率 s.

模型	ε=0.5	ε=1.0	ε=2.0	学习得到的
时间型（*LIF*常微分方程）				
UltraLIF	96.56	96.26	95.71	**96.79**
UltraPLIF	96.61	96.48	96.26	**96.63**
空间（扩散偏微分方程）				
UltraDLIF	96.70	96.54	96.39	**96.71**
UltraDPLIF	96.70	96.54	96.39	**96.71**

表 *1 3.* 消融实验：可学习 ε 对脉冲率的影响。学习到的 ε使空间模型的脉冲率最低。

模型	ε=0.5	ε=1.0	ε=2.0	已学习
时间型（*LIF*常微分方程）				
UltraLIF	0.488	0.579	0.650	0.500
UltraPLIF	0.427	0.459	0.528	0.443
空间型（扩散偏微分方程）				
UltraDLIF	0.417	0.412	0.423	**0.393**
UltraDPLIF	0.417	0.412	0.423	**0.393**

E.2. 完整稀疏性结果

表格16–21 展示完整 不同稀疏性惩罚值 $\lambda \in \{0, 0.01, 0.1$ 下所有超离散化模型的稀疏性结果 $\}$ 和时间步 $T \in \{1, 10,$ $30\}$.

跨数据集的关键观察： (1) 中等稀疏性（λ=0.1）始终能将脉冲率降低 40–50%，而准确率损失极小；在若干情况下（MNIST T=1、Fashion T=1、CIFAR-10 T=30），甚至能提高准确率，这表明稀疏性可作为正则化器。(2) 时序模型（UltraPLIF）的稀疏性-准确率权衡最为理想，能够在保持有竞争力的准确率的同时实现最低能耗。

表*14*。 训练集后的最终学习 ε值（初始化为1.0）。

模型	最终 ε
UltraLIF（时间）	0.661
UltraPLIF（时间）	0.900
UltraDLIF（空间）	1.084
UltraDPLIF（空间）	1.084

表*15.* 测试集 Fashion-MNIST 上的准确率（%）。UltraPLIF（时间）在 $T{=}1$ 处表现最佳。基线方法在 $T{\geq}10$ 处领先。

模型	$T{=}1$	$T{=}10$	$T{=}30$
LIF	82.45	86.06	86.70
PLIF	82.45	85.99	86.48
AdaLIF	82.45	86.12	86.59
FullPLIF	82.18	**86.26**	86.33
DSpike	82.67	86.24	86.42
DSpike+	82.67	86.03	**86.76**
时间型（*LIF*常微分方程）			
UltraLIF	81.79	85.76	86.65
UltraPLIF	**83.02**	86.03	86.59
空间（扩散偏微分方程）			
UltraDLIF	82.79	85.88	86.01
UltraDPLIF	82.79	85.69	85.92

表*16.* MNIST上的稀疏性结果。准确率（%）、脉冲率和相对SOP计数（$T \cdot \bar{s}$）。

模型	λ	Acc	脉冲	能耗
T=1				
UltraLIF	0	94.37	0.620	0.62
UltraLIF	0.01	94.55	0.608	0.61
UltraLIF	0.1	94.37	0.537	0.54
UltraPLIF	0	95.60	0.468	0.47
UltraPLIF	0.01	95.50	0.453	0.45
UltraPLIF	0.1	**95.81**	0.289	0.29
UltraDLIF	0	95.67	0.446	0.45
UltraDLIF	0.01	95.62	0.425	0.43
UltraDLIF	0.1	95.71	0.268	0.27
UltraDPLIF	0	95.67	0.446	0.45
UltraDPLIF	0.01	95.62	0.425	0.43
UltraDPLIF	0.1	95.71	**0.268**	**0.27**
T=10				
UltraLIF	0	97.14	0.519	5.19
UltraLIF	0.01	97.15	0.498	4.98
UltraLIF	0.1	97.23	0.328	3.28
UltraPLIF	0	97.30	0.492	4.92
UltraPLIF	0.01	97.28	0.466	4.66
UltraPLIF	0.1	97.37	0.242	2.42
UltraDLIF	0	97.35	0.479	4.79
UltraDLIF	0.01	**97.56**	0.448	4.48
UltraDLIF	0.1	97.19	0.254	2.54
UltraDPLIF	0	97.35	0.476	4.76
UltraDPLIF	0.01	97.37	0.444	4.44
UltraDPLIF	0.1	97.35	**0.237**	**2.37**
T=30				
UltraLIF	0	97.46	0.502	15.07
UltraLIF	0.01	97.41	0.475	14.26
UltraLIF	0.1	97.51	0.270	8.09
UltraPLIF	0	**97.55**	0.492	14.76
UltraPLIF	0.01	97.52	0.464	13.91
UltraPLIF	0.1	97.53	0.229	6.87
UltraDLIF	0	97.38	0.469	14.07
UltraDLIF	0.01	97.52	0.427	12.81
UltraDLIF	0.1	97.11	**0.208**	**6.24**
UltraDPLIF	0	97.40	0.481	14.43
UltraDPLIF	0.01	97.34	0.439	13.18
UltraDPLIF	0.1	96.99	0.209	6.27

表 *17.* Fashion-MNIST 上的稀疏性结果。准确率（%）、脉冲率和相对SOP计数（$T \cdot \bar{s}$）。

模型	λ	Acc	脉冲	能耗
T=1				
UltraLIF	0	81.79	0.652	0.65
UltraLIF	0.01	82.06	0.629	0.63
UltraLIF	0.1	81.62	0.530	0.53
UltraPLIF	0	83.02	0.472	0.47
UltraPLIF	0.01	82.81	0.451	0.45
UltraPLIF	0.1	**83.26**	0.279	0.28
UltraDLIF	0	82.79	0.429	0.43
UltraDLIF	0.01	83.01	0.411	0.41
UltraDLIF	0.1	83.05	0.267	0.27
UltraDPLIF	0	82.79	0.429	0.43
UltraDPLIF	0.01	83.01	0.411	0.41
UltraDPLIF	0.1	83.05	**0.267**	**0.27**
T=10				
UltraLIF	0	85.76	0.522	5.22
UltraLIF	0.01	86.07	0.510	5.10
UltraLIF	0.1	85.98	0.334	3.34
UltraPLIF	0	86.03	0.493	4.93
UltraPLIF	0.01	85.93	0.457	4.57
UltraPLIF	0.1	**86.11**	**0.273**	**2.73**
UltraDLIF	0	85.88	0.456	4.56
UltraDLIF	0.01	85.63	0.442	4.42
UltraDLIF	0.1	85.74	0.292	2.92
UltraDPLIF	0	85.69	0.456	4.56
UltraDPLIF	0.01	85.86	0.427	4.27
UltraDPLIF	0.1	85.74	0.278	2.78
T=30				
UltraLIF	0	86.65	0.507	15.22
UltraLIF	0.01	86.46	0.485	14.56
UltraLIF	0.1	86.36	0.287	8.60
UltraPLIF	0	86.59	0.480	14.41
UltraPLIF	0.01	86.49	0.453	13.59
UltraPLIF	0.1	**86.72**	**0.271**	**8.13**
UltraDLIF	0	86.01	0.467	14.01
UltraDLIF	0.01	85.81	0.429	12.88
UltraDLIF	0.1	85.94	0.274	8.23
UltraDPLIF	0	85.92	0.463	13.88
UltraDPLIF	0.01	85.80	0.458	13.75
UltraDPLIF	0.1	85.84	0.276	8.27

表 *18.* CIFAR-10 上的稀疏性结果。准确率（%）、脉冲率和相对SOP计数（$T \cdot \bar{s}$）。

模型	λ	Acc	脉冲	能耗
T=1				
UltraLIF	0	40.72	0.706	0.71
UltraLIF	0.01	40.58	0.662	0.66
UltraLIF	0.1	39.81	0.459	0.46
UltraPLIF	0	43.27	0.458	0.46
UltraPLIF	0.01	43.22	0.444	0.44
UltraPLIF	0.1	**43.60**	**0.240**	**0.24**
UltraDLIF	0	43.11	0.481	0.48
UltraDLIF	0.01	43.13	0.465	0.47
UltraDLIF	0.1	43.04	0.337	0.34
UltraDPLIF	0	43.11	0.481	0.48
UltraDPLIF	0.01	43.13	0.465	0.47
UltraDPLIF	0.1	43.04	0.337	0.34
T=10				
UltraLIF	0	45.15	0.504	5.04
UltraLIF	0.01	44.72	0.494	4.94
UltraLIF	0.1	45.18	0.311	3.11
UltraPLIF	0	46.19	0.494	4.94
UltraPLIF	0.01	46.06	0.457	4.57
UltraPLIF	0.1	46.13	**0.241**	**2.41**
UltraDLIF	0	45.65	0.471	4.71
UltraDLIF	0.01	45.58	0.452	4.52
UltraDLIF	0.1	45.39	0.334	3.34
UltraDPLIF	0	45.75	0.469	4.69
UltraDPLIF	0.01	**46.26**	0.452	4.52
UltraDPLIF	0.1	45.32	0.338	3.38
T=30				
UltraLIF	0	45.69	0.480	14.39
UltraLIF	0.01	45.84	0.466	13.99
UltraLIF	0.1	45.92	0.285	8.54
UltraPLIF	0	46.58	0.500	15.01
UltraPLIF	0.01	46.31	0.485	14.56
UltraPLIF	0.1	**46.98**	**0.248**	**7.44**
UltraDLIF	0	45.00	0.491	14.73
UltraDLIF	0.01	45.32	0.446	13.38
UltraDLIF	0.1	45.41	0.322	9.65
UltraDPLIF	0	45.74	0.496	14.89
UltraDPLIF	0.01	46.09	0.450	13.49
UltraDPLIF	0.1	45.79	0.331	9.94

表*19*。 N-MNIST上的稀疏性结果。准确率（%）、脉冲率和相对SOP计数（$T \cdot \bar{s}$）。

模型	λ	Acc	脉冲	能耗
T=1				
UltraLIF	0	90.41	0.579	0.58
UltraLIF	0.01	90.37	0.597	0.60
UltraLIF	0.1	90.74	0.546	0.55
UltraPLIF	0	93.11	0.396	0.40
UltraPLIF	0.01	92.73	0.409	0.41
UltraPLIF	0.1	93.28	0.318	0.32
UltraDLIF	0	**94.14**	0.506	0.51
UltraDLIF	0.01	93.97	0.492	0.49
UltraDLIF	0.1	93.52	0.291	0.29
UltraDPLIF	0	**94.14**	0.506	0.51
UltraDPLIF	0.01	93.97	0.492	0.49
UltraDPLIF	0.1	93.52	**0.291**	**0.29**
T=10				
UltraLIF	0	96.10	0.447	4.47
UltraLIF	0.01	96.22	0.415	4.15
UltraLIF	0.1	96.39	0.222	2.22
UltraPLIF	0	96.33	0.445	4.45
UltraPLIF	0.01	96.34	0.358	3.58
UltraPLIF	0.1	96.60	**0.127**	**1.27**
UltraDLIF	0	97.38	0.460	4.60
UltraDLIF	0.01	97.37	0.335	3.35
UltraDLIF	0.1	97.00	0.155	1.55
UltraDPLIF	0	97.38	0.463	4.63
UltraDPLIF	0.01	**97.40**	0.306	3.06
UltraDPLIF	0.1	96.93	0.144	1.44
T=30				
UltraLIF	0	95.87	0.404	12.13
UltraLIF	0.01	95.77	0.391	11.72
UltraLIF	0.1	96.30	0.267	8.02
UltraPLIF	0	95.77	0.463	13.90
UltraPLIF	0.01	95.91	0.412	12.36
UltraPLIF	0.1	96.48	0.240	7.21
UltraDLIF	0	97.46	0.429	12.86
UltraDLIF	0.01	97.34	0.301	9.04
UltraDLIF	0.1	97.28	0.140	4.20
UltraDPLIF	0	**97.68**	0.430	12.89
UltraDPLIF	0.01	97.52	0.275	8.26
UltraDPLIF	0.1	97.33	**0.125**	**3.74**

表 *20.* DVS-Gesture 上的稀疏性结果。准确率（%）、脉冲率和相对SOP计数（$T \cdot \bar{s}$）。

模型	λ	Acc	脉冲	能耗
T=1				
UltraLIF	0	58.33	0.726	0.73
UltraLIF	0.01	57.58	0.746	0.75
UltraLIF	0.1	57.95	0.690	0.69
UltraPLIF	0	**60.23**	0.619	0.62
UltraPLIF	0.01	57.20	0.610	0.61
UltraPLIF	0.1	55.68	**0.601**	**0.60**
UltraDLIF	0	58.33	0.774	0.77
UltraDLIF	0.01	56.44	0.833	0.83
UltraDLIF	0.1	58.71	0.790	0.79
UltraDPLIF	0	58.33	0.774	0.77
UltraDPLIF	0.01	56.44	0.833	0.83
UltraDPLIF	0.1	58.71	0.790	0.79
T=10				
UltraLIF	0	69.32	0.707	7.07
UltraLIF	0.01	68.56	0.709	7.09
UltraLIF	0.1	67.80	0.702	7.02
UltraPLIF	0	68.94	0.559	5.59
UltraPLIF	0.01	69.70	0.567	5.67
UltraPLIF	0.1	70.83	**0.543**	**5.43**
UltraDLIF	0	69.32	0.611	6.11
UltraDLIF	0.01	71.97	0.601	6.01
UltraDLIF	0.1	70.45	0.543	5.43
UltraDPLIF	0	68.56	0.615	6.15
UltraDPLIF	0.01	71.97	0.614	6.14
UltraDPLIF	0.1	**73.11**	0.578	5.78
T=30				
UltraLIF	0	75.00	0.719	21.58
UltraLIF	0.01	75.38	0.719	21.56
UltraLIF	0.1	75.00	0.707	21.20
UltraPLIF	0	75.76	0.593	17.79
UltraPLIF	0.01	75.76	0.588	17.63
UltraPLIF	0.1	76.14	0.559	16.77
UltraDLIF	0	78.41	0.560	16.79
UltraDLIF	0.01	78.41	0.552	16.56
UltraDLIF	0.1	**81.06**	**0.501**	**15.04**
UltraDPLIF	0	79.92	0.570	17.09
UltraDPLIF	0.01	77.65	0.556	16.68
UltraDPLIF	0.1	79.55	0.521	15.62

表*21.* SHD 上的稀疏性结果。准确率（%）、脉冲率和相对 SOP 计数（$T \cdot \bar{s}$）。

模型	λ	Acc	脉冲	能耗
T=1				
UltraLIF	0	44.88	0.551	0.55
UltraLIF	0.01	45.76	0.542	0.54
UltraLIF	0.1	46.86	0.507	0.51
UltraPLIF	0	46.91	0.390	0.39
UltraPLIF	0.01	47.61	0.394	0.39
UltraPLIF	0.1	48.32	**0.344**	**0.34**
UltraDLIF	0	51.24	0.686	0.69
UltraDLIF	0.01	50.62	0.629	0.63
UltraDLIF	0.1	**51.33**	0.565	0.56
UltraDPLIF	0	51.24	0.686	0.69
UltraDPLIF	0.01	50.62	0.629	0.63
UltraDPLIF	0.1	**51.33**	0.565	0.56
T=10				
UltraLIF	0	58.79	0.472	4.72
UltraLIF	0.01	57.99	0.462	4.62
UltraLIF	0.1	60.51	0.397	3.97
UltraPLIF	0	57.73	0.420	4.20
UltraPLIF	0.01	58.48	0.411	4.11
UltraPLIF	0.1	58.79	**0.348**	**3.48**
UltraDLIF	0	67.62	0.416	4.16
UltraDLIF	0.01	69.52	0.442	4.42
UltraDLIF	0.1	69.92	0.367	3.67
UltraDPLIF	0	68.90	0.461	4.61
UltraDPLIF	0.01	65.77	0.496	4.96
UltraDPLIF	0.1	**70.27**	0.399	3.99
T=30				
UltraLIF	0	59.14	0.458	13.73
UltraLIF	0.01	59.41	0.451	13.52
UltraLIF	0.1	61.00	0.404	12.11
UltraPLIF	0	59.45	0.449	13.48
UltraPLIF	0.01	60.16	0.445	13.35
UltraPLIF	0.1	60.60	**0.385**	**11.54**
UltraDLIF	0	71.60	0.459	13.76
UltraDLIF	0.01	70.23	0.458	13.73
UltraDLIF	0.1	**73.19**	0.386	11.57
UltraDPLIF	0	67.84	0.454	13.62
UltraDPLIF	0.01	67.71	0.449	13.48
UltraDPLIF	0.1	69.88	0.404	12.13