arXiv:2602.11292v1 [cs.CC] 11 Feb 2026

新的平面算法与八顶点模型的完整复杂性分类

Jin-Yi Cai* jyc@cs.wics.edu
Austen Fan* afan@cs.wisc.edu
Shuai Shao† shao10@ustc.edu.cn
Zhuxiao Tang* zztang@wisc.edu

摘要

我们证明了平面八顶点模型的完整复杂性分类定理。对于八顶点模型的任意参数设置 $\mathbb{C}$，其配分函数要么（1）对任意图均可在多项式时间内计算；要么（2）对一般图是 #P-困难的，但对平面图可在多项式时间内计算；要么（3）即使对平面图也为 #P-困难。该分类有一个明确的判据。在情形（2）中，我们发现了新的、可在平面图上多项式时间计算的八顶点模型，超越了 Kasteleyn 算法对平面完美匹配计数的适用范围。[1] 这些模型是通过组合变换转化为平面问题，再经由全息变换转化为平面六顶点模型中的可处理情形而得到的。在此过程中，我们还发现了平面八顶点模型与二分图伊辛模型、共形格插值以及复分析中的 Möbius 变换之间的非局部联系。证明还用到了分圆域。

*计算机科学系，威斯康星大学麦迪逊分校。

†计算机科学与技术学院 & 合肥国家实验室，中国科学技术大学。获量子科学与技术 –国家科技重大专项（QNMP）资助，2021ZD0302901。[1]这也被称为 FKT 算法。Fisher 和 Temperley [29], 以及 Kasteleyn [24] 在网格图上独立发现了这一算法。随后，Kasteleyn [23] 将其推广到了所有平面图。

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 **4**

2.1 定义与记号 .4 2.2 构件构造 .6 2.3 全息变换 .10 2.4 多项式插值 .11 2.5 可处理签名集 .15 2.6 已知二分定理.19

3 主定理与证明概要 **20**

4 情形 I：至少有两个零对 **23**

4.1 内对 (d, w) 是一个零对 .23 4.2 两个外对 (b, y) 和 (c, z) 是零对 .24

5 情形 II：至少有一个零项，且至多有一个零对 **28**

5.1 自然数集 $= 1$：一个零项 .29 5.2 自然数集 $= 2$：两个零项 .32 5.3 自然数集 $= 3$：三个零项. 37 5.4 自然数集 $= 4$：四个零项 .39 5.5 综合起来.40

6 第III种情况：Sy 对称条件 **41**

6.1 从 Even Coloring 模型进行组合变换.42 6.2 应用共形格插值.44 6.3 格秩至多为1.47 6.4 格秩为2.48 6.5 三组相等对的二分定理.59 6.6 三组相反对的二分定理.60

7 案例III：非对称条件 **61**

7.1 退化内矩阵 .61 7.2 通过二元修改实现二分定理 .62

8 主要定理的证明 **67**

通过 M 进行插值"莫比乌斯变换 **68**

1 引言

统计力学中各种物理模型的配分函数研究历史悠久。人们考虑一组由键连接的粒子，物理定律对有效的局部构型施加各种局部约束，并为其赋予相应的权重。若全局构型σ 满足所有局部约束，则称其有效；其权重 $w(\sigma)$ 是各局部权重的乘积。配分函数则是所有有效全局构型 σ 的权重 $w(\sigma)$ 之和。

物理学中著名的配分函数例子包括伊辛模型、波茨模型、硬核模型、六顶点模型和八顶点模型。其中大多数属于自旋系统 [22, 21, 20, 25], ，其中每个粒子取一个自旋值，例如 $+$ 或 $-$，并将其建模为布尔变量，而局部相互作用则通过二元（边）约束函数来表示。这些模型可以很好地纳入计数约束满足问题 (#CSP) 框架 [3,18, 4, 7, 6]。一些物理系统采用定向问题来表述更为自然，而这些系统可以用更一般的*Holant* 问题 [15], 来建模，其中 #CSP 是一种特殊情形。本文研究八顶点模型，它是一个定向问题。

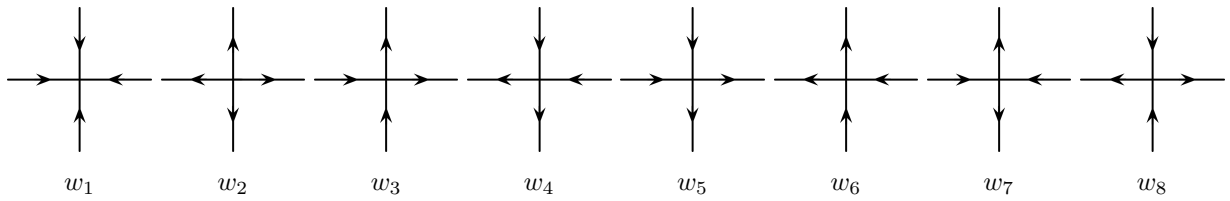


图 1：八顶点模型的合法配置。

八顶点模型最初由 Sutherland [28] 以及 Fan 和 Wu [19]提出。它是六顶点模型 [26],的推广，涵盖了若干重要的物理系统，例如水冰模型、KDP 模型和 Rys F 模型（用于反铁电体）。传统上，该模型定义在具有特定边界条件的正方晶格上。更一般地，我们考虑定义在四正则图上的模型。给定一个四正则图 $G = (V, E)$，一个定向 σ 为每条边指定一个方向。如果每个顶点的入度（等价地，出度）均为偶数，则该定向对八顶点模型而言是合法的。这类定向称为偶定向。图 1 展示了每个顶点处合法的局部构型，共有八种。每种构型类型i 都关联一个（可能为复数的）参数 w_i，称为其玻尔兹曼权重。[2] 给定一个偶定向 σ，令 n_i 表示处于构型类型 i的顶点数。 σ 的权重定义为 $w(\sigma) = \prod_{1\le i\le 8} w_i^{n_i}$。于是，定义在 G 上的八顶点模型的配分函数为

$$Z_{8\mathrm{V}}(G) = \sum_{\sigma\in\mathcal{O}(G)} w(\sigma),$$

其中， $\mathcal{O}(G)$ 表示 G所有偶定向的集合。六顶点模型是 $w_1 = w_2 = 0$的一种特殊情形，即只允许入度（和出度）恰好为 2 的构型；这对应于欧拉定向。

由于配置数量呈指数级增长，计算配分函数通常是一个 #P-困难问题。然而，在某些特殊参数设置下（而这些设置属于

[2]在经典统计力学中，权重 w_i 通常是非负实数。然而，复权重会自然地出现在量子情境中。例如，含复参数的配分函数与量子电路的输出振幅密切相关 [17]。

最有趣的情形），配分函数可以在多项式时间内计算；这类情形称为可解。特别是在平面结构上，物理学家发现了一些非凡的算法，例如 FKT 算法 [29, 24, 23]。从计算复杂性的角度来看，目标是将所有参数范围分类为可解或 #P-困难情形（中间情形一概不存在！）。不考虑平面性的情况下，针对一般图上的八顶点模型，已经建立了复杂性二分定理 [9]。在这一分类中，平面结构上的一些可解情形，包括 FKT 情形，在一般图上属于 #P-困难。此前，六顶点模型（包括平面图上的情形）已经有了完整的复杂性分类 [11]：该问题要么（1）在一般图上可解；要么（2）在平面图上可解（但在一般图上属于 #P-困难）；要么（3）即使在平面图上也属于 #P-困难。平面上的可解情形（2）包括可通过全息变换和 FKT 算法求解的情形。核心问题是：八顶点模型是否还存在尚未发现的其他平面可解情形？我们能否对所有八顶点模型进行分类？

本文对这一问题给出了肯定的回答。我们发现了平面八顶点模型中一种此前未知的可解类型。这意味着，要实现完整的复杂度分类将颇具挑战。尽管如此，我们还是建立了完整的分类：八顶点模型要么（1）在一般图上可解；要么（2）在平面图上可解（但在一般图上是 #P-困难的）；要么（3）即使在平面图上也是 #P-困难的。平面可解情形（2）包括可通过全息变换和 FKT 算法求解的情形、平面六顶点模型中所有已知的可解情形，以及一种新发现的可解类型。

这种新的可解类型是在一个高度对称的情形下发现的，即当 $w_1 = w_2 = a$、$w_3 = w_4 = b$、$w_5 = w_6 = c$ 和 $w_7 = w_8 = d$（引理 6.20）成立时。这个情形也有物理上的解释，因为它对应于八顶点模型的“零场情形” [2]。在这一情形下，通过一种局部的“组合变换”，平面八顶点模型等价于平面EVEN COLORING 问题；该问题要求计算平面图的绿红边着色的（加权）数量，使得每个顶点关联的绿色边数均为偶数。随后，我们应用$HZ = \frac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{smallmatrix}\right]$所给出的全息变换，将 EVEN COLORING 问题转换回定向问题。对于适当的参数 a、b、c、d，这个定向问题属于平面六顶点模型的一种可解情形（可以证明，该情形无法通过全息变换加 FKT 算法涵盖）。上述“组合变换”加全息变换的范式，也有望在平面图上的一般偶定向计数问题中发现新的可解情形。

六顶点模型和八顶点模型的分类不仅本身很有趣，更重要的是，它们是 Holant 问题更广泛分类计划的基础构件。无平面性约束的八顶点模型的二分定理 [9] 已被用作一般图上实值Holant问题二分定理的关键基础情形 [27]。然而，从 Holant 框架 [33]，的一开始，借助 FKT 算法等工具实现的**平面**可处理性就一直发挥着核心作用。对于对称约束函数（亦称签名），包括平面情形在内的完整分类已经得以建立 [10]。然而，大多数签名并不对称，要全面理解 Holant 问题，就必须考虑非对称签名。全息算法最终依赖于 FKT 算法；该算法针对一个 Holant 问题（即计数完美匹配），但已被证明是平面 #CSP 的一种“通用”算法范式 [8]。但是 [10] 揭示了一个耐人寻味的事实：对于 Holant 问题本身，FKT并非通用。先前的工作 [11]与我们当前的工作进一步表明，对于具有

非对称签名的 Holant 问题，FKT 并不通用。本文证明的结果将为分类具有非对称签名的平面 Holant 问题的复杂度提供更多基础构件。

2 预备知识

令 i 表示 -1的一个平方根。令 ζ_m 表示 $m \in \mathbb{Z}_+$上的 $e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{m}}$。令 $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$。我们分别用 $\leq_T^p$ 和 $\equiv_T^p$ 表示多项式时间图灵归约和等价。

2.1 定义和记号

一个元数为 k 的约束函数 f，或签名，是一个映射 $\{0,1\}^k \to \mathbb{C}$。固定一个由约束函数组成的集合 $\mathcal{F}$。一个签名网格$\Omega = (G, \pi)$是一个元组，其中 $G = (V, E)$是一个图，称为 Ω 的底层图；π 为每条 $v \in V$ 标记一个元数为 $\deg(v)$ 的函数 $f_v \in \mathcal{F}$，并为 v 处的关联边 $E(v)$标记来自 f_v 的输入变量。我们考虑 E 上所有 0-1 边赋值 σ，每个赋值都给出一个求值 $\prod_{v\in V} f_v(\sigma|_{E(v)})$，其中 $\sigma|_{E(v)}$ 表示将 σ 限制到 $E(v)$ 上。对于实例 Ω，计数问题是计算配分函数

$$\mathrm{Holant}_\Omega = \mathrm{Holant}(\Omega; \mathcal{F}) = \sum_{\sigma: E\to\{0,1\}} \prod_{v\in V} f_v(\sigma|_{E_{(v)}}). \tag{2.1}$$

Holant 问题 $\Omega \mapsto \mathrm{Holant}_\Omega$ 是一个由集合 $\mathcal{F}$ 参数化的计算问题，记作 Holant($\mathcal{F}$)。如果 $\mathcal{F} = \{f\}$是单个集合，为简单起见，我们直接将 $\{f\}$写作 f，也将 $\{\mathcal{F}\} \cup \{g\}$写作 $\mathcal{F} \cup g$或 $\mathcal{F}$, g。我们将 Pl-Holant($\mathcal{F}$)记作 Pl-Holant($\mathcal{F}$)在平面图 G上的限制。我们用 Holant ($\mathcal{F} \mid \mathcal{G}$)表示定义在具有二部图 $H = (U, V, E)$的签名网格上的 Holant 问题，其中 U或 V中的每个顶点分别被赋予 $\mathcal{F}$或 $\mathcal{G}$中的一个签名。Pl-Holant ($\mathcal{F} \mid \mathcal{G}$)表示其平面限制。

计数约束满足问题（#CSP）可以定义为 Holant 问题的一种特殊情形。#CSP($\mathcal{F}$)的一个实例表示为一个二分图。每个变量以及每次约束函数出现都对应一个节点。如果某个变量出现在某次约束中，就将对应的约束节点与变量节点相连，并在边上标记这些变量的顺序。这个二分图也称为约束图。如果给每个变量节点附加一个 Equality 函数，并将每条边视为一个变量，那么 #CSP 就是定义在这个二分图上的 Holant 问题。因此，#CSP($\mathcal{F}$) $\equiv_T^p$Holant ($\mathcal{EQ} \mid \mathcal{F}$)，其中 $\mathcal{EQ} = \{=_1, =_2, =_3, \dots\}$ 是由所有元数的 Equality 签名组成的集合。类似地，#CSP^2($\mathcal{F}$)可以定义为 Holant ($\mathcal{EQ}_2 \mid \mathcal{F}$)，其中 $\mathcal{EQ}_2 = \{=_2, =_4, \dots\}$ 是由偶数元数的 Equality 签名组成的集合，也就是说，每个变量都出现偶数次。

定义在 $G = (V, E)$上的自旋系统为每个 $v \in V$ 设置一个变量，并为每条边 $e \in E$设置一个二元函数 g。其配分函数为

$$\sum_{\sigma: V\to\{0,1\}} \prod_{(u,v)\in E} g(\sigma(u), \sigma(v)).$$

自旋系统是#CSP($\mathcal{F}$)的特殊情形，其中 $\mathcal{F}$ 只包含一个二元函数。它们也称为图同态。我们用#GH(g)表示约束函数为 g的自旋系统，而Bi-#GH(g)表示其在二分图上的限制。

对于一个四元签名 f，我们始终按照逆时针顺序将其四条边输入标记为 x_1、x_2、x_3、x_4，如图 2所示。一个元数为 4 的签名 f 具有如下签名矩阵

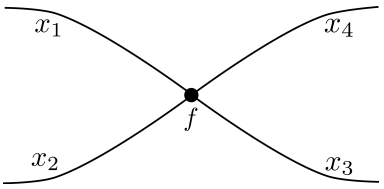


图2：一个四元签名 f，其四个边输入按逆时针方向标记为x_1、x_2、x_3、x_4。

$M(f) = M_{x_1x_2,x_4x_3}(f) = \begin{bmatrix} f_{0000} & f_{0010} & f_{0001} & f_{0011} \\ f_{0100} & f_{0110} & f_{0101} & f_{0111} \\ f_{1000} & f_{1010} & f_{1001} & f_{1011} \\ f_{1100} & f_{1110} & f_{1101} & f_{1111} \end{bmatrix}$。请注意顺序反转 x_4x_3。这样做是为了便于以平面方式连接两个签名 f 和 g：将 f的变量 x_4, x_3分别与 g的变量 x_1, x_2 相连。若 (i, j, k, ℓ) 是 (1, 2, 3, 4) 的一个排列，则 4×4矩阵 $M_{x_ix_j,x_\ell x_k}(f)$ 按字典序列出这 16 个值，行索引为 $x_ix_j \in \{0,1\}^2$，列索引为 $x_\ell x_k \in \{0,1\}^2$。如果对于任意 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$，$f$均满足箭头反转相等，即$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4})$，其中 x_i是 x_i的补，我们就称其满足箭头反转相等。二元签名 g 的签名向量为 $(g_{00}, g_{01}, g_{10}, g_{11})^T$（作为真值表），签名矩阵为 $M(g) = M_{x_1,x_2}(g) = \left[\begin{smallmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{smallmatrix}\right]$.。我们用 $\neq_2$表示二元签名 $(0, 1, 1, 0)^T$；其签名矩阵为 $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$。令 $N = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \otimes \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；它是双 DISEQUALITY的签名矩阵，后者表示通过 $\neq_2$连接两对边的函数。平面八顶点模型是问题 Pl-Holant $(\neq_2 \mid f)$，其中 $M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$。 $M(f)$的外矩阵是子矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ y & x \end{smallmatrix}\right]$，记作 $M_{\text{Out}}(f)$。$M(f)$的内部矩阵为$\left[\begin{smallmatrix} c & d \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$，记作 $M_{\text{In}}(f)$。签名 f的支撑集是使f 非零的输入集合。

令 $\mathcal{S}$ 表示交叉签名，即签名矩阵为 $M(\mathcal{S}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的四元签名，它是 $(x_1 = x_3) \wedge (x_2 = x_4)$ 的指示函数。在签名集 $\mathcal{F}$ 中加入 $\mathcal{S}$，可使问题 Holant $(=_2 \mid \mathcal{F})$ 和 Pl-Holant $(=_2 \mid \mathcal{F})$ 等价。此外，令 $\mathcal{S}'$表示不等交叉签名，即签名矩阵为 $M(\mathcal{S}') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的四元签名，它是 $(x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4)$ 的指示函数。注意，$M(\mathcal{S}) = M(\mathcal{S}')N$。

引理 2.1。设 $\mathcal{F}$、$\mathcal{G}$ 是两个任意的签名集，则

$$\text{Holant}\left(\mathcal{F} \mid \mathcal{G}\right) \leq_T^p \text{Pl-Holant}\left(\mathcal{F}, (=_2)^{\otimes 2} \mid \mathcal{G}, \mathcal{S}\right).$$

证明。设 Ω 是 Holant $(\mathcal{F} \mid \mathcal{G})$ 的一个实例。我们将 Ω 中标记为属于 $\mathcal{F}$ 中签名的顶点放在左侧，将标记为属于 $\mathcal{G}$ 中签名的顶点放在右侧。不失一般性，我们可以假设 Ω 中每个交点至多有两条边相交。接着，我们通过用一个交叉签名 $\mathcal{S}$ 替换每个交点，并在右侧连接一个 $(=_2)^{\otimes 2}$，构造一个 Pl-Holant $\left(\mathcal{F},\ (=_2)^{\otimes 2} \mid \mathcal{G},\ \mathcal{S}\right)$的实例 Ω′。这不会改变 Holant 值，并且保持二部性。

□

引理 2.2. 设 $\mathcal{F}$为任意签名集，则 $\text{Holant}\left(\neq_2 \mid \mathcal{F}\right) \leq_T^p \text{Pl-Holant}\left(\neq_2 \mid \mathcal{F} \cup \mathcal{S}'\right)$。

证明。设 Ω 是 Holant $(\neq_2 \mid \mathcal{F})$ 的一个实例。与引理 2.1 中一样，我们将 Ω 中标记为 $\neq_2$ 的顶点放在左侧，将标记为 $\mathcal{F}$ 中签名的顶点放在右侧，并假设 Ω 中至多有两条边在同一点相交。对于 Ω 中两条边相交的任一点，将其替换为一个交叉签名 $\mathcal{S}$。这不会改变 Holant 值。由于 $M(\mathcal{S}) = M(\mathcal{S}')N$，如果我们进一步将每个 $\mathcal{S}$ 替换为一个与右侧的 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 相连的不等交叉 $\mathcal{S}'$，Holant 值仍保持不变。于是，我们得到一个 Pl-Holant $(\neq_2 \mid \mathcal{F} \cup \mathcal{S}')$ 的实例 Ω′，并且 Holant $(\Omega; \neq_2 \mid \mathcal{F})$ = Pl-Holant $(\Omega'; \neq_2 \mid \mathcal{F} \cup \mathcal{S}')$。引理得证。 □

备注： 根据引理 2.1和引理 2.2，一旦我们在左侧实现 $\mathcal{S}$，并在右侧实现 $(=_2)^{\otimes 2}$，或者在左侧实现 $\mathcal{S}'$，就可以将 Holant 问题归约为相应的 Pl-Holant 问题。特别地，Holant 问题的 #P-困难性也适用于相应的 Pl-Holant 问题。

引理 2.3。 设 f是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$，则

$$\text{Pl-Holant}\,(\neq_2 \mid f) \equiv_T^p \text{Pl-Holant}\left(\neq_2 \mid \tilde{f}\right),$$

where $M(\tilde{f}) = \begin{bmatrix} \tilde{a} & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & \tilde{a} \end{bmatrix}$ *with* $\tilde{a} = \sqrt{ax}$.

证明。 对于任意一个具有四正则图 G 的 Pl-Holant 签名网格 Ω（$\neq_2 \mid f$），G 上的任何有效定向都必须具有相同数量的源点和汇点。因此，Pl-Holant $(\Omega; \neq_2 \mid f)$ 作为 a 和 x 的多项式，实际上是乘积 ax的多项式。所以我们可以将 (a, x) 替换为任意满足 $\tilde{a}\tilde{x} = ax$的 $(\tilde{a}, \tilde{x})$。特别地，设 f 是一个四元签名，其签名矩阵为$M(\tilde{f}) = \begin{bmatrix} \tilde{a} & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & \tilde{a} \end{bmatrix}$，其中 $\tilde{a} = \sqrt{ax}$，则 Pl-Holant $(\Omega; \neq_2 \mid f)$ = Pl-Holant $\left(\Omega; \neq_2 \mid \tilde{f}\right)$。因此，Pl-Holant $(\neq_2 \mid f) \equiv_T^p$ Pl-Holant $\left(\neq_2 \mid \tilde{f}\right)$. □

定义 2.4. 一个四元签名是非奇异冗余签名，当且仅当它的四个签名矩阵之一的中间两行相同，且中间两列相同，并且行列式

$$\det \begin{bmatrix} f_{0000} & f_{0010} & f_{0011} \\ f_{0100} & f_{0110} & f_{0111} \\ f_{1100} & f_{1110} & f_{1111} \end{bmatrix} \neq 0.$$

定理 2.5. *[13]* 若 f 是非奇异冗余签名，则 Pl-Holant$(\neq_2 \mid f)$ 是 #P-难的。

2.2 构件构造

本文始终使用的一个基本概念是构件构造。如果存在一个带有若干悬挂边的构件，使得每个顶点都被赋予签名集 $\mathcal{F}$中的一个签名，并且将所得的图视为一个以悬挂边为输入的黑盒签名后，恰好得到签名 f，那么我们就称签名 f 可由 或 可实现自 签名集 $\mathcal{F}$ 。如果签名 f可由集合 $\mathcal{F}$实现，那么我们就可以将 f 自由加入 $\mathcal{F}$，同时保持复杂度不变。

形式上，这一概念由一个 $\mathcal{F}$-门定义。 $\mathcal{F}$-门类似于 Holant($\mathcal{F}$) 的签名网格（G, π），但 $G = (V, E, D)$ 是一个带有若干悬挂边 D 的图。悬挂

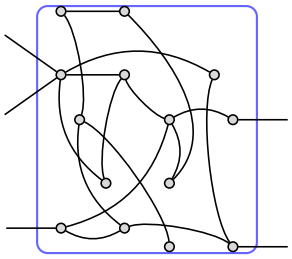


图 3：一个带有 5 条悬挂边的 $\mathcal{F}$-门。

边为 $\mathcal{F}$-门定义外部变量（示例见图 3 ）。我们将 E 中的常规边记为 1、、.....、 m，将 D 中的悬挂边记为 $m+1$、.....、 $m+n$。于是，我们可以将此 $\mathcal{F}$-门对应的函数定义为

$$f(y_1,\ldots,y_n)=\sum_{x_1,\ldots,x_m\in\{0,1\}} H(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n),$$

其中，$(y_1,\ldots,y_n)\in\{0,1\}^n$ 是悬挂边上的一个赋值，而 $H(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$ 是对 G 中所有边赋值时签名网格的值，它等于 V 中所有顶点处求值的乘积。我们也称这个函数为 $\mathcal{F}$-门的签名 f。

如果底层图 G 是平面图，并且按照输入变量的顺序逆时针对悬挂边排序后，它们位于平面嵌入的外面，那么 $\mathcal{F}$-门就是平面的。平面 $\mathcal{F}$-门可用于平面签名网格，就如同它是一个具有特定签名的单一顶点。

利用平面 $\mathcal{F}$-门，我们可以将一个平面 Holant 问题归约为另一个平面 Holant 问题。假设 g 是某个平面 $\mathcal{F}$- 门的签名。那么 Pl-Holant$(\mathcal{F},g)\leq_T$Pl-Holant$(\mathcal{F})$。这个归约很简单。给定 Pl-Holant$(\mathcal{F},g)$ 的一个实例，将每处 g 替换为 $\mathcal{F}$-门，即可得到 Pl-Holant$(\mathcal{F})$ 的一个实例。由于 $\mathcal{F}$- 门的签名是 g，这两个签名网格的 Holant 值相同。

最简单的构件构造就是旋转，即对f的变量进行循环重命名。签名 f的矩阵为 $M(f)=M_{x_1x_2,x_4x_3}(f)=\begin{bmatrix}a&0&0&b\\0&c&d&0\\0&w&z&0\\y&0&0&x\end{bmatrix}$，其余三种旋转形式为$f^{\frac{\pi}{2}},f^{\pi},f^{\frac{3\pi}{2}}$，对应的签名矩阵分别为 $M(f^{\frac{\pi}{2}}):=M_{x_2x_3,x_1x_4}(f)=\begin{bmatrix}a&0&0&z\\0&b&w&0\\0&d&y&0\\c&0&0&x\end{bmatrix}$，$M(f^{\pi}):=M_{x_3x_4,x_2x_1}(f)=\begin{bmatrix}a&0&0&y\\0&z&d&0\\0&w&c&0\\b&0&0&x\end{bmatrix}$，以及 $M(f^{\frac{3\pi}{2}}):=M_{x_4x_1,x_3x_2}(f)=\begin{bmatrix}a&0&0&c\\0&y&w&0\\0&d&b&0\\z&0&0&x\end{bmatrix}$。一旦得到其中一种，就可以由此实现另外三种。在证明中，我们将这一事实称为旋转对称性。旋转 $\frac{\pi}{2}$ 时签名元素的移动方式如图 4 所示。请注意，无论在哪个签名矩阵中，(d,w)（且仅有(d,w)）始终位于内部矩阵中。我们称(d,w)为内对，并称(b,y)和(c,z)为外对。

本文中最常用的构件是通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$在两个四元签名之间进行**连接**。设 f_1 和 f_2 的签名矩阵分别为 $M_{x_ix_j,x_\ell x_k}(f_1)$ 和 $M_{x_sx_t,\ x_vx_u}(f_2)$，其中 $(i,\ j,\ k,\ \ell)$ 和 $(s,\ t,\ u,\ v)$ 是 (1，2，3，4) 的旋转。将 x_ℓ 与 x_s、 x_k 与 x_t连接起来，二者均使用 Disequality $(\neq_2)$，即可得到一个元数为 4 的签名 f_3，其签名矩阵为

$$M(f_3)=M_{x_ix_j,x_\ell x_k}(f_1)NM_{x_sx_t,x_vx_u}(f_2)$$

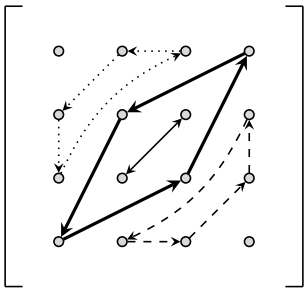


图4：四元签名的签名矩阵中各项在输入边顺时针旋转下的移动。汉明重量为二的项位于两个实线环中（一个长度为4，另一个是一次交换）。

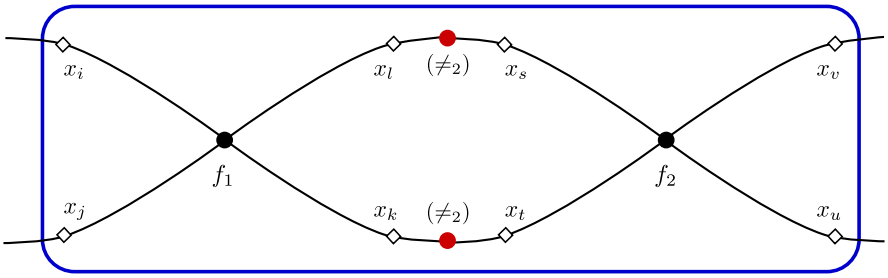
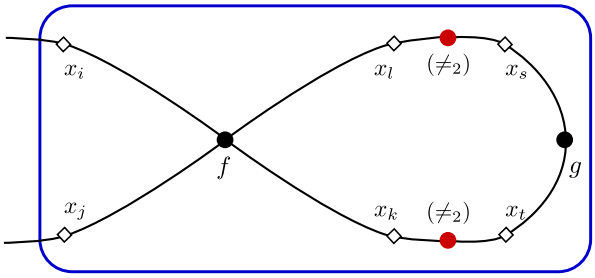


图5：用 $\neq_2$将 f_1 的变量 x_ℓ、 x_k 与 f_2 的变量 x_s、 x_t 分别连接。

通过矩阵乘积，其中行索引为x_ix_j，列索引为 x_vx_u （见图 5).

由于该连接保持平面性与二分性，对于任意包含f_1和 f_2的签名集 $\mathcal{F}$，我们有Pl-Holant ($\neq_2|\ \mathcal{F} \cup f_3$) $\leq_T^p$Pl-Holant ($\neq_2|\ \mathcal{F}$)。下文中，当我们说通过$(\neq_2)^{\otimes 2}$连接签名 f 与 g 时，指的是上述构件：分别用 $\neq_2$将 f的变量 x_4, x_3 与 g 的变量 x_1, x_2 相连接。

另一种常用的构件是通过二元签名形成环。设 g 是一个二元签名，其签名向量为 $g(x_1, x_2) = (g_{00}, g_{01}, g_{10}, g_{11})^T$，并且 $g(x_2, x_1) = (g_{00}, g_{10}, g_{01}, g_{11})^T$。若无其他说明， g 表示 $g(x_1, x_2)$。设 f 是一个元数为 4 的签名，其签名矩阵为$M_{x_ix_j,x_\ell x_k}(f)$，且(s, t)是(1, 2)的一个排列。将 x_ℓ与 x_s相连，并将x_k 与 x_t相连，两处均使用 DISEQUALITY $(\neq_2)$，即可得到一个二元签名，其签名矩阵为 $M_{x_ix_j,x_kx_\ell}Ng(x_s, x_t)$，这是一个指标为$x_ix_j$的矩阵乘积（见图 6）。若 $g_{00} = g_{11}$，则



Fi图6：用 $\neq_2$将 f 的变量 x_ℓ、 x_k 与 g 的变量 x_s、 x_t 分别连接。

$N(g_{00}, g_{01}, g_{10}, g_{11})^T = (g_{11}, g_{10}, g_{01}, g_{00})^T = (g_{00}, g_{10}, g_{01}, g_{11})^T$，类似地，$N(g_{00}, g_{10}, g_{01}, g_{11})^T = (g_{00}, g_{01}, g_{10}, g_{11})^T$。因此，$M_{x_ix_j,x_\ell x_k} Ng(x_s, x_t) = M_{x_ix_j,x_\ell x_k} g(x_t, x_s)$，这意味着：使用 N 将 f 的变量 x_ℓ，x_k 分别与 g 的变量 x_s，x_t 相连，等价于不借助 N而直接将它们相连。因此，在 Pl-Holant($\neq_2 | f, g$) 的设定下，我们可以构造$M_{x_ix_j,x_\ell x_k}(f)g(x_t, x_s)$；严格来说，这相当于$M_{x_ix_j,x_\ell x_k} Ng(x_s, x_t)$，前提是 $g_{00} = g_{11}$。注意，对于二元签名 g，我们可以将其旋转 π 而不破坏平面性，因此一旦得到其中一个，$g(x_s, x_t)$和 $g(x_t, x_s)$都可以自由使用。

我们要强调的最后一种构件构造是**二元修改**。使用二元签名 x_i 对 $f(x_i, x_j, x_k, x_l)$中的变量 $g(x_s, x_t)$ 进行二元修改，意指将 x_i 中 f 的变量连接到 x_t 中 g 的变量，连接方式为 DISEQUALITY ($\neq_2$)（见图7）。

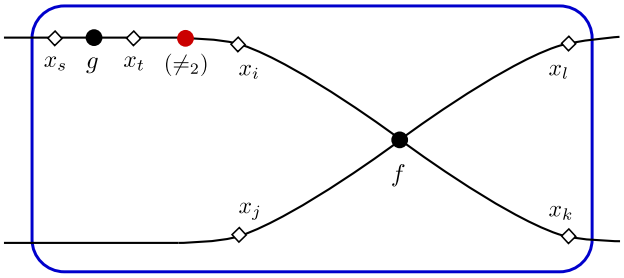


图 7：使用 $\neq_2$ 将 x_t of g 中的变量与 x_i of f 中的变量连接起来。

注意，如果 $g(x_1, x_2) = (0, 1, t, 0)^T$ 是一个带权二元 DISEQUALITY；那么，使用 g 对 x_1 of$f$ 进行修改，相当于将 t 乘到 f 中每个满足指标 $x_i = 1$ 的项上。因此，对于 $M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{0000} & 0 & 0 & f_{0011} \\ 0 & f_{0110} & f_{0101} & 0 \\ 0 & f_{1010} & f_{1001} & 0 \\ f_{1100} & 0 & 0 & f_{1111} \end{bmatrix}$，使用二元签名 $(0, 1, t, 0)^T$ 对 x_1 of f 中的变量进行二元修改，可得到一个签名 f'，其签名矩阵为 $M(f') = \begin{bmatrix} f_{0000} & 0 & 0 & f_{0011} \\ 0 & f_{0110} & f_{0101} & 0 \\ 0 & tf_{1010} & tf_{1001} & 0 \\ tf_{1100} & 0 & 0 & tf_{1111} \end{bmatrix}$。类似地，使用 g 对 f 中的 x_2、x_3、x_4 进行修改，分别得到以下签名，

$$\begin{bmatrix} f_{0000} & 0 & 0 & f_{0011} \\ 0 & tf_{0110} & tf_{0101} & 0 \\ 0 & f_{1010} & f_{1001} & 0 \\ tf_{1100} & 0 & 0 & tf_{1111} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} f_{0000} & 0 & 0 & tf_{0011} \\ 0 & tf_{0110} & f_{0101} & 0 \\ 0 & tf_{1010} & f_{1001} & 0 \\ f_{1100} & 0 & 0 & tf_{1111} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} f_{0000} & 0 & 0 & tf_{0011} \\ 0 & f_{0110} & tf_{0101} & 0 \\ 0 & f_{1010} & tf_{1001} & 0 \\ f_{1100} & 0 & 0 & tf_{1111} \end{bmatrix}.$$

二元修改在本节及后续各节的证明中被广泛使用，尤其是在引理 2.7、引理 7.2、定理7.3 以及第 5 节的许多引理中。

引理 2.6。令 $g = (0、1、t、0)^T$ 为一个二元签名，其中 $t \neq 0$。那么对于任意签名集$\mathcal{F}$，有

$$\text{Pl-Holant}\left(\neq_2 | \mathcal{F}, g, (0, 1, t^{-1}, 0)^T\right) \leq_T^p \text{Pl-Holant}\left(\neq_2 | \mathcal{F}, g\right)$$

证明。将 g旋转 π后，我们得到签名 $(0、t、1、0)^T$。将 g除以 t不会影响复杂度。引理得证。□

引理 2.7。令 f为一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$，其中$czdw \neq 0$。如果 f 满足以下条件，

- $M_{\text{输出}}(f) = \begin{bmatrix} a & b \\ y & a \end{bmatrix}$ 具有满秩；
- $M_{\text{在}}(f) = \begin{bmatrix} c & d \\ w & z \end{bmatrix}$ 是退化的；

- $c+d\neq 0$ 或 $z+d\neq 0$；那么

Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P- 困难的。

证明。我们对 $c+d\neq 0$ 证明该引理。$z+d\neq 0$ 的情形可由 $M(f^\pi) = M_{x_3x_4,\ x_2x_1}(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & y \\ 0 & z & d & 0 \\ 0 & w & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ 得到。

由于 $\left[\begin{smallmatrix} c & d \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$ 是退化的且 $czdw\neq 0$，存在 $k\neq 0$ 使得 $\left[\begin{smallmatrix} c & d \\ w & z \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} c & d \\ ck & dk \end{smallmatrix}\right]$。

通过使用 $\neq_2$ 连接 f 的变量 x_3 和 x_4，我们得到二元签名 $(c+d)(0,1,k,0)^T$。根据引理 2.6，有 $(0,1,k^{-1},0)^T$。通过使用 $(0,1,k^{-1},0)^T$ 对 f 的变量 x_1 进行二元修改，我们得到签名 f_1，其签名矩阵为 $M(f_1) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ y & 0 & 0 & a \\ k & & & k \end{bmatrix}$。然后，通过使用 $\neq_2$ 连接 f_1 的变量 x_1 和 x_2，我们得到二元签名 $2c(0,1,\frac{d}{c},0)^T$。通过使用 $(0,1,\frac{d}{c},0)^T$ 对 f_1 的变量 x_3 进行二元修改，我们得到 f_2，其签名矩阵为 $M(f_2) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \frac{b}{c} \\ 0 & d & d & 0 \\ 0 & d & d & 0 \\ y & 0 & 0 & \frac{ad}{kc} \end{bmatrix}$，这是一个冗余形式的签名。由于 $\det\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ y & a \end{smallmatrix}\right]\neq 0$，$f_2$ 的压缩签名矩阵是满秩的。因此，根据定理 2.5，Pl-Holant $(\neq_2|\ f_2)$ 是 #P-困难的。所以 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的。 □

上述引理已应用于引理 7.1以得到 #P-困难性。

2.3 全息变换

全息变换是本文用于复杂性分析和算法设计的一项基础技术。为介绍全息变换的思想，考虑二分图会比较方便。对于一般的图，我们总能在保持 Holant 值不变的情况下将其转化为二分图，方法如下：将图中的每条边替换为一条长度为二的路径。（这一操作称为图的*2-伸展*，所得图即为边-顶点关联图。）每个新顶点都赋予二元 EQUALITY 签名 $(=_2) = [1,0,1]$。

对于可逆的 2×2 矩阵 $T\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 和一个元数为 n 的签名 f，将其写作列向量（逆变张量）$f\in\mathbb{C}^{2^n}$，我们用 $T^{-1}f = (T^{-1})^{\otimes n} f$ 表示变换后的签名。对于签名集 $\mathcal{F}$，定义 $T^{-1}\mathcal{F} = \{T^{-1}f \mid f\in\mathcal{F}\}$ 为变换后的签名集。对于写作行向量（协变张量）的签名，我们类似地定义 fT 和 $\mathcal{F}T$。每当我们写下 $T^{-1}f$ 或 $T^{-1}\mathcal{F}$ 时，都将签名视为列向量；同样，写下 fT 或 $\mathcal{F}T$ 时，则视为行向量。

T 定义的全息变换是如下操作：给定 Holant $(\mathcal{F}\mid\mathcal{G})$ 的签名网格 $\Omega = (H,\ \pi)$，对于同一个二分图 H，通过将 $\mathcal{F}$ 或 $\mathcal{G}$ 中的每个签名替换为 $\mathcal{F}T$ 或 $T^{-1}\mathcal{G}$ 中对应的签名，得到 Holant $\left(\mathcal{F}T \mid T^{-1}\mathcal{G}\right)$ 的新签名网格 $\Omega' = (H,\ \pi')$。

定理 2.8 (Valiant 的 Holant 定理 [33])。对于任意 $T\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$，

$$\mathrm{Holant}(\Omega;\mathcal{F}\mid\mathcal{G}) = \mathrm{Holant}(\Omega';\mathcal{F}T\mid T^{-1}\mathcal{G}).$$

因此，在二分情形下，全息变换不会改变 Holant 问题的复杂度。该定理对平面实例同样成立。

可变换

定义 2.9。 我们称一对签名集 $(\mathcal{F}、\mathcal{G})$ 是 $\mathscr{C}$-可变换的，如果存在一个 $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 使得 $\mathcal{F}T \in \mathscr{C}$ 且 $T^{-1}\mathcal{G} \subseteq \mathscr{C}$。

定义 2.10. 我们称签名集 $\mathcal{F}$ 是 $\mathscr{C}$-可变换的，当且仅当这一对 $(\neq_2, \mathcal{F})$ 是 $\mathscr{C}$-可变换的。

定义 2.10 很重要，因为如果 Pl-Holant($\mathscr{C}$) 是可解的，那么对于任意 $\mathscr{C}$-可变换集 $\mathcal{F}$，Pl-Holant($\neq_2 \mid \mathcal{F}$) 都是可解的。

2.4 多项式插值

多项式插值是一种强大的归约技术，由 [30] 开创，用于证明各种问题的 #P 完全性，并在我们的证明中得到广泛应用。在第 2.4.1节中，我们通过一个简单的例子说明这种方法。在第 2.4.2节中，我们简要介绍复分析中 M¨obius 变换在插值中的应用。在第 2.4.3节中，我们介绍共形格插值，它概括了本文中将以多种形式运用的插值技术的本质。

2.4.1 常规插值

引理 2.11. 设 f 是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $k \neq 0$。那么

$$\text{Pl-Holant}\,(\neq_2 \mid f, \mathcal{S}) \leq_T^p \text{Pl-Holant}\,(\neq_2 \mid f)\,.$$

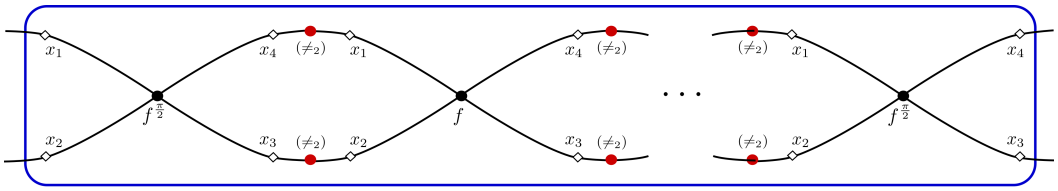


图 8：由 $2s+1$ 个签名 f 副本组成的链，其中奇数编号的副本旋转了 $\frac{\pi}{2}$，并由双重 Disequality N 连接

证明。 将 f 旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后，我们得到 $f^{\frac{\pi}{2}}$，其签名矩阵为 $M(f^{\frac{\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。我们构造一系列构件 f_{2s+1}，方法是用链连接 $2s+1$ 个 f 副本，其中奇数编号的副本旋转 $\frac{\pi}{2}$，并由双重 Disequality N (见图 8)。显然， f_{2s+1} 的签名矩阵为

$$M(f_{2s+1}) = (M(f^{\frac{\pi}{2}})NM(f)N)^s M(f^{\frac{\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2s+1)k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ (2s+1)k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

给定任意一个 Pl-Holant $(\neq_2 \mid f, \mathcal{S})$ 的签名网格 Ω，其中 $\mathcal{S}$ 出现 m 次，我们通过将每个 $\mathcal{S}$ 替换为构件 f_{2s+1} 的一个副本，构造 Pl-Holant $(\neq_2 \mid f)$ 的签名网格 Ω_s。我们

将 Ω_s 分为两部分。一部分由 m 签名 f_{2s+1} 组成，其签名表示为 $(f_{2s+1})^{\otimes m}$。这里我们将 $(f_{2s+1})^{\otimes m}$ 改写为列向量。另一部分是 Ω_s 的其余部分，其签名表示为 A，这是一个表示为行向量的张量。于是，Ω_s 的 Holant 值就是点积 $\langle A, (f_{2s+1})^{\otimes m}\rangle$，它是对 $4m$ 个比特求和。也就是说，对连接这两部分的 $4m$ 条边上的所有 0，1 取值求和。我们可以将这些 $4m$ 个比特的所有 0，1 赋值中，使 Pl-Holant$_{\Omega_s}$ 中某一项的求值非零的赋值分为以下几类：

- 有 i 个 f_{2s+1} 的副本，其输入为 0000，0101、1010 或 1111；
- 有 j 个 f_{2s+1} 的副本，其输入为 0110 或 1100；其中 $i+j=m$。

对于参数为 $(i,\ j)$ 的类别中的任意赋值，f_{2s+1} 的求值结果为 $((2s+1)k)^j$。令 a_j 为类别 $(i,\ j)$ 中所有赋值下部分 A 的取值之和。注意，由于我们将构件 f_{2s+1} 视为一个整体，因此 c_j 与 s 的取值无关。然后，我们重写点积求和，得到

$$\text{Pl-Holant}_{\Omega_s} = \langle A, (f_{2s+1})^{\otimes m}\rangle = \sum_{0\le j\le m} ((2s+1)k)^j a_j \tag{2.2}$$

在这种分层下，我们有 Pl-Holant$_{\Omega}$ = Pl-Holant$(\Omega; \neq_2|\ f,\ \mathcal{S})$ $= a_0$。将 a_j视为变量后，我们便可以求解线性方程组 2.2 ，给定 Pl-Holant$_{\Omega_s}$ 对于 $0 \le s \le m$，因为系数矩阵是满秩范德蒙德矩阵（$k \neq 0$）。因此，我们可以在多项式时间内计算 Pl-Holant$_{\Omega}$。因此，Pl-Holant $(\neq_2|\ f,\ \mathcal{S}) \le_T^p$Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$。□

上面的引理将在引理 5.4中用到，其中 $M(f$有两个零项。利用类似的论证，我们可以证明下面的引理，该引理将在引理 4.2 中用到，其中 $M(f$有两个零对。

引理 2.12。 设 f 是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&d&0\\ 0&d&0&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$，其中 $d \neq 0$ 不是单位根。

那么对于任意包含 f 的签名 $\mathcal{F}$，有

$$\text{Pl-Holant}\ (\neq_2|\ \mathcal{F}\cup\mathcal{S}) \le_T^p \text{Pl-Holant}\ (\neq_2|\ \mathcal{F})\,.$$

证明。 我们从 f 插值得到交叉 $\mathcal{S}$。给定任意一个 Pl-Holant $(\neq_2|\ \mathcal{F}\cup\mathcal{S})$ 的签名网格 Ω，其中 $\mathcal{S}$ 出现 n 次，我们通过将每个 $\mathcal{S}$ 替换为构件 f_s，构造 Pl-Holant $(\neq_2|\ \mathcal{F})$ 、 $0 \le s \le n$ 的签名网格 Ω_s。该构件由 $2s+1$ 个 f 和 $2s$ 个 N 组成，并沿一条路径连接，其签名矩阵为

$$M(f_s) = M(f)(NM(f))^{2s} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&d^{2s+1}&0\\ 0&d^{2s+1}&0&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}.$$

如果我们按照以下条件对 Ω 中的赋值进行分层： $\mathcal{S}$ 被赋值为 0000 或 1111 的次数恰好为 i，且 $\mathcal{S}$ 被赋值为 0101 或 1010 的次数恰好为 j，那么我们有

$$\text{Holant}(\Omega) = \sum_{i+j=n} a_j,$$

其中，a_j 包含除 $\mathcal{S}$之外的所有 $\mathcal{F}\cup\mathcal{S}$ 贡献。同理，

$$\text{Holant}(\Omega_s) = \sum_{i+j=n} (d^j)^{2s+1} a_j. \tag{2.3}$$

我们将 a_j 视为变量，并将方程 (2.3) 视为一个线性系统。由于 $d \neq 0$ 不是单位根，这是一个满秩的范德蒙德系统，因此我们可以求解出 a_j ，并在多项式时间内计算 Holant(Ω)。这证明了 Pl-Holant $(\neq_2 | \mathcal{F} \cup \mathcal{S}) \leq_T^p$ Pl-Holant $(\neq_2 | \mathcal{F})$。 □

2.4.2 通过 M¨obius 变换进行插值

M¨obius 变换 [1] 是形如 $\mathfrak{z} \mapsto \frac{a\mathfrak{z}+b}{c\mathfrak{z}+d}$ 的映射，其中 $\det \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \neq 0$。它是扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 到自身的双射˜映射。M¨obius 变换的射影阶定义为表示该变换的矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ 的射影阶。M¨obius 变换映射单位圆 $S^1 = \{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} \mid |\mathfrak{z}| = 1\}$ 到自身，当且仅当它具有形式 $\varphi(\mathfrak{z}) = e^{i\theta} \frac{\mathfrak{z}+\lambda}{1+\lambda\mathfrak{z}}$，记作 $\mathcal{M}(\lambda, e^{i\theta})$，其中 $|\lambda| \neq 1$。M¨obius 变换由其在任意 3 个不同点上的取值唯一确定。

使用 M¨obius 变换进行多项式插值的技术，最初是在（非平面）八顶点模型 [9]和 | 平面六顶点模型 [11]的复杂性分类中发展起来的。其思想是使用 M¨obius 变换（具有无限射影阶）生成多项式数量的二进制签名 $g_i = (0, 1, t_i, 0)^T$，作为插值的“原材料”。

我们将 [9] 和 [11]中的相应结果推广到平面八顶点模型的情形（引理 A.4、推论 A.5、A.6）。这一推广并非易事。特别是，为了处理引理 ¨A.4 中射影阶为 2 的 Mobius 变换，我们使用极限分析和分圆域的性质。

这些结果（引理 A.4、推论 A.5、A.6）表明，在某些条件下，我们可以实现任意的或特定的二进制签名，从而能够自由地执行二进制修改。推论 A.6 首次应用于引理 5.1。引理 A.4 和推论 A.5 随后用于引理7.2 和7.3。

2.4.3 共形格插值

定义 2.13 (格)。 设 $k \in \mathbb{Z}_+$ 和 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{C}^k$。定义与 $\mathbf{x}$ 对应的格为 $L_{\mathbf{x}} := \{(j_1, j_2, \ldots, j_k) \in \mathbb{Z}^k \mid x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_k^{j_k} = 1\}$。按惯例，假设 $0^0 = 1$。

注意， $L_{\mathbf{x}}$ 是自由群 $\mathbb{Z}^k$的子群。因此， $L_{\mathbf{x}}$ 也是自由群。定义 $\mathrm{rank}(L_{\mathbf{x}})$ 为 $L_{\mathbf{x}}$的生成元个数。显然， $0 \leq \mathrm{rank}(L_{\mathbf{x}}) \leq k$。若 $L_{\mathbf{x}}$ 由 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r\}$生成，其中 $r = \mathrm{rank}(L_{\mathbf{x}})$，且对于 $1 \leq i \leq r$，有 $\mathbf{b}_i \in \mathbb{C}^k$，则将 $L_{\mathbf{x}}$ 记为 $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r \rangle$，并称 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r\}$ 为 $L_{\mathbf{x}}$的格基。

下面的引理刻画了格满秩的情形。虽然它与多项式插值没有直接关系，但由于第 6 节会用到它，因此我们在此给出。

引理 2.14。 设 $k \in \mathbb{Z}_+$ 和$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{C}^k$。那么秩$(L_{\mathbf{x}}) = k$ 等价于$x_1, x_2, \ldots, x_k$ 全都是单位根。

证明。首先，假设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) = (\zeta_{p_1}, \zeta_{p_2}, \ldots, \zeta_{p_k})$。那么 $\mathbf{b}_i = (0, \ldots, p_i, \ldots, 0) \in L_{\mathbf{x}}$for $1 \leq i \leq k$，其中 $\mathbf{b}_i$在第 i 个位置上取值为 p_i，其他位置均为 0。由于 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}2, \ldots, \mathbf{b}_k$ 线性无关，因此 $\mathrm{rank}(L_{\mathbf{x}}) \geq k$。所以 $\mathrm{rank}(L_{\mathbf{x}}) = k$。反过来，假设 $\mathrm{rank}(L_{\mathbf{x}}) = k$。定义群同态 ϕ: $\mathbb{Z}^k \to \mathbb{C}^*, (j_1, j_2, \ldots, j_k) \mapsto x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_k^{j_k}$，其中 $\mathbb{C}^*$ 是 $\mathbb{C}$的乘法群。那么 $\mathrm{Ker}(\phi) = L_{\mathbf{x}}$，因此 $\mathrm{Im}(\phi) \simeq \mathbb{Z}^k / L_{\mathbf{x}}$。由于 $\mathrm{rank}(L_{\mathbf{x}}) = k$， $\mathrm{Im}(\phi)$ 是有限的。这意味着 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 都是单位根。 □

下面的插值引理就是我们所称的“共形格插值”，它是对 [12]中的引理 5.1 的推广。它将在引理 6.6中使用，后者是确立 #P-困难性的基础。通俗直观地说，该引理指出，只要$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k$的乘法关系格比$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k$的乘法关系格“更细”，我们就可以通过在$\mathbf{y}$ 处求值，得到多元多项式在$\mathbf{x}$处的值。

引理 2.15 （共形格插值）。设 $k \in \mathbb{Z}_+$，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{C}^k$和$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in \mathbb{C}^k$。假设 $L_{\mathbf{x}} \subseteq L_{\mathbf{y}}$。给定这些数

$$N_l(x_1, x_2, \ldots, x_k) := \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_k \geq 0 \\ j_1 + j_2 + \cdots + j_k \leq m}} (x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_k^{j_k})^l z_{j_1, j_2, \ldots, j_k}$$

对于 $l = 1、2、\ldots、\binom{m+k}{k}$，我们可以在关于 m 的多项式时间内计算出 $N_1(y_1, y_2, \ldots, y_k)$。

Proof. We treat $N_l = \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_k \geq 0 \\ j_1 + j_2 + \cdots + j_k \leq m}} (x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_k^{j_k})^l z_{j_1, j_2, \ldots, j_k}$ (where $1 \leq \ell \leq \binom{m+k}{k}$) as a system of 未知数为 $z_{j_1,\ldots,j_k}$ 的线性方程组。第一个方程的系数向量为 $(x_1^{\ 1} x_2^{\ 2} \cdots x_k^{\ k})$，其索引由元组$\vec{j}(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ 给出，其中 $0 \leq j_1, j_2, \ldots, j_k \leq m$ 和 $j_1 + j_2 + \ldots + j_k \leq m$。该线性系统的系数矩阵是范德蒙德矩阵，行索引为 ℓ，列索引为 $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$。然而，这个范德蒙德矩阵通常是秩亏的。如果 $(j_1, j_2, \ldots, j_k) - (j_1', j_2', \ldots, j_k') \in L_{\mathbf{x}}$，那么列 $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ 和 $(j_1', j_2', \ldots, j_k')$ 的值相同。

如果 $(j_1, \ldots, j_k)$ 和 $(j_1', \ldots, j_k')$ 是相同的列，我们可以将它们合并；若 $(j_1, \ldots, j_k) - (j_1', \ldots, j_k') \in L_{\mathbf{x}}$，因为对于 $L_{\mathbf{x}}$ 的每个陪集 T，其值 $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_k^{j_k}$ 都相同。因此，求和

$$\sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_k \geq 0 \\ j_1 + j_2 + \cdots + j_k \leq m}} (x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_k^{j_k})^l z_{j_1, j_2, \ldots, j_k}$$

可以写成

$$\sum_T x_T^l \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_k) \in T \cap C} z_{j_1, j_2, \ldots, j_k},$$

其中，x_T 是 $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_k^{j_k}$ 在 $(j_1, j_2, \ldots, j_k) \in T$ 时的值；对 T 的求和是对所有与 $C = \{(j_1, j_2, \ldots, j_k) \mid 0 \leq j_1, j_2, \ldots, j_k \leq m,\ j_1 + j_2 + \ldots + j_k \leq m\}$ 有非空交集的 $L_{\mathbf{x}}$ 的陪集 T 进行的。现在，以 $1 \leq \ell \leq \binom{m+k}{k}$ 为行索引、以满足 $T \cap C \neq \emptyset$ 的陪集 T 为列索引的系数矩阵是满秩的。因此，对于每个满足 $T \cap C \neq \emptyset$ 的陪集 T，我们可以求解 $\left(\sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_k) \in T \cap C} z_{j_1, j_2, \ldots, j_k}\right)$。注意，对于求和

$$\sum_{\substack{j_1, j_2, \cdots, j_k \geq 0 \\ j_1 + j_2 + \cdots + j_k \leq m}} y_1^{j_1} y_2^{j_2} \cdots y_k^{j_k} z_{j_1, j_2, \ldots, j_k}$$

我们还有一个类似的表达式

$$\sum_T y_T \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_k) \in T \cap C} z_{j_1, j_2, \ldots, j_k},$$

因为根据 $L_{\mathbf{x}} \subseteq L_{\mathbf{y}}$，$L_{\mathbf{y}}$ 的每个陪集 T 上的$y_1^{j_1} y_2^{j_2} \ldots y_k^{j_k}$也都是常数。引理得证。 □

2.5 可解签名集

我们列出一些集合 已知对各种计数问题可解的签名集合 [5].

仿射签名

定义 2.16。 对于元数为 n 的签名 f，其支撑集为 f

$$\mathrm{supp}(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_2^n \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0\}.$$

定义 2.17。 若元数为 n 的签名 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 具有如下形式，则称其为仿射

$$\lambda \cdot \chi_{AX=0} \cdot \mathrm{i}^{Q(X)},$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C}$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)$， A 是定义在 $\mathbb{Z}_2$ 上的矩阵， $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_4[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 是一个二次（总次数至多为 2）的多线性多项式，并额外要求所有交叉项的系数均为偶数，即 Q 具有如下形式

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2b_{ij} x_i x_j,$$

且 χ 是一个 *0-1* 指示函数，使得当且仅当 $AX = 0$时， $\chi_{AX=0}$ 为 *1*。我们用 $\mathscr{A}$ 表示所有仿射签名的集合。

以下引理可直接由定义得出。

引理 2.18。 设 g 是一个支撑集大小为 *4* 的二元签名。那么，当且仅当 g 的签名矩阵为 $M(g) = \lambda \begin{bmatrix} \mathrm{i}^a & \mathrm{i}^b \\ \mathrm{i}^c & \mathrm{i}^d \end{bmatrix}$，其中 $\lambda \in \mathbb{C}$、a、b、c、$d \in \mathbb{N}$均非零，且 $a + b + c + d \equiv 0$模 2时， $g \in \mathscr{A}$ 成立。

引理 2.19。 设 f是签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ 的四元签名，且 $aczx \neq 0$，那么，当且仅当二元签名 $g = (a, c, z, x)^T$是仿射签名时， $f \in \mathscr{A}$成立。

*Pr*证毕。 注意到 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = g(x_1, x_2) \cdot \chi_{x_2=x_3} \cdot \chi_{x_1=x_4}$，引理得证。 □

乘积型签名

定义 2.20。 变量集 X 上的签名称为乘积型，如果它可以表示为一元函数、二元相等函数($[1, 0, 1]$)和二元不等函数($[0, 1, 0]$)的乘积，其中每个函数作用于 X中的一个或两个变量。我们用 $\mathscr{P}$表示乘积型函数集。

下面的引理可直接由定义得出。

引理 2.21。 设 $f = \begin{bmatrix} f_{00} & f_{01} \\ f_{10} & f_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ 为一个二元签名。那么 $f \in \mathscr{P}$ 当且仅当 $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$，或 $\alpha = \delta = 0$，或 $\beta = \gamma = 0$。

引理 2.22。 设 f是一个四元签名。若 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $cz \neq 0$，则 $f \in \mathscr{P}$当且仅当 $cz = 1$。

类似地，若 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $dw \neq 0$，则 $f \in \mathscr{P}$当且仅当 $dw = 1$。

证明。 [9]中的引理 2.10 证明了第一种情形。相同的证明很容易推广到第二种情形。

□

备注： 根据定义 2.17 和定义 2.20，若 $f \in \mathscr{A}$或 $f \in \mathscr{P}$，则 $|\mathrm{supp}(f)|$ 是 2 的幂。

局部仿射签名 $\mathscr{L}$

定义 2.23。 元数为 n 的函数 f 属于 $\mathscr{L}$，如果对于支撑集 f 中任意 $\sigma = s_1 s_2 \dots s_n$，变换后的函数

$$R_\sigma f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{\mathrm{i}}^{\sum_{i=1}^n s_i x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

属于 $\mathscr{A}$。这里每个 s_i 都是一个取值为 *0* 或 *1* 的整数，而总和 $\sum_{i=1}^n s_i x_i$ 按整数（或模 *8* 的整数）计算。

匹配门签名

Valiant 引入匹配门 [32, 31]，旨在为平面图上的一系列计数问题提供多项式时间算法。顾名思义，能够用匹配门表达的问题可以归约为计算完美匹配的加权和。借助 Kasteleyn 算法 [23]，，也称 FKT 算法 [29, 24]，后一个问题在平面图上是可解的。这些计数问题可以自然地在 Holant 框架中用匹配门签名来表示。我们用 $\mathscr{M}$ 表示所有匹配门签名的集合；因此 Pl-Holant($\mathscr{M}$) 是可解的，Pl-Holant($\neq_2 | \mathscr{M}$) 也如此。

如果一个签名的支撑集仅包含汉明重量为偶数（分别为奇数）的项，则称其奇偶性为偶（分别为奇）。如果一个签名所有奇数（分别为偶数）重量的项均为零，则称其满足偶（分别为奇）奇偶条件。对于元数至多为 4 的签名，匹配门签名由以下引理刻画。

引理 2.24 ([31][5])。 如果 f 的元数为 ≤ 3，那么 $f \in \mathscr{M}$ 当且仅当 f 满足奇偶校验条件。如果 f的元数为 *4*，那么 $f \in \mathscr{M}$ 当且仅当 f 满足偶校验条件，即，

$$M_{x_1x_2,x_4x_3}(f) = \begin{bmatrix} f_{0000} & 0 & 0 & f_{0011} \\ 0 & f_{0110} & f_{0101} & 0 \\ 0 & f_{1010} & f_{1001} & 0 \\ f_{1100} & 0 & 0 & f_{1111} \end{bmatrix},$$

且 行列式 $M_{\mathrm{Out}}(f)$ =行列式 $M_{\mathrm{In}}(f)$；或者 f满足奇校验条件，即，

$$M_{x_1x_2,x_4x_3}(f) = \begin{bmatrix} 0 & f_{0010} & f_{0001} & 0 \\ f_{0100} & 0 & 0 & f_{0111} \\ f_{1000} & 0 & 0 & f_{1011} \\ 0 & f_{1110} & f_{1101} & 0 \end{bmatrix},$$

且 $f_{0010}f_{1101} - f_{0001}f_{1110} = f_{0100}f_{1011} - f_{0111}f_{1000}$。

对于签名矩阵具有特定形式的签名 f，我们有明确的判据来确定 f何时是 $\mathscr{M}$-可变换的。下文中，我们记 $\widehat{\mathscr{M}} = H\mathscr{M}$，其中 $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

引理 2.25。 *[11]*一个签名 f的签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & z & y & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，它是 $\mathscr{M}$-可变换的 *iff* $f \in \mathscr{M}$ *or* $f \in \widehat{\mathscr{M}}$.

引理 2.26。 签名 f的签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，当且仅当 $\widehat{\mathscr{M}}$ 且 $c = \epsilon z$ *and* $d = \epsilon w$，其中 $\epsilon = \pm 1$。

证明。设 $\hat{f} = H^{\otimes 4} f$ 为变换后的签名。直接计算可得，$\hat{f}$ 的签名矩阵为

$$M(\hat{f}) = H^{\otimes 2} M(f) H^{\otimes 2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} c+d+w+z & -c+d-w+z & c-d+w-z & -c-d-w-z \\ -c-d+w+z & c-d-w+z & -c+d+w-z & c+d-w-z \\ c+d-w-z & -c+d+w-z & c-d-w+z & -c-d+w+z \\ -c-d-w-z & c-d+w-z & -c+d-w+z & c+d+w+z \end{bmatrix}.$$

如果 f 满足偶校验条件，那么 $-c+d-w+z = -c-d+w+z = 0$，这意味着 $c = z$ 和 $d = w$。代入后可得 $M(\hat{f}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w+z & 0 & 0 & -w-z \\ 0 & -w+z & w-z & 0 \\ 0 & w-z & -w+z & 0 \\ -w-z & 0 & 0 & w+z \end{bmatrix}$. 因此，$\widehat{\widehat{\widehat{\widehat{\ }}}}$ 行列式 $M_{\mathrm{Out}}(f) =$ 行列式 $M_{\mathrm{In}}(f) = 0$。因此，根据引理 2.24，$f \in \mathscr{M}$，从而 $f \in \mathscr{M}$。类似地，$\widehat{f}$ 满足奇校验条件当且仅当 $c = -z$ 和 $d = -w$，此时 $f \in \mathscr{M}$。 □

类似地，通过直接计算，我们可以证明以下三个引理:

引理 2.27。签名 f的签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，当且仅当 $c = z$时属于 $\widehat{\mathscr{M}}$。

引理 2.28。签名 f的签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$是 $\mathscr{M}$-可变换的，当且仅当 $d = w$。

引理 2.29。设 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & \epsilon d & \epsilon c & 0 \\ \epsilon b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $\epsilon = \pm 1$，且 $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$。若 $T = \left[\begin{smallmatrix} w & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right]$ 或 $T = \left[\begin{smallmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{smallmatrix}\right]$，则 $T^{\otimes 4} f \in \mathscr{M} \Leftrightarrow f \in \mathscr{M}$。

对于箭头对称等号情形，我们有一个明确的判据，可用于判定 f是否可通过 $\mathscr{M}$变换。

引理 2.30. 设 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。若 f可通过 $\mathscr{M}$变换，则要么 $f \in \mathscr{M}$，要么 $d = \pm bc$。反之，若 $d = \pm bc$，则 f 可通过 $\mathscr{M}$变换。

证明。首先，假设 f可通过 $T = \left[\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$变换为 $\mathscr{M}$。我们有 $\det(T) = wz - xy \neq 0$。f可通过 $\mathscr{M}$变换的条件等价于 $(0, 1, 1, 0)(T^{-1})^{\otimes 2} \in \mathscr{M}$且$T^{\otimes 4} f \in \mathscr{M}$。注意，$(0, 1, 1, 0)(T^{-1})^{\otimes 2} = \frac{1}{\det T^2}(-2yz, xy+wz, xy+wz, -2wx)$。由引理 2.24，$(0, 1, 1, 0)(T^{-1})^{\otimes 2} \in \mathscr{M}$当且仅当 (1) $(yz = 0) \wedge (wx = 0)$ 或 (2) $xy+wz = 0$。若属于情形 (1)，则 $w = z = 0$或 $x = y = 0$，因为 $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$。于是，由引理 2.29，$T^{\otimes 4} f \in \mathscr{M}$ 蕴含 $f \in \mathscr{M}$。假设 (1) 不成立，但情形 (2) 成立，即 $xy + wz = 0$。由于 $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$，我们有 $xyzw \neq 0$。直接计算可得，$g = T^{\otimes 4} f$具有如下签名矩阵 $M(g) = T^{\otimes 2} M(f)(T^T)^{\otimes 2}$:

$$\begin{bmatrix} w^4 + 2(b+c+d)w^2x^2 + x^4 & w^3y + x^3z & w^3y + x^3z & p(w,x,y,z) \\ w^3y + x^3z & q(w,x,y,z) & r(w,x,y,z) & wy^3 + xz^3 \\ w^3y + x^3z & r(w,x,y,z) & q(w,x,y,z) & wy^3 + xz^3 \\ p(w,x,y,z) & wy^3 + xz^3 & wy^3 + xz^3 & y^4 + 2(b+c+d)y^2z^2 + z^4 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} p(w,x,y,z) &= 2(c+d)wxyz + x^2(by^2 + z^2) + w^2(y^2 + bz^2) \\ q(w,x,y,z) &= 2(b+d)wxyz + x^2(cy^2 + z^2) + w^2(y^2 + cz^2) \\ r(w,x,y,z) &= 2(b+c)wxyz + x^2(dy^2 + z^2) + w^2(y^2 + dz^2) \end{aligned}$$

根据引理 2.24，若 $g \in \mathscr{M}$，则要么 g 满足偶校验条件，且 $\det M_{\mathrm{Out}}(g) = \det M_{\mathrm{In}}(g)$；要么 g 满足奇校验条件，且 $g_{0010}g_{1101} - g_{0001}g_{1110} = g_{0100}g_{1011} - g_{0111}g_{1000}$。若 g 满足偶校验条件，则 $w^3y + x^3z = wy^3 + xz^3 = 0$。结合 $xy + wz = 0$ 和 $xyzw \neq 0$，可得 $(x = \pm w) \wedge (y = \mp z)$ 或 $(x = \pm \mathrm{i}w) \wedge (y = \pm \mathrm{i}z)$。结合 $\det M_{\mathrm{Out}}(g) = \det M_{\mathrm{In}}(g)$，若属于前两种情况，则有 $d = -bc$；若属于后两种情况，则有 $d = bc$。若 g 满足奇校验条件，则 $p(w,x,y,z) = q(w,x,y,z) = r(w,x,y,z) = 0$。这意味着 $b = c = d$。代入 $p(w,z,y,z) = 0$，可得 $x^2z^2 + w^2y^2 + bx^2y^2 + bw^2z^2 + 4bxywz = 0$。结合 $xy + wz = 0$，可得

$$x^2z^2 + w^2y^2 + 2bxywz = 0. \tag{2.4}$$

此外，$g_{0000} = w^4 + 2(b + c + d)w^2x^2 + x^4 = 0$。代入 $b = c = d$，可得

$$w^4 + 6bw^2x^2 + x^4 = 0. \tag{2.5}$$

令 $\alpha = \frac{w}{x}$，$\beta = \frac{z}{y}$，则 $\alpha\beta = -1$ 由 $xy + wz = 0$。将方程 2.4 除以 x^2y^2，可得 $\alpha^2 + \beta^2 + 2b\alpha\beta = 0$。代入 $\beta = -\frac{1}{\alpha}$，可得

$$\alpha^4 - 2b\alpha^2 + 1 = 0. \tag{2.6}$$

将方程 2.5 除以 x^4，可得

$$\alpha^4 + 6b\alpha^2 + 1 = 0. \tag{2.7}$$

由于 $\alpha \neq 0$，由方程 $b = 0$ 2.6 和 2.7，可得 $d = bc$ 成立。

反过来，若 $d = bc$，则 f 可通过 $T = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right]$ 变换为 $\mathscr{M}$；若 $d = -bc$，则 f 可通过 $T = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ 变换为 $\mathscr{M}$。 □

对于“箭头对称不等式”这一情形，即 $(b = -y) \wedge (c = -z) \wedge (d = -w)$，我们还有一个明确的判据，可用于确定 f 是否可 $\mathscr{M}$-变换。

引理 2.31。设 $M(f) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & -d & -c & 0 \\ -b & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$。若 f 可 $\mathscr{M}$-变换，则要么 $f \in \mathscr{M}$，要么 $d = \pm \mathrm{i}bc$。反之，若 $d = \pm \mathrm{i}bc$，则 f 可 $\mathscr{M}$-变换。

证明。令 $T = \left[\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$。我们有 $\det(T) = wz - xy \neq 0$。与引理 2.30的证明相同，f 可 $\mathscr{M}$-变换的条件等价于 $(yz = 0) \wedge (wx = 0)$ 或 $xy + wz = 0$，且 $T^{\otimes 4}f \in \mathscr{M}$。

如果 $(yz = 0) \wedge (wx = 0)$，那么 $w = z = 0$ 或 $x = y = 0$，因为 $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$。由引理 2.29 可得 $T^{\otimes 4}f \in \mathscr{M}$ 蕴含 $f \in \mathscr{M}$。因此，我们假设 $xy + wz = 0$，并且（利用 $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$）$xyzw \neq 0$。直接计算可得，$g = T^{\otimes 4}f$ 具有如下签名矩阵 $M(g) = T^{\otimes 2}M(f)(T^T)^{\otimes 2}$：

$$\begin{bmatrix} w^4 + x^4 & g_{0001} & g_{0010} & w^2y^2 + x^2z^2 \\ g_{0100} & w^2y^2 + x^2z^2 & w^2y^2 + x^2z^2 & g_{0111} \\ g_{1000} & w^2y^2 + x^2z^2 & w^2y^2 + x^2z^2 & g_{1011} \\ w^2y^2 + x^2z^2 & g_{1101} & g_{1110} & y^4 + z^4 \end{bmatrix}$$

其中

$$
\begin{aligned}
g_{0001} &= 2(b+c-d)w^2xz + x^3z + w^3y \\
g_{0010} &= 2(b-c+d)w^2xz + x^3z + w^3y \\
g_{0100} &= 2(-b+c+d)w^2xz + x^3z + w^3y \\
g_{1000} &= -2(b+c+d)w^2xz + x^3z + w^3y \\
g_{0111} &= 2(b+c+d)wyz^2 + xz^3 + wy^3 \\
g_{1011} &= 2(b-c-d)wyz^2 + xz^3 + wy^3 \\
g_{1101} &= -2(b-c+d)wyz^2 + xz^3 + wy^3 \\
g_{1110} &= -2(b+c-d)wyz^2 + xz^3 + wy^3
\end{aligned}
$$

根据引理 2.24，若 $g \in \mathscr{M}$，则要么 g 满足偶校验条件，且 $\det M_{\mathrm{Out}}(g) = \det M_{\mathrm{In}}(g)$；要么 g 满足奇校验条件，且 $g_{0010}g_{1101} - g_{0001}g_{1110} = g_{0100}g_{1011} - g_{0111}g_{1000}$。若 g 满足偶校验条件，则 $g_{0001} = g_{0010} = g_{0100} = g_{1000} = g_{0111} = g_{1011} = g_{1101} = g_{1110} = 0$。这意味着 $b = c = d = 0$。因此，$d = \mathrm{i}bc$ 成立。若 g 满足奇校验条件，则 $w^4 + x^4 = y^4 + z^4 = w^2y^2 + x^2z^2 = 0$。结合 $xy + wz = 0$ 和 $xyzw \neq 0$，我们有 $(x = \pm\sqrt{\mathrm{i}}w) \wedge (z = \mp\sqrt{\mathrm{i}}y)$ 或 $(x = \pm\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{i}}w) \wedge (z = \mp\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{i}}y)$。结合 $g_{0010}g_{1101} - g_{0001}g_{1110} = g_{0100}g_{1011} - g_{0111}g_{1000}$，若属于前两种情况，则有 $d = -\mathrm{i}bc$；若属于后两种情况，则有 $d = \mathrm{i}bc$。

反之，若 $d = \mathrm{i}bc$，则 f 可通过 $T = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i}\sqrt{\mathrm{i}} \\ 1 & -\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{i}} \end{bmatrix}$ 变换为 $\mathscr{M}$；若 $d = -\mathrm{i}bc$，则 f 可通过 $T = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\mathrm{i}} \\ 1 & -\sqrt{\mathrm{i}} \end{bmatrix}$ 变换为 $\mathscr{M}$。 □

上述两个判据将在第6节中广泛使用。

2.6 已知二分定理

定理 2.32（约束满足问题 [16]）。设 $\mathcal{F}$ 是布尔变量上的任意复值签名集合。除非 $\#\mathrm{CSP}(\mathcal{F})$ 满足 $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{A}$ 或 $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}$，否则该问题是 #P-困难；在这两种情况下，该问题均可在多项式时间内计算。

定理 2.33（一般八顶点模型 [9]）。设 f 是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$。若 $ax = 0$，则 $\mathrm{Holant}(\neq_2 | f)$ 等价于六顶点模型 $\mathrm{Holant}(\neq_2 | f')$，其中 $M(f') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

具体而言，$\mathrm{Holant}(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难，但以下情况除外：

- $f' \in \mathscr{P}$，
- $f' \in \mathscr{A}$，
- 每一对 (b, y)、(c, z)、(d, w) 中至少有一个零点。

若 $ax \neq 0$，则 $\mathrm{Holant}(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的，但以下情况除外：

- f 是 $\mathscr{P}$-可变换的；
- f 是 $\mathscr{A}$-可变换的；
- f 是可变换的 $\mathscr{L}$。

在所有列出的情形中，$\mathrm{Holant}(\neq_2 | f)$ 可在多项式时间内计算。

定理 2.34 （平面六顶点模型 [11]）。设 f 是一个签名，其签名矩阵为$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，其中 b，c，d，w，y，$z \in \mathbb{C}$。那么Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 在以下情形下可在多项式时间内计算，否则为#P-困难：

1. $f \in \mathscr{P}$ 或 $\mathscr{A}$；*2.* 在每一对 (b, y)、(c, z)、(d, w)中均有一个零点；*3.* $f \in \mathscr{M}$ 或 $\mathscr{M}$；*4.* $d = w = 0$ 且 *(i).* $(by)^2 = (cz)^2$，或 *(ii).* $y = b\mathrm{i}^{\alpha}$、$c = b\sqrt{\mathrm{i}}^{\beta}$ 和 $z = b\sqrt{\mathrm{i}}^{\gamma}$，其中 α、β、$\gamma \in \mathbb{N}$和 $\beta \equiv \gamma$(模 2)；

若 f满足条件 *1* 或 *2*，则不施加平面性限制时，Holant $(\neq_2 | f)$ 可在多项式时间内计算；否则，非平面情形下的 Holant $(\neq_2 | f)$ 是#P-困难的。

我们有以下推论。

推论 2.35. 设 f是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。若 $\begin{bmatrix} c & d \\ w & z \end{bmatrix}$中恰有三个非零项，则Holant $(\neq_2 | f)$ 是#P-困难的，并且Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是#P-困难的，除非 $f \in \mathscr{M}$ 或 $\mathscr{M}$。

证明。 按照引理 2.22的证明中的论证，可以很容易地证明 $f \notin \mathscr{P}$。此外，$f \notin \mathscr{A}$因为 $0101 \oplus 0110 \oplus 1001 = 1010$，并且若 supp($f$) 是仿射的，那么 supp($f$) 中的三个项将意味着第四个项也属于 supp($f$)。不可能是 $d = w = 0$，因为 $\begin{bmatrix} c & d \\ w & z \end{bmatrix}$中有三个非零项。由定理 2.34，证明至此完成。 □

定理 2.36 （在 k-正则图 [35]上的自旋系统）。 任取一个整数 $k \geq 3$。设 $f = (w, x, y, z)$ 满足 $w, x, y, z \in \mathbb{C}$。那么 Holant $(=_k | f)$ 是 #P-困难，以下情况除外；在这些情况下，该问题可在多项式时间内计算。

- $f \in \mathscr{P}$： $wz = xy$，或 $w = z = 0$，或 $x = y = 0$；
- $(=_k | f)$ 是 $\mathscr{A}$-可变换的： $wz = -xy$，– 若 k 为奇数， $x^2 = \epsilon y^2$ 且 $z^{2k} = \epsilon w^{2k}$，其中 $\epsilon = \pm 1$。– 若 k 为偶数， $x^4 = y^4$ 且 $z^{2k} = w^{2k}$。

若将输入限制为平面图，则另一种情形可以在多项式时间内计算，但其余所有情形仍是#P-困难的。

- $(=_k | f)$ 是 $\mathscr{M}$-可变换的：– 若 k 为奇数， $x = \epsilon y$ 且 $z^k = w^k$，其中 $\epsilon = \pm 1$。– 若 k 为偶数， $x^2 = y^2$ 且 $z^k = w^k$。

3 主定理与证明概要

定理 *3.1*。设 f 是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$。若 $ax = 0$，则 *Pl-Holant* $(\neq_2 | f)$ 等价于平面六顶点模型 *Pl-Holant* $(\neq_2 | f')$，其中 f' 由 f 通过设定 $a = x = 0$ 得到，即 $M(f') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。问题 *Pl-Holant* $(\neq_2 | f')$ 的复杂度由定理 *2.34* 刻画。若 $ax \neq 0$，则 *Pl-Holant* $(\neq_2 | f)$ 是 *#P*-困难的，但以下情形除外：

1. f 是 $\mathscr{P}$-可变换的；*2.* f 是 $\mathscr{A}$-可变换的；*3.* f 是 $\mathscr{L}$-可变换的；*4.* f 是 $\mathscr{M}$-可变换的；*5.* $d = w = \pm\sqrt{ax}, b = y = -c = -z = \mathrm{i}\tan(\frac{\beta\pi}{8})\sqrt{ax}$，其中 $\beta \in \mathbb{N}$ 为奇数。在所有列出的情形下，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 均可在多项式时间内计算。

如果 $ax = 0$，那么根据引理 2.3，我们可以将 $a = x = 0$归一化。此时，这对应于平面六顶点模型，该模型已在定理 2.34中完成分类。如果 $ax \neq 0$，通过 $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt[4]{\frac{a}{x}} \end{bmatrix}$ 进行全息变换可将 $a = x$归一化。由于将 f乘以非零标量不会影响问题 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 的复杂度，因此我们可以令 $a = x = 1$ 来进行归一化。

我们根据 $\{b, y, c, z, d, w\}$ 中零项的数量和排列方式，以及以下各对 $(b,\ y)$、$(c,\ z)$、$(d,\ w)$ 中有多少对是零对 (0，0)，将主定理的证明分为三个互不相交的情形：

I. $\{(b,\ y)$、$(c,\ z)$、$(d,\ w)\}$ 中至少有两对是零对 (0，0)。II. $\{b, y, c, z, d, w\}$ 中至少有一个零项，但在 $\{(b,\ y)$、$(c,\ z)$、$(d,\ w)\}$ 中至多有一对是零对。

III. 六个条目 $\{b, y, c, z, d, w\}$ 均非零。

这三种情形显然互不相交且涵盖所有情况。

下面概述如何处理情形 I、II 和 III。

情形 I： $\{(b,\ y)$、$(c,\ z)$、$(d,\ w)\}$ 中的至少两对是零对 (0，0)

1. 内对 $(d,\ w)$ 是零对，且外对 $(b,\ y)$ 和 $(c,\ z)$ 中至少有一对是零对。我们证明，若 $f \in \mathscr{P}$，或者 f是 $\mathscr{A}$-可变换，或者 f是 $\mathscr{M}$-可变换，则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 可解；否则为 #P-困难。我们在引理 4.1中将 k-正则图（其中 k是偶整数）上的自旋系统归约到 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$，并应用 2.36定理（-正则图上的自旋系统二分定理）来证明 #P-困难性。Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 的可解性则由已知的可解签名得出。

2. 两个外对（b）、（y）和（c）、（z）均为零对。我们证明，当 $f \in \mathscr{P}$、$f \in \mathscr{A}$ 或 $f \in \mathscr{M}$ 时，Pl-Holant（$\neq_2|\ f$）是可解的。为处理这一情形，我们首先在 $d = w$ 的特殊条件下，介绍一种从一个（不一定是平面的）二部 #GH 问题到平面八顶点模型的精细非局部归约（引理 4.2）。随后，我们通过实现一个满足（b、y）=（c、z）=(0, 0) 且满足 $d = w$ 的签名来处理这一情形（引理 4.3）。

情形 II： $\{b, y, c, z, d, w\}$ 中至少有一个零项，但在{（b、y）、（c、z）、（d、w）} 中至多有一个零对。

我们证明，除非 $f \in \mathscr{M}$（定理 5.17），否则 Pl-Holant（$\neq_2|\ f$）是 #P-困难的。定理 5.17的证明根据 N中零项的数量 $M(f)$及其位置分为若干子情形。注意，由于 N ≤ 4，而 f中至多有一个零对。

1. N $= 1$：恰有一个零项，它可能出现在外对（引理 5.1）或内对（引理 5.2）中。2. N $= 2$：有两个零项，它们可能位于两个不同的对中（引理 5.4、5.5 和 5.6），也可能位于同一个对中（引理 5.7 和 5.8）。3. N $= 3$：有三个零项。其中可能包含一个零对（引理 5.10、5.11、5.12 和 5.13），或者零点可能分别出现在三个不同的对中（引理 5.14）。4. N $= 4$：有四个零项。在这种情况下，必定存在一个零对，它可能是外对（引理 5.15），也可能是内对（引理 5.16）。

尽管证明涉及逐案分析，但确立 #P-困难性的总体策略是通过构件构造，在平面六顶点模型或情形 I 中实现一个签名。在少数情况下，我们也会使用多项式插值。

情形 III： 六个分量 $\{b, y, c, z, d, w\}$ 均非零。

我们证明，若 f 可经 $\mathscr{P}$ 变换、$\mathscr{A}$ 变换、$\mathscr{L}$ 变换或 $\mathscr{M}$ 变换，或者若对于某个奇整数 β，有 $(b = y = -c = -z = \mathrm{i}\tan(\frac{\beta\pi}{8})) \wedge (d = w = \pm 1)$，则 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是可解的；否则为 #P-困难。

在这种情况下，利用莫比乌斯变换进行插值是一种强有力的方法。然而，某些情形会妨碍直接应用这一技术，其中最典型的是 f 满足箭头反转相等或不等关系的情形，即 $(a = \epsilon x) \wedge (b = \epsilon y) \wedge (c = \epsilon z)$，其中 $\epsilon = \pm 1$。[3] 我们首先处理 $\epsilon = 1$ 这一情形，即 (b, y)、(c, z)、(d, w) 是三个相同的有序对。这是最复杂的情形，我们采用组合变换来对 Even Coloring 进行变换，从而识别出新的可解类，并引入一种新颖的技术——共形格插值——来证明 #P-困难性。应用全息变换后，我们定义了 $M(f)$ 的归一化特征值之间的乘法关系格。

1. 若 $b = -1$，则格未被良好定义。对Even Coloring应用组合变换，可得到一个冗余签名（引理6.5）。接着我们利用定理 2.5 证明：要么 $f \in \mathscr{M}$，要么该冗余签名是非奇异的，因此 Pl-Holant（$\neq_2 | f$）是 #P-困难的。

2. 若 $b \neq -1$，我们应用共形格插值（引理 2.15、引理 6.6）。在一般情形下，通过仔细分析格结构，我们可以插值出不等交叉 $\mathcal{S}'$（引理 6.7），从而由引理 $\neq_2 | f$，得到 Pl-Holant（$\equiv_T$）$\neq_2 | f$Holant（2.2）；或者通过插值某个签名得到 #P-困难性：该签名已知在平面六顶点模型中是 #P-困难的（引理6.8中的条件 (i)），或已知在情形 I（引理6.8中的条件 (iii)）和情形 II（引理6.8中的条件 (ii)、(iv)、(v)）下是 #P-困难的。

3. 对于某些例外格，无法满足引理 (i)、(ii)、(iii)、(iv)、(v)中的任何条件6.8 ，因此我们必须诉诸从非奇异冗余签名出发的归约（引理(vi) 中的条件6.8）。

   在这种情况下，我们会用到多项式的几何性质。要应用共形格插值，格参数 x、y、z 必须能表示为某个 $t \in \mathbb{C}$ 的 Laurent 单项式。冗余签名性质对（x、y、z）施加了一个代数方程，它可以看作 Laurent 多项式 $p(t) = 0$。换言之，如果能找到 Laurent 多项式 $p(t)$ 的合适根，我们就可以插值出一个冗余签名。为确保该冗余签名是非奇异的，我们需要找到一个“好根”，也就是位于单位圆之外的根。引理 6.11 给出了多项式的所有根都位于单位圆上的必要条件。通过证明 $p(t)$ 不满足这一条件，我们可以得出 $p(t)$ 有一个“好根”。因此，我们可以插值出一个非奇异冗余签名。由定理 2.5 可知，Pl-Holant（$\neq_2 | f$）是 #P-困难的。

4. 如果共形格插值未能推出 #P-困难性或不等交叉$\mathcal{S}'$，即使在旋转 f之后，我们也证明 b，c和 d 必须满足某些关系。这要么意味着 f 是 $\mathscr{M}$- 可变换的，要么我们可以再次借助组合变换得到 EvenColoring，从而将问题变换为情形 I 或平面六顶点模型（引理 6.20）。最后一种情形（通过组合变换得到平面六顶点

[3]在物理学中，情形 $\epsilon = 1$ 对应于八顶点模型的零场情形，表示不存在外电场 [2]。

模型）中发现了新的可解类型（$b=-c=\mathrm{i}\tan(\frac{\beta\pi}{8})$）$\wedge$（$d=\pm1$）。

上述讨论最终导出了引理 6.22 和定理 6.23，它们给出了 Pl-Holant（$\neq_2|\ f$）上的复杂性分类，其中 $\{(b,\ y)$、$(c,\ z)$、$(d,\ w)\}$ 是三个相等对。接着，我们处理以下情形：当 $a=-x$、$b=-y$和 $c=-z$ 满足条件时，通过全息变换和二元修改，将 f 变换为与三个相等对情形相对应的形式（引理 6.25）。

在应用插值并利用 M¨obius 变换完成情形 III 之前，我们必须处理一种特殊的退化情形。当用于定义 M¨obius 变换的矩阵为奇异矩阵时，就会出现这种情况；具体而言，此时 $\det\left[\begin{smallmatrix}c&d\\w&z\end{smallmatrix}\right]=0$ 和 $\det\left[\begin{smallmatrix}b&w\\d&y\end{smallmatrix}\right]=0$。在这种情况下（引理 7.1），我们证明以下结论之一成立：要么 $f\in\mathscr{M}$，要么 Pl-Holant（$\neq_2|\ f$）是 #P-困难的，要么 f满足箭头对称等式（$a=x$）$\wedge$（$b=y$）$\wedge$（$c=z$），此时它属于上述已处理的子类。

解决了最后这个例外后，我们现在已具备完成情形 III 证明所需的一切条件，依据定理 7.4。我们证明，以下情况至少有一种成立：$f\in\mathscr{M}$，或者 f是 $\mathscr{A}$-可变换的，或者 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P- 困难的，假设 $(b,y),(c,z),(d,w)$ 并非三对相等或相反的配对。我们将使用莫比乌斯变换，对任意或特定的二元签名进行插值，从而把 $M(f)$ 变换为含有零项的形式，归结为先前已处理的情形，进而确立二分定理。

本文其余部分安排如下。在第 4 节和 5 节中，我们分别处理情形 I 和 II。在第 6 节中，我们处理情形 III 中 $(b,y),(c,z),(d,w)$ 三对相等或相反的特殊情形。本节将介绍新的可解类，并引入共形格插值这一强大工具来证明 #P-困难性。在第 7 节中，我们最终完成情形 III 的证明。我们将在第 8 节总结这三种情形并证明主定理。

4 情形 I：至少两个零对

本节考虑以下情形：$(b,\ y)$、$(c,\ z)$、$(d,\ w)$ 中至少有两对是零对。根据内对 $(d,\ w)$ 是否为零对，可分为两个子情形。

4.1 内对 $(d,\ w)$ 是零对

我们首先考虑 $(d,\ w)=(0,\ 0)$ 的情形。于是，根据旋转对称性，不妨设f的签名矩阵具有以下形式 $M(f)=\left[\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&c&0&0\\0&0&z&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\right]$.

引理 4.1。设 f是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f)=\left[\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&c&0&0\\0&0&z&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\right]$。那么Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是#P-困难的，除非它是 $f\in\mathscr{P},\mathscr{M}$-可变换的，或是 $\mathscr{A}$-可变换的；在这些情形下，它是可解的。具体而言，f是#P-困难的，除非满足 *(1)* $cz=1$、*(2)* $(cz=-1)\wedge(c^4=z^4)$ 或 *(3)* $c=\pm z$。

证明。引理 4.1 在 [9] 证明了该归约

$$\#\mathrm{CSP}^2(g)\leq_T^p \text{Holant}\ (\neq_2|\ f)$$

其中 g 是二元签名 $(1,\ c,\ z,\ 1)$。我们注意到，他们的归约是平面的。因此我们有

$$\text{Pl-}\#\mathrm{CSP}^2(g)\leq_T^p \text{Pl-Holant}\ (\neq_2|\ f)\,.$$

特别地，我们有

$$\text{Pl-Holant}\,(=_k|\,g) \le_T^p \text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,f)$$

对于任意偶整数 k。根据定理 2.36，Pl-Holant $(=_k|\,g)$ 是 #P-困难的，因此除非 $g \in \mathscr{P}$，否则 Pl-Holant $(\neq_2|\,f)$ 是 #P-困难的；或者 $(=_k|g)$ 是 $\mathscr{A}$-可变换的，或者 $(=_k|g)$ 是 $\mathscr{M}$-可变换的。若 $g \in \mathscr{P}$，根据引理 2.21，我们有 $cz = 1$ 或 $c = z = 0$，在这些情况下，根据引理 2.22，有 $f \in \mathscr{P}$。

若 $(=_k|g)$ 是 $\mathscr{A}$-可变换的，则由定理 2.36 可知 $c^4 = z^4$ and $cz = -1$。由 $c^4 = z^4$ 可知 $c = \pm z$ 或 $c = \pm \mathrm{i} z$。若 $c = \pm z$，则 $z^2 = \pm 1$，因此 $z = \pm 1$ 或 $z = \pm \mathrm{i}$。接着由引理 2.19 和引理 2.18 可知，签名 f 是仿射的。若 $c = \pm \mathrm{i} z$，则 $z^2 = \pm \mathrm{i}$，因此 $z = \pm\alpha$ 或 $z = \pm \mathrm{i}\alpha$。在所有这些情形下，通过采用可逆矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha} \end{smallmatrix}\right]$ 进行全息变换，签名 $(\neq_2)$ 在常数归一化下保持不变，而签名 f 变为仿射签名 f'，其签名矩阵为 $M(f') = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \end{smallmatrix}\right]$。由引理 2.19 和引理 2.18 可知 $f' \in \mathscr{A}$，因为 $(\alpha c)(\alpha z)(\alpha^2) = -\alpha^4 = 1 = \mathrm{i}^4$。

如果数对 $(=_k|g)$ 是 $\mathscr{M}$-可变换的，则由定理 $c = \pm z$ 可知 2.36。如果 $c = z$，则由引理 $f \in \mathscr{M}$可知 2.27。如果 $c = -z$，则 f可通过 $\mathscr{M}$进行 $T = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \mathrm{i}\alpha \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-可变换。事实上，由于 T是对称的，因此有（相差一个因子 2）

$$M(T^{\otimes 4} f) = T^{\otimes 2} M(f) T^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha^3 - \alpha c & \alpha^3 + \alpha c & 0 \\ \alpha^3 - \alpha c & 0 & 0 & \alpha - \alpha^3 c \\ \alpha^3 + \alpha c & 0 & 0 & \alpha + \alpha^3 c \\ 0 & \alpha - \alpha^3 c & \alpha + \alpha^3 c & 0 \end{bmatrix}$$

and

$$M((\neq_2)(T^{-1})^{\otimes 2}) = T^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] T^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} -\mathrm{i}\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{smallmatrix}\right]$$

根据引理，两个签名都已变换为匹配门 2.24 . □

4.2 两个外对 $(b,\ y)$ 和 $(c,\ z)$ 是零对

若内对 $(d,\ w) \neq (0,\ 0)$，则两个外对必定是零对，即 $(b,\ y) = (c,\ z) = (0,\ 0)$，因为 f至少有两个零对。根据旋转对称性，不妨设 $M(f) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$。为处理这种情况，我们首先介绍一种从（不一定是平面的）二部 #GH 问题（更具体地说，是二分图伊辛模型）到平面八顶点模型的非局部归约，其特殊条件是 $d = w$。

引理 4.2。 设 f 是一个签名矩阵为 $M(f) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ 的四元签名，则 Pl-Holant $(\neq_2|\,f)$ 是 #P-困难的，除非 $d = 0$、$d = \pm 1$ 或 $d = \pm \mathrm{i}$；在这些情况下，$f \in \mathscr{A}$，因此该问题可在多项式时间内求解。

证明。可以直接验证，当 $d = 0$、$d = \pm 1$ 或 $d = \pm \mathrm{i}$ 时，签名 $f \in \mathscr{A}$，因此问题 Pl-Holant $(\neq_2|\,f)$ 是可解的。下文假设 $d \neq 0,\ \pm 1,\ \pm \mathrm{i}$。

该证明需要借助伊辛模型的二分图版本来完成，这是一种图同态问题的特殊情形。我们用 Bi-#GH(g) 表示该问题，其中底层图是二分图 $G = (V,\ E)$，且每个顶点 $v \in V$ 对应一个布尔变量，每个 $e \in E$ 对应一个带有矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} 1 & d \\ d & 1 \end{smallmatrix}\right]$ 的对称二元约束 $g = [1, d, 1]$。我们希望证明该归约

$$\text{Bi-\#GH}(g) \le_T^p \text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,f) \tag{4.8}$$

我们分两步证明（4.8）：首先将 Bi-#GH(g) 归约为 Pl-Holant ($\neq_2 \mid f,\ \mathcal{S}$)，然后从右侧的$\mathcal{S}$ 中 f 插值得到。

设 Ω 是 Bi-#GH(g) 的一个实例，其底层二部（多重）图为 $G = (V,\ E)$，其中 $|V| = n$，$V = X \dot\cup Y$，每个 $v \in V$都是一个布尔变量，且（多重）集合 E 中的每条边都赋予二元约束 g。不失一般性，我们可以假设 G是连通的。我们分别从上到下列出 $X = \{x_1, \ldots, x_{n_1}\}$ 和 $Y = \{y_1, \ldots, y_{n_2}\}$ 的顶点，其中 $n_1 + n_2 = n$，左侧和右侧各一列，所有边都连接左侧与右侧。边的交点彼此孤立，且按给定顺序排列。同一对（$x,\ y$）之间的多重边画成平行边。由于图是二部图，因此没有自环。Ω 的配分函数值为

$$\text{Bi-\#GH}(\Omega; g) = \sum_{\sigma: V \to \{0,1\}} \prod_{\{x,y\} \in E} g(\sigma(x), \sigma(y)). \tag{4.9}$$

现在，我们按如下方式构造问题 Pl-Holant ($\neq_2 \mid f, \mathcal{S}$) 的签名网格 Ω′（见图 9）。首先，将每个顶点 $v \in V$ 替换为一个小圆 C_v，使任意两个圆都不重叠或相交。其次，对于每条连接 $x \in X$ 和 $y \in Y$的边，沿着边（x, y）作一个 C_x的突出部，称为“臂”。它是一条带状条带，将C_x 局部延伸，使其与圆 C_y相交。这样会产生两个交点：臂从上侧进入 C_y 时经过一个入口顶点，离开 C_y 时经过一个出口顶点。沿 C_y逆时针方向遍历时，对于所有满足（x, y） $\in E$的 $x \in X$，C_y 上的交点对会按照从上到下的顺序依次出现；其顺序由 X 决定（与它们作为边绘制在G中的顺序相同）。两条臂交叉，当且仅当原图 G中对应的边相交。每次这样的交叉都会产生 4 个交点。所有这些交叉都发生在平面上的孤立点处，对应于 G中的交点，且位于所有圆 C_y之外。现在，对每个 $x \in X$，我们将 C_x重新命名为一个圈；该圈由原来的圆经过所有这些伸出臂改造而成。

这些 C_x 和 C_y 的绘图定义了一个 4-正则平面图 G_1，其顶点包括环 C_x 与圆 C_y的所有交点，以及不同环 C_x（的伸出臂）之间的交点。我们将如下定义 Pl-Holant（$\neq_2 \mid f,\ \mathcal{S}$）的一个实例 Ω′。将 G_1 的每条边替换为一条长度为 2 的路径（称为 2-伸展），得到一个二部（2，4）双正则平面图 G'。在每个次数为 2 的顶点处放置一个（$\neq_2$）约束。为 G'的每个入口顶点赋予签名f 。为 G'的所有其他顶点赋予 $\mathcal{S}$；这些顶点包括所有出口顶点以及不同臂之间的交点。由于 f 和 $\mathcal{S}$ 都具有旋转对称性，f 和 $\mathcal{S}$ 中变量的输入顺序无关紧要。我们用 F 表示标记为f的顶点集合，用 S 表示标记为 $\mathcal{S}$的顶点集合，用 W 表示标记为（$\neq_2$）的顶点集合。至此，签名网格 Ω′的构造完成，其底层图为 $G' =$ （V'，E'）。

对于输入边 x_1，x_2，x_3，x_4按逆时针排列的 f与 $\mathcal{S}$，我们将数对(x_1，x_3)与(x_2，x_4)称为边孪生。注意 f与 $\mathcal{S}$的支撑集均为$(x_1 = x_3) \wedge (x_2 = x_4)$。因此，对于该和式中的任意非零项

$$\text{Pl-Holant}\left(\Omega'; \neq_2 \mid f, \mathcal{S}\right) = \sum_{\sigma: E' \to \{0,1\}} \prod_{u \in F} f(\sigma\mid_{E(u)}) \prod_{v \in S} \mathcal{S}(\sigma\mid_{E(v)}) \prod_{w \in W} (\neq_2)(\sigma\mid_{E(w)}), \tag{4.10}$$

每条边的孪生边都必须被赋予相同的值。在 G'中，两者都是 C_x 和 C_y 圈；对于每个圈，我们任意选取一条边，即 e_x 或e_y，作为其引导边。于是，式（4.10）中的非零项与引导边的赋值 σ' 之间存在一一对应关系：$\{e_v : \ v \in V\} \to \{0, 1\}$。这是因为，当我们沿着每个 C_x 或 C_y遍历时，会遇到来自 F或 S的偶数个4度顶点（这些顶点总是成对出现），其间穿插着（$\neq_2$）。因此，如果 $e =$ （u，w）是圈（$u \in F \cup S$,

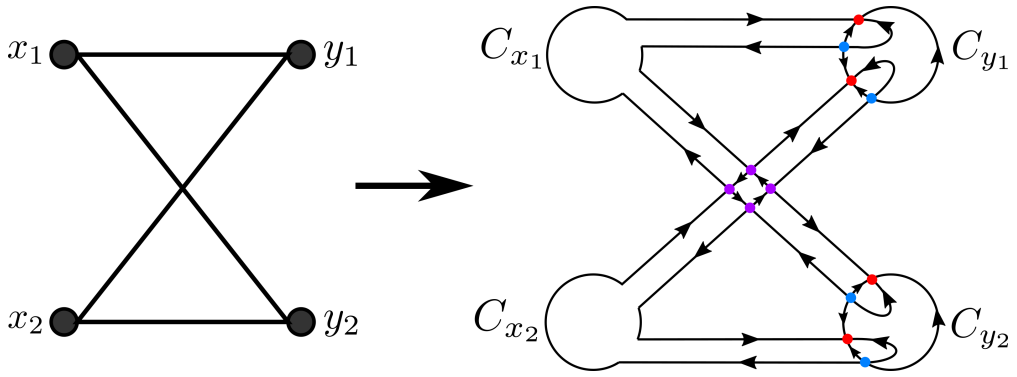


图 9：从 Bi-#GH(g) 到 Pl-Holant ($\neq_2|\ f,\ \mathcal{S}$) 的归约。左侧是 Bi-#GH(g) 的一个实例 Ω，其中 $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2$ 是布尔变量，且每条边都是二元约束 g。右侧是 Pl-Holant ($\neq_2|\ f$) 的一个实例 Ω'。每条边上都隐含一个 $\neq_2$ 约束。红色节点是标记为 f 的入口顶点，蓝色节点是标记为 $\mathcal{S}$ 的出口顶点，紫色节点表示臂之间的交点，也标记为 $\mathcal{S}$。入边对应输入 0，出边对应输入 1。图中所示的定向展示了规范赋值。

$w \in W$）取值为0（分别为1），则该圈上的所有边必须依次取值为（0、0、1、1、.....、0、0、1、1）（分别为（1、1、0、0、.....、1、1、0、0）），从 e 处开始，沿着远离 w的方向依次赋值。然后，

$$\text{Pl-Holant}\left(\Omega';\neq_2|\ f,\mathcal{S}\right)=\sum_{\sigma':\{e_v:v\in V\}\to\{0,1\}}\prod_{u\in F}f(\widehat{\sigma'}\mid_{E_{(u)}}),\tag{4.11}$$

其中 $\widehat{\sigma'}$ 是 σ'的唯一扩展。我们将引导边命名为 $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$。

接下来，我们通过建立 (4.9) 和 (4.11) 中各项之间的一一对应，证明 Bi-#GH($\Omega;\ g$) = Pl-Holant ($\Omega';\neq_2|\ f,\ \mathcal{S}$)。我们首先证明，存在一个关于引导边 $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ 的规范赋值，使其在 (4.11) 中的取值在$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$时等于在 (4.9) 中的取值。然后，我们证明，对任意一组变量进行翻转，并相应地改变引导边的赋值后，这个等式仍然成立。

1. 规范赋值的存在性：对于任意 $x\in X$，从 C_x 的任意一条伸出臂开始，该臂进入 C_y（对于某个 $y\in Y$），我们将其入口顶点所关联的 C_x 上的边赋值为 0；经过一个（$\neq_2$）后，与其出口顶点关联的边赋值为 1。返回途中，若它与另一条臂相交，则该交点处关联的边赋值为 0，因为该圈 C_x经过了另一个（$\neq_2$），并在离开此臂交点（经过两个交点后）时再次取值为 1。臂交点可以有多个，推理同样适用。若 C_x 还有另一条伸出臂进入另一个 $C_{y'}$，推理也同样适用。这样便为 C_x 上的所有边（包括其领导边）给出了一个有效赋值。类似地，当我们逆时针遍历 C_y 时，对于所有入口顶点所关联的 C_y 上的边（对应于各个满足（$x,\ y$）$\in E$ 的 $x\in X$），我们赋值为 0；对于所有出口顶点，我们赋值为 1。这些顶点在 C_y 上的总数为偶数。这也确定了 C_y的领导边的值。以上构造给出了规范赋值，它在乘积和（4.11）中贡献一项 1，对应于乘积和（ 4.9 ）中 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时的那一项。 2

. Flipping 变量 i量：现在，我们翻转规范赋值中任意一组变量 $\{e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_k}\}$

以及全零赋值中对应的变量 $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$。然后翻转 C_{i_1}、C_{i_2}、……、C_{i_k}上的所有变量。 $\mathcal{S}$的求值保持不变。考虑 $x \in X$ 和 $y \in Y$的任意两个环 C_x 和 C_y：

- 如果 C_x 上和 C_y 上的变量均未被翻转，则它们交点处的签名 $f\, C_x \cap C_y$ 不受影响，并求值为 $f_{0000} = 1$。
- 如果 C_x 上和 C_y 上的变量均被翻转，则 f 的所有输入均被翻转，其求值为 $f_{1111} = 1$。
- 如果 C_x 或 C_y 中仅有一个的变量被翻转，则 f 恰好有一对边双胞胎输入被翻转，并求值为 $f_{0110} = d$ 或 $f_{1001} = d$。

在上述三种情形中， $g(\sigma(x)\ \sigma(y))$分别求值为 $g_{00} = 1$、 $g_{11} = 1$，以及 $g_{01} = d$ 或 $g_{10} = d$。因此，在翻转变量后，引导边$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 在（4.11）中的赋值的求值结果与 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 在（4.9）中的赋值保持相同。

因此，我们 已经证明 Bi-#GH(Ω; g) = Pl-Holant(Ω′; $\neq_2 |\ f,\ \mathcal{S}$)，由此可得

$$\text{Bi-}\#\text{GH}(g) \leq_T^p \text{Pl-Holant}\left(\neq_2 |\ f, \mathcal{S}\right).$$

接下来，我们在 RHS 上对 $\mathcal{S}$ 从 f 进行插值。若 $d \neq 0$ 不是单位根，则由引理 2.12 可得结论。否则，考虑“boxtimes”构件，其中每个顶点都标记为f，并且每条内部边的中间都放置一个 $(\neq_2)$ 约束。注意，由于 f 是旋转对称的， f 的输入顺序无关紧要。这给出了具有 $M(f_{\boxtimes})$ $= \begin{bmatrix} 2d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d+d^5 & 0 \\ 0 & d+d^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2d^2 \end{bmatrix}$ 的四元签名 $f_{\boxtimes}$。当 d 是单位根时，除非 $d = \pm 1$ 或 $d = \pm \mathrm{i}$，否则 $\frac{d+d^5}{2d^2}$ 不是单位根。事实上， $\left|\frac{d+d^5}{2d^2}\right| = 1$ 当且仅当 $|1 + d^4| = 2$。由于 d 是单位根，因此有 $|d| = 1$，进而 $|1 + d^4| = 2$ 当且仅当 $d^4 = 1$。至此，归约 (4.8) 的证明完成。

接下来，通过将 #CSP 问题归约到 Bi-#GH(g)，我们得到 #P-困难性，然后应用定理 2.32。通过二重拉伸，我们得到归约 #CSP(g^2) $\leq_T^p$ Bi-#GH(g)，其中 $M(g^2) = \begin{bmatrix} 1+d^2 & 2d \\ 2d & 1+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ d & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ d & 1 \end{bmatrix} = M(g)^2$. 根据引理 2.21，若 $g^2 \in \mathscr{P}$，则 $(1 + d^2)^2 - 4d^2 = 0$，或$d = 0$，或 $1 + d^2 = 0$，这与 $d \neq 0, \pm 1, \pm \mathrm{i}$ 矛盾。因此 $g^2 \notin \mathscr{P}$。根据引理 2.18，若 $g^2 \in \mathscr{A}$，则存在某个 $\beta \in \{0, 1, 2, 3\}$ 使得 $1 + d^2 = \mathrm{i}^\beta \cdot 2d$。我们要么得到矛盾，要么有 $d = \mathrm{i}(\epsilon_1 + \epsilon_2\sqrt{2})$，其中$\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$。接着根据定理 2.32，#CSP($g^2$) 是 #P-困难的，因此 Bi-#GH($g$) 也是 #P-困难的，除非 $d = \mathrm{i}(\epsilon_1 + \epsilon_2\sqrt{2})$，其中 $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$。

现在假设 $d = \mathrm{i}(\epsilon_1 + \epsilon_2\sqrt{2})$，其中 $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$。我们证明归约 #CSP($h$) $\leq_T^p$ Bi-#GH(g)，其中 $M(h) = \begin{bmatrix} 1+d^4 & 2d^2 \\ 2d^2 & 1+d^4 \end{bmatrix}$。从一个 #CSP($h$) 实例 Ω_3 开始，其底层图为 H。将 H 中的每条边延长 2，得到图 H'。然后将 H' 中的边加粗 2 倍，即在 H' 中每对相邻顶点之间添加一条重边。最后，将每条边标记为 g。由此得到 Bi-#GH(g) 的实例 Ω_3'。注意， $M(h) = \begin{bmatrix} 1 & d^2 \\ d^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d^2 \\ d^2 & 1 \end{bmatrix}$。于是有 #CSP($\Omega_3$; h) = Bi-#GH(Ω_3'; g)，从而得到归约 #CSP(h) $\leq_T^p$ Bi-#GH(g)。再次利用引理 2.21 和引理 2.18，可以证明 $h \notin \mathscr{A} \cup \mathscr{P}$，除非 $d^2 = 0, \pm 1, \pm \mathrm{i}$ 或$d^2 = \mathrm{i}(\epsilon_1' + \epsilon_2'\sqrt{2})$，其中 $\epsilon_1', \epsilon_2' \in \{0, 1\}$。这与某些 $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$ 下的 $d = \mathrm{i}(\epsilon_1 + \epsilon_2\sqrt{2})$ 矛盾。因此，#CSP(h) 是 #P-困难的，故根据定理 2.32，Bi-#GH(g) 也是 #P-困难的。 □

备注： 在上述证明中，#GH问题的二分性保证了规范赋值的存在。我们可以证明，如果 #GH(g) 的底层图不是二部图，那么无论如何绘制这些环，或如何标记这些 f，都不存在规范赋值。

引理 4.3。设 f 是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是#P-困难的，除非 $f \in \mathscr{P}$、$f \in \mathscr{A}$ 或 $f \in \mathscr{M}$ 成立；在这些情况下Pl-Holant $(\neq_2 | f)$可在多项式时间内求解。更明确地说，Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是#P-困难的，除非 $d = w = 0$ 或 $dw = \pm 1$ 成立。

证明。如果 $d = w = 0$，那么 $f \in \mathscr{A}$。如果 $dw = 1$，那么根据 $f \in \mathscr{P}$ 引理 2.22。如果 $dw = -1$，那么根据 $f \in \mathscr{M}$引理 2.24。在上述三种情形下，问题 Pl-Holant（$\neq_2 | f$）是可解的。下文中，我们假设 $d = w = 0$ 或 $dw = \pm 1$ 的情形不成立。

现在假设（d，w）中恰好有一个零点。我们可以实现 $M(g) = M(f) \cdot N \cdot M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d^2 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。经过旋转，我们得到 $M(g^{\pi}_{2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & w^2 & 0 \\ 0 & d^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。根据推论 2.35，Pl-Holant $\left(\neq_2 | g^{\pi}_{2}\right)$ 除非 $g^{\pi}_{2} \in \mathscr{M} \cup \widehat{\mathscr{M}}$，否则是 #P-困难的。如果 $g^{\pi}_{2} \in \mathscr{M}$，那么根据引理 2.24，我们知道 $d^2 w^2 = 1$，矛盾。如果 $g^{\pi}_{2} \in \widehat{\mathscr{M}}$，根据引理 2.26，我们知道 $d^2 = w^2$，矛盾。综上，现在可以假设$dw \neq 0$。

通过使用 $\neq_2$给变量 x_1添加自环 x_2，对于 f，我们可以在右侧得到 $(0, 1, -\frac{w}{d}, 0)^T$。使用 $(0, 1, \frac{w}{d}, 0)^T$ 对 x_4 中的变量 f 进行二元修改，可得到签名 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{w}{d} \end{bmatrix}$。根据引理 2.3 和归一化，我们有

$$\text{Pl-Holant}\left(\neq_2 | \hat{f}\right) \leq^{p}_{T} \text{Pl-Holant}\left(\neq_2 | f\right)$$

其中 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{dw} & 0 \\ 0 & \sqrt{dw} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。根据引理4.2问题 Pl-Holant $\left(\neq_2 | \hat{f}\right)$ 是 #P-困难，因此问题 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难，除非 $\sqrt{dw} = \pm 1$ 或 $\sqrt{dw} = \pm \mathrm{i}$，在这些情况下 $dw = \pm 1$问题 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是可解的。

□

5 情形 II：至少一个零项且至多一个零对

本节考虑 b、y、c、z、d、w 中有些项为零的情形，并要求 (b, y)、(c, z) 和 (d, w) 中至多有一对是零对。我们证明，除非 $f \in \mathscr{M}$，否则 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的（定理 5.17）。定理 5.17 的证明根据 $M(f)$ 中零项的数量 N 及其位置，分为若干子情形。注意，$\mathrm{N} \leq 4$，因为 f 中至多有一个零对。

1. $\mathrm{N} = 1$：恰有一个零项，它可能出现在外对中（引理 5.1），也可能出现在内对中（引理 5.2）。2. $\mathrm{N} = 2$：有两个零项，它们可能位于两个不同的对中（引理 5.4、5.5 和 5.6），也可能位于同一对中（引理 5.7 和 5.8）。3. $\mathrm{N} = 3$：有三个零项。这可能包括一个零对（引理 5.10、5.11、5.12 和 5.13），也可能是零点分别出现在三个不同的对中（引理 5.14）。4. $\mathrm{N} = 4$：有四个零项。在这种情况下，必定有一个零对，它可能是外对（引理 5.15），也可能是内对（引理 5.16）。

尽管证明涉及逐案分析，但建立 #P-困难性的总体策略遵循一套通用思路。在大多数情形下（例如，引理 5.1、5.2），我们通过构件构造实现与平面六顶点模型相对应的签名，从而证明 #P-困难性

，然后应用其分类结果（定理 2.34）。在其他少数情形下（例如，引理5.5、5.13），我们实现一个至少含有两个零对的八顶点模型签名；这属于情形 I，并按相应方式处理。

在某些情况下，仅靠构件构造不足以确立复杂度二分定理，因此我们必须借助多项式插值。在引理 5.4中，我们对交叉 $\mathcal{S}$进行插值。这使我们能够将一般图上的八顶点模型归约到其平面对应问题。随后，我们调用一般图上八顶点模型的分类结果（定理 2.33），证明其具有 #P-困难性。在引理 5.1、5.2、5.4中，我们还运用基于 M¨obius 变换（推论 A.6）的插值技术来实现任意二元签名，从而进行二元修改。

5.1 N = 1：一个零项

若 N $= 1$，根据旋转对称性，只需考虑以下两种情况：(i) $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$且 $bcdyw \neq 0$，(ii) $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$且 $bcyzw \neq 0$。

引理 5.1. 若 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$且满足 $bcdyw \neq 0$，则 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是#P-困难的，除非 $f \in \mathcal{M}$；更明确地说，除非 $1 - by = -dw$，此时Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 可在多项式时间内计算。

证明。根据推论 A.6，我们可以对右侧任意 $t \in \mathbb{C}$ 插值得到二元签名 $(0, 1, t, 0)^T$。将 f 旋转 $\frac{\pi}{2}$、π 和 $\frac{3\pi}{2}$，分别得到签名 $f^{\frac{\pi}{2}}$、f^{π} 和 $f^{\frac{3\pi}{2}}$，其签名矩阵分别为 $M(f^{\frac{\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & w & 0 \\ 0 & d & y & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$、$M(f^{\pi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & w & c & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $M(f^{\frac{3\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & y & w & 0 \\ 0 & d & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。对于二元签名 $(0, 1, t, 0)^T$，我们可以在变量 x_4 上对 $f^{\frac{\pi}{2}}$ 进行二元修改，得到签名 $f_t^{\frac{\pi}{2}}$，其签名矩阵为 $M(f_t^{\frac{\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & wt & 0 \\ 0 & d & yt & 0 \\ c & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$。下面我们指定一个特定的 $t \in \mathbb{C}$。通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 将 $f_t^{\frac{\pi}{2}}$ 与 $f^{\frac{3\pi}{2}}$ 相连，得到右侧上的签名 $\tilde{f}$，其签名矩阵为 $M(\tilde{f}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & bd+twy & b^2+tw^2 & 0 \\ 0 & d^2+ty^2 & bd+twy & 0 \\ t & 0 & 0 & c+ct \end{bmatrix}$。根据引理 2.3，Pl-Holant $\left(\neq_2 | \tilde{f}\right)$ 的复杂度与右下角元素为 0 的平面六顶点模型相同，我们将其记为 f_0。我们可以选择 $t \in \mathbb{C}$，使得 $t \neq 0$、$bd + twy \neq 0$、$b^2 + tw^2 \neq 0$、$d^2 + ty^2 \neq 0$ 和 $t \neq -1$ 成立。这样的 t 总是存在，因为每个方程在复平面中至多排除一个点（回想一下 $bcdyw \neq 0$）。此外，对于这样的 t，我们有 $f_0 \notin \mathcal{P} \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{M}$（直接计算可知，$f_0 \in \mathcal{M}$ 当且仅当 $t = -1$）。因此，根据定理 2.34，Pl-Holant $\left(\neq_2 | \tilde{f}_0\right)$ 是 #P-困难的，进而除非$\tilde{f}_0 \in \mathcal{M}$，Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 也是 #P-困难的；在此情形下，该条件等价于 $(bd + twy)^2 - (b^2 + tw^2)(d^2 + ty^2) = -t$，化简后得到 $(by - dw)^2 = 1$。若 $by - dw = 1$，则 $f \in \mathcal{M}$，因此 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 可在多项式时间内计算。因此，剩下需要考虑 $dw - by = 1$。

现在对变量 x_4 上的 f^{π} 进行二元修改，得到右侧的签名 f_t^{π}，其签名矩阵为 $M(f_t^{\pi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & yt \\ 0 & 0 & dt & 0 \\ 0 & w & ct & 0 \\ b & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$。同样，我们将指定一些 $t \in \mathbb{C}$。

通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 将 f^{π} 与 f 连接，得到右侧的签名 $\hat{} f$，其签名矩阵为 $M(\hat{} f) = \begin{bmatrix} y+by & 0 & 0 & 1+bt \\ 0 & cdt & d^2t & 0 \\ 0 & c^2t+w^2 & cdt & 0 \\ t+by & 0 & 0 & b+bt \end{bmatrix}$。令 $t=-1$，我们有 $M(\hat{} f_{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-by \\ 0 & -cd & -d^2 & 0 \\ 0 & -c^2+w^2 & -cd & 0 \\ by-1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，它定义了一个 $\hat{}$ 平面六顶点模型。暂且假设 $by \neq 1$。那么，根据支撑集的大小，我们知道 $f_{-1} \notin \hat{} \left(\mathscr{P} \cup \mathscr{A}\right)$；通过直接计算，我们知道 $f_{-1} \notin \mathscr{M}$。因此，根据定理 2.34，该问题是 #P-困难的，除非 $\hat{} f_{-1} \in \mathscr{M}$；在这种情况下，这个条件等价于 $c^2d^2 + d^2(w^2 - c^2) = (1-by)^2$，化简后得到 $d^2w^2 = (1-by)^2$。由于 $dw = 1+by$，这将迫使 $by = 0$，与假设矛盾。因此，还需考虑 $by = 1$ 且 $dw = 2$ 的情形。

若我们将 $t = 0$ 放入 $\hat{} f$，就得到一个签名 $\hat{} f_0$，其签名矩阵为 $M(\hat{} f_0) = \begin{bmatrix} y & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$。我们将使用 $\hat{} f_0$ 对右侧的 $(=_2)^{\otimes 2}$ 进行插值，这在后面会很有用。根据引理 2.3，Pl-Holant $\left(\neq_2 | \hat{} f_0\right) \equiv_T$ Pl-Holant $(\neq_2 | h)$，其中 h 的签名矩阵为 $M(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。将此签名旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后，我们在右侧得到 $h^{\frac{\pi}{2}}$，其签名矩阵为 $M(h^{\frac{\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。计算可得 $M(h) N M(h^{\frac{\pi}{2}}) N M(h) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，因此旋转后（忽略全局因子 2），我们在右侧得到 $(=_2)^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 连接 f 和 $(=_2)^{\otimes 2}$，得到签名 g，其签名矩阵为 $M(g) = M(f) N \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 1 & 0 & 0 & y \end{bmatrix}$。将 g 旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后，得到签名 $g^{\frac{\pi}{2}}$；再通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 连接 $g^{\frac{\pi}{2}}$ 和 $(=_2)^{\otimes 2}$，便在右侧得到一个签名，其签名矩阵为 $\begin{bmatrix} w & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$。最后，将此签名旋转 π，然后根据引理 2.3，我们得到一个平面八顶点模型，其右侧由 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{y}{\sqrt{2}} & \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{c'}{\sqrt{2}} & \frac{d'}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 给出，且其形式为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b' \\ 0 & c' & d' & 0 \\ 0 & w' & 0 & 0 \\ y' & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。然而，$b'$、$y'$、$d'$、$w'$ 满足的是 $b'y' - d'w' = 0$，而非 ± 1。因此，根据前面的论证可知，该问题是 #P-困难的。这证明了情形 $dw - by = 1$ 的困难性，从而完成证明。 □

引理 5.2。若 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且满足 $bcwyz \neq 0$，则 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是#P困难的，除非 $f \in \mathscr{M}$，或更明确地说 $1 - by = cz$；在这些情况下，可以在多项式时间内计算Pl-Holant $(\neq_2 | f)$。

证明。根据推论 A.6，我们可以在右侧对任意 $t \in \mathbb{C}$ 插值得到二元签名 $(0, 1, t, 0)^T$。将 f 分别旋转 $\frac{\pi}{2}$、π 和 $\frac{3\pi}{2}$，得到签名 $f^{\frac{\pi}{2}}$、f^{π} 和 $f^{\frac{3\pi}{2}}$，其签名矩阵分别为 $M(f^{\frac{\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & b & w & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$、$M(f^{\pi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & w & c & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $M(f^{\frac{3\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & y & w & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。对于二元签名 $(0, 1, t, 0)^T$，我们可以对变量 x_4 上的 $f^{\frac{\pi}{2}}$ 进行二元修改，得到签名 $f_t^{\frac{\pi}{2}}$，其签名矩阵为 $M(f_t^{\frac{\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & zt \\ 0 & b & wt & 0 \\ 0 & 0 & yt & 0 \\ c & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$。通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 将 $f_t^{\frac{\pi}{2}}$ 与 $f^{\frac{3\pi}{2}}$ 连接起来，得到签名 $\tilde{f}$

在右侧，其签名矩阵为 $M(\tilde{f}) = M(f_t^{\pi^2})NM(f^{\frac{3\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} z & & & \\ & (t+1 & 0 & 0 & 1+czt) \\ & 0 & twy & b^2+w^2t & 0 \\ & 0 & -ty^2 & twy & 0 \\ & t+cz & 0 & 0 & c\ t+1 \end{bmatrix}()$。我们首先考虑 $cz = 1$ 的情况。在 f 中令 $t = 0$，并应用引理 2.3，得到右侧的签名 g，其签名矩阵为 $M(\tilde{f}_0) = \begin{bmatrix} 1&0&0&1 \\ 0&0&b^2&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&1 \end{bmatrix}$。通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 将 $\tilde{f}_0$、$\tilde{f}_0^{\pi^2}$ 和 $\tilde{f}_0$ 连接起来，得到一个签名，其签名矩阵为 $M(\tilde{f}_0)NM(\tilde{f}_0^{\pi^2})NM(\tilde{f}_0) = \begin{bmatrix} 2&0&0&2 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 2&0&0&2 \end{bmatrix}$；忽略右侧的因子 2，该矩阵为 $(=_2)^{\otimes 2}$。现在，若通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 将 f 与 $(=_2)^{\otimes 2}$ 连接起来，并旋转 π，就会得到右侧的一个签名，其签名矩阵为 $\begin{bmatrix} b&0&0&1 \\ 0&w&c&0 \\ 0&z&0&0 \\ 1&0&0&y \end{bmatrix}$。根据引理 2.3，该签名具有引理 5.1 中的形式；除非 $by - 1 = -cz$，否则它是 #P-困难的。然而，由于 $cz = 1$ 和 $by \neq 0$，这不可能成立。我们将目前的结论总结如下：若 $cz = 1$，则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的。

现在我们假设 $cz \neq 1$。令 $t = -1$ 属于 f，得到签名 f_{-1}，其签名矩阵为 $M(\tilde{f}_{-1}) = \begin{bmatrix} 0&0&0&1-cz \\ 0&-wy&b^2-w^2&0 \\ 0&-y^2&-wy&0 \\ cz-1&0&0&0 \end{bmatrix}$。由于 $cz \neq 1$，其支撑大小为 5 或 6。因此我们有 $f_{-1} \notin \mathscr{A}$ 以及 $f_{-1} \notin \mathscr{P}$。直接计算可得 $f_{-1} \notin \mathscr{M}$。此外，根据引理 2.24，$f_{-1} \in \mathscr{M}$ 当且仅当 $by = \pm(1 - cz)$。因此，根据定理 2.34，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的，除非 $by = \pm(1 - cz)$。注意，若 $by = 1 - cz$，则 $f \in \mathscr{M}$，因此可以在多项式时间内计算 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$。

剩下需要考虑 $by = cz - 1$ 的情形。若对变量 x_4 上的 f^{π} 进行二元修改，得到右侧的签名 f_t^{π}，其签名矩阵为 $M(f_t^{\pi}) = \begin{bmatrix} 1&0&0&yt \\ 0&z&0&0 \\ 0&w&ct&0 \\ b&0&0&t \end{bmatrix}$。将 f_t^{π} 与 f 通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 连接，可得到右侧的签名 $\hat{}\ f$，其签名矩阵为 $M(\hat{}\ f) = M(f_t^{\pi})NM(f) = \begin{bmatrix} y & & & & \\ & (t+1 & 0 & 0 & 1+byt) \\ & 0 & wz & z^2 & 0 \\ & 0 & c^2t+w^2 & wz & 0 \\ & 0 & 0 & b & t+1 \end{bmatrix}()$。若令 $t = -1$，则得到右侧的 $M(\hat{}\ f_{-1}) = \begin{bmatrix} 0&0&0&1-by \\ 0&wz&z^2&0 \\ 0&w^2-c^2&wz&0 \\ by-1&0&0&0 \end{bmatrix}$。若 $by \neq 1$，则 f_{-1} 的支撑大小为 5 或 6。因此 $f_{-1} \notin \mathscr{A}$ 且 $f_{-1} \notin \mathscr{P}$。直接计算可得 $\hat{}\ f_{-1} \notin \widehat{\mathscr{M}}$。此外，根据引理 2.24，$\hat{}\ f_{-1} \in \mathscr{M}$ 当且仅当 $(1 - by)^2 = c^2z^2$。代入 $by = cz - 1$ 将得到 $by = 0$，这与假设矛盾。因此，当 $cz \neq 1$ 时，根据定理 2.34，我们知道 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的，除非 $by = 1$。若 $by = 1$，结合 $by = cz - 1$，可得 $cz = 2$。此外，若 $by = 1$ 且 $w^2 = c^2$，则 $M(\hat{}\ f_{-1}) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&wz&z^2&0 \\ 0&0&wz&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$，其支撑大小为 3。因此 $\widehat{\ }$，它既不属于 $\mathscr{A}$，也不属于 $\mathscr{P}$。根据引理 2.24 和引理 2.26，它既不属于 $\mathscr{M}$，也不属于 $\mathscr{M}$。因此，在这种情况下，根据定理 2.34，问题 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的。我们总结目前的进展：除非 $f \in \mathscr{M}$ 或 $(by = 1) \wedge (cz = 2) \wedge (w^2 \neq c^2)$，否则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的。

现在令 $t = -\frac{w^2}{c^2}$ 位于 $\hat{}\ f$(注意，由于 $w^2 \neq c^2$，我们有 $t \neq -1$)，并将其旋转 $\frac{\pi}{2}$。代入 $by = 1$ 并应用引理2.3，得到的签名矩阵为 $\begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&\frac{z^2}{1+t}&1&0 \\ \frac{wz}{1+z}&0&0&1 \end{bmatrix}$。此签名的形式为 $\begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&c'&0&0 \\ 0&w'&z'&0 \\ y'&0&0&1 \end{bmatrix}$，其中 $c'z' = 1$，因此根据前面的论证，它是 #P-困难的。至此，证明完成。

□

5.2 自然数集 $=2$：两个零项

对于这种情形，$\{(b,\ y)$、$(c,\ z)$、$(d,\ w)\}$中有两个零项。如果这两个零项位于不同的数对中，根据旋转对称性，只需考虑以下三种情形：(i)$M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&w&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 其中 $bcdw\neq 0$，(ii) $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&0&z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 其中 $bcdz\neq 0$，或 (iii) $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&0&0\\0&w&z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$其中 $bczw\neq 0$。如果这两个零项位于同一数对中，根据旋转对称性，只需考虑以下两种情形：(iv) $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&c&d&0\\0&w&z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 其中 $cdzw\neq 0$，或 (v) $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&0&0\\0&0&z&0\\y&0&0&1\end{bmatrix}$其中 $bcyz\neq 0$。

5.2.1 不同对中的两个零项

下面的引理证明见 [9]。

引理 5.3。若 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&w&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 满足 $bcdw\neq 0$，则 $\text{Holant}\left(\neq_2\middle|\ f\right)$ 是 #P-困难的。

我们现在证明，唯一额外的可解类由匹配门给出。

引理 5.4。若 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&w&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 满足 $bcdw\neq 0$，则 $\text{Pl-Holant}\left(\neq_2\middle|\ f\right)$ 是 #P-困难的，除非 $f\in\mathscr{M}$，或者更明确地说 $dw=-1$；在这些情况下，$\text{Pl-Holant}\left(\neq_2\middle|\ f\right)$ 可在多项式时间内计算。

证明。将 f旋转 π，得到 f^π，其签名矩阵为 $M(f^\pi)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&d&0\\0&w&c&0\\b&0&0&1\end{bmatrix}$。用 N连接 f和f^π，得到右侧上的一个签名，其签名矩阵为

$$M(f)NM(f^\pi)=\begin{bmatrix}2b&0&0&1\\0&cw&c^2+d^2&0\\0&w^2&cw&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

根据引理 2.3，我们于是得到 $\text{Pl-Holant}\left(\neq_2\middle|\ \tilde{f}\right)\leq_T^p\text{Pl-Holant}\left(\neq_2\middle|\ f\right)$，其中 $\tilde{f}$的签名矩阵为 $M(\tilde{f})=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&cw&c^2+d^2&0\\0&w^2&cw&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$.由于 $bcdw\neq 0$，$\tilde{f}$的支撑大小为 5 或 6，因此 $\tilde{f}$不具有仿射支撑。根据定理 2.34，$\text{Pl-Holant}\left(\neq_2\middle|\ \tilde{f}\right)$ 是 #P-困难的，因此 $\text{Pl-Holant}\left(\neq_2\middle|\ f\right)$ 是 #P-困难的，除非 $\tilde{f}\in\widehat{\mathscr{M}}$ 或 $\tilde{f}\in\mathscr{M}$。若 $\tilde{f}\in\widehat{\mathscr{M}}$，则有 $\hat{f}=H^{\otimes 4}\tilde{f}\in\mathscr{M}$，其中 f 的签名矩阵为

$$M(\hat{f})=H^{\otimes 2}M(\tilde{f})H^{\otimes 2}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2+d^2+(c+w)^2&d^2+c^2-w^2&-d^2-c^2+w^2&2-d^2-(c+w)^2\\-d^2-c^2+w^2&-2-d^2-(c-w)^2&-2+d^2+(c-w)^2&d^2+c^2-w^2\\d^2+c^2-w^2&-2+d^2+(c-w)^2&-2-d^2-(c-w)^2&-d^2-c^2+w^2\\2-d^2-(c+w)^2&-d^2-c^2+w^2&d^2+c^2-w^2&2+d^2+(c+w)^2\end{bmatrix}.$$

若 f 满足偶校验条件，则

$$(2+d^2+(c+w)^2)^2-(2-d^2-(c+w)^2)^2=(-2-d^2-(c-w)^2)^2-(-2+d^2+(c-w)^2)^2$$

其中 $\hat{}$ 推出 $cw=0$，矛盾。若 f 满足奇校验条件，则

$$2+d^2+(c+w)^2=2-d^2-(c+w)^2=0$$

这意味着 $4=0$，矛盾。因此 $f \notin \mathscr{M}$。若 $f \in \mathscr{M}$，则由引理 2.24 可得 $dw=\pm 1$。若 $dw=-1$，再由引理 2.24 可得 $f \in \mathscr{M}$。从现在起，我们假设 $dw=1$。于是 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&1&0&0\\0&d&0&1\end{bmatrix}$。

根据推论 A.6，对于任意 $u \in \mathbb{C}$，我们都可以实现 $(0,1,u,0)^T$。若先在 f 的变量 x_4 上对 $(0,1,\frac{c}{b},0)^T$ 进行二元修改，再在 f 的变量 x_1 上对 $(0,1,\frac{cd^2}{b},0)^T$ 进行二元修改，就得到右侧的签名 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&c&\frac{cd}{b}&0\\0&\frac{cd}{b}&0&0\\0&0&0&\frac{c^2d^2}{b^2}\end{bmatrix}$。由引理 2.3，再除以 $\frac{cd}{b}$ 进行归一化，我们有 Pl-Holant $(\neq_2 \mid g) \leq_T^p$ Pl-Holant $(\neq_2 \mid f)$，其中 $M(g)=\begin{bmatrix}1&0&0&k\\0&k&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，且 $k=\frac{b}{d} \neq 0$。现在，我们通过证明 Pl-Holant $(\neq_2 \mid g)$ 是 #P-困难来完成证明。

根据引理 2.11，我们有 Pl-Holant $(\neq_2 \mid g, \mathcal{S}) \leq_T^p$ Pl-Holant $(\neq_2 \mid g)$。再次根据推论 A.6，我们可以将 $(0,1,\frac{1}{k},0)^T$ 二元修改为 g 的变量 x_3，然后将 $(0,1,0,0)^T$ 二元修改为 g 的变量 x_1 和 x_4，从而得到右侧的签名 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=[1\ 0]^{\otimes 2}$。将它的所有变量都与 $\neq_2$ 相连，我们便得到左侧的 $N\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}N=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=[0\ 1]^{\otimes 2}$。这可以看作 $h=\Delta_1^{\otimes 2} \otimes (=_2)$，其中 Δ_1 是一个一元签名，它将输入固定为 1。考虑 $h^{\otimes 2}=\Delta_1^{\otimes 4} \otimes (=_2)^{\otimes 2}$，并将 $\Delta_1^{\otimes 4}$ 与 g 的 4 个变量相连。这会给 Holant 值带来一个全局因子 $g_{1111}=1$。因此，我们得到左侧的 $(=_2)^{\otimes 2}$，即 Pl-Holant $\left(\neq_2, (=_2)^{\otimes 2} \mid g, \mathcal{S}\right) \leq$ Pl-Holant $(\neq_2 \mid g, \mathcal{S})$。于是，我们有 Pl-Holant $\left(\neq_2, (=_2)^{\otimes 2} \mid g, \mathcal{S}\right) \leq_T^p$ Pl-Holant $(\neq_2 \mid g)$。接着，根据引理 2.1，我们有 Holant $(\neq_2 \mid g) \leq_T^p$ Pl-Holant $(\neq_2 \mid g)$。然后，根据引理 5.3，Pl-Holant $(\neq_2 \mid g)$ 是 #P-困难的。因此，Pl-Holant $(\neq_2 \mid f)$ 是 #P-困难的。□

引理 5.5。 若 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&0&z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 且 $bcdz \neq 0$，则 Pl-Holant $(\neq_2 \mid f)$ 是 #P-困难的，除非 $f \in \mathscr{M}$，或更明确地说 $cz=1$；在这些情形下，Pl-Holant $(\neq_2 \mid f)$ 可在多项式时间内计算。

证明。将 f 旋转 $\frac{\pi}{2}$、π 和 $\frac{3\pi}{2}$，得到 $f^{\frac{\pi}{2}}$、f^{π} 和 $f^{\frac{3\pi}{2}}$，其签名矩阵分别为 $M(f^{\frac{\pi}{2}})=\begin{bmatrix}1&0&0&z\\0&b&0&0\\0&d&0&0\\c&0&0&1\end{bmatrix}$、$M(f^{\pi})=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&z&d&0\\0&0&c&0\\b&0&0&1\end{bmatrix}$ 和 $M(f^{\frac{3\pi}{2}})=\begin{bmatrix}1&0&0&c\\0&0&0&0\\0&d&b&0\\z&0&0&1\end{bmatrix}$。用两个 $\neq_2$ 连接 f 和 f^{π}，得到一个签名，其签名矩阵为 $M(f)NM(f^{\pi})=\begin{bmatrix}2b&0&0&1\\0&dz&c^2+d^2&0\\0&z^2&dz&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$。根据引理 2.3，可得 Pl-Holant $(\neq_2 \mid g) \leq_T^p$ Pl-Holant $(\neq_2 \mid f)$，其中 $M(g)=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&dz&c^2+d^2&0\\0&z^2&dz&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$。注意，$g$ 的支撑大小为 5 或 6，因此 g 不具有仿射支撑。根据定理 2.34，Pl-Holant $(\neq_2 \mid g)$ 是 #P-困难的，因此除非 $g \in \mathscr{M}$ 或 $g \in \mathscr{M}$，否则 Pl-Holant $(\neq_2 \mid f)$ 是 #P-困难的。与引理 5.4 的证明类似，直接计算可得 $g \notin \mathscr{M}$。此外，根据引理 2.24，$g \in \mathscr{M}$ 当且仅当 $cz=\pm 1$。若 $cz=1$，则再次由引理 2.24 可知 $f \in \mathscr{M}$，因此 Pl-Holant $(\neq_2 \mid f)$ 是可解的。若 $cz=-1$，用两个 $\neq_2$ 连接 $f^{\frac{\pi}{2}}$ 和 $f^{\frac{3\pi}{2}}$，得到签名 h，其签名矩阵为 $M(h)=M(f^{\frac{\pi}{2}})NM(f^{\frac{3\pi}{2}})=\begin{bmatrix}2c&0&0&1+cz\\0&bd&b^2&0\\0&d^2&bd&0\\1+cz&0&0&2z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2c&0&0&0\\0&bd&b^2&0\\0&d^2&bd&0\\0&0&0&2z\end{bmatrix}$。根据引理 2.7，Pl-Holant $(\neq_2 \mid h)$ 是

#P-困难，因此 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的，除非 $b=-d$。假设 $b=-d$。用两个 $(\ f^{\pi}_{2}$ 和 $f^{\pi}_{2})$连接，我们得到一个签名 h_1，其签名矩阵为 $M(h_1)=M(f^{\pi}_{2})NM(f^{\pi}_{2})=\begin{bmatrix}2c & 0 & 0 & 1+cz\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b^2+d^2 & 0 & 0\\ 1+cz & 0 & 0 & 2z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2c & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2b^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2z\end{bmatrix}$. 根据引理 4.3，可知 Pl-Holant $(\neq_2|\ h_1)$ 是 #P-困难的，因此 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的。证明完毕。 □

按照引理 5.5 证明中的完全相同的步骤，可以证明以下结论。**引理 5.6**。若 $M(f)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & b\\ 0 & c & 0 & 0\\ 0 & w & z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 满足 $bcwz\neq 0$，则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-难的，除非 $f\in\mathscr{M}$，或者更明确地说 $cz=1$；在这些情况下 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 可在多项式时间内计算。

5.2.2 单个数对中的两个零项

接下来考虑 $M(f)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c & d & 0\\ 0 & w & z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 满足 $cdzw\neq 0$ 的情况。

引理 5.7。若 $M(f)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c & d & 0\\ 0 & w & z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 满足 $cdzw\neq 0$，则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-难的，除非 $f\in\mathscr{M}$；或者更明确地说 $cz-dw=1$；在这种情况下 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 可在多项式时间内计算。

证明。首先假设 $\det\left[\begin{smallmatrix}c & d\\ w & z\end{smallmatrix}\right]=0$。若 $c+d\neq 0$ 或 $z+d\neq 0$，则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的（由引理 2.7 得出）。否则，$c=z=-d\neq 0$，且由于 $\det\left[\begin{smallmatrix}c & d\\ w & z\end{smallmatrix}\right]=0$，我们有 $d=w$。因此 $\left[\begin{smallmatrix}c & d\\ w & z\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}c & -c\\ -c & c\end{smallmatrix}\right]$。通过使用 $\neq_2$ 连接两个 f，我们得到一个签名 f_1，其签名矩阵为 $M(f_1)=M(f)NM(f)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2c^2 & 2c^2 & 0\\ 0 & 2c^2 & -2c^2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$。$f_1$的支撑集不是仿射子空间。由定理 2.34，Pl-Holant $(\neq_2|\ f_1)$ 是 #P-困难的，因此 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 也是 #P-困难的，除非$f_1\in\mathscr{M}$或 $\widehat{\mathscr{M}}$。由引理 2.24，$f\notin\mathscr{M}$。另外，注意 $H^{\otimes 2}M(f)H^{\otimes 2}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -2-8c^2 & -2+8c^2 & 0\\ 0 & -2+8c^2 & -2-8c^2 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$。由引理 2.24，$f\in\widehat{\mathscr{M}}$当且仅当 $c=0$，这与假设矛盾。总之，若 $\det\left[\begin{smallmatrix}c & d\\ w & z\end{smallmatrix}\right]=0$，则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的。

现在我们假设内部矩阵是满秩的。根据引理 A.1，要么对于某个 $\epsilon=\pm 1$，有 $(c=\epsilon z)\wedge(d=\epsilon w)$，要么在右侧有 $(0,1,t,0)^T$，其中 $t\neq\pm 1$。现在假设是后一种情况。那么根据引理 A.4 和推论 A.5，我们在右侧有 $(0,1,0,0)^T$。通过对变量 x_1 和 x_4 或 f 进行二元修改，使用 $(0,1,0,0)^T$，我们在右侧得到签名 g，其签名矩阵为 $M(g)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right]\otimes\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & c\end{smallmatrix}\right]$。这可以看作是 $\Delta_0^{\otimes 2}\otimes(1,0,0,c)^T$，其中 Δ_0是将其输入固定为 0 的一元签名。注意，$g^{\otimes 2}=\Delta_0^{\otimes 4}\otimes(1,0,0,c)^T\otimes(1,0,0,c)^T$。将 $\Delta_0^{\otimes 4}$与一个 f 的副本通过四个 $\neq_2$连接起来。这会对 Holant 值贡献一个全局因子 $f_{1111}=1$。因此，我们在右侧实现了签名 $h=(1,0,0,c)^T\otimes(1,0,0,c)^T$，其签名矩阵为 $M(h)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & c^2\end{bmatrix}$。通过使用 $\neq_2$连接 f和 h，我们在右侧得到签名 $\tilde{f}$，其签名矩阵为 $M(\tilde{f})=M(f)NM(h)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & c^2\\ 0 & cd & c^2 & 0\\ 0 & cz & cw & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$。$\tilde{f}$的支撑集不是仿射

子空间，因此根据定理 2.34 Pl-Holant $\left(\neq_2 \mid \tilde{f}\right)$ 是 #P-困难的，除非 $\tilde{f} \in \mathscr{M}$ 或 $\widehat{\mathscr{M}}$。如果 $\tilde{f} \in \mathscr{M}$，那么根据引理 2.24 我们有 $dw - cz = -1$ 这意味着 $f \in \mathscr{M}$。如果 $f \in \mathscr{M}$，那么 $f_1 \in \mathscr{M}$，其中

$$M(\tilde{f}_1) = H^{\otimes 2} M(\tilde{f}) H^{\otimes 2} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+2c^2+cd+cw+cz & 1-cd+cw-cz & 1-2c^2+cd-cw+cz & 1-cd-cw-cz \\ -1-cd+cw+cz & -1-2c^2+cd+cw-cz & -1-cd-cw+cz & -1+2c^2+cd-cw-cz \\ -1+2c^2+cd-cw-cz & -1-cd-cw+cz & -1-2c^2+cd+cw-cz & -1-cd+cw+cz \\ 1-cd-cw-cz & 1-2c^2+cd-cw+cz & 1-cd+cw-cz & 1+2c^2+cd+cw+cz \end{bmatrix}.$$

若 f_1 满足偶校验条件，则 $1 - cd + cw - cz = -1 - cd + cw + cz = -1 + 2c^2 + cd - cw - cz = 0$，这意味着 $d = w, cz = 1$ 和 $c^2 = 1$。直接计算可得，$\det M_{\mathrm{In}}(\tilde{f}_1) - \det M_{\mathrm{Out}}(\tilde{f}_1) = -\frac{1}{2}c(1+c^2)(d+w) \neq 0$，这与引理 2.24 矛盾。若 $\tilde{f}_1$ 满足奇校验条件，则 $1 + 2c^2 + cd + cw + cz = -1 - 2c^2 + cd + cw - cz = -1 - cd - cw + cz = 0$，这意味着 $d = -w$, $cz = 1$ 和 $c^2 = -1$。直接计算可得，$(\tilde{f}_1)_{0010}(\tilde{f}_1)_{1101} - (\tilde{f}_1)_{0001}(\tilde{f}_1)_{1110} - (\tilde{f}_1)_{0100}(\tilde{f}_1)_{1011} + (\tilde{f}_1)_{0111}(\tilde{f}_1)_{1000} = \frac{1}{2}c(-1+c^2)(d-w) \neq 0$，这与引理 2.24 矛盾。

因此，它 从现在起，只需考虑某个 $\epsilon = \pm 1$ 下的情形 $(c = \epsilon z) \wedge (d = \epsilon w)$.

我们首先考虑 $\epsilon = 1$ 的情形，即 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。以下三个命题将处理这种情形。

命题 A 如果 $f \notin \mathscr{M}$，那么当 $c^2 + d^2 \neq 0$ 和 $c^2 - d^2 \neq -1$ 时，Pl-Holant $(\neq_2 \mid f)$ 是 #P-困难。

将 f 的两个副本与 N 连接起来，可得到一个签名 f_2，其签名矩阵为 $M(f_2) = M(f)NM(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2cd & c^2+d^2 & 0 \\ 0 & c^2+d^2 & 2cd & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。暂且假设 $c^2 + d^2 \neq 0$。那么 f_2 的支撑集不是仿射子空间。由定理 2.34，Pl-Holant $(\neq_2 \mid f_2)$ 是 #P-困难，因此 Pl-Holant $(\neq_2 \mid f)$ 是 #P-困难，除非 $f_2 \in \mathscr{M}$ 或 $\widehat{\mathscr{M}}$。如果 $f_2 \in \mathscr{M}$，那么

$$H^{\otimes 2} M(f) H^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 2+2c^2+4cd+2d^2 & 0 & 0 & 2-2c^2-4cd-2d^2 \\ 0 & -2-2c^2+4cd-2d^2 & -2+2c^2-4cd+2d^2 & 0 \\ 0 & -2+2c^2-4cd+2d^2 & -2-2c^2+4cd-2d^2 & 0 \\ 2-2c^2-4cd-2d^2 & 0 & 0 & 2+2c^2+4cd+2d^2 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}.$$

根据引理2.24，这将推出 $cd = 0$，产生矛盾。如果 $f_2 \in \widehat{\mathscr{M}}$，那么根据引理2.24 这将推出 $c^2 - d^2 = \pm 1$。如果 $c^2 - d^2 = 1$，那么 $f \in \mathscr{M}$。命题 A 的证明至此完成。

命题 B 如果 $f \notin \mathscr{M}$，那么当 $c^2 + d^2 \neq 0$ 时，Pl-Holant $(\neq_2 \mid f)$ 是 #P-困难。

根据命题 A，我们可以假设 $c^2 - d^2 = -1$。将 f 旋转 $-\frac{\pi}{2}$，得到签名 $f^{\frac{\pi}{2}}$，其签名矩阵为 $M(f^{\frac{\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。将两个 $f^{\frac{\pi}{2}}$ 副本与 N 连接起来，得到 $M(f^{\frac{\pi}{2}})NM(f^{\frac{\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 2c & 0 & 0 & 1+c^2 \\ 0 & 0 & d^2 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 & 0 \\ 1+c^2 & 0 & 0 & 2c \end{bmatrix}$。将其旋转 $\frac{\pi}{2}$ 并按 $2c$ 归一化，得到右侧的签名 f_3，其签名矩阵为 $M(f_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1+c^2}{2c} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{2c} & 0 & \frac{d^2}{2c} \\ \frac{1+c^2}{2c} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{2c} & 0 & \frac{d^2}{2c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d^2 & d^2 & 0 \\ 2c & 2c & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & d^2 & 0 \\ 2c & 0 & 0 & 2c \end{bmatrix}$。$f_3$ 的签名矩阵与 f 的签名矩阵形式相同。因此，根据命题 A（$d \neq 0$），我们知道 Pl-Holant（$\neq_2 \mid f_3$）是 #P-困难的，进而 Pl-Holant（$\neq_2 \mid f$）也是 #P-困难的。

命题 C 如果 $f \notin \mathscr{M}$，则 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的。

由命题 B，只需考虑 $c^2+d^2=0 \Rightarrow d=\pm \mathrm{i}c$ 的情形。若 $256c^{16} \neq 1$，则 $2cd$ 不是 $\sqrt{\mathrm{i}}$ 的幂，因为 $(2cd)^8=(\pm 2\mathrm{i}c^2)^8=256c^{16} \neq 1$。于是，由定理 2.34、引理 2.22、$\mathscr{A}$ 的定义、引理 2.24，以及对 $H^{\otimes 2}M(f)H^{\otimes 2}$ 的直接计算可知，$M(f_2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2cd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2cd & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是 #P-困难的。若 $256c^{16}=1$，则 $|c|=\frac{\sqrt{2}}{2}$。另一方面，$f_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+c^2}{2c} & \frac{d^2}{2c} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{2c} & \frac{1+c^2}{2c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$（注意，此处我们没有条件 $c^2-d^2=-1$）。由命题 B，Pl-Holant $(\neq_2 | f_3)$ 是 #P-困难的，因此，除非 $(\frac{1+c^2}{2c})^2+(\frac{d^2}{2c})^2=0 \Rightarrow c^4+c^2+1=0$，否则 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 也是 #P-困难的，因为 $c^2+d^2=0$。但此时由求根公式可得 $c^2=\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} \Rightarrow |c|=1$，这与 $|c|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 矛盾。命题 C 的证明至此完成。

还需考虑 $\epsilon=-1$ 的情况，即 $M(f)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & -d & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。在这种情况下，我们可以在右侧得到二元函数 $(0,\ 1,\ -1,\ 0)^T$，并对变量 x_2 进行二元修改，得到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，其复杂度等价于 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}c & -\mathrm{i}d & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}d & -\mathrm{i}c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，而 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}c & -\mathrm{i}d & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}d & -\mathrm{i}c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 属于 $\epsilon=1$ 时的形式。因此，我们可以应用断言 C，从而除非 $-c^2+d^2=1$，否则 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的；在这种情况下，$f \in \mathscr{M}$。我们的证明至此完成。 □

引理 5.8. 若 $M(f)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，且 $bcyz \neq 0$，则 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的，除非 $f \in \mathscr{M}$，或者更明确地说 $cz+by=1$；在这些情况下，Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 可在多项式时间内计算。证明. 将 f 旋转 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 后，我们得到右侧的签名 $f^{\frac{\pi}{2}}$ 和 $f^{\frac{3\pi}{2}}$，其签名矩阵分别为 $M(f^{\frac{\pi}{2}})=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $M(f^{\frac{3\pi}{2}})=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 连接 $f^{\frac{\pi}{2}}$ 和 $f^{\frac{3\pi}{2}}$，得到签名 $\tilde{f}$，其签名矩阵为 $M(\tilde{f})=M(f^{\frac{\pi}{2}})NM(f^{\frac{3\pi}{2}})=\begin{bmatrix} 2z & 0 & 0 & 1+cz \\ 0 & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 & 0 \\ 1+cz & 0 & 0 & 2c \end{bmatrix}$。我们根据 $cz=-1$是否成立来分别讨论。

若 $cz \neq -1$，则 $1+cz \neq 0$。由引理 2.3 和引理 5.4（经过 $\frac{\pi}{2}$ 旋转后），我们知道 Pl-Holant $\left(\neq_2 | \tilde{f}\right)$ 是 #P-困难的，因此除非 $4cz=(1+cz)^2-b^2y^2$，否则 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的，这意味着 $by=1-cz$ 或 $by=cz-1$。若 $by=1-cz$，则根据引理 2.24 $f \in \mathscr{M}$，问题 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 因而是可解的。因此，当 $cz \neq -1$ 时，剩下需要考虑的情况是 $by=cz-1$。若将 f 旋转 π，则右侧有签名 f^{π}，其签名矩阵为 $M(f^{\pi})=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 连接 f 和 f^{π}，右侧得到签名 $\hat{}f$，其签名矩阵为 $M(\hat{}f)=\begin{bmatrix} 2b & 0 & 0 & 1+by \\ 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 & 0 \\ 1+by & 0 & 0 & 2y \end{bmatrix}$。代入 $by+1=cz$，得到 $M(\hat{}f)=\begin{bmatrix} 2b & 0 & 0 & cz \\ 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 & 0 \\ cz & 0 & 0 & 2y \end{bmatrix}$。由引理 2.3 和引理 5.4（经过 $\frac{\pi}{2}$ 旋转后），我们知道 Pl-Holant $\left(\neq_2 | \hat{}f\right)$ 是 #P-困难的，因此 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的。

如果 $cz=-1$，那么 $M(\tilde{f})=\begin{bmatrix} 2z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c \end{bmatrix}$。根据引理 2.3和引理 4.3，我们知道 Pl-Holant $\left(\neq_2 | \tilde{f}\right)$

是 #P-困难，因此除非 $\neq_2|\ f$，否则 Pl-Holant ($b^2y^2 = \pm 4cz = \mp 4$) 是 #P-困难。在所有情况下，$1 + by \neq 0$ 由于 $|by| = 2$。因此，根据引理 2.3 和引理 5.4 (旋转 $\frac{\pi}{2}$ 之后)，我们知道 Pl-Holant $\left(\neq_2|\ \hat{}\ f\right)$ 是 #P-困难，因此除非 $\neq_2|\ f$，否则 Pl-Holant ($4by = (1 + by)^2 - c^2z^2$)，这意味着 $(1 - by)^2 = 1$。由于 $by \neq 0$，我们有 $by = 2$，因此 $cz + by = 1$和 $f \in \mathscr{M}$。至此，证明完成。□

当 N = 2 时，我们的讨论到此结束。

5.3 自然数集 = 3: 三个零项

在 $\{(b, y), (c, z), (d, w)\}$ 中恰有三个非零项。如果这三个非零项中有两个位于同一对中，根据旋转对称性，只需考虑以下四种情况：(i) $M(f) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&c&d&0\\ 0&w&0&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$ 其中 $cdw \neq 0$, (ii) $M(f) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&c&0&0\\ 0&w&z&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$ 其中 $cwz \neq 0$, (iii) $M(f) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&c&d&0\\ 0&0&z&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$其中 $cdz \neq 0$, (iv) $M(f) = \begin{bmatrix} 1&0&0&b\\ 0&c&0&0\\ 0&0&z&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$ 其中 $bcz \neq 0$。如果三个非零项分别位于不同的对中，根据旋转对称性，只需考虑以下两种情况：(v) $M(f) = \begin{bmatrix} 1&0&0&b\\ 0&c&d&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$ 其中$bcd \neq 0$, (vi) $M(f) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&c&d&0\\ 0&0&0&0\\ y&0&0&1 \end{bmatrix}$ 其中 $cdy \neq 0$。

以下引理证明见 [9]。

引理 5.9。 若 $M(f) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&c&d&0\\ 0&w&0&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$ 且满足 $cdw \neq 0$，则Holant $(\neq_2|\ f)$ 是#P-困难的。

现在我们说明，唯一额外的可解类别由匹配门给出。

引理 5.10。 若 $M(f) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&w&0&0\\ 0&0&c&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$ 且满足 $cdw \neq 0$，则Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是#P-困难的，除非 $f \in \mathscr{M}$，或更明确地说 $dw = -1$；在这些情况下，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 可在多项式时间内计算。

证明。将 f旋转 π，我们得到右侧的签名 f^π，其签名矩阵为 $M(f^\pi) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&d&0\\ 0&w&c&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$。通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 连接 f和 f^π，我们得到右侧的签名 $\tilde{f}$，其签名矩阵为 $M(\tilde{f}) = M(f)NM(f^\pi) = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 0&cw&c^2+d^2&0\\ 0&w^2&cw&0\\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}$。

$\tilde{f}$的支撑大小为 5 或 6，因此 $\tilde{f}$不具有仿射支撑。根据定理 2.34，Pl-Holant $\left(\neq_2|\ \tilde{f}\right)$ 是 #P-困难的，因此 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的，除非 $f \in \mathscr{M}$ 或 $f \in \mathscr{M}$成立。若 $f \in \mathscr{M}$，则有 $f_1 \in \mathscr{M}$，其中 f_1 的签名矩阵为

$$M(\tilde{f}_1) = H^{\otimes 2}M(\tilde{f})H^{\otimes 2} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2+c^2+d^2+2cw+w^2 & c^2+d^2-w^2 & -c^2-d^2+w^2 & 2-c^2-d^2-2cw-w^2\\ -c^2-d^2+w^2 & -2-c^2-d^2+2cw-w^2 & -2+c^2+d^2-2cw+w^2 & c^2+d^2-w^2\\ c^2+d^2-w^2 & -2+c^2+d^2-2cw+w^2 & -2-c^2-d^2+2cw-w^2 & -c^2-d^2+w^2\\ 2-c^2-d^2-2cw-w^2 & -c^2-d^2+w^2 & c^2+d^2-w^2 & 2+c^2+d^2+2cw+w^2 \end{bmatrix}.$$

若 $\tilde{f}_1$满足奇校验条件，则 $2 + c^2 + d^2 + 2cw + w^2 = 2 - c^2 - d^2 - 2cw - w^2 = 0$，这意味着 $4 = 0$，矛盾。因此，它满足偶校验条件，但此时$\tilde{\ }$ $\hat{\ }$行列式条件化简为 $cw = 0$，再次产生矛盾。因此我们得出结论 $f \notin \mathscr{M}$。接下来考虑 $\tilde{f} \in \mathscr{M}$ 的情形。由引理 2.24，可得 $d^2w^2 = 1$，或者

等价地，$dw = \pm 1$。若 $dw = -1$，则 $f \in \mathscr{M}$ 由引理 2.24 可知，因此它是可解的。我们将从现在起，在本证明中假设 $dw = 1$。现在 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 1 \end{bmatrix}$。将 f 旋转 $\frac{\pi}{2}$，得到右侧的签名 $f^{\frac{\pi}{2}}$，其签名矩阵为 $M(f^{\frac{\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。用 $(\neq_2)$ 连接其变量 x_3 和 x_4，得到右侧的二元签名 $(0, 1, d^2, 0)^T$。对变量 x_4 使用 $(0, 1, d^2, 0)^T$ 进行二元修改，得到右侧的 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & d^2 \end{bmatrix}$。根据引理 2.3，只需考虑 Pl-Holant $\left(\neq_2 | \hat{f}\right)$ 的复杂度，其中 $M(\hat{f}) = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$。由于除以常数不会改变复杂度，我们将 $\hat{f}$ 的签名矩阵除以 d，但仍将其记为 $\hat{f}$。现在 $M(\hat{f}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $k = \frac{c}{d}$。将 $\hat{f}$ 旋转 $\frac{3\pi}{2}$，得到签名 $\hat{f}^{\frac{3\pi}{2}}$，其签名矩阵为 $M(\hat{f}^{\frac{3\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。用 $2s$ 个 $(\neq_2)^{\otimes}$ 连接 $2s+1$ 个 $\hat{f}^{\frac{3\pi}{2}}$，得到右侧具有签名矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2s+1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的签名。因此，我们可以插值得到签名 $\mathcal{S}$。此外，根据推论 A.6，我们有二元签名 $(0, 1, \frac{1}{k}, 0)^T$ 和 $(0, 1, 0, 0)^T$。先对 $\hat{f}^{\frac{3\pi}{2}}$ 的变量 x_3 使用 $(0, 1, \frac{1}{k}, 0)^T$ 进行二元修改，再对 $\hat{f}^{\frac{3\pi}{2}}$ 的变量 x_1 和 x_4 使用 $(0, 1, 0, 0)^T$ 进行二元修改，得到右侧的签名 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。根据引理 5.4 中相同的论证，我们可以在左侧实现 $(=_2)^{\otimes 2}$。再根据引理 2.1 和引理 5.9，当 $dw = 1$ 时，Pl-Holant $\left(\neq_2 | \hat{f}\right) \equiv_T$ Holant $\left(\neq_2 | \hat{f}\right)$ 为 #P-困难。证明完毕。 □

引理 5.11. $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 带有 $cwz \neq 0$，则 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-难的，除非 $f \in \mathscr{M}$，或更明确地说 $cz = 1$，在这些情形下 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 可在多项式时间内计算。

证明。将 f 旋转 $\frac{\pi}{2}$、π 和 $\frac{3\pi}{2}$，分别得到签名 $f^{\frac{\pi}{2}}$、f^{π} 和 $f^{\frac{3\pi}{2}}$，其签名矩阵分别为 $M(f^{\frac{\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$、$M(f^{\pi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & w & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $M(f^{\frac{3\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 连接 f 和 f^{π}，得到签名 $\tilde{f}$，其签名矩阵为 $M(\tilde{f}) = M(f)NM(f^{\pi}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & cw & c^2 & 0 \\ 0 & w^2+z^2 & cw & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。由于 $cwz \neq 0$，f 的支撑大小为 5 或 6，因此 f 没有仿射支撑。根据定理 2.34，问题 Pl-Holant $\left(\neq_2 | \tilde{f}\right)$ 是 #P-困难，因此问题 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难，除非 $f \in \mathscr{M}$ 或 $f \in \mathscr{M}$。根据引理 2.24，$f \in \mathscr{M}$ 当且仅当 $cz = \pm 1$。若 $cz = 1$，则 $f \in \mathscr{M}$，因此 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 可在多项式时间内计算。此外，$f \in \mathscr{M}$ 当且仅当 $H^{\otimes 4}\tilde{f} \in \mathscr{M}$，这可化简为 $cw = 0$，矛盾。因此，我们可以假设 $cw = -1$。通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 连接 $f^{\frac{\pi}{2}}$ 和 $f^{\frac{3\pi}{2}}$，得到签名 g，其签名矩阵为 $M(g) = M(f^{\frac{\pi}{2}})NM(f^{\frac{3\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 2z & 0 & 0 & 1+cz \\ 0 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+cz & 0 & 0 & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c \end{bmatrix}$。根据引理 2.3 和引理 4.3，Pl-Holant $(\neq_2 | g)$ 是 #P-困难，因此 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难。证明至此完成。□

引理 5.12。 若 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&c&d&0\\0&0&z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 且满足 $cdz\neq 0$，则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是#P-困难，除非 $f\in\mathscr{M}$，或更明确地说，除非 $cz=1$；在这些情况下，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 可在多项式时间内计算。

证明。 证明过程与引理5.11的证明完全相同。 □

引理 5.13。 若 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&0&0\\0&0&z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 且 $bcz\neq 0$，则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是#P-困难的，除非 $f\in\mathscr{M}$，或者更明确地说，除非 $cz=1$；在这些情况下，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 可在多项式时间内计算。

证明。将 f 旋转 $\frac{\pi}{2}$，并将 $\frac{3\pi}{2}$ 旋转，分别得到签名 $f^{\frac{\pi}{2}}$ 和 $f^{\frac{3\pi}{2}}$，其签名矩阵分别为 $M(f^{\frac{\pi}{2}})=\begin{bmatrix}1&0&0&z\\0&b&0&0\\0&0&0&0\\c&0&0&1\end{bmatrix}$ 和 $M(f^{\frac{3\pi}{2}})=\begin{bmatrix}1&0&0&c\\0&0&0&0\\0&0&b&0\\z&0&0&1\end{bmatrix}$。通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 将 $f^{\frac{\pi}{2}}$ 与 $f^{\frac{3\pi}{2}}$ 连接，得到签名 $\tilde{f}$，其签名矩阵为 $M(\tilde{f})=M(f^{\frac{\pi}{2}})NM(f^{\frac{3\pi}{2}})=\begin{bmatrix}2z&0&0&1+cz\\0&0&b^2&0\\0&0&0&0\\1+cz&0&0&2c\end{bmatrix}$；将其旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后，得到签名 $M(\tilde{f}^{\frac{\pi}{2}})=\begin{bmatrix}2z&0&0&0\\0&1+cz&0&0\\0&b^2&1+cz&0\\0&0&0&2c\end{bmatrix}$。若 $1+cz=0$，则根据引理 2.3 和引理 4.2，Pl-Holant $\left(\neq_2|\ \tilde{f}\right)$ 是#P-困难的，因此 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$是#P-困难的。若 $1+cz\neq 0$，则根据引理 2.3 和引理 5.11，Pl-Holant $\left(\neq_2|\ \tilde{f}\right)$ 是#P-困难的，因此 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$是#P-困难的，除非 $(1+cz)^2=4cz\Leftrightarrow cz=1$。证明完毕。 □

现在我们在以下引理中处理情形 (v) $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ with $bcd\neq 0$，以及 (vi) $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&c&d&0\\0&0&0&0\\y&0&0&1\end{bmatrix}$ with $cdy\neq 0$。

引理 5.14. 若 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&0&0&0\\y&0&0&1\end{bmatrix}$ with $cd\neq 0$ and $by=0$，则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难。证明. 将 f 旋转 π，得到签名 f^{π}，其签名矩阵为 $M(f^{\pi})=\begin{bmatrix}1&0&0&y\\0&0&d&0\\0&0&c&0\\b&0&0&1\end{bmatrix}$。通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 连接 f^{π} 和 f，得到签名 g，其签名矩阵为 $M(g)=\begin{bmatrix}2b&0&0&1+by\\0&cd&d^2&0\\0&c^2&cd&0\\1+by&0&0&2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2b&0&0&1\\0&cd&d^2&0\\0&c^2&cd&0\\1&0&0&2y\end{bmatrix}$。根据引理 2.3，我们有 Pl-Holant $(\neq_2|\ g)\equiv_T$ Pl-Holant $(\neq_2|\ \tilde{g})$，其中 $\tilde{g}$ 的签名矩阵为 $M(\tilde{g})=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&cd&d^2&0\\0&c^2&cd&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$。由于 $\tilde{g}$ 的支撑大小为 6，它不具有仿射支撑。于是根据定理 2.34，Pl-Holant $(\neq_2|\ \tilde{g})$ 是 #P-困难，因此 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 也是 #P-困难，除非 $\tilde{g}\in\mathscr{M}$ 或 $\tilde{g}\in\widehat{\mathscr{M}}$。注意，根据引理 2.24，$\tilde{g}\notin\mathscr{M}$。若 $\tilde{g}\in\widehat{\mathscr{M}}$，则 $H^{\otimes 4}\tilde{g}\in\mathscr{M}$，这可归约到 $cd=0$，矛盾。

□

至此，我们对 $\mathrm{N}=3$ 的讨论结束。

5.4 $\mathrm{N}=4$：四个零项

若自然数集 $=4$ 且在 $\{(b,y),(c,z),(d,w)\}$ 中至多有一个零对，则由旋转对称性，只需考虑以下三种情形：(i) $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&c&d&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 且 $cd\neq 0$，(ii) $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&0&d&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

且 $bd \neq 0$，(iii) $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $bc \neq 0$。情形 (i) 可归入引理 5.14。下面我们处理情形 (ii) 与情形 (iii)。

引理 5.15。 如果 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 满足 $bd \neq 0$，那么 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的。

证明。将 f旋转 π得到签名 f^π，其签名矩阵为 $M(f^\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。通过 $(\neq_2)^{\otimes 2}$连接f和 f^π，得到签名 $\tilde{f}$，其签名矩阵为 $M(\tilde{f}) = \begin{bmatrix} 2b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。根据引理 2.3 和定理 2.34，问题 Pl-Holant $\left(\neq_2 | \tilde{f}\right)$ 是 #P-困难的，因此问题 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 也是 #P-困难的，除非签名 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 属于某个可解情形。由于$d \neq 0$，其支撑集不是仿射的，因此它既不是积型也不是仿射型。根据引理 2.24 和引理 2.28，我们知道它不是可变换为匹配门的。证明完毕。 □

引理 5.16。 若 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，且 $bc \neq 0$，则 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的。

证明。 证明过程与引理5.15的证明完全相同。 □

5.5 综合起来

我们总结情形 II：其中至少有一个零项，且至多有一个零对。

定理 5.17。 设 f 是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。若 $\{(b, y)、(c, z)、(d, w)\}$ 中至少有一个零项，且 (b, y) 、 (c, z) 和 (d, w) 中至多有一对是零对，则 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的，除非 $f \in \mathscr{M}$。

结合引理 4.1 和引理4.3，我们得到以下定理，用于处理情形 I 和情形 II。

定理 5.18. 设 f 是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。如果 $\{(b, y)、(c, z)、(d, w)\}$ 中至少有一个零项，那么 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P- 困难，除非 $f \in \mathscr{P}$，或 f 是 $\mathscr{A}$- 可变换的，或 f 是 $\mathscr{M}$-可变换的；在这些情况下，Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是可解的。

以下引理表明，在内部矩阵恰有三个非零项的特定情形下，唯一可解的类是匹配门。该引理将在第 7 节中发挥作用。

引理 5.19. 设 f是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$，其中 $dwz \neq 0$，则要么 $f \in \mathscr{M}$，要么 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-难的。

证明。 若 $ax = 0$，则根据引理 2.3，Pl-Holant $(\neq_2 | f) \equiv_T$Pl-Holant $(\neq_2 | f')$，其中 f'具有签名矩阵 $M(f') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.若 b和 y中至多一个为 0，则根据 [11],中的定理 5.2，Pl-Holant $(\neq_2 | f')$ 是 #P-困难，除非 $f' \in \mathscr{M} \Leftrightarrow by = dw \Leftrightarrow f \in \mathscr{M}$。引理得证。若

$b = y = 0$，则 f'的支撑大小为 3。因此，$f' \notin \mathscr{P}$和 $f' \notin \mathscr{A}$。根据定理 2.34，$\widehat{\text{Pl-Holant}}\,(\neq_2|\, f')$ 是 #P-困难，除非 $f' \in \mathscr{M}$或 $f' \in \mathscr{M}$。直接计算可得 $f' \notin \mathscr{M}$。因此，Pl-Holant $(\neq_2|\, f')$ 是 #P-困难，除非 $f' \in \mathscr{M}$，这等价于 $f \in \mathscr{M}$，因为 $ax = 0$。引理得证。

若 $ax \neq 0$，根据引理 $a = x = 1$ 进行归一化，并借助引理2.3 以及引理5.4、引理5.10 和引理5.1（可能需要进行某些旋转），即可得证。 □

6 情形III：对称条件

设 f是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $byczdw \neq 0$。本节将给出 Pl-Holant $(\neq_2|\, f)$的复杂性分类，其中 $(b,\ y)$、$(c,\ z)$、$(d,\ w)$是三个相等对（定理6.23）或相反对（引理6.25）。这是最复杂的情形，我们将对 Even Coloring 模型进行组合变换，以识别新的可解类，并采用共形格插值证明其为 #P-困难。

我们首先考虑情形 $(b = y) \wedge (c = z) \wedge (d = w)$。在第6.1节中，我们介绍到 Even Coloring （引理6.2），并给出一个简要示例，说明如何利用它证明 #P-困难（引理6.5）。稍后，我们还将利用这一变换，在引理6.20中识别出一种新发现的可解类型。

在第6.2节中，我们根据全息变换后 $M(f)$的归一化特征值之间的乘法关系，定义一个格 $L_{(u,v,w)}$。我们应用共形格插值，从 f （引理6.6）对签名 g 进行插值。接着，我们在第6.3 节和第6.4节中进行基于秩的分析，分别对应于 $L_{(u,v,w)}$ 的秩至多为 1 或恰好为 2 的情形。秩为 3 的情形将在三个相等对情形的最终二分定理中处理（引理6.22）。

如果签名 g 我们在引理 6.6 中进行插值时，得到的恰好是不等交叉 $\mathcal{S}'$（引理 6.7），那么根据引理 2.2，问题 Pl-Holant $(\neq_2|\, f)$ 就等价于其非平面对应问题 Holant $(\neq_2|\, f)$。根据前面的结果，即可得证：

引理 6.1。 *[9]*设 f是一个签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且满足 $bcd \neq 0$，则Holant$(\neq_2|\, f)$ 是 $\#$P-困难，或者 f是 $\mathscr{P}$-可变换，或者 $\mathscr{A}$-可变换，或者 $\mathscr{L}$-可变换。

如果签名 g 恰好定义了一个 #P-困难的平面六顶点模型（引理 (i) 中的条件 6.8），或者一个处于情形 I 的 #P-困难平面八顶点模型（引理 (iii) 中的条件 6.8）或处于情形 II 的 #P-困难平面八顶点模型（引理 (ii)、(iv)、(v) 中的条件 6.8），那么 Pl-Holant $(\neq_2|\, g)$ 的 #P-困难性就意味着 Pl-Holant $(\neq_2|\, f)$ 的 #P-困难性。

然而，在秩 2 情形中，有几个棘手的例外情况（2、3、4、5，见引理 6.14）。在这些情况下，简单的论证都不够，我们不得不借助非奇异冗余签名的困难性（引理 (vi) 中的条件 6.8）。此外，$\mathscr{M}$-可变换签名在这些情况下深藏不露。为了证明 #P-困难性，我们利用多项式的几何性质，具体如引理6.11 和推论6.12所述。

如果共形格插值既不能导出 #P-困难性，也不能得到不等交叉$\mathcal{S}'$，即使旋转 f，我们也证明 b、c和 d必须满足某些关系。这要么意味着f 是 $\mathscr{M}$-可变换的，要么我们可以借助组合变换将问题转化为 Even Coloring，再进行全息变换（引理 6.4），从而将问题转化为情形 I，或转化为

平面六顶点模型（引理 6.20）。在最后一种情形中（通过组合变换转化为平面六顶点模型），我们发现了新的可解类型（$b = -c = \mathrm{i}\tan(\frac{\beta\pi}{8})$ ） $\wedge (d = \pm 1)$。

上述讨论在第 6.5 节（引理 6.22、定理 6.23）达到高潮，该节给出了 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 的复杂度分类，其中 (b, y)、(c, z)、(d, w) 是三对相等对。最后，在第 6.6 节中，我们处理 (b, y)、(c, z)、(d, w) 是三对相反对的情形，方法是应用全息变换和二元修改，将 f 变换为对应于三对相等对情形的形式（引理 6.25）。

6.1 从 Even Coloring模式出发的组合变换

(平面) Even Coloring 问题是 Pl-Holant(g) 问题，等价地也可表示为 Pl-Holant $(=_2 | g)$，其中 g 是一个支撑集为偶汉明重量的 $2n$元签名。换句话说，给定一个 $2n$正则平面图 G，Even Coloring 问题的一个合法配置为给每条边指定绿色 或红色，使得每个顶点关联的绿色边数均为偶数。这种赋值称为 G 的偶着色。我们用 $\mathscr{C}(G)$ 表示 G 的所有偶着色构成的集合。目标是计算 $\mathscr{C}(G)$ 上的局部权重乘积之和。

以下引理推广了此前针对以下情形所建立的结果 $n = 2$ 在 [14]。利用相同的基本思想，我们以更简单、更直接的方式给出了一个可推广到任意 n 的证明。

引理 6.2。设 f 和 g 都是 $2n$-元签名，且支撑在偶汉明重量上。若对于所有 $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \in \{0, 1\}$，$f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) = g(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) = g(x_1, \overline{x_2}, \ldots, x_{2n-1}, \overline{x_{2n}})$ (g 翻转偶数或奇数索引的输入比特)，则 Pl-Holant $(\neq_2 | f) \equiv_p^T$ Pl-Holant $(=_2 | g)$。

证明。给定 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 的签名网格 $\Omega = (G, \pi)$，我们在相同的底层图 G上定义 Pl-Holant$(=_2 | g)$ 的签名网格 Ω'，其中每个标记 $\neq_2$ 都替换为 $=_2$，而f替换为 g。我们通过证明两个乘积和中的各项之间存在一一对应，证明 Pl-Holant $(\Omega; \neq_2 | f) =$ Pl-Holant $(\Omega'; =_2 | g)$。

注意，G 中所有标记为 $\neq_2$ 的顶点的次数均为 2。若移除这样的顶点并合并其两条关联边，就会得到一个 $2n$正则图 G_1。因此，Ω的有效0-1边赋值对应于 G_1的一个偶定向，其中0表示入边，1表示出边。此外，Ω' 的有效0-1边赋值对应于 G_1的一个偶着色，其中0表示绿色，1表示红色。

不失一般性，我们可以假设 G 是连通的，并且 G_1也是连通的。众所周知，连通平面图是欧拉图，当且仅当其对偶图是二部图 [34]。由于 G_1 是平面图，且 $2n$是正则图，因此其对偶图 G_1^* 是二部图。因此，我们可以用两种颜色给 G_1 的面着色，例如黑色和白色，使任意两个相邻面（即共享一条边的面）颜色不同。我们假设 G_1 的外面着白色。然后，我们沿每个黑色面的边界按逆时针方向为边定向。由此得到 G_1的一个欧拉定向，其中每个顶点的入度等于出度，如图10所示。我们将其称为的典范定向G_1，并将其对应的Ω的0-1边赋值称为规范赋值，分别记作 τ_1和 τ。

对于任意偶定向 $\sigma_1 \in \mathscr{O}(G_1)$，通过对 σ_1 与典范定向 τ_1进行“异或”，定义一个偶着色 $\sigma_1' \in \mathscr{C}(G_1)$：若 $\sigma_1(e) = \tau_1(e)$，则 $\sigma_1'(e) = green$；否则 $\sigma_1'(e) = red$。这定义了 $\mathscr{O}(G_1)$ 与 $\mathscr{C}(G_1)$ 之间的一个双射。注意，σ_1 与 σ_1' 对应于

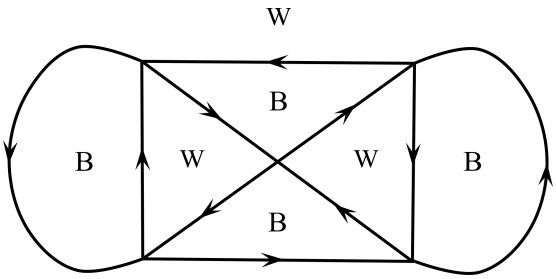


图10：平面四正则图 G_1 的面的一个正常二染色及其典范定向 τ_1。所有黑色面均按逆时针定向。

Ω 和 Ω' 的两个有效 0-1 边赋值 σ 和 σ'，它们满足关系 $\sigma'(e) = \sigma(e) \oplus \tau(e)$，对 G 的每条边 e 均成立。这定义了 Ω 和 Ω' 的有效 0-1 边赋值之间的一个双射。

接下来，我们证明 σ 与 σ' 在 Pl-Holant $(\Omega; \neq_2 | f)$ 和 Pl-Holant $(\Omega'; =_2 | g)$ 中具有相同的求值。假设在 Ω 中，标记于任意顶点 v 的签名 f 在 σ 下求值为 $f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) = a$。关于其周围的黑白面染色，顶点 v 处有两种可能的局部构型。即，从 f 的首边变量左侧的面开始，按逆时针顺序，这些面可被染为 W–B-. . .-W-B 或 B–W–. . .-B-W。由于我们将所有黑色面按逆时针定向，v 周围的规范赋值 τ_1 为 10 . . . 10 或 01 . . . 01。因此 $\sigma'|_{E(v)} = \sigma|_{E(v)} \oplus \tau|_{E(v)} = x_1x_2 \ldots x_{2n-1}x_{2n} \oplus 01 \ldots 01 = x_1x_2 \ldots, \overline{x_{2n-1}x_{2n}}$ 或 $\sigma'|_{E(v)} = x_1x_2 \ldots x_{2n-1}x_{2n}$。于是，在 Ω' 中，标记于 v 的签名 g 求值为 $g(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, \overline{x_{2n}}) = \overline{a}$ 或 $g(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) = a$。因此，我们证明相应的赋值 σ 与 $\overline{\sigma'}$ 在 Pl-Holant $(\Omega; \neq_2 | f)$ 和 Pl-Holant $(\Omega'; =_2 | g)$ 中具有相同的求值。引理得证。 □

推论 6.3。 *[14]* $\text{Pl-Holant}\left(\neq_2 \middle| \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}\right) \equiv_T^p \text{Pl-Holant}\left(=_2 \middle| \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & c \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{bmatrix}\right)$。

注意，Z 或 HZ 进行的全息变换 $=_2$ 将其变换为 $\neq_2$。结合推论 6.3，我们得到平面八顶点模型中的以下变换。

引理 6.4。 *[14]* 设 $M_{\text{Z}}^{\text{PL}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$，$M_{\text{PLHZ}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ · 对于任意签名 f 满足 $M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$，定义 $M(f') = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 & b' \\ 0 & c' & d' & 0 \\ 0 & d' & c' & 0 \\ b' & 0 & 0 & a' \end{bmatrix}$，其中 $\begin{bmatrix} b' \\ c' \\ d' \\ a' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \\ a \end{bmatrix}$，且 $M \in \{M_{\text{PLZ}}\, M_{\text{PLHZ}}\}$.

那么 $\text{Pl-Holant}\,(\neq_2 | f) \equiv_T^p \text{Pl-Holant}\,(\neq_2 | f')$。

备注： 接下来我们只会应用引理 6.4 来证明 #P-困难性结果并发现新的可解类型。不过，一般性的引理 6.2 本身也具有独立的研究价值。利用引理 6.2 进行组合变换，并通过 Z 或 HZ 进行全息变换，这种结合范式或可为发现平面图上偶定向计数问题的新可解情形提供一个通用框架。如果应用这两种变换后，得到的问题对应于平面图上欧拉定向计数的某个可解情形，那么我们也能得到平面图上偶定向计数的一个可解情形。然而，目前已知的平面图欧拉定向计数可解情形很少（仿射、乘积类型和匹配门签名除外）。因此，这一方向仍有待进一步研究。

接下来，我们直接应用引理 6.4 ，并利用非奇异冗余签名的 #P-困难性来处理 $(b=-1)\vee(c=-1)$ 的情形；这恰好是下一小节中的共形格插值不适用的情况。

引理 6.5. 设 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&d&c&0\\b&0&0&1\end{bmatrix}$。若 $b=-1$ 或 $c=-1$，则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是#P-困难，除非 $f\in\mathscr{M}$；在这种情况下，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是可解的。

证明. 我们只需证明 $b=-1$ 的情况，因为 $\pi/2$ 旋转 $f^{\frac{\pi}{2}}$ 会交换 b 和 c，且 $f\in\mathscr{M}\Leftrightarrow f^{\frac{\pi}{2}}\in\mathscr{M}$ 根据引理 2.24。

我们有 $\bar{M}\mathrm{PLZ}\begin{bmatrix}-1\\c\\d\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2-c+d\\c+d\\c+d\\-2+c-d\end{bmatrix}$。于是，根据引理 6.4，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)\equiv_T^p$Pl-Holant $(\neq_2|\ f')$，其中 f' 是一个签名，其签名矩阵为 $M(f')=\begin{bmatrix}-2+c-d&0&0&-2-c+d\\0&c+d&c+d&0\\0&c+d&c+d&0\\-2-c+d&0&0&-2+c-d\end{bmatrix}$. 根据定理 2.5，若 $\det\begin{bmatrix}-2+c-d&0&-2-c+d\\0&c+d&0\\-2-c+d&0&-2+c-d\end{bmatrix}\neq 0$，即 $(c+d)(c-d)\neq 0$，则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f')$ 是#P-困难的，这意味着 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是#P-困难的。若 $(c+d)(c-d)=0$，则 $1-b^2=c^2-d^2=0$。由引理 2.24 可知 $f\in\mathscr{M}$。 □

6.2 应用共形格插值

$\tilde{}$ $\tilde{}$经过 Z-全息变换，转化为 Pl-Holant (f) 形式后，$M(f)$ 可用特征值 $c+d$、$-1+b$、$-c+d$ 和 $1+b$ 对角化。$b=-1$ 的情形已由引理 6.5 处理。因此，我们可以用 $1+b$ 归一化，配分函数 Pl-Holant $(\Omega;\neq_2|\ f)$ 可以表示为这些归一化特征值 $(u$、v、$w)$ 的多元多项式 $=(\frac{c+d}{1+b}$、$\frac{-1+b}{1+b}$、$\frac{-c+d}{1+b})$。因此，根据共形格插值，如果签名 $M(g)$ 的特征值（经 Z 变换并归一化后）定义了一个更细的格，那么我们可以通过计算 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 来计算 Pl-Holant $(\neq_2|\ g)$ 的 Pl-Holant$_\Omega$：

引理 6.6。设 f 是一个签名，其签名矩阵为 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&d&c&0\\b&0&0&1\end{bmatrix}$，其中 $bcd\neq 0, b\neq -1$。设 $(u,v,w)=(\frac{c+d}{1+b},\frac{-1+b}{1+b},\frac{-c+d}{1+b})$，且 $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$。若与这两个元组分别对应的格满足 $L_{(u,v,w)}\subseteq L_{(x,y,z)}$，则对于任何包含 f 的签名集 $\mathcal{F}$，我们有 Pl-Holant $(\neq_2|\ \mathcal{F}\cup g)\leq_T^p$Pl-Holant $(\neq_2|\ \mathcal{F})$，其中 $M(g)=\begin{bmatrix}1-y&0&0&1+y\\0&x-z&x+z&0\\0&x+z&x-z&0\\1+y&0&0&1-y\end{bmatrix}$。

证明。通过全息变换 $Z=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{bmatrix}$，我们有 $(\neq_2)(Z^{-1})^{\otimes 2}=(=_2)$，因此，根据 Valiant 的 Holant 定理 2.8，Pl-Holant $(\neq_2|\ \mathcal{F})\equiv_T^p$Pl-Holant $\left(=_2|\ \widetilde{\mathcal{F}}\right)$，其中 $\widetilde{\mathcal{F}}=Z\mathcal{F}$ 表示变换后的签名集合。对于给定的 $f\in\mathcal{F}$，其签名矩阵为 $\tilde{f}=Z^{\otimes 4}f\in\widetilde{\mathcal{F}}$ 是

$$M(\tilde{f})=Z^{\otimes 2}M(f)(Z^T)^{\otimes 2}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+b+c+d&0&0&-1-b+c+d\\0&-1+b-c+d&-1+b+c-d&0\\0&-1+b+c-d&-1+b-c+d&0\\-1-b+c+d&0&0&1+b+c+d\end{bmatrix}.$$

设 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$。则 $P^2 = 2I_4$ 其中 I_4 表示 4 阶单位矩阵。此外，我们有

$$M(\tilde{f}) = \frac{1}{2} P \begin{bmatrix} c+d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c+d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+b \end{bmatrix} P = \frac{1+b}{2} P \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P,$$

and

$$M(\tilde{g}) = Z^{\otimes 2} M(g) (Z^T)^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 1+x & 0 & 0 & -1+x \\ 0 & y+z & y-z & 0 \\ 0 & y-z & y+z & 0 \\ -1+x & 0 & 0 & 1+x \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P.$$

为了证明该引理，我们只需证明 Pl-Holant $\left(=_2 \middle| \widetilde{\mathcal{F}} \cup \tilde{g}\right) \leq_T^p$ Pl-Holant $\left(=_2 \middle| \widetilde{\mathcal{F}}\right)$，其中 $\tilde{g} = Z^{\otimes 4} g$。我们通过将 s 个 $\tilde{f}$ 副本串联起来，并用双重EQUALITY连接，构造一系列构件 $\tilde{f}_s$。显然，$\tilde{f}_s$ 的签名矩阵为 $M(\tilde{f}_s) = (\frac{1+b}{2})^s (PDP)^s = (1+b)_2^{\ s} PD^s P$，其中 $D = \mathrm{diag}(u, v, w, 1)$，且 $D^s = \mathrm{diag}(u^s, v^s, w^s, 1)$。

矩阵具有适用于多项式插值的良好形式。假设在 Pl-Holant $\left(=_2 \middle| \widetilde{\mathcal{F}} \cup \tilde{g}\right)$ 的实例 Ω 中，$\tilde{g}$ 出现 m 次。对于每个 $s \geq 1$，我们将 $\tilde{g}$ 的每次出现替换为构件 $\tilde{f}_s$ 的一个副本，从而得到 Pl-Holant $\left(=_2 \middle| \widetilde{\mathcal{F}}\right)$ 的实例 Ω_s。我们可以将 Ω_s 中 f_s 的每次出现视为一个由三个签名 P、D^s 和 P 依次组成的新构件（忽略常数因子 $(1+b)^s/2$），并将这个新实例记作 Ω'_s。我们将 Ω'_s 分为两部分 A 和 B。A 部分由 m 个签名 D^s 组成，其签名为 $(D^s)^{\otimes m}$。我们可以将 $(D^s)^{\otimes m}$ 写成一个以 $\{0,1\}^{4m}$ 为索引的列向量。B 部分由 Ω'_s 的其余部分组成，其中包括 P 的 $2m$ 次出现；B 部分的签名是一个张量，可表示为行向量 R。于是，Ω'_s 的 Holant 值为点积 $\langle R, (D^s)^{\otimes m} \rangle$，它是对连接两部分的 $4m$ 条边上的所有 $\{0,1\}$-赋值求和。我们可以将这些 $4m$ 个比特的所有 $\{0,1\}$-赋值中，在 Pl-Holant$^{\Omega'_s}$ 的某项求值非零的赋值分为以下几类：

- 有 j_1 个副本，其 D^s 接收输入 0000
- 有 j_2 个副本，其 D^s 接收输入 0101；
- 有 j_3 个副本，其 D^s 接收输入 1010；

其中 $j_1 + j_2 + j_3 \leq m$（以及 $m - (j_1 + j_2 + j_3)$ 个副本，其 D^s 接收输入 1111）。

对于类别中任意一个参数为（j_1, j_2, j_3）的赋值，$(D^s)^{\otimes m}$ 的求值显然为 $(1+b)_{2^m}^{\ sm} (u^{j_1} v^{j_2} w^{j_3})^s$。令 $c_{j_1 j_2 j_3}$ 表示类别（j_1, j_2, j_3）中所有赋值对应的 B 部分的值之和。注意，由于我们将 $\tilde{}$ 构件 f_s 视为一个整体，因此 $c_{j_1 j_2 j_3}$ 与 s 的值无关。然后，我们重写点积求和，得到

$$\text{Pl-Holant}_{\Omega_s} = \text{Pl-Holant}_{\Omega'_s} = \langle R, (D^s)^{\otimes m} \rangle = \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3 \geq 0 \\ j_1 + j_2 + j_3 \leq m}} \frac{(1+b)^{sm}}{2^m} (u^{j_1} v^{j_2} w^{j_3})^s c_{j_1, j_2, j_3}.$$

在这种分层下，Ω 的 Holant 值为

$$\text{Pl-Holant}_{\Omega} = \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3 \geq 0 \\ j_1 + j_2 + j_3 \leq m}} x^{j_1} y^{j_2} z^{j_3} c_{j_1, j_2, j_3}.$$

由于 $L_{(u,v,w)} \subseteq L_{(x,y,z)}$，我们可以根据引理 Ω 在多项式时间内计算 Pl-Holant$^{\Omega_s}$，其中 $1 \leq s \leq \binom{m+3}{3}$ 是2.15。这证明了 Pl-Holant $\left(=_2 \middle| \widetilde{\mathcal{F}} \cup \tilde{g}\right) \leq_T^p$ Pl-Holant $\left(=_2 \middle| \widetilde{\mathcal{F}}\right)$。 □

引理 6.7。令 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&d&c&0\\b&0&0&1\end{bmatrix}$ 满足 $bcd\neq 0, b\neq -1$。令 $(u,v,w)=(\frac{c+d}{1+b},\frac{-1+b}{1+b},\frac{-c+d}{1+b})$。若 $L_{(u,v,w)}\subseteq L_{(1,1,-1)}$，则对于任意包含$f$的签名集 $\mathcal{F}$，$\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,\mathcal{F})\equiv_T^p\text{Holant}\,(\neq_2|\,\mathcal{F})$。

证明。我们只需证明 $\text{Holant}\,(\neq_2|\,\mathcal{F})\leq_T^p\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,\mathcal{F})$；另一方向显然成立。根据引理 6.6，我们可以用签名 g（其签名矩阵为 $M(g)=\begin{bmatrix}0&0&0&2\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\2&0&0&0\end{bmatrix}$）进行插值，即 $\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,\mathcal{F}\cup g)\leq_T^p\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,\mathcal{F})$。注意，$g$除相差一个标量外，是不等交叉 $\mathcal{S}'$。根据引理 2.2，我们得到 $\text{Holant}\,(\neq_2|\,\mathcal{F})\leq_T^p\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,\mathcal{F}\cup g)$。引理得证。□

引理 6.8。设 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&d&c&0\\b&0&0&1\end{bmatrix}$，其中 $bcd\neq 0, b\neq -1$。设 $u=\frac{c+d}{1+b}, v=\frac{-1+b}{1+b}, w=\frac{-c+d}{1+b}$，且 $x,y,z\in\mathbb{C}$。若 $L_{(u,v,w)}\subseteq L_{(x,y,z)}$ 和 (x,y,z) 满足以下任一条件，则$\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,f)$ 是 #P难的。

(i) $(y=1)\wedge(x\neq\pm z)\wedge(xz\neq 1)$; (ii) $(y=-1)\wedge(x\neq\pm z)\wedge(xz\neq -1)$; (iii) $(y=-1)\wedge(x=z)\wedge(x\neq 0,\pm 1,\pm i)$; (iv) $(x=z)\wedge(y\neq\pm 1)\wedge(x\neq 0)\wedge(y\neq x^2)$; (v) $(x+z=0)\wedge(y\neq\pm 1)\wedge(x\neq z)\wedge(y\neq -x^2)$; (vi) $(1+y=x+z)\wedge(y\neq -1)\wedge(x\neq 1)\wedge(z\neq 1)$.

证明。根据引理 6.6，我们可以对签名 g 进行插值，其签名矩阵为

$$M(g)=\begin{bmatrix}1-y&0&0&1+y\\0&x-z&x+z&0\\0&x+z&x-z&0\\1+y&0&0&1-y\end{bmatrix}$$

以及 $\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,g)\leq_T^p\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,f)$。

假设 (x,y,z) 满足条件 (i)，则 $M(g)=\begin{bmatrix}2&0&0&2\\0&x-z&x+z&0\\0&x+z&x-z&0\\2&0&0&0\end{bmatrix}$. 由于 $x\pm z\neq 0$，根据定理 2.34，除非 $g\in\mathcal{M}$或 $\mathcal{M}$，否则 $\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,g)$ 是 #P-困难的。如果 $g\in\mathcal{M}$，根据引理 2.24，有 $\det M_{\text{Out}}(g)=\det M_{\text{In}}(g)$，即 $(x-z)^2-(x+z)^2=-4$，这与 $xz\neq 1$ 矛盾。如果 $g\in\widehat{\mathcal{M}}$，则有 $g'\in\mathcal{M}$，其中 g' 的签名矩阵为 $M(g')=H^{\otimes 2}M(g)H^{\otimes 2}=\begin{bmatrix}1+x&0&0&1-x\\0&-1-z&-1+z&0\\0&-1+z&-1-z&0\\1-x&0&0&1+x\end{bmatrix}$. 根据引理 2.24，我们有$\widehat{\det M_{\text{Out}}(g')=\det M_{\text{In}}(g')}$，这意味着 $x=z$，与条件 (i) 矛盾。因此，$g\notin\mathcal{M}\cup\widehat{\mathcal{M}}$，且 $\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,g)$ 是 #P-困难的。于是 $\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,f)$ 是 #P-困难的。

假设 (x,y,z) 满足条件 (ii)，则 $M(g)=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&x-z&x+z&0\\0&x+z&x-z&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$. 由于 $x\pm z\neq 0$，除非 $g\in\mathcal{M}$，否则根据引理 5.7，$\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,g)$ 是 #P-困难的。若 $g\in\mathcal{M}$，根据引理 2.24，我们有 $(x-z)^2-(x+z)^2=4$，这与 $xz\neq -1$ 矛盾。因此，$\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,g)$ 是 #P-困难的，进而 $\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,f)$ 也是 #P-困难的。

假设 $(x,\ y,\ z)$ 满足条件 (iii)，则 $M(g)=2\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&x&0\\0&x&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$. 由于 $x\neq 0,\ \pm 1,\ \pm i$，$\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,g)$ 根据引理 4.2 是 #P-困难的。

假设 (x,y,z) 满足条件 (iv)，那么 $M(g)=\begin{bmatrix}1-y&0&0&1+y\\0&0&2x&0\\0&2x&0&0\\1+y&0&0&1-y\end{bmatrix}$. 由于 $y\neq\pm 1$ 和 $x+z=2x\neq 0$，$\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,g)$ 是 #P-困难的，除非 $g\in\mathcal{M}$ 根据引理 5.7 (经过旋转)。

如果 $g \in \mathscr{M}$，则有 $-4x^2 = (1-y)^2 - (1+y)^2$ 根据引理 2.24，这与 $y \neq x^2$ 矛盾。因此，Pl-Holant $(\neq_2 | g)$ 是 #P-困难的，所以 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的。

假设 (x, y, z) 满足条件 (v)，则 $M(g) = \begin{bmatrix} 1-y & 0 & 0 & 1+y \\ 0 & 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x & 0 \\ 1+y & 0 & 0 & 1-y \end{bmatrix}$. 由于 $y \neq \pm 1$ 且 $x - z = 2x \neq 0$，根据引理 5.8，除非 $g \in \mathscr{M}$，否则 Pl-Holant $(\neq_2 | g)$ 是 #P-困难的。如果 $g \in \mathscr{M}$，根据引理 2.24，我们有$4x^2 = (1-y)^2 - (1+y)^2$，这与 $y \neq -x^2$ 矛盾。因此，Pl-Holant $(\neq_2 | g)$ 是 #P-困难的，所以 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 也是 #P-困难的。

假设 (x, y, z) 满足条件 (vi)，则 $M(g) = \begin{bmatrix} 1-y & 0 & 0 & 1+y \\ 0 & x-z & 1+y & 0 \\ 0 & 1+y & x-z & 0 \\ 1+y & 0 & 0 & 1-y \end{bmatrix}$. 注意，$M(g^{\pi}_{\frac{}{2}}) = \begin{bmatrix} 1-y & 0 & 0 & x-z \\ 0 & 1+y & 1+y & 0 \\ 0 & 1+y & 1+y & 0 \\ x-z & 0 & 0 & 1-y \end{bmatrix}$ 是冗余签名。根据定理 2.5，除非 $\det \begin{bmatrix} 1-y & 0 & x-z \\ 0 & 1+y & 0 \\ x-z & 0 & 1-y \end{bmatrix} = (1+y)((1-y)^2 - (x-z)^2) = 0$，否则 Pl-Holant $(\neq_2 | g) \equiv^p_T$ Pl-Holant $\left(\neq_2 | g^{\pi}_{\frac{}{2}}\right)$ 是 #P-困难的。如果 $(1+y)((1-y)^2 - (x-z)^2) = 0$，则 $(1-y)^2 = (x-z)^2$，因为 $y \neq -1$。于是 $(1+y)^2 - (1-y)^2 = (x+z)^2 - (x-z)^2$，因为 $1+y = x+z$。由此可得 $y = xz$。将 $y = xz$ 代入 $1 + y = x + z$，我们有 $(x-1)(z-1) = 0$，这与$x \neq 1$和 $z \neq 1$ 矛盾。因此，Pl-Holant $(\neq_2 | g)$ 是 #P-困难的，所以 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 也是 #P-困难的。 □

6.3 格秩至多为 1

引理 6.9. 设 f 是签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $bcd \neq 0$, ~~$b \neq -1$~~。设 $(u, v, w) = (\frac{c+d}{1+b}, \frac{-1+b}{1+b}, \frac{-c+d}{1+b})$。若 秩$(L_{(u,v,w)}) \leq 1$，则以下情况之一成立：
- Pl-Holant $(\neq_2 | \mathcal{F}) \equiv^p_T$ Holant $(\neq_2 | \mathcal{F})$ 对任意包含 f 的签名集 $\mathcal{F}$ 均成立；
- Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是#P-困难；
- f 是 $\mathscr{M}$-可变换的。

证明。 假设秩$(L_{(u,v,w)}) = 0$，即 $L_{(u,v,w)} = \{(0, 0, 0)\}$。我们可以任选一个满足 (i) 引理 6.8中条件的 $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$，显然 $L_{(u,v,w)} \subseteq L_{(x,y,z)}$。于是根据引理6.8，Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难。

现在假设 $L_{(u,v,w)}$ 的秩 $= 1$ 且 $L_{(u,v,w)} = \langle (p, q, r) \rangle$，该格的基向量为 (p, q, r)，其中 $p, q, r \in \mathbb{Z}$。不失一般性，我们可以假设 $p \geq 0$。那么对于 $x, y, z \in \mathbb{C}$,$L_{(u,v,w)} \subseteq L_{(x,y,z)}$ 等价于 $x^p y^q z^r = 1$。接下来，针对 (p, q, r) 的不同取值，我们进行多项式插值，并证明以下情况之一成立：Pl-Holant $(\neq_2 | f) \equiv^p_T$ Holant $(\neq_2 | f)$，或 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难，或 $(p, q, r) \in \{(1, 1, -1), (1, -1, -1), (1, -1, 1)\}$。

若 r 为偶数，令 $(x, y, z) = (1, 1, -1)$。则 $x^p y^q z^r = 1$，因此 $L_{(u,v,w)} \subseteq L_{(x,y,z)}$。由引理 6.7，对于任意包含 $\neq_2 | \mathcal{F}$ 的签名集 $\equiv^p_T$，Pl-Holant $(\neq_2 | \mathcal{F})$ $\mathcal{F}$与 f。

若 $p \pm r \neq 0$，令 $(x, y, z) = (t^r, 1, t^{-p})$，其中 $t \in \mathbb{C}$ 有待确定。则 $x^p y^q z^r = 1$。注意到 $x = \pm z$等价于 $t^{r+p} = \pm 1$，而 $xz = 1$等价于 $t^{r-p} = 1$。由于 $p \pm r \neq 0$，满足 $t^{r+p} = \pm 1$ 或 $t^{r-p} = 1$的 t 只有有限多个。选取 $t \in \mathbb{C}$ 使得 $(t^{r+p} \neq \pm 1) \wedge (t^{r-p} \neq 1)$，则 $(x \neq \pm z) \wedge (xz \neq 1)$。因此，$(x, y, z)$ 满足引理 6.8 中的条件 (i)，且 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的。

若 $p = r \geq 3$，令 $(x, y, z) = (t\zeta_p, 1, t^{-1})$，其中 $t \in \mathbb{C}$ 有待确定。于是 $x^p y^q z^r = 1$，且 $xz = \zeta_p \neq 1$。注意，$x \pm z = 0$ 等价于 $t^2 = \pm \zeta_p^{-1}$。选取 t 使得 $t^2 \neq \pm \zeta_p^{-1}$，则 $x \pm z \neq 0$。因此，(x, y, z) 满足引理 6.8 中的条件 (i)，且 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难。

若 $p = -r \geq 3$，令 $(x, y, z) = (t\zeta_p, 1, t)$，其中 $t \in \mathbb{C}$ 待定。则 $x^p y^q z^r = 1$。

注意，$x \pm z = 0$ 等价于 $t = 0$。选取 $t \neq 0$，则 $x \pm z \neq 0$。因此，$(x,\ y,\ z)$ 满足引理(i) 中的条件 6.8，且 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难。

对于其余情形，我们可以假设 $p = \pm r = 1$。接下来我们断言 $|q| = 1$，否则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的。

若 $|q| \geq 3$，令 $(x,\ y,\ z) = (1,\ \zeta_{|q|},\ 1)$。则 $x^p y^q z^r = 1$。注意 $(x,\ y,\ z)$ 满足条件 (iv)（引理 6.8）。因此，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的。

若 $|q| = 2$，令 $y = -1$。若 $p = r = 1$，令 $x = t$ 与 $z = \frac{1}{t}$，其中 $t \in \mathbb{C}$ 待定。则 $x^p y^q z^r = 1$。注意 $x \pm z = 0$ 等价于 $t^2 = \pm 1$。选取 $t \in \mathbb{C}$ 使得 $t^2 \neq \pm 1$，则 $(x,\ y,\ z)$ 满足引理 6.8 中的条件 (ii)。因此，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的。若 $p = -r = 1$，令 $\underline{x} = z = \underline{2}$，则 $x^p y^q z^r = 1$。由引理 6.6，我们可以对 g 进行插值，所用签名矩阵为 $M(g) = \begin{bmatrix} 1-y & 0 & 0 & 1+y \\ 0 & x-z & x+z & 0 \\ 0 & x+z & x-z & 0 \\ 1+y & 0 & 0 & 1-y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 由引理 4.2，Pl-Holant $(\neq_2|\ g)$ 是 #P-困难的，因此 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的。

现在假设 $p = \pm r = 1$、$q = \pm 1$。若 $p = q = r = 1$，令 $x = t$、$y = t^{-2}$、$z = t$，其中 $t \in \mathbb{C}$ 待定。则 $x^p y^q z^r = 1$。注意，当 $t \neq 0$ 时，$x + z \neq 0$，且 $y = x^2$ 等价于 $t^4 = 1$。选取 $t \in \mathbb{C}$ 使得 $t \neq 0$ 且 $t^4 \neq 1$，则（x、y、z）满足引理 6.8 中的条件（iv）。因此，Pl-Holant（$\neq_2|\ f$）是 #P-困难的。

至此，我们得出以下结论：要么 Pl-Holant（$\neq_2|\ f$）$\equiv_T^p$ Holant（$\neq_2|\ f$），要么 Pl-Holant（$\neq_2|\ f$）是 #P-困难的，要么（p、q、r）$\in \{(1,1,-1)、(1,-1,-1)、(1,-1,1)\}$。若（$p$、$q$、$r$）$= (1,1,-1)$，则有 $uvw^{-1} = 1$，化简为 $d = bc$。在这种情况下，根据引理 2.30，f 是 $\mathscr{M}$-可变换的。若（p、q、r）$= (1,-1,-1)$，则有 $uv^{-1}w^{-1} = 1$，化简为 $d = -bc$。同样，根据引理 2.30，f 是 $\mathscr{M}$-可变换的。若（p、q、r）$= (1,-1,1)$，则有 $uv^{-1}w = 1$，化简为 $1 - b^2 = c^2 - d^2$。在这种情况下，根据引理 2.24，$f \in \mathscr{M}$。 □

推论 6.10. 设 f 是一个签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $bcd \neq 0, b \neq -1$。设 $u = \frac{c+d}{1+b}, v = \frac{-1+b}{1+b}, \underline{w} = \frac{-c+d}{1+\underline{b}}$。若 $(1,\ 1,\ \underline{-1}) \in L_{(u,v,w)}$ 或 $(1,-1,-1) \in L_{(u,v,w)}$，则 f 是 $\mathscr{M}$-可变换的。若 $(1,-1,\ 1) \in L_{(u,v,w)}$，则 $f \in \mathscr{M}$。

6.4 格秩 2

在某些情况下，当 $\text{rank}(L_{(u,w,v)}) = 2$ 时，引理 6.8 中的条件 (i)、(ii)、(iii)、(iv)、(v) 均无法帮助证明问题 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 的 #P-困难性。因此，我们必须借助引理 6.8 中最复杂的条件 (vi)。条件 (vi) 要求我们为 $1 + y = x + z$ 找到一个“良好”的解 (x, y, z)，其中“良好”是指 $x, z \neq 1$ 和 $y \neq -1$。在这些最复杂的情形下（引理 6.14 中的 2、3、4、5），条件 $L_{(u,v,w)} \subseteq L_{(x,y,z)}$ 意味着 x, y, z 可以表示为某个 $t \in \mathbb{C}$ 的单项式，其系数的模为 1。接下来，我们需要根据 t 分析 Laurent 多项式 $P(t) := x + z - y - 1$ 的零点分布。如果我们能找到 $P(t)$ 的一个零点t，且它位于单位圆之外，那么显然 $x, z \neq 1$ 和 $y \neq -1$。事实证明，下面的引理在分析中非常有力。

$_n$**引理 6.11**。设 $p(z) = \sum a_k z^k$ 是一个复系数多项式，其中 $n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0.{}_{k=0}$若 $p(z)$ 的所有根都位于单位圆上，则存在 $\theta \in \mathbb{R}$，使得 $a_k = e^{\mathrm{i}\theta} a_{n-k}$ 对$0 \leq k \leq n$成立。

证明。 根据代数基本定理， $p(z)$有 n 个根 z_1， z_2，……， z_n 按重数计。 n n于是 $p(z) = a_n \prod(z-z_k)$，且 $a_0 = (-1)^n a_n \prod z_k$。根据假设，对 $1 \le k \le n$有 $|z_k| = 1$。 $k=1$ $k=1n$由 $\prod_{k=1} z_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$ 可得 $|a_0| = |a_n| \neq 0$。 考虑多项式 $p^*(z) = \overline{z^n} p(\frac{1}{z})$。我们有

$$\begin{aligned} p^*(z) =& z^n \overline{a_n \prod_{k=1}^{n} (\frac{1}{\overline{z}} - z_k)} = \overline{a_n} z^n \prod_{k=1}^{n} (\frac{1}{z} - \overline{z_k}) = \overline{a_n} z^n \prod_{k=1}^{n} (\frac{1}{z} - \frac{1}{z_k}) = \overline{a_n} z^n \prod_{k=1}^{n} (\frac{z_k - z}{z_k z}) \\ =& \frac{\overline{a_n}(-1)^n}{\prod_{k=1}^{n} z_k} \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) = \frac{\overline{a_n} a_n}{a_0} \prod_{k=0}^{n} (z - z_k) = \frac{\overline{a_n}}{a_0} p(z). \end{aligned}$$

由于 $|a_0| = |a_n| \neq 0$，存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得 $\frac{a_n}{a_0} = e^{-\mathrm{i}\theta}$。因此，

$$p(z) = e^{\mathrm{i}\theta} p^*(z) = e^{\mathrm{i}\theta} z^n \overline{p(\frac{1}{\overline{z}})} = e^{\mathrm{i}\theta} z^n \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k (\frac{1}{\overline{z}})^k} = e^{\mathrm{i}\theta} \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} z^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}\theta} \overline{a_{n-k}} z^k.$$

因此，对于 $0 \le k \le n$，有 $a_k = e^{\mathrm{i}\theta} a_{n-k}$。 □

推论 6.12。 设 $p(z) = \sum a_k z^k$ 是一个复系数 *Laurent* 多项式，其中$k=-rn, r \in \mathbb{N}, a_{-r} \neq 0$, $a_n \neq 0$。若 $p(z)$ 的所有零点都位于单位圆上，则存在 $\theta \in \mathbb{R}$，使得对于 $-r \le k \le n$，有 $a_k = e^{\mathrm{i}\theta} a_{n-r-k}$。

证明。 设 $\tilde{p}(z) = z^r p(z) = \sum_{k=-r}^{n} a_k z^{k+r} = \sum_{j=0}^{n+r} a_{j-r} z^j$。由于 $a_{-r} \neq 0$，0 不是 $\tilde{p}(z)$的根。因此， $\tilde{p}(z)$ 的每个根都是 $p(z)$ 的零点。根据假设， $\tilde{p}(z)$ 的所有根都位于单位圆上。于是由引理 6.11，存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得 $a_{j-r} = e^{\mathrm{i}\theta} a_{n-j}$，对于 $0 \le j \le n+r$。推论得证。 □

引理 6.13. 设 f是一个签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $bcd \neq 0, b \neq -1$。令 $(u, v, w) = (\frac{c+d}{1+b}, \frac{-1+b}{1+b}, \frac{-c+d}{1+b})$。若 $(2, 2, -2) \in L_{(u,v,w)}$，则 $d = bc$ 或 $c = bd$。若 $(2, -2, -2) \in L_{(u,v,w)}$，则 $d = -bc$ 或 $c = -bd$。

证明。 若 $(2, 2, -2) \in L_{(u,v,w)}$，则 $u^2 v^2 w^{-2} = 1$。直接计算可得 $(d-bc)(c-bd) = 0$。对于 $(2, -2, -2) \in L_{(u,v,w)}$的情形，证明类似。 □

引理 6.14。 设 f为一个签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $bcd \neq 0, b \neq -1$，且 $c \neq \pm bd$。设 $(u, v, w) = (\frac{c+d}{1+b}, \frac{-1+b}{1+b}, \frac{-c+d}{1+b})$。若 秩$(L_{(u,v,w)}) = 2$，则以下情况之一成立：

- 对于任意包含 的签名集 $\mathcal{F}$，Pl-Holant $(\neq_2 | \mathcal{F}) \equiv_T^p$ Holant $(\neq_2 | \mathcal{F})$；
- Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难；
- f 是 $\mathscr{M}$ 可变换的。

我们备注，在我们的证明中，需要将 x, y, z 设为某些特殊的复数（单位根），以进行插值（即使我们只打算证明实值签名的二分定理）。这是证明复数签名二分定理的技术原因之一。

证明。设 $\{(p_1, -q_1, r_1), (p_2, -q_2, r_2)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$ 的格基，其中 $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{Z}$ 满足 $i = 1, 2$。应用欧几里得算法，我们可以假设 $r_1 = 0$，即 $L_{(u,v,w)} = \langle (p_1, -q_1, 0), (p_2, -q_2, r_2) \rangle$。此外，我们可以假设 $p_1 \geq 0, r_2 \geq 0$；若 $p_1 > 0$，则 $|p_2| \leq \frac{1}{2} p_1$。注意，对于 $x, y, z \in \mathbb{C}$，$L_{(u,v,w)} \subseteq L_{(x,y,z)}$，这等价于

$$\begin{cases} x^{p_1} = y^{q_1}, \\ x^{p_2} z^{r_2} = y^{q_2}. \end{cases} \tag{6.12}$$

下面，我们首先通过选取满足方程 6.12 的适当 $x, y, z \in \mathbb{C}$，并利用引理 6.7 或引理 6.8，证明：对于任意包含 f 的签名集 $\mathcal{F}$，要么 Pl-Holant $(\neq_2 | \mathcal{F}) \equiv_T^p$ Holant $(\neq_2 | \mathcal{F})$，要么对于 p_1, q_1, p_2, q_2, r_2 的“通用”取值，Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的。然后，我们处理 p_1, q_1, p_2, q_2, r_2 的“例外”取值。

我们首先根据 r_2 对情形进行分类，并证明除非 $r_2 = 1$，否则 Pl-Holant $(\neq_2 | f) \equiv_T^p$ Holant $(\neq_2 | f)$ 或 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的。

- 若 r_2 为偶数，令 $(x, y, z) = (1, 1, -1)$，它满足方程 6.12。根据引理 6.7，对于任意包含 $\neq_2 | \mathcal{F}$ 的签名集 $\equiv_T^p$，Pl-Holant $(\neq_2 | \mathcal{F})$ $\mathcal{F}$Holant $(f$。
- 若 $r_2 \geq 3$，令 $(x, y, z) = (1, 1, \zeta_{r_2})$。那么 (x, y, z) 满足方程 6.12 以及引理 (i) 中的条件 6.8。因此，Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的。

现在我们可以假设 $r_2 = 1$。于是，方程 6.12 变为

$$\begin{cases} x^{p_1} = y^{q_1}, \\ x^{p_2} z = y^{q_2}. \end{cases} \tag{6.13}$$

接下来，我们根据 p_2 分情况讨论。

- 假设 $|p_2| \geq 2$。
  - 若 $p_1 = 0$，令 $(x, y, z) = (t, 1, t^{-p_2})$，其中 $t \in \mathbb{C}$ 待定。则 (x, y, z) 满足方程 6.13。注意，$x = \pm z$ 等价于 $t^{1+p_2} = \pm 1$，而 $xz = 1$ 等价于 $t^{1-p_2} = 1$。由于 $|p_2| \geq 2$，存在有限多个 t，使得 $t^{1+p_2} = \pm 1$ 或 $t^{1-p_2} = 1$。选取满足 $t^{1+p_2} \neq \pm 1$ 和 $t^{1-p_2} \neq 1$ 的 $t \in \mathbb{C}$，则 (x, y, z) 满足引理 6.8 中的条件 (i)。因此，Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难。
  - 若 $p_1 > 0$，则由 $|p_2| \leq \frac{1}{2} p_1$ 和 $|p_2| \geq 2$ 可得 $p_1 \geq 4$。令 $(x, y, z) = (\zeta_{p_1}, 1, \zeta_{p_1}^{-p_2})$，则 (x, y, z) 满足方程 6.13。注意，若 $x = z$，则 $\zeta_{p_1}^{1+p_2} = 1$，这意味着 $p_1 \mid 1 + p_2$。由于 $|p_2| \geq 2$，我们有 $1 + p_2 \neq 0$，因此 $p_1 \leq |1 + p_2|$。这与 $|p_2| \leq \frac{1}{2} p_1$ 和 $p_1 \geq 4$ 矛盾。因此，$x \neq z$。类似地，我们可以验证 $xz \neq 1$。若 $x + z \neq 0$，则 (x, y, z) 满足引理 6.8 中的条件 (i)，因此 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的。若 $x + z = 0$，则有 $\zeta_{p_1}^{1+p_2} = -1$，这意味着对于某个 $k \in \mathbb{Z}$，有 $1 + p_2 = (k + \frac{1}{2}) p_1$。由于 $|p_2| \leq \frac{1}{2} p_1$，我们有 $k = 0$ 和 $1 + p_2 = \frac{1}{2} p_1$。结合 $|p_2| \geq 2$ 和 $p_1 \geq 4$，可得 $p_1 \geq 6$。在这种情况下，$(x, y, z) = (\zeta_{p_1}, 1, -\zeta_{p_1})$。根据引理 6.6，我们有 Pl-Holant $(\neq_2 | f, g) \leq_T^p$ Pl-Holant $(\neq_2 | f)$，其中 g 的签名矩阵为

$$M(g) = \begin{bmatrix} 1-y & 0 & 0 & 1+y \\ 0 & x-z & x+z & 0 \\ 0 & x+z & x-z & 0 \\ 1+y & 0 & 0 & 1-y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \zeta_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{p_1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

根据 $p_1 \geq 6$ 和定理 2.34，Pl-Holant($\neq_2|\ g$) 是 #P-困难的，除非 $p_1 = 8$。当$p_1 = 8$，根据 $1 + p_2 = \frac{1}{2}p_1$，我们有 $p_2 = 3$。因此，除非$p_1 = 8$，*Pl-Holant* ($\neq_2|\ f$) 是 #P-困难的$p_2 = 3$。

• 假设 $p_2 = 0$。– 若 $p_1 = 0$，令 $(x, y, z) = (t, 1, 1)$，其中 $t \in \mathbb{C}$待定。则 (x, y, z) 满足方程 6.13。选取 $t \neq \pm 1$，则 (x, y, z) 满足引理 6.8 中的条件 (i)，因此 Pl-Holant ($\neq_2|\ f$) 是 #P-困难。– 若 $p_1 \geq 3$，令 $(x, y, z) = (\zeta_{p_1}, 1, 1)$，它满足方程 6.13 和引理 6.8 中的条件 (i)。因此，Pl-Holant ($\neq_2|\ f$) 是 #P-困难。

总之，除非 $r_2 = 1$ 和 p_1，p_2 属于以下情形，否则 Pl-Holant ($\neq_2|\ f$) $\equiv_T^p$Holant ($\neq_2|\ f$) 或 Pl-Holant ($\neq_2|\ f$) 是 #P-困难：

1. $p_2 = 3$，$p_1 = 8$;
2. $p_2 = 0$，$p_1 = 1$;
3. $p_2 = 0$，$p_1 = 2$;
4. $p_2 = 1$; 5. $p_2 = -1$。

接下来，我们处理这五种例外情况，以完成引理6.14的证明。

1. $p_2 = 3$，$p_1 = 8$.在这种情况下，$\{(8, -q_1, 0), (3, -q_2, 1)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$的格基。现在，对于 x，y，$z \in \mathbb{C}$，$L_{(u,v,w)} \subseteq L_{(x,y,z)}$ 等价于

$$\begin{cases} x^8 = y^{q_1}, \\ x^3 z = y^{q_2}. \end{cases} \tag{6.14}$$

• 若 q_1，q_2均为奇数，令$(x, y, z) = (\zeta_{16}, -1, \zeta_{16}^5)$，它满足方程6.14 以及引理(ii) 中的条件6.8。因此，Pl-Holant ($\neq_2|\ f$)是#P-困难。
• 如果 q_1为奇数且 q_2为偶数，令 $(x, y, z) = (\zeta_{16}, -1, \zeta_{16}^{13})$，由同样的理由，Pl-Holant ($\neq_2|\ f$) 是 #P-困难。
• 如果 q_1为偶数且 q_2为奇数，令 $(x, y, z) = (\zeta_8, -1, \zeta_8)$，它满足方程 6.14 以及引理 (iii) 中的条件 6.8。因此，Pl-Holant ($\neq_2|\ f$) 是 #P-困难。
• 假设 q_1, q_2均为偶数。注意 $(2, 2q_2 - q_1, -2) \in L_{(u,v,w)}$。我们断言 $2q_2 - q_1 \neq 0$。否则 $u^2w^{-2} = 1$，这可化简为 $cd = 0$，与本引理的假设矛盾。若 $|2q_2 - q_1| = 2$，则 $(2, 2, -2) \in L_{(u,v,w)}$ 或 $(2, -2, -2) \in L_{(u,v,w)}$。根据引理 6.13，要么 $d = \pm bc$ 和 f 可由引理 2.30 变换为 $\mathscr{M}$，要么 $c = \pm bd$，这与本引理的假设矛盾。现在假设 $|2q_2 - q_1| \geq 4$。令 $y = \zeta_{|2q_2-q_1|}$，则 $y \neq \pm 1$。任取一个 x 使得 $x^4 = -y^{q_2}$，并令 $z = -x$。于是 $x^8 = y^{2q_2} = y^{q_1}$ 且 $x^3 z = -x^4 = y^{q_2}$，即 (x, y, z) 满足方程 6.14。若 $y = -x^2$，则用 $\mathrm{i}x$替换 x，并用 $\mathrm{i}z$替换 z；注意，替换后 (x, y, z) 仍满足方程 6.14。于是 $y \neq -x^2$，因此 (x, y, z) 满足引理 6.8 中的条件 (v)。所以，Pl-Holant ($\neq_2|\ f$) 是 #P-困难。

2. $p_2 = 0$，$p_1 = 1$.
在这种情况下，$\{(1, -q_1, 0), (0, -q_2, 1)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$的格基。注意，$(1, q_2 - q_1, -1) \in L_{(u,v,w)}$ 以及 $(1, -(q_1 + q_2), 1) \in L_{(u,v,w)}$。我们声称 $q_2 \neq q_1$。否则，$(1, 0, -1) \in L_{(u,v,w)}$，因此 $uw^{-1} = 1$，化简后得到 $c = 0$，这与本引理的假设矛盾。如果 $|q_2 - q_1| = 1$，那么 $(1, 1, -1) \in L_{(u,v,w)}$ 或 $(1, -1, -1) \in L_{(u,v,w)}$，这意味着 $f \in \mathscr{M}$

根据推论 6.10。如果 $q_1+q_2=1$，那么 $(1,\ -1,\ 1)\in L_{(u,v,w)}$，因此 f 是 $\mathscr{M}$-可变换的，根据推论 6.10。在此情形的后续讨论中，我们假设 $|q_2-q_1|\geq 2$ 且 $q_1+q_2\neq 1$。

断言 6.15。假设 $|q_2-q_1|\geq 2$ 和 $q_1+q_2\neq 1$。若 $q_1,\ q_2\notin\{0,1\}$，则存在$t\in\mathbb{C},\ |t|\neq 1$，使得 t 是 $P(t)=t^{q_2}+t^{q_1}-t-1$的零点。（$P(\cdot)$ 是 *Laurent* 多项式。若 $q_1<0$ 或 $q_2<0$，则 $t=0$ 是极点，但不是 $P(\cdot)$的零点。）

断言的证明***6.15***。反设 $P(\cdot)$的所有零点都位于单位圆上。由假设可知 $t^{q_1},\ t^{q_2},\ -t,\ -1$ 是互不相同的单项式。根据推论6.12，这四个单项式必须两两配对，使每对中次数之和相同。换言之，q_1，q_2、1，0中的某两个元素之和等于另外两个元素之和。这意味着 $|q_1-q_2|=1$ 或 $q_1+q_2=1$，矛盾。断言的证明结束6.15

现在我们处理 $p_2=0,\ p_1=1$ 的情形。根据断言 6.15。由于 $p_2=0,\ p_1=1$，对于$x,\ y,\ z\in\mathbb{C},\ L_{(u,v,w)}\subseteq L_{(x,y,z)}$ 等价于

$$\begin{cases} x=y^{q_1}, \\ z=y^{q_2}. \end{cases} \tag{6.15}$$

- 若 $q_1,q_2\notin\{0,1\}$，根据断言 6.15，令 t 为 $P(t)=t^{q_2}+t^{q_1}-t-1$ 的一个根，其中 $|t|\neq 1$。令 $(x,y,z)=(t^{q_1},t,t^{q_2})$，则 (x,y,z) 满足方程 6.15 和 $1+y=x+z$。此外，$(y\neq -1)\wedge(x\neq 1)\wedge(z\neq 1)$，因为 $|t|\neq 1$。因此，(x,y,z) 满足引理 6.8 中的条件 (vi)，所以 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的。

- 如果 $q_1=0$，那么 $|q_2|\geq 2$ 由 $|q_2-q_1|\geq 2$。令 $(x,y,z)=(1,\zeta_{2|q_2|},-1)$，则 (x,y,z) 满足方程 6.15 以及引理 (v) 中的条件 6.8。因此，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是#P-困难的。
- 如果 $q_1=1$，那么 $|q_2-1|\geq 2$。令 $(x,y,z)=(\zeta_{2|q_2-1|},\zeta_{2|q_2-1|},-\zeta_{2|q_2-1|})$，则 (x,y,z) 满足方程 6.15 以及引理 (v) 中的条件 6.8。因此，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是#P-困难的。

- 如果 $q_2=0$ 或 $q_2=1$，根据 q_1,q_2 的对称性，这与 $q_1=0$ 或$q_2=1$ 的情形相同，因此 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是#P-困难的。

上述内容涵盖了 q_1，q_2 的所有情形。情形 $p_2=0,\ p_1=1$ 已得到证明 .

3. $p_2=0,\ p_1=2$.
在这种情况下，$\{\ 2\ -q_1\ 0\ ,\ 0\ -q_2\ 1\ \}$ $L_{(u,v,w)}$ $2\ 2q_2-q_1\ -2\ \in(,\ ,\ )$ $L_{(u,v,w)}$ $q_1\neq 2q_2$ $2\ 0\ -2\ \in L_{(u,v,w)}$ $u^2w^{-2}=1$ $(,\ ,\ )$ 是 的格基。注意，$(,\ ,\ )$。我们断言 。否则，$(,\ ,\ )$，从而，这可化简为 $cd=0$，与引理的假设矛盾。

断言 6.16。假设 $q_1\neq 2q_2$。如果 $q_1\neq 0$ 且 $q_2\neq 0,\ 1$，那么存在 $t\in\mathbb{C}$、$|t|\neq 1$，使得 t 是 $P(t):=t^{2q_2}-t^{q_1}-t^2-1$ 的一个零点。

断言 6.16 的证明。首先考虑 $q_1=2$ 的情况。此时 $P(t)=t^{2q_2}-2t^2-1$，其中 t^{2q_2}、$-2t^2$、-1 是不同的单项式项。若 $P(t)$ 的所有零点都位于单位圆上，则由推论 6.12，存在 $\theta\in\mathbb{R}$ 使得 $1=e^{\mathrm{i}\theta}\cdot(-1)$ 且 $-2=e^{\mathrm{i}\theta}\cdot(-2)$；然而，显然不存在这样的 θ，矛盾。因此，存在 $t\in\mathbb{C}$、$|t|\neq 1$ 使得$P(t)=0$。

若 $q_1\neq 2$，则 $t^{2q_2},\ -t^{q_1},\ -t^2,\ -1$ 是不同的单项式项。假设 $P(t)$ 的所有零点都位于单位圆上。根据推论 6.12，这些单项式必须两两配对，使得每一对中的系数相差一个全局常数 $e^{\mathrm{i}\theta}$，允许共轭。但这是不可能的，因为系数为 1，-1，-1，-1。证明结束 断言 6.16

现在我们利用断言 $p_2 = 0$，$p_1 = 2$ 处理这种情况。根据断言 6.16，由于 $p_2 = 0$，$p_1 = 2$，对于x，y，$z \in \mathbb{C}$，$L_{(u,v,w)} \subseteq L_{(x,y,z)}$ 等价于

$$\begin{cases} x^2 = y^{q_1}, \\ z = y^{q_2}. \end{cases} \tag{6.16}$$

• 若 $q_1 \neq 0$ 且 $q_2 \neq 0$，1，由断言 6.16，令 t 为 $P(t) = t^{2q_2} - t^{q_1} - t^2 - 1$的一个根，其中 $|t| \neq 1$。令 $(x, y, z) = (-t^{q_1}, t^2, t^{2q_2})$，则 (x, y, z) 满足方程 6.16 且$1 + y = x + z$。此外，$(y \neq -1) \wedge (x \neq 1) \wedge (z \neq 1)$，因为 $|t| \neq 1$。因此，(x, y, z) 满足引理 6.8 中的条件 (vi)，从而 Pl-Holant $(\neq_2| f)$ 是 #P-困难的。

• 若 $q_1 = 0$，则 $q_2 \neq 0$ 由 $q_1 \neq 2q_2$。– 若 $|q_2| \geq 2$，令 $(x, y, z) = (1, \zeta_{2|q_2|}, -1)$，其满足方程 6.16 以及引理 6.8 中的条件 (v)。因此，Pl-Holant $(\neq_2| f)$ 是 #P-困难的。– 若 $q_2 = 1$，则 $\{(2, 0, 0), (0, -1, 1)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$ 的一个格基。于是 $(u = -1) \wedge (v = w)$，其化简为 $(c = -b) \wedge (d = -1)$，与假设$c \neq bd$矛盾。– 若 $q_2 = -1$，则 $= \{(2, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$ 的一个格基。注意 $(2, -2, -2) \in L_{(u,v,w)}$。由引理 6.13，要么 $d = -bc$ 从而 f 依引理 2.30 是 $\mathscr{M}$-可变换的，要么 $c = -bd$，与本引理的假设矛盾。

• 若 $q_2 = 0$，则根据 $q_1 \neq 2q_2$，$q_1 \neq 0$。– 若 $|q_1| > 2$，令 $(x, y, z) = (-1, \zeta_{|q_1|}, 1)$，它满足方程 6.16 以及引理 6.8 中的条件 (v)。因此，Pl-Holant $(\neq_2| f)$ 是 #P-困难的。– 若 $q_1 = \pm 1$，令 $(x, y, z) = (\mathrm{i}, -1, 1)$，它满足方程 6.16 以及引理 6.8 中的条件 (ii)。因此，Pl-Holant $(\neq_2| f)$ 是 #P-困难的。– 若 $q_1 = 2$，则 $\{(2, -2, 0), (0, 0, 1)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$ 的格基。于是 $(uv^{-1} = -1) \wedge (w = 1)$，化简后得到 $(c = -b) \wedge (d = 1)$，这与 $c \neq -bd$ 的假设矛盾。– 若 $q_1 = -2$，则 $\{(2, 2, 0), (0, 0, 1)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$ 的格基。注意，$(2, 2, -2) \in L_{(u,v,w)}$。根据引理 6.13，要么 $d = bc$，因此根据引理 2.30，f 是 $\mathscr{M}$-可变换的；要么 $c = bd$，这与本引理的假设矛盾。

• 若 $q_2 = 1$，则根据 $q_1 \neq 2q_2$ 得到 $q_1 \neq 2$。此外，我们可以假设 $q_1 \neq 0$，因为上文已讨论过 $q_1 = 0$ 的情况。– 若 $q_1 \geq 5$ 或 $q_1 \leq -1$，则 $|q_1 - 2| \geq 3$。令 $(x, y, z) = (-\zeta_{|q_1-2|}, \zeta_{|q_1-2|}, \zeta_{|q_1-2|})$，它满足方程 6.16 和引理 6.8 中的条件 (v)。因此，Pl-Holant $(\neq_2| f)$ 是 #P-困难的。– 若 $q_1 = 1$ 或 $q_1 = 3$，令 $(x, y, z) = (\mathrm{i}, -1, -1)$，它满足方程 6.16 和引理 6.8 中的条件 (ii)。因此，Pl-Holant $(\neq_2| f)$ 是 #P-困难的。– 若 $q_1 = 4$，则 $\{(2, -4, 0), (0, -1, 1)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$ 的格基。注意，$(2, -2, -2) \in L_{(u,v,w)}$。由引理 6.13，要么 $d = -bc$，因此根据引理 2.30，f 是 $\mathscr{M}$-可变换的；要么 $c = -bd$，这与本引理的假设矛盾。

以上涵盖了 q_1，q_2 的所有情况。$p_2 = 0$，$p_1 = 2$ 的情况已得到证明 .

4. $p_2 = 1$。

在这种情况下，$\{(p_1, -q_1, 0), (1, -q_2, 1)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$的格基。我们可以假设 $p_1 \geq 0$。若 $q_2 = 1$，则 $(1, -1, 1) \in L_{(u,v,w)}$，因此 $f \in \mathscr{M}$由推论6.10。下文中，我们假设 $q_2 \neq 1$。

命题 6.17。假设 $q_2 \neq 1$。若 $p_1 \geq 3$，则存在 $t \in \mathbb{C}, |t| \neq 1$ 使得 $P(t) := \omega t^{q_1} + \omega^{-1} t^{p_1 q_2 - q_1} - t^{p_1} - 1 = 0$，其中 $\omega = \zeta_{p_1}$。

命题 6.17 的证明。反设 $P(t)$ 的所有零点都位于单位圆上。首先，假设 $q_1, p_1 q_2 - q_1, p_1, 0$ 两两不同。由推论 6.12，单项式项 $\omega t^{q_1}, \omega^{-1} t^{p_1 q_2 - q_1}, -t^{p_1}, -1$ 必须两两分组，使得每组中的系数相差一个全局常数 $e^{\mathrm{i}\theta}$，至多相差一个共轭。显然，其他分组方式均不可能，因此唯一可能的分组方式是 $\{(\omega t^{q_1}, \omega^{-1} t^{p_1 q_2 - q_1}), (-t^{p_1}, -1)\}$。此外，由推论 6.12 可得 $q_1 + (p_1 q_2 - q_1) = p_1$，这与 $q_2 \neq 1$ 矛盾。因此，存在 $t \in \mathbb{C}, |t| \neq 1$ 使得 $P(t) = 0$。

接下来，我们处理 q_1、$p_1 q_2 - q_1$、p_1、0 不全相异的情形。

- 若 $q_1 = p_1 q_2 - q_1$，则 $P(t) = (\omega + \omega^{-1}) t^{q_1} - t^{p_1} - 1$。若 q_1、p_1、0 全部相异，由推论 6.12，因 $|\omega + \omega^{-1}| \neq 1$、$t^{q_1}$ 无法与其他项归为一组，我们有 $p_1 = 2q_1$。结合 $q_1 = p_1 q_2 - q_1$ 和 $p_1 \geq 3$，可得 $q_2 = 1$，矛盾。若 q_1、p_1、0 不全相异，由于 $p_1 \geq 3$，只可能是 $q_1 = p_1$ 或 $q_1 = 0$。若 $q_1 = p_1$，则 $P(t) = (\omega + \omega^{-1} - 1) t^{p_1} - 1$。由于 $|\omega + \omega^{-1} - 1| = |2 \cos \frac{2\pi}{p_1} - 1| < 1$，且 $p_1 \geq 3$，$P(t)$ 的根位于单位圆之外，矛盾。若 $q_1 = 0$，则 $P(t) = -t^{p_1} + \omega + \omega^{-1} - 1$。同理可得矛盾。
- 现在假设 $q_1 \neq p_1 q_2 - q_1$。若 $q_1 = p_1$，则 $P(t) = (\omega - 1) t^{p_1} + \omega^{-1} t^{p_1 (q_2 - 1)} - 1$，并且 $q_2 \neq 2$ 根据 $q_1 \neq p_1 q_2 - q_1$。此外，根据该断言的假设，$p_1 \geq 3$ 且 $q_2 \neq 1$。因此，$(\omega - 1) t^{p_1}$、$\omega^{-1} t^{p_1 (q_2 - 1)} - 1$ 是次数各不相同的单项式项。根据推论 6.12，我们有 $(w^{-1} = e^{\mathrm{i}\theta} \cdot (-1)) \wedge (\omega - 1 = e^{\mathrm{i}\theta} \omega - 1)$，这意味着 $w^2 = 1$，矛盾。
- 现在假设 $q_1 \neq p_1 q_2 - q_1$ 和 $q_1 \neq p_1$。若 $p_1 q_2 - q_1 = p_1$，则 $P(t) = \omega t^{q_1} + (\omega^{-1} - 1) t^{p_1} - 1$，并且 $q_1 \neq 0$ 根据 $q_2 \neq 1$。因此，ωt^{q_1}、$(\omega^{-1} - 1) t^{p_1}$、$-1$ 是次数各不相同的单项式项。根据推论 6.12，我们有 $(\omega = e^{\mathrm{i}\theta} \cdot (-1)) \wedge (\omega^{-1} - 1 = e^{\mathrm{i}\theta} \omega^{-1} - 1)$，这意味着 $\omega^2 = 1$，矛盾。
- 现在假设 q_1、$p_1 q_2 - q_1$、p_1 彼此不同。如果 $q_1 = 0$，那么 $P(t) = \omega^{-1} t^{p_1 q_2 - q_1} - t^{p_1} + \omega - 1$。通过上述类似的论证，我们得到矛盾。对于 $p_1 q_2 - q_1 = 0$ 的情形，论证也类似。

证明结束 命题 6.17

现在我们使用命题 $p_2 = 1$ 6.17 处理情形 6.17。由于 $p_2 = 1$，对于 x、y、$z \in \mathbb{C}$、$L_{(u,v,w)} \subseteq L_{(x,y,z)}$ 等价于

$$\begin{cases} x^{p_1} = y^{q_1}, \\ xz = y^{q_2}. \end{cases} \tag{6.17}$$

- 如果 $p_1 \geq 3$，根据命题 6.17，令 t 为 $P(t) = \omega t^{q_1} + \omega^{-1} t^{p_1 q_2 - q_1} - t^{p_1} - 1$ 的一个根，其中 $\omega = \zeta_{p_1}$ 且 $|t| \neq 1$。令 $(x, y, z) = (\omega t^{q_1}, t^{p_1}, \omega^{-1} t^{p_1 q_2 - q_1})$，其满足方程 6.17。此外，根据 $|t| \neq 1$，(x, y, z) 满足引理 6.8 中的条件 (vi)。因此，Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的。
- 若 $p_1 = 0$，则 $\{(0, -q_1, 0), (1, -q_2, 1)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$ 的格基。我们可以假设 $q_1 \geq 3$。否则，$v^2 = 1$，因此 $b = 0$。我们还可以假设 $|q_2| \leq \frac{1}{2} q_1$。令 $y = \zeta_{q_1}$ 和 $x = -z = \sqrt{-\zeta_{q_1}^{q_2}}$，则 (x, y, z) 满足方程 6.17。注意，根据 $q_1 \geq 3$，$y \neq \pm 1$。此外，$y = -x^2$ 意味着 $y = y^{q_2}$，因此 $q_1 \mid |q_2 - 1|$。由于 $q_2 \neq 1$，我们有 $|q_2 - 1| \geq q_1$。这与 $|q_2| \leq \frac{1}{2} q_1$ 和 $q_1 \geq 3$ 矛盾。因此，$y \neq -x^2$，且 (x, y, z) 满足引理 6.8 中的条件 (v)。所以，Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的。

• 若 $p_1 = 1$，则 $\{(1, -q_1, 0), (0, q_1 - q_2, 1)\}$ 是 $L_{(u,\ v,\ w)}$ 的格基，并且可归约到 $p_2 = 0$, $p_1 = 1$ 的情形。
• 若 $p_1 = 2$，则 $\{(2, -q_1, 0), (1, -q_2, 1)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$ 的格基。注意，$(1, q_2 - q_1, -1) \in L_{(u,v,w)}$。我们断言 $q_1 \neq q_2$，否则 $u = w$，这与 $c \neq 0$ 矛盾。若 $|q_2 - q_1| = 1$，则由推论 6.10 可得 $f \in \mathscr{M}$。下文假设 $|q_2 - q_1| \geq 2$。证明断言 6.18 后，我们将完成子情形 $p_1 = 2$ 的证明。

断言 6.18。假设 $|q_2 - q_1| \geq 2$ 且 $q_2 \neq 1$。存在 $t \in \mathbb{C}, |t| \neq 1$，使得 $P(t) := t^{q_1} + t^{2q_2 - q_1} + t^2 + 1 = 0$。

断言 6.18 的证明。反设 $P(t)$ 的所有根都位于单位圆上。首先，假设 q_1、$2q_2 - q_1$、2、0 两两不同。由推论 6.12 可知，要么 $q_1 + (2q_2 - q_1) = 2 + 0$，这与 $q_2 \neq 1$ 矛盾；要么 $q_1 + 2 = (2q_2 - q_1) + 0$，这与 $|q_2 - q_1| \geq 2$ 矛盾；要么 $q_1 + 0 = (2q_2 - q_1) + 2$，这与 $|q_2 - q_1| \geq 2$ 矛盾。

接下来，讨论 $q_1, 2q_2 - q_1, 2, 0$ 不全相异的情形。注意，由 $|q_2 - q_1| \geq 2$ 可得 $q_1 \neq 2q_2 - q_1$。

– 若 $q_1 = 2$，则 $P(t) = t^{2q_2 - 2} + 2t^2 + 1$。由 $q_2 \neq q_1$ 和 $q_2 \neq 1$, $t^{2q_2-2}, 2t^2, 1$ 是次数各不相同的单项式项。由推论 6.12，我们有 $(2q_2 - 2) + 0 = 2 + 2$。于是 $q_2 = 3$，这与 $|q_2 - q_1| \geq 2$ 矛盾。– 现在假设 $q_1 \neq 2$。若 $2q_2 - q_1 = 2$，则 $P(t) = t^{q_1} + 2t^2 + 1$。注意到 $q_1 \neq 0$，否则 $q_2 = 1$。于是 $t^{q_1}, 2t^2, 1$ 是次数各不相同的单项式。由推论 6.12，我们有 $q_1 = 4$，于是 $q_2 = 3$，这与 $|q_2 - q_1| \geq 2$ 矛盾。– 现在假设 $q_1, 2q_2 - q_1, 2$ 互不相同。若 $q_1 = 0$，则 $P(t) = t^{2q_2} + t^2 + 2$，其中 $t^{2q_2}, t^2, 2$ 是次数各不相同的单项式项。由推论 6.12，我们有 $2q_2 + 2 = 0$。于是 $q_2 = -1$，这与 $|q_2 - q_1| \geq 2$ 矛盾。若 $2q_2 - q_1 = 0$，证明类似。

证明结束：命题 6.18

现在处理 $p_1 = 2$ 的子情况。根据命题 6.18，令 t 为 $P(t) = t^{q_1} + t^{2q_2 - q_1} + t^2 + 1 = 0$ 的一个根，其中 $|t| \neq 1$。令 $(x, y, z) = (-t^{q_1}, t^2, -t^{2q_2 - q_1})$，它满足方程 6.17 以及引理 (vi) 中的条件 6.8。因此，Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难的。

上述情况涵盖了 p_1、q_1、q_2 的所有情形。$p_2 = 1$ 的情况已得到证明。

5. $p_2 = -1$。

在这种情况下，$\{(p_1, -q_1, 0), (-1, -q_2, 1)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$ 的格基。我们可以假设 $p_1 \geq 0$。我们断言 $q_2 \neq 0$。否则，$(-1, 0, 1) \in L_{(u,v,w)}$ 且 $u^{-1}w = 1$，这与 $c = 0$ 矛盾。如果 $q_2 = \pm 1$，那么 $(1, 1, -1) \in L_{(u,v,w)}$ 或 $(1, -1, -1) \in L_{(u,v,w)}$，因此根据推论 6.10，$f$ 是 $\mathscr{M}$-可变换的。接下来，我们可以假设 $|q_2| > 1$。

断言 6.19。假设 $|q_2| > 1$。若 $p_1 \geq 3$，则存在 $t \in \mathbb{C}, |t| \neq 1$ 使得 $P(t) := \omega t^{q_1} + \omega t^{p_1 q_2 + q_1} - t^{p_1} - 1 = 0$，其中 $\omega = \zeta_{p_1}$。

断言 6.19 的证明。反设 $P(t)$ 的所有根都位于单位圆上。首先，假设 q_1、$p_1 q_2 + q_1$、p_1、0 两两不同。由推论 6.12，单项式 ωt^{q_1}、$\omega t^{p_1 q_2 + q_1}$、$-t^{p_1}$、-1 必须两两配对，使得每对中的系数相差一个全局常数 $e^{i\theta}$，至多相差一个共轭。由于 $p_1 \geq 3$，分组方式有两种：$\{(\omega t^{q_1}, -t^{p_1})$、$(\omega t^{p_1 q_2 + q_1}, -1)\}$ 或 $\{(\omega t^{q_1}, -1)$、$(\omega t^{p_1 q_2 + q_1}, -t^{p_1})\}$。此外，由推论 6.12，要么 $q_1 + p_1 = p_1 q_2 + q_1$，要么 $q_1 = (p_1 q_2 + q_1) + p_1$，这两种情况都与 $|q_2| > 1$ 矛盾。因此，存在 $t \in \mathbb{C}$、$|t| \neq 1$，使得 $P(t) = 0$。

接下来，我们处理 q_1，$p_1q_2+q_1$，p_1，0 不全相同的情况。注意，由于 $p_1q_2\neq 0$，$q_1\neq p_1q_2+q_1$。

- 若 $q_1=p_1$，则 $P(t)=\omega^{p_1(q_2+1)}+(\omega-1)t^{p_1}-1$，其中 $\omega^{p_1(q_2+1)}$、$(\omega-1)t^{p_1}$、-1 是次数各不相同的单项式。根据推论6.12，有 $p_1(q_2+1)=2p_1$，这与$q_1\neq -1$矛盾。

- 现在假设 $q_1\neq p_1$。若 $p_1q_2+q_1=p_1$，则 $q_1\neq 0$，否则 $q_2=1$，矛盾。因此 $P(t)=\omega t^{q_1}+(\omega-1)t^{p_1}-1$，其中 ωt^{q_1}、$(\omega-1)t^{p_1}$、-1 是次数各不相同的单项式。根据推论6.12，有 $q_1=2p_1$。这结合 $q_2=-1$得出$p_1q_2+q_1=p_1$，矛盾。

- 现在假设 q_1、$p_1q_2+q_1$、p_1 互不相同。若 $q_1=0$，则 $P(t)=\omega t^{p_1q_2}-t^{p_1}+\omega-1$，其中 $\omega t^{p_1q_2}$、$-t^{p_1}$、$\omega-1$ 是次数互不相同的单项式。由推论 6.12，得$p_1q_2+p_1=0$，这与 $q_2\neq -1$矛盾。若 $p_1q_2+q_1=0$，则 $P(t)=\omega t^{q_1}-t^{p_1}+\omega-1$，其中 ωt^{q_1}、$-t^{p_1}$、$\omega-1$ 是次数互不相同的单项式。由推论 6.12，得$q_1+p_1=0$。结合 $p_1q_2+q_1=0$，这意味着 $q_2=1$，矛盾。

证明结束 命题 6.19

现在我们处理以下情形：$p_2=-1$ 利用断言 6.19。由于 $p_2=-1$，对于 x，y，$z\in\mathbb{C}$，$L_{(u,v,w)}\subseteq L_{(x,y,z)}$ 等价于

$$\begin{cases} x^{p_1}=y^{q_1}, \\ x^{-1}z=y^{q_2}. \end{cases} \tag{6.18}$$

- 若 $p_1\geq 3$，根据断言 6.19，令 t 为 $P(t)=\omega t^{q_1}+\omega t^{p_1q_2+q_1}-t^{p_1}-1$的一个根，其中 $\omega=\zeta_{p_1}$且 $|t|\neq 1$。令 $(x,y,z)=(\omega t^{q_1},t^{p_1},\omega t^{p_1q_2+q_1})$，它满足方程 6.18。此外，由 $|t|\neq 1$ 可知，(x,y,z) 满足引理 6.8 中的条件 (vi)。因此，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的。

- 若 $p_1=0$，则 $\{(0,-q_1,0),(-1,-q_2,1)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$ 的一个格基。与 $p_2=1,p_1=0$ 的情形相同，我们可以假设 $q_1\geq 3$且$|q_2|\leq\frac{1}{2}q_1$。令 $y=\zeta_{q_1}$，我们断言$1+y^{q_2}\neq 0$。否则，对某个 $k\in\mathbb{Z}$，$q_2=(k+\frac{1}{2})q_1$。由于 $|q_2|\leq\frac{1}{2}q_1$，我们有 $k=0$ 或 $k=-1$，因此 $q_2=\frac{1}{2}q_1$ 或 $q_2=-\frac{1}{2}q_1$。于是 $(-2,0,2)\in L_{(u,v,w)}$，因为 $(-2,\pm 2q_1-q_2,2)\in L_{(u,v,w)}$。这意味着 $u^{-2}w^2=1$，与 $cd=0$ 矛盾。由于$1+y^{q_2}\neq 0$，我们令 $x=\frac{1+y}{1+y^{q_2}}$且 $z=(1+y\ y^{q_2})$，则 (x,y,z) 满足方程 6.18。此外，$\overline{1+y}=x+z$ 且 $\overline{y\neq\pm 1}$。注意，$x=1$ 意味着 $y^{\frac{1+y^{q_2}}{q_2}-1}=1$，且 $q_1\mid|q_2-1|$。由于 $q_2\neq 1$，我们有 $|q_2-1|>q_1$。这与 $|q_2|\leq\frac{1}{2}q_1$和 $q_1\geq 3$ 矛盾。因此，$x\neq 1$。同理，我们可以验证 $z\neq 1$。于是 (x,y,z) 满足引理 6.8 中的条件 (vi)。因此，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的。

- 如果 $p_1=1$，那么 $\{(1,-q_1,0),(0,-q_1-q_2,1)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$ 的格基，并且它被约化为 $p_2=0,p_1=1$ 的情形。
- 如果 $p_1=2$，那么 $\{(1,-q_1,0),(1,-q_1-q_2,1)\}$ 是 $L_{(u,v,w)}$ 的格基，并且将问题归约为 $p_2=1$ 的情形。

以上涵盖了 p_1,q_1,q_2 的所有情况。$p_2=-1$ 的情况已经得到证明。

到目前为止，p_1、p_2 的所有例外情况均已处理完毕。这就完成了引理 6.14的证明。

□

在下文（引理 6.21）中，我们将给出秩$(L_{(u,v,w)})=2$情况下的复杂度二分定理。注意，在引理 6.21 中，我们不再假设 $c\neq\pm bd$。首先，我们需要

一个引理来处理 $(b=\pm c)\wedge(d=\pm 1)$ 这一特殊情形。正是在这一特殊情形中发现了新的可解类型：

引理 6.20。 设 f 是一个签名，其签名矩阵为 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&d&c&0\\b&0&0&1\end{bmatrix}$。假设 $d=\pm 1$，则

- 若 $b=c$，则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ </style>是 #P-困难的，除非 $b=0$、± 1、$\pm \mathrm{i}$；在这些情形下，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$是可解的。
- 若 $b=-c$，则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的，除非 $b=0$、± 1、$\pm \mathrm{i}$、$\pm\tan(\frac{\beta\pi}{8})$，其中 β 为奇数；在这些情形下，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是可解的。

证明。 在以下证明中，所有可处理性和困难性结果均通过对 Even Coloring应用组合变换以及全息变换（引理 6.4）得到。随后，可以通过情形 I（引理 4.2）或平面六顶点模型（定理 2.34）来处理变换后的问题。

若 $(b=c)\wedge(d=1)$，则 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&b&1&0\\0&1&b&0\\b&0&0&1\end{bmatrix}$.注意 $M\text{PLZ}\begin{bmatrix}b\\b\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1+b\\-1+b\end{bmatrix}$。由引理 6.4，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)\equiv_T^p$Pl-Holant $(\neq_2|\ f')$，其中 f'的签名矩阵为 $M(f')=\begin{bmatrix}-1+b&0&0&0\\0&0&1+b&0\\0&1+b&0&0\\0&0&0&-1+b\end{bmatrix}$.若 $b=1$，则 $f\in\mathscr{M}$由引理 2.24。若 $b\neq 1$，将 f'按 $0,-1+b$归一化，则有 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)\equiv_T^p$Pl-Holant $(\neq_2|\ f'')$，其中 f''的签名矩阵为 $M(f'')=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&\frac{1+b}{-1+b}&0\\0&\frac{1+b}{-1+b}&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.由引理 4.2，Pl-Holant $(\neq_2|\ f'')$ 是 #P-困难的，除非 $\frac{1+b}{-1+b}=0$、± 1、$\pm\mathrm{i}$，在这些情形下 Pl-Holant $(\neq_2|\ f'')$ 是可解的。因此，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的，除非 $b=0$、± 1、$\pm\mathrm{i}$，在这些情形下 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是可解的。

若 $(b=c)\wedge(d=-1)$，则 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&b&-1&0\\0&-1&b&0\\b&0&0&1\end{bmatrix}$.注意，$M\text{PLHZ}\begin{bmatrix}b\\b\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1+b\\1+b\end{bmatrix}$。根据引理 6.4，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)\equiv_T^p$Pl-Holant $(\neq_2|\ f')$，其中 f'的签名矩阵为 $M(f')=\begin{bmatrix}1+b&0&0&0\\0&0&-1+b&0\\0&-1+b&0&0\\0&0&0&1+b\end{bmatrix}$.与 $(b=c)\wedge(d=1)$ 的情形类似，除非 $b=0,\pm 1,\pm\mathrm{i}$，否则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的；在这些情况下，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是可解的。

若 $(b=-c)\wedge(d=1)$，则 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&-b&1&0\\0&1&-b&0\\b&0&0&1\end{bmatrix}$.注意，$M\text{PLHZ}\begin{bmatrix}b\\-b\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+b\\1-b\\0\\0\end{bmatrix}$。由引理 6.4，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)\equiv_T^p$Pl-Holant $(\neq_2|\ f')$，其中 f'的签名矩阵为 $M(f')=\begin{bmatrix}0&0&0&1+b\\0&1-b&0&0\\0&0&1-b&0\\1+b&0&0&0\end{bmatrix}$.若 $b=-1$，则根据引理 2.24 有 $f\in\mathscr{M}$。若 $b\neq -1$，将 f'通过 $0,1+b$归一化，可得 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)\equiv_T^p$Pl-Holant $(\neq_2|\ f'')$，其中 f''的签名矩阵为 $M(f'')=\begin{bmatrix}0&\frac{1-b}{1+b}&0&0\\0&0&\frac{1-b}{1+b}&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$.根据定理 2.34，除非 $\frac{1-b}{1+b}=0$或 $\sqrt{\mathrm{i}}^{-\beta}$，否则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f'')$ 是 #P-困难，其中$\beta\in\mathbb{Z}$。因此，除非 $b=0$、± 1、$\pm\mathrm{i}$、$\frac{\sqrt{\mathrm{i}}^{\beta}-1}{\sqrt{\mathrm{i}}^{\beta}+1}=\mathrm{i}\tan(\frac{\beta\pi}{8})$，否则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难；当 β为奇数时，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 可解。

如果 $(b=-c)\wedge(d=-1)$，则 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&-b&-1&0\\0&-1&-b&0\\b&0&0&1\end{bmatrix}$.请注意，$M\text{PLZ}\begin{bmatrix}b\\-b\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+b\\-1-b\\0\\0\end{bmatrix}$。由

引理 6.4。Pl-Holant $(\neq_2|\ f) \equiv_T^p$ Pl-Holant $(\neq_2|\ f')$，其中 f' 具有签名矩阵 $M(f') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1+b \\ 0 & -1-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-b & 0 \\ -1+b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 与 $(b=-c)\wedge(d=1)$ 情形下的论证类似，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难，除非 $b = 0,\ \pm 1,\ \pm \mathrm{i},\ \frac{\sqrt{\mathrm{i}}^{\beta}-1}{\sqrt{\mathrm{i}}^{\beta}+1} = \mathrm{i}\tan(\frac{\beta\pi}{8})$，其中 β 是奇整数；在这些情况下，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是可解的。 □

引理 6.21。设 f 是一个签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $bcd \neq 0$、$b \neq -1$、$c \neq -1$。令 $(u、\ v、\ w) = (\frac{c+d}{1+b}、\ \frac{-1+b}{1+b}、\ \frac{-c+d}{1+b})$。若 秩$(L_{(u,v,w)}) = 2$，则以下情况之一成立：

- Pl-Holant $(\neq_2|\ f) \equiv_T^p$ Holant $(\neq_2|\ f)$；
- Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-难的；
- f 是 $\mathscr{M}$-可变换的。

证明。若 $c \neq \pm bd$，则由引理 6.14 即可得证。

下文假设 $c = \pm bd$。考虑旋转后的签名 $f^{\frac{\pi}{2}}$，其签名矩阵为 $M(f^{\frac{\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & b & d & 0 \\ 0 & d & b & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 令 $u^* = \frac{b+d}{1+c}$，$v^* = \frac{-1+c}{1+c}$，$w^* = \frac{-b+d}{1+c}$。

- 如果秩$(L_{(u^*,\ v^*,\ w^*)}) \leq 1$，那么根据引理 6.9，Pl-Holant 要么 $\left(\neq_2|\ f^{\frac{\pi}{2}}\right) \equiv_T^p$ Holant $\left(\neq_2|\ f^{\frac{\pi}{2}}\right)$，这等价于 Pl-Holant $(\neq_2|\ f) \equiv_T^p$ Holant $(\neq_2|\ f)$；或 Pl-Holant $\left(\neq_2|\ f^{\frac{\pi}{2}}\right)$ 是 #P-困难，这等价于 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难；或 $f^{\frac{\pi}{2}}$ 是 $\mathscr{M}$-可变换，这等价于 f 是 $\mathscr{M}$-可变换，根据引理 2.30。

- 若秩$(L_{(u^*,\ v^*,\ w^*)}) = 2$ 且 $b \neq \pm cd$，则应用引理 6.14 即可得到结论。现在我们假设秩$(L_{(u^*,\ v^*,\ w^*)}) = 2$ 且 $b = \pm cd$。
  - 若 $(c = bd)\wedge(b = cd)$，则 $(b = c) \wedge (d = 1)$ 或 $(b = -c) \wedge (d = -1)$。
    - 若属于第一种情况，则根据引理 6.20，除非$b = 0, \pm 1, \pm \mathrm{i}$，否则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难。若 $b = 0, \pm \mathrm{i}$，可以验证 u, v, w 均为单位根。于是根据引理 2.14，秩$(L_{(u,v,w)}) = 3$，矛盾。注意，根据本引理的假设，$b = -1$ 是不允许的。若 $b = 1$，则 $(u, v, w) = (1, 0, 0)$，因此秩$(L_{(u,v,w)}) = 1$，矛盾。
    - 如果是第二种情况，那么根据引理 6.20，除非$b = 0, \pm 1, \pm \mathrm{i}, \mathrm{i}\tan(\frac{\beta\pi}{8}) = \frac{\sqrt{\mathrm{i}}^{\beta}-1}{\sqrt{\mathrm{i}}^{\beta}+1}$，否则 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的，其中 β 是奇整数。如果 $b = 0, \pm \mathrm{i}, \frac{\sqrt{\mathrm{i}}^{\beta}-1}{\sqrt{\mathrm{i}}^{\beta}+1}$，其中$\beta$ 是奇数，可以验证 u, v, w 都是单位根。于是根据引理 2.14，rank$(L_{(u,v,w)}) = 3$，矛盾。注意，根据本引理的假设，$b = -1$ 是不允许的。如果 $b = 1$，那么 $(u, v, w) = (-1, 0, 0)$，因此 rank$(L_{(u,v,w)}) = 1$，矛盾。
  - 如果 $(c = bd) \wedge (b = -cd)$，那么 $(b = \mathrm{i}c)\wedge(d = -\mathrm{i})$ 或 $(b = -\mathrm{i}c) \wedge (d = \mathrm{i})$。因此，根据引理 2.24，$1 - b^2 = c^2 - d^2$ 和 $f \in \mathscr{M}$。- 如果 $(c = -bd) \wedge (b = cd)$，那么 $(b = \mathrm{i}c)\wedge(d = \mathrm{i})$ 或 $(b = -\mathrm{i}c) \wedge (d = -\mathrm{i})$。因此，根据引理 2.24，$1 - b^2 = c^2 - d^2$ 和 $f \in \mathscr{M}$。- 如果 $(c = -bd) \wedge (b = -cd)$，那么 $(b = c) \wedge (d = -1)$ 或 $(b = -c) \wedge (d = 1)$。类似于 $(c = bd) \wedge (b = cd)$ 情况下的论证，Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难的。
- 若 rank$(L_{(u^*,v^*,w^*)}) = 3$，则 u^*, v^*, w^* 根据引理 2.14，它们都是单位根。由于 $|v^*| = |\frac{-1+c}{1+c}| = 1$，我们有 $c \in \mathbb{R}\mathrm{i}$。此外，$|u^*| = |w^*|$ 意味着 $|b+d| = |-b+d|$，因此 b 和 d 正交

在复平面中。结合 $c = \pm bd$ 和 $c \in \mathbb{R}\mathrm{i}$，我们有 $(b \in \mathbb{R}) \wedge (d \in \mathbb{R}\mathrm{i})$ 或 $(b \in \mathbb{R}\mathrm{i}) \wedge (d \in \mathbb{R})$ 两种情况。根据 $|u^*| = |\frac{b+d}{1+c}| = |\frac{b+d}{1\pm bd}| = 1$，我们有 $|b|^2 + |d|^2 = 1 + |b|^2|d|^2$，因此 $|b| = 1$ 或 $|d| = 1$。

首先，假设 $(b \in \mathbb{R}) \wedge (d \in \mathbb{R}\mathrm{i})$。– 若 $|b| = 1$，则 $b = \pm 1$ 由 $b \in \mathbb{R}$。结合 $c = \pm bd$，我们有 $c = \pm d$ 和 $1 - b^2 = c^2 - d^2 = 0$，故 $f \in \mathscr{M}$ 由引理 2.24。– 若 $|d| = 1$，则 $d = \pm i$ 由 $d \in \mathbb{R}\mathrm{i}$。结合 $c = \pm bd$，我们有 $c = \pm \mathrm{i}b$ 和 $1 - b^2 = c^2 - d^2$，故 $f \in \mathscr{M}$ 由引理 2.24。其次，假设 $(b \in \mathbb{R}\mathrm{i}) \wedge (d \in \mathbb{R})$。– 若 $|b| = 1$，则 $d = \pm \frac{c}{b} = \pm bc = \mp bc$ 由 $c = \pm bd$ 和 $b \in \mathbb{R}\mathrm{i}$。因此，由引理 2.30，$f$ 是 $\mathscr{M}$-可变换的。– 若 $|d| = 1$，则 $(b = \pm c) \wedge (d = \pm 1)$ 由 $d \in \mathbb{R}$ 和 $c = \pm bd$。由与秩$(L_{(u^*,v^*,w^*)}) = \overline{2}$ 的情形相同的论证，Pl-Holant $(\neq_2 |\ f)$ 是 #P-困难的。

□

6.5 三个相等对的二分定理

引理 6.22。设 f 是一个签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $bcd \neq 0$。

那么以下情况之一成立：

- $\text{Pl-Holant}\,(\neq_2 |\ \mathcal{F}) \equiv_T \text{Holant}\,(\neq_2 |\ \mathcal{F})$，对于任何包含 f 的签名集 $\mathcal{F}$；
- Pl-Holant $(\neq_2 |\ f)$ 是 #P-难的；
- $\text{Pl-Holant}\,(\neq_2 |\ f)$ 是可解的。更具体地说，*1.* f 是 $\mathscr{M}$-可变换的；*2.* $d = \pm 1, b = c = 0$；*3.* $d = \pm 1$，$b = -c = \mathrm{i}\tan(\frac{\beta\pi}{8})$，其中 $\beta \in \mathbb{Z}$ 是奇数。

证明。若 $b = -1$ 或 $c = -1$，由引理 6.5 可得结论。现在假设 $b \neq -1$ 和 $c \neq -1$。令 $(u, v, w) = (\frac{c+d}{1+b}, \frac{-1+b}{1+b}, \frac{-c+d}{1+b})$，且 $(u^*, v^*, w^*) = (\frac{b+d}{1+c}, \frac{-1+c}{1+c}, \frac{-b+d}{1+c})$。若秩 $(L_{(u,v,w)}) \leq 2$，则由引理 6.9 和引理 6.21 可得结论。若秩$(L_{(u^*,v^*,w^*)}) \leq 2$，对 $f^{\frac{\pi}{2}}$ 应用引理 6.9 和引理 6.21，即可得出结论。现在假设秩$(L_{(u,v,w)}) = $ 秩$(L_{(u^*,v^*,w^*)}) = 3$。由引理 2.14 可知，u, v, w, u^*, v^*, w^* 全都是单位根。于是 $|v| = |v^*| = 1$，这意味着$b, c \in \mathbb{R}\mathrm{i}$。此外，$|u| = |w|$ 意味着 $|c+d| = |-c+d|$，因此 $d \in \mathbb{R}$。所以 $|u|^2 = \frac{|c|^2+|d|^2}{1+|b|^2} = 1$，且 $|u^*|^2 = \frac{|b|^2+|d|^2}{1+|c|^2} = 1$。这意味着 $(b = \pm c) \wedge (d = \pm 1)$。若 $b = c$，则由引理 6.20，Pl-Holant $(\neq_2 |\ f)$ 是 #P-困难的，除非 $b = 0, \pm 1, \pm\mathrm{i}$。注意，根据引理 2.24，$b = \pm 1$ 的情形可归入 $f \in \mathscr{M}$；根据引理 2.30，$b = \pm\mathrm{i}$ 可归入 f 是 $\mathscr{M}$-可变换的情形。若 $b = -c$，则由引理 6.20，Pl-Holant $(\neq_2 |\ f)$ 是 #P-困难的，除非 $b = 0, \pm 1, \pm\mathrm{i}, \mathrm{i}\tan(\frac{\beta\pi}{8})$，其中 β 为奇数。此外，$b = \pm 1$ 或 $b = \pm\mathrm{i}$ 的情形可归入 $f \in \mathscr{M}$ 或 f 是 $\mathscr{M}$-可变换的情形。引理得证。□

定理 6.23。设 f 为一个签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $bcd \neq 0$。那么，除以下情形外，$\text{Pl-Holant}\,(\neq_2 |\ f)$ 是#P-困难的；在这些情形下，$\text{Pl-Holant}\,(\neq_2 |\ f)$ 是可解的：

1. f 是 $\mathscr{A}$-可变换的，或是 $\mathscr{P}$-可变换的，或是 $\mathscr{L}$-可变换的；*2.* f 是 $\mathscr{M}$-可变换的；

3. $d=\pm 1, b=-c=\mathrm{i}\tan(\frac{\beta\pi}{8})$，其中 $\beta\in\mathbb{Z}$ 是奇数。

证明。注意 $f\in\mathscr{A}$ 如果 $d=\pm 1$，$b=c=0$。然后由引理6.22 与引理6.1，该定理成立。

□

6.6 三对相反配对的二分

以下引理的证明见 [9]。

引理 6.24. 设 f 是一个签名，其签名矩阵为 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&-d&-c&0\\-b&0&0&1\end{bmatrix}$，且 $bcd\neq 0$，则 Holant($\neq_2|f$) 是 $\#$P-难的，或者 f 是 $\mathscr{P}$-可变换的，或者 $\mathscr{A}$-可变换的，或者 $\mathscr{L}$-可变换的。

现在我们将引理6.24推广到平面情形。

引理 6.25. 设 f 是一个签名，其签名矩阵为 $M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&-d&-c&0\\-b&0&0&1\end{bmatrix}$，且 $bcd\neq 0$，则 Pl-Holant ($\neq_2|f$) 是 $\#$P-难的，除非 f 是 $\mathscr{P}$-可变换的，或者 $\mathscr{A}$-可变换的，或者 $\mathscr{L}$-可变换的，或者 $\mathscr{M}$-可变换的。

证明。通过使用 $\begin{bmatrix}1&0\\0&\sqrt{\mathrm{i}}\end{bmatrix}$ 进行全息变换，我们得到

$$\text{Pl-Holant}\,(\neq_2|\,f)\equiv_T^p \text{Pl-Holant}\left(\neq_2|\,\tilde{f}\right),$$

其中 $M(\tilde{f})=\begin{bmatrix}1&0&0&\mathrm{i}b\\0&\mathrm{i}c&\mathrm{i}d&0\\0&-\mathrm{i}d&-\mathrm{i}c&0\\-\mathrm{i}b&0&0&-1\end{bmatrix}$。通过使用 $(\neq_2)$ 连接 f 的变量 x_3,x_4（分别为 x_1,x_2），我们得到二元签名 $(c+d)(0,1,-1,0)^T$（分别为 $(c-d)(0,1,-1,0)^T$）。由于 $cd\neq 0$，$\{c+d,c-d\}$ 中至少有一个非零元素。因此，将其除以一个非零标量进行归一化后，我们可以实现 $(0,1,-1,0)^T$。通过使用 $(0,1,-1,0)^T$ 对 $\tilde{f}$ 的变量 x_1 进行二元修改，我们得到签名 f'，其签名矩阵为 $M(f')=\begin{bmatrix}1&0&0&b'\\0&c'&d'&0\\0&d'&c'&0\\b'&0&0&1\end{bmatrix}$，其中 $b'=\mathrm{i}b, c'=\mathrm{i}c, d'=\mathrm{i}d$。

根据引理6.22，以下情况之一成立：

- Pl-Holant（$\neq_2|\,\mathcal{F}$）$\equiv_T$Holant（$\neq_2|\,\mathcal{F}$）对于任意包含 $\mathcal{F}$ f的签名集。此时，令 $\mathcal{F}=\{f,f'\}$，则有 Holant（$\neq_2|\,f$）$\leq_T^p$Holant（$\neq_2|\,\mathcal{F}$）$\equiv_T$Pl-Holant（$\neq_2|\,\mathcal{F}$）$\leq$Pl-Holant（$\neq_2|\,f$）。因此，Pl-Holant（$\neq_2|\,f$）$\equiv_T$Holant（$\neq_2|\,f$）。根据引理6.24，结论得证。
- Pl-Holant（$\neq_2|\,f'$）是 #P-困难的。这意味着 Pl-Holant（$\neq_2|\,f$）是 #P-困难的。
- Pl-Holant ($\neq_2|\,f'$) 是可解的。更具体地说，1. f' 是 $\mathscr{M}$可变换的。注意，根据引理 2.30 和引理 2.31，f' 是 $\mathscr{M}$可变换的 $\Leftrightarrow d'=\pm b'c'\Leftrightarrow d=\pm\mathrm{i}bc\Leftrightarrow f$ 是 $\mathscr{M}$可变换的。2. $d'=\pm 1$，$b'=c'=0$。在这种情况下，$d=\pm\mathrm{i}, b=c=0$。这意味着 $f\in\mathscr{A}$。3. $d'=\pm 1, b'=-c'=\mathrm{i}\tan(\frac{\beta\pi}{8})$，其中 $\beta\in\mathbb{Z}$ 是奇数。在这种情况下，$d=\pm\mathrm{i}, b=-c=\tan(\frac{\beta\pi}{8})$。将 f的三个副本连接起来，并将中间的副本旋转 π，我们得到一个签名 f_3，其签名矩阵为

$$M(f_3)=M(f)NM(f^\pi)NM(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b_3\\0&c_3&-d&0\\0&d&-c_3&0\\-b_3&0&0&1\end{bmatrix},$$

其中 $b_3 = c_3 = \frac{b}{3-b^2}$，$\frac{1-3b^2}{3-b^2}$。直接计算可得，对于任意奇整数$\beta$，$|b_3| \neq 1$ 成立。用同样的论证，我们可以实现一个签名 f_3，其签名矩阵为$M(f_3') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ib_3 \\ 0 & ic_3 & -id & 0 \\ 0 & -id & ic_3 & 0 \\ ib_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。注意，$f_3'$具有箭头反转对称性。如果 f_3'满足引理 6.22 中的前两个条件，那么用同样的论证即可得证。现在我们检验 f_3' 是否不满足引理 6.22 的第三个条件。注意，$\det M_{\text{Out}}(f_3') - \det M_{\text{In}}(f_3') = \det M_{\text{Out}}(f_3'^{\pi}_{2}) - \det M_{\text{In}}(f_3'^{\pi}_{2}) = 1 + 2b_3^2 - d^2 = 2(1 + b_3^2) \neq 0$，因为 $|b_3| \neq 1$。因此，根据引理 2.24，$f_3' \notin \mathcal{M}$且 $f_3'^{\pi}_{2} \notin \mathcal{M}$。此外，$id = \pm(ib_3) \cdot (ic_3)$意味着 $|b_3| = 1$，这与假设矛盾。因此，$-id \neq \pm(ib_3) \cdot (ic_3)$，且根据引理 2.30，$f_3'$ 不可$\mathcal{M}$变换。此外，(ib_3, ic_3)中，$ib_3 = ic_3 = 0$或 $ib_3 = -ic_3 = i\tan(\frac{\beta\pi}{8})$的情况均不成立。因此，$f_3'$不满足引理 6.22 的第三个条件。引理得证。

□

7 案例 III：非对称条件

设 f 是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$，且 $abcdyzw \neq 0$。根据第 6 节，我们可以假设不存在这样的情况：$b = \epsilon y$、$c = \epsilon z$ 和 $d = \epsilon w$，其中 $\epsilon = \pm 1$。在此假设下，我们利用莫比乌斯变换生成二元签名，以进行二元修改。只有当 $M(f)$ 的内部矩阵满秩时，莫比乌斯变换才有定义。在第 7.1 节中，我们首先处理例外情况 $by = cz = dw$：即使对 f 进行任意旋转，内部矩阵仍然退化。然后在第 7.2 节中，得益于引理 A.4 和推论 A.5，我们可以自由地进行二元修改。这使我们能够将 $M(f)$ 转换为含有零项的形式，从而归结为先前已处理的情况，并由此证明二分定理。

7.1 退化内矩阵

现在我们考虑 $by = cz = dw$ 的情形。此时，无论变量如何旋转，签名矩阵的内部矩阵总是退化的。注意，要使用 M¨obius 变换，根据引理 A.4 或推论 A.5生成二元签名，我们需要一个具有满秩内部矩阵的签名矩阵。因此，我们必须单独处理这种情况。

引理 7.1。设 f是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$，满足$abcdyzw \neq 0$且 $by = cz = dw$，则或者 $f \in \mathcal{M}$，或者 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难，或者 f满足箭头反转相等，因此 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 的复杂度由定理 6.23刻画。

证明。通过归一化 $a = 1$，$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。若 $by = 1$，则 $\det M_{\text{Out}}(f) = \det M_{\text{In}}(f)$，因此$f \in \mathcal{M}$由引理 2.24。下文假设 $by \neq 1$。若 $c + d \neq 0$ 或 $z + d \neq 0$，则根据引理 2.7，Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难。否则，$c = z = -d$，$w = \frac{cz}{d} = d$，并且有

$M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&-d&d&0\\0&d&-d&0\\y&0&0&1\end{bmatrix}$。由 $by=cz$可得 $by=d^2$。现在考虑 $M(f^{\pi_2})=\begin{bmatrix}1&0&0&-d\\0&b&d&0\\0&d&y&0\\-d&0&0&1\end{bmatrix}$。根据 $(-d)^2=by\neq 1$，重复上述论证可知，要么 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难，要么 $b=y=-d$。在后一种情况下，$M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&-d\\0&-d&d&0\\0&d&-d&0\\-d&0&0&1\end{bmatrix}$。于是 f满足箭头反转相等，而 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 的复杂度由定理 6.23刻画。 □

7.2 通过二元修改实现二分定理

在第 7.1 节之后，我们假设内部矩阵 $\left[\begin{smallmatrix}c&d\\w&z\end{smallmatrix}\right]$ 满秩。根据引理 A.1，我们可以实现某个 $t\in\mathbb{C}$ 和 $t\neq\pm1$ 的二元签名 $g=(0,1,t,0)$。根据引理 A.4，当 $1\leq i\leq 5$ 时，t^i 彼此均不相同，因此对于任意 $u\in\mathbb{C}$，我们可以实现 $(0,1,u,0)^T$。接着，通过仔细选择形如 $(0,1,u,0)^T$ 的二元签名，并使用这些签名对 f 进行二元修改，我们可以将 $M(f)$ 转换为含有零项的形式，从而归约到之前处理过的情形，并由此证明二分定理。

引理 7.2。令 $g=(0、1、t、0)^T$为一个二元签名，其中对于 $1\leq i\leq 5$，t^i彼此不同；令 f为一个 4 元签名，其签名矩阵为 $M(f)=\begin{bmatrix}a&0&0&b\\0&c&d&0\\0&w&z&0\\y&0&0&a\end{bmatrix}$，且 $abcdyzw\neq 0$，其中 $\left[\begin{smallmatrix}c&d\\w&z\end{smallmatrix}\right]$满秩，则 $f\in\mathscr{M}$，或者 Pl-Holant $(\neq_2|\ f、\ g)$ </style}是 #P-困难。

证明。通过对 $a=1$，$M(f)=\begin{bmatrix}1&0&0&b\\0&c&d&0\\0&w&z&0\\y&0&0&1\end{bmatrix}$进行归一化。令 $\mathcal{B}=\{g_1,g_2,g_3\}$为由三个二元签名组成的集合 $g_i=(0,1,t_i,0)^T$，其中 $t_i\in\mathbb{C}$待定。由引理 A.4 可知，Pl-Holant $(\neq_2|\ \{f\}\cup\mathcal{B})\leqslant$ Pl-Holant $(\neq_2|\ f,g)$。我们将证明 Pl-Holant $(\neq_2|\ \{f\}\cup\mathcal{B})$ 是 #P-困难的，从而可得 Pl-Holant $(\neq_2|\ f,g)$ 是 #P-困难的，除非 $f\in\mathscr{M}$。

将 f旋转 π后，我们得到签名 f^π，其签名矩阵为 $M(f^\pi)=\begin{bmatrix}1&0&0&y\\0&z&d&0\\0&w&c&0\\b&0&0&1\end{bmatrix}$。使用 g_1对 f^π中的变量 x_1进行二元修改后，我们得到签名 $f^\pi_{t_1}$，其签名矩阵为 $M(f^\pi_{t_1})=\begin{bmatrix}1&0&0&y\\0&z&d&0\\0&t_1w&t_1c&0\\t_1b&0&0&t_1\end{bmatrix}$。注意，$\det M_{\mathrm{In}}(f^\pi_{t_1})=t_1\det M_{\mathrm{In}}(f)$，且 $\det M_{\mathrm{Out}}(f^\pi_{t_1})=t_1\det M_{\mathrm{Out}}(f)$。将 f中的变量 x_4、x_3分别与 $f^\pi_{t_1}$中的变量 x_1, x_2相连，两处均使用 $(\neq_2)$，得到签名 f_1，其签名矩阵为

$$M(f_1)=\begin{bmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&c_1&d_1&0\\0&w_1&z_1&0\\y_1&0&0&x_1\end{bmatrix}=M(f)NM(f^\pi_{t_1})=\begin{bmatrix}bt_1+b&0&0&t_1+by\\0&cwt_1+dz&c^2t_1+d^2&0\\0&w^2t_1+z^2&cwt_1+dz&0\\byt_1+1&0&0&yt_1+y\end{bmatrix}.$$

我们首先证明存在一个 $t_1\neq 0$，使得 $c_1d_1w_1\neq 0$ 且 $dwc_1z_1-czd_1w_1\neq 0$。考虑二次多项式

$$p(t)=dw(cwt+dz)(cwt+dz)-cz(c^2t+d_2)(w_2t+z_2).$$

我们有 $p(t_1)=dwc_1z_1-czd_1w_1$。注意，$p(t)$中二次项的系数为$c^2w^2(dw-cz)\neq 0$，因为 $cw\neq 0$ 和 $\left[\begin{smallmatrix}c&d\\w&z\end{smallmatrix}\right]$满秩。也就是说，$p(t)$的次数为 2，因此它至多有两个根。此外，根据 c_1的 d_1的 w_1 定义，我们有以下推论：

$c_1 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{dz}{cw}$; $d_1 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{d^2}{c^2}$; $w_1 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{z^2}{w^2}$. 因此，我们可以选取一个 $t_1 \notin \{0, -\frac{dz}{cw}, -\frac{d^2}{c^2}, -\frac{z^2}{w^2}\}$，且 t_1 不是 $p(t)$的根。于是我们有 $t_1 \neq 0$，$c_1 d_1 w_1 \neq 0$ 和 $dwc_1 z_1 - czd_1 w_1 \neq 0$。

通过使用 g_2 对 f 的变量 x_1 进行二元修改，我们得到签名 f_{t_2}，其签名矩阵为 $M(f_{t_2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & t_2 w & t_2 z & 0 \\ t_2 y & 0 & 0 & t_2 \end{bmatrix}$。注意，$\det M_{\text{In}}(f_{t_2}) = t_2 \det M_{\text{In}}(f)$，且 $\det M_{\text{Out}}(f_{t_2}) = t_2 \det M_{\text{Out}}(f)$。将 f_1 的变量 x_4、x_3 与 f_{t_2} 的变量 x_1、x_2 都通过 $(\neq_2)$ 连接起来，我们得到一个签名 f_2，其签名矩阵为

$$M(f_2) = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & c_2 & d_2 & 0 \\ 0 & w_2 & z_2 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix} = M(f_1) N M(f_{t_2})$$

$$= \begin{bmatrix} ya_1 t_2 + b_1 & 0 & 0 & a_1 t_2 + b b_1 \\ 0 & wc_1 t_2 + cd_1 & zc_1 t_2 + dd_1 & 0 \\ 0 & ww_1 t_2 + cz_1 & zw_1 t_2 + dz_1 & 0 \\ yy_1 t_2 + x_1 & 0 & 0 & y_1 t_2 + b x_1 \end{bmatrix}.$$

由于 $wc_1 \neq 0$ 和 $cd_1 \neq 0$，我们可以令 $t_2 = -\frac{cd_1}{wc_1}$ 和 $t_2 \neq 0$。于是 $c_2 = wc_1 t_2 + cd_1 = 0$。由于$dwc_1 z_1 - czd_1 w_1 \neq 0$，我们有 $z_2 = zw_1 t_2 + dz_1 = -\frac{1}{wc_1}(dwc_1 z_1 - czd_1 w_1) \neq 0$。注意，

$$\begin{aligned} \det M_{\text{In}}(f_2) &= \det M_{\text{In}}(f_1) \cdot (-1) \cdot \det M_{\text{In}}(f_{t_2}) \\ &= \det M_{\text{In}}(f) \cdot (-1) \cdot \det M_{\text{In}}(f_{t_1}^{\pi}) \cdot (-1) \cdot \det M_{\text{In}}(f_{t_2}) \\ &= t_1 t_2 \det M_{\text{In}}(f)^3 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

此外，我们有 $\det M_{\text{In}}(f_2) = c_2 z_2 - d_2 w_2 = -d_2 w_2$。因此，$d_2 w_2 \neq 0$。所以，$M(f_2)$ 具有 $\begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & w_2 & z_2 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix}$ 的形式，其中 $d_2 w_2 z_2 \neq 0$。根据引理 5.19，除非 $f_2 \in \mathscr{M}$，否则 Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P- 困难的，即 $\det M_{\text{In}}(f_2) = \det M_{\text{Out}}(f_2)$。由于 $\det M_{\text{In}}(f_2) = t_1 t_2 \det M_{\text{In}}(f)^3$，并且类似地，$\det M_{\text{Out}}(f_2) = t_1 t_2 \det M_{\text{Out}}(f)^3$,，其中 $t_1 t_2 \neq 0$，我们有 $\det M_{\text{In}}(f)^3 = \det M_{\text{Out}}(f)^3$。

接下来，我们通过连接 7 个 f，并可能进行旋转和二元修改，构造一个签名 f_4，使得除非 $\det M_{\text{In}}(f_4) = \det M_{\text{Out}}(f_4)$，否则 Pl-Holant $(\neq_2 | f_4)$ 是 #P-困难；而这将意味着 $\det M_{\text{In}}(f)^7 = \det M_{\text{Out}}(f)^7$。结合 $\det M_{\text{In}}(f)^3 = \det M_{\text{Out}}(f)^3$,，我们便有 $\det M_{\text{In}}(f) = \det M_{\text{Out}}(f)$，于是根据引理 2.24 得到 $f \in \mathscr{M}$。

通过使用 g_3 对 f_1 的变量 x_1 进行二元修改，我们得到签名 f_{1t_3}，其签名矩阵为 $M(f_{1t_3}) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & t_3 w_1 & t_3 z_1 & 0 \\ t_3 b_1 & 0 & 0 & t_3 x_1 \end{bmatrix}$。注意，$\det M_{\text{In}}(f_{1t_3}) = t_3 \det M_{\text{In}}(f_1)$，且 $\det M_{\text{Out}}(f_{1t_3}) = t_3 \det M_{\text{Out}}(f_1)$。

将 f_1 的变量 x_4，x_3 与 f_{1t_3} 的变量 x_1, x_2 分别用 $(\neq_2)$ 连接，我们得到签名 f_3，其签名矩阵为

$$M(f_3)=\begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 & b_3\\ 0 & c_3 & d_3 & 0\\ 0 & w_3 & z_3 & 0\\ y_3 & 0 & 0 & x_3\end{bmatrix}=M(f_1)NM(f_{1t_3})$$
$$=\begin{bmatrix} a_1y_1t_3+a_1b_1 & 0 & 0 & a_1x_1t_3+b_1^2\\ 0 & c_1(w_1t_3+d_1) & c_1z_1t_3+d_1^2 & 0\\ 0 & w_1^2t_3+c_1z_1 & z_1(w_1t_3+d_1) & 0\\ y_1^2t_3+a_1x_1 & 0 & 0 & x_1y_1t_3+b_1x_1\end{bmatrix}.$$

由于 $d_1w_1\neq 0$，我们可以令 $t_3=-\frac{d_1}{w_1}$ 和 $t_3\neq 0$。于是 $c_3=z_3=0$。注意，

$$\begin{aligned}\det M_{\mathrm{In}}(f_3)&=\det M_{\mathrm{In}}(f_1)\cdot(-1)\cdot\det M_{\mathrm{In}}(f_{1t_3})\\&=-\det M_{\mathrm{In}}(f_1)\cdot t_3\det M_{\mathrm{In}}(f_1)\\&=-t_3\left[\det M_{\mathrm{In}}(f)\cdot(-1)\cdot\det M_{\mathrm{In}}(f^{\pi}_{t_1})\right]^2\\&=-t_3t_1^2\det M_{\mathrm{In}}(f)^4\\&\neq 0.\end{aligned}$$

此外，我们有 $\det M_{\mathrm{In}}(f_3)=c_3z_3-d_3w_3=-d_3w_3$。因此，$M(f_3)$ 的形式为 $\left[\begin{smallmatrix} a_3 & 0 & 0 & b_3\\ 0 & 0 & d_3 & 0\\ 0 & w_3 & 0 & 0\\ y_3 & 0 & 0 & x_3\end{smallmatrix}\right]$，其中 $d_3w_3\neq 0$。

最后，将 f_2 的变量 x_4，x_3 与 f_3 的变量 x_1、x_2 都通过 $(\neq_2)$ 连接起来，得到一个签名 f_4，其签名矩阵为

$$M(f_4)=\begin{bmatrix} a_4 & 0 & 0 & b_4\\ 0 & c_4 & d_4 & 0\\ 0 & w_4 & z_4 & 0\\ y_4 & 0 & 0 & x_4\end{bmatrix}=M(f_2)NM(f_3)=\begin{bmatrix} a_3b_2+a_2y_3 & 0 & 0 & b_2b_3+a_2x_3\\ 0 & 0 & d_2d_3 & 0\\ 0 & w_2w_3 & z_2d_3 & 0\\ a_3x_2+y_2y_3 & 0 & 0 & b_3x_2+x_3y_2\end{bmatrix},$$

其中 $d_2d_3\neq 0$，$w_2w_3\neq 0$，$z_2d_3\neq 0$。根据引理 5.19，Pl-Holant $(\neq_2|\ f_4)$ 是 #P-困难的，除非 $f_4\in\mathscr{M}$，即 $\det M_{\mathrm{In}}(f_4)=\det M_{\mathrm{Out}}(f_4)$。注意到

$$\begin{aligned}\det M_{\mathrm{In}}(f_4)&=\det M_{\mathrm{In}}(f_2)\cdot(-1)\cdot\det M_{\mathrm{In}}(f_3)\\&=t_1t_2\det M_{\mathrm{In}}(f)^3\cdot t_3t_1^2\det M_{\mathrm{In}}(f)^4\\&=t_3t_2t_1^3\det M_{\mathrm{In}}(f)^7.\end{aligned}$$

类似地，$\det M_{\mathrm{Out}}(f_4)=t_3t_2t_1^3\det M_{\mathrm{Out}}(f)^7$，，其中 $t_3t_2t_1\neq 0$。因此，我们有 $\det M_{\mathrm{In}}(f)^7=\det M_{\mathrm{Out}}(f)^7$。

我们得出结论：Pl-Holant $(\neq_2|\ f,\ g)$ 是 #P-困难，除非 $\det M_{\mathrm{In}}(f)^3=\det M_{\mathrm{Out}}(f)^3\neq 0$ 且 $\det M_{\mathrm{In}}(f)^7=\det M_{\mathrm{Out}}(f)^7\neq 0$。这意味着 $\det M_{\mathrm{In}}(f)^4=\det M_{\mathrm{Out}}(f)^4$，，进而有 $\det M_{\mathrm{In}}(f)=\det M_{\mathrm{Out}}(f)$，即 $f\in\mathscr{M}$。□

引理 7.3. 设 f 是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f)=\left[\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 & b\\ 0 & c & d & 0\\ 0 & w & z & 0\\ y & 0 & 0 & a\end{smallmatrix}\right]$，其中 $abcdyzw\neq 0$ 与 $\left[\begin{smallmatrix} c & d\\ w & z\end{smallmatrix}\right]$ 满秩，则要么Pl-Holant $\left(\neq_2|\ f,\ (0,\ 1,\ 0,\ 0)^T\right)$ 是#P-难的，要么 $f\in\mathscr{M}$，要么 f 是 $\mathscr{A}$-可变换的。

以下证明类似于定理 8.2 的证明，见 [9], ，关键区别在于我们不能使用 $(1,\ 0)^T \otimes (0,\ 1)^T$进行任意钉扎，因为我们仅限于平面小工具构造。此外，匹配门签名被嵌入在该证明中。

证明。 通过对 f 进行归一化，我们可以假设 $d = 1$。

注意到我们有 $(0, 1, 0, 0)^T = (1, 0)^T \otimes (0, 1)^T$。因此，对于 f 的任意两个相邻变量 x_i、x_j，我们可以设置 $x_i = 0$ 和 $x_j = 1$。分别利用 $(0, 1, 0, 0)^T$ 设置 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = 1$、$x_3 = 0$ 和 $x_4 = 1$、$x_1 = 0$ 和$x_4 = 1$、$x_3 = 0$ 和 $x_2 = 1$，可得到二元签名 $(0, 1, c, 0)^T$、$(0, 1, z, 0)^T$、$(0, 1, b, 0)^T$ 和 $(0, 1, y, 0)^T$，也就是说，对于任意 $u \in \{c, z, b, y\}$，我们都可以得到 $(0, 1, u, 0)^T$。因此，若存在 $u \in \{c, z, b, y\}$，使得当 $1 \le i \le 5$ 时 u^i 两两不同，则根据引理 7.2，Pl-Holant $\left(\neq_2 \middle| f, (0, 1, 0, 0)^T\right)$ 是 #P-困难的。因此，我们可以假设所有 $\{c, z, b, y\}$ 都属于 $\{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \omega, \omega^2\}$，其中$\omega = e^{2\pi \mathrm{i}/3}$。

由引理 2.6，我们有 $(0, 1, c^{-1}, 0)^T$和 $(0, 1, z^{-1}, 0)^T$。分别对 f 的变量 x_1、x_3 使用 $(0, 1, z^{-1}, 0)^T$ 和 $(0, 1, c^{-1}, 0)^T$进行二元修改，可得到签名 f_1，其签名矩阵为 $M(f_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & \frac{w}{cz} & 1 & 0 \\ \frac{y}{z} & 0 & 0 & \frac{a}{cz} \end{bmatrix}$。由于 $\begin{bmatrix} c & 1 \\ w & z \end{bmatrix}$ 满秩，因此有 $\frac{w}{cz} \neq 1$。对 f_1的变量 x_1、x_2 使用 $\neq_2$ 构造一个环，可得到二元签名 $h = M(f)(\neq_2) = (0, 2, 1 + \frac{w}{cz}, 0)^T$。我们可以假设 $|1 + \frac{w}{cz}| = 2$ 或 $\frac{w}{cz} = -1$。否则，根据引理 7.2，Pl-Holant $\left(\neq_2 \middle| f, (0, 2, 1 + \frac{w}{cz}, 0)^T\right)$ 是 #P-困难。因此，Pl-Holant $(\neq_2 | f)$ 是 #P-困难。

我们断言 $\frac{w}{cz} = -1$，否则结论已得。通过使用 $(0, 1, 0, 0)^T$ 钉扎 $x_4 = 0$ 和 $x_3 = 1$，我们得到二元签名 $(0, 1, \frac{w}{cz}, 0)^T$。如果 $(\frac{w}{cz})^i$ 对 $1 \le i \le 5$ 而言互不相同，那么根据引理 7.2，问题 Pl-Holant $\left(\neq_2 \middle| f, (0, 1, \frac{w}{cz}, 0)^T\right)$ 是 #P-困难。因此，Pl-Holant $\left(\neq_2 \middle| f, (0, 1, 0, 0)^T\right)$ 是 #P-困难。所以我们可以假设 $\frac{w}{cz} \in \{-1, \pm \mathrm{i}, \omega, \omega^2\}$。如果 $\frac{w}{cz} = \pm \mathrm{i}$，$\omega, \omega^2$，那么 $|1 + \frac{w}{cz}| \neq 2$。因此我们可以假设 $(0, 1, \frac{w}{cz}, 0)^T = (0, 1, -1, 0)^T$。

假设存在 $u \in \{c, z, b, y\}$ 使得 $u = \omega$ 或 ω^2。通过用 $\neq_2$连接$(0, 1, u, 0)^T$与$(0, 1, -1, 0)^T$，我们得到二元签名$(0, 1, -u, 0)^T$。注意$(-u)^i$对于 $1 \le i \le 6$是互异的，因此由引理 7.2，Holant$(\neq_2 | f, (0, 1, -u, 0)^T)$是#P-困难的。由此可得，Pl-Holant $\left(\neq_2 \middle| f, (0, 1, 0, 0)^T\right)$ 是#P-困难的。

现在我们可以假设 $\{c, z, b, y\} \subseteq \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$。然后由$\frac{w}{cz} = -1$，我们有 $w^4 = 1$。因此 $\{c, z, b, y, w\} \subseteq \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$。存在 $j,\ k,\ \ell,\ m,\ n \in \{0, 1, 2, 3\}$，使得

$$b = \mathrm{i}^j, \quad y = \mathrm{i}^k, \quad w = \mathrm{i}^\ell, \quad c = \mathrm{i}^m, \quad z = \mathrm{i}^n.$$

f 和 f_1 的签名矩阵分别为

$$M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \mathrm{i}^j \\ 0 & \mathrm{i}^m & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}^\ell & \mathrm{i}^n & 0 \\ \mathrm{i}^k & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad M(f_1) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \mathrm{i}^{j-m} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \mathrm{i}^{k-n} & 0 & 0 & a\mathrm{i}^{-m-n} \end{bmatrix}.$$

根据 $\frac{w}{cz} = \mathrm{i}^{\ell-m-n} = -1$，我们有 $\ell - m - n \equiv 2$（模 4）。

注意，$M(f^{\frac{\pi}{2}}) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \mathrm{i}^j \\ 0 & \mathrm{i}^j & \mathrm{i}^\ell & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{i}^k & 0 \\ \mathrm{i}^m & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$。通过对 $f^{\frac{\pi}{2}}$ 中的变量 x_3、x_4使用 $(0,\ 1,\ \mathrm{i}^{-k},\ 0)^T$ 做环操作，我们得到二元签名

$$M(f^{\frac{\pi}{2}})N(0, \mathrm{i}^{-k}, 1, 0)^T = (0, \mathrm{i}^j(1 + \mathrm{i}^{\ell-j-k}), 2, 0)^T.$$

如果 $\ell-j-k\equiv 1$（模 2），则 $|\mathrm{i}^{j}\,(1+\mathrm{i}^{\ell-j-k})\,|=\sqrt{2}$且 Holant($\neq_2|\,f,\ (0,\ 2,\ \mathrm{i}^{j}\,(1+\mathrm{i}^{\ell-j-k})\ ,\ 0)^T$) 根据引理 7.2 是 #P-困难。因此 Pl-Holant $\left(\neq_2|\,f,\ (0,\ 1,\ 0,\ 0)^T\right)$ 是 #P-困难。因此我们可以假设 $\ell-j-k\equiv 0$（模 2）。由 $\ell-m-n\equiv 2$（模 4），可得

$$j+k+m+n\equiv 0 \pmod 2.$$

将 f_1 的两个副本连接起来，并将第二个副本旋转 π，可得到签名 f_2，其签名矩阵为

$$M(f_2)=M(f_1)NM(f_1^{\pi})=\begin{bmatrix} 2\mathrm{i}^{j-m}a & 0 & 0 & \mathrm{i}^{-m-n}(a^2+\mathrm{i}^{j+k}) \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \mathrm{i}^{-m-n}(a^2+\mathrm{i}^{j+k}) & 0 & 0 & 2\mathrm{i}^{k-m-2n}a \end{bmatrix}.$$

注意，

$$\begin{aligned}\det M_{\mathrm{In}}(f_2)&=-\det M_{\mathrm{In}}(f_1)^2=-\frac{1}{c^2z^2}\det M_{\mathrm{In}}(f)^2\\ \det M_{\mathrm{Out}}(f_2)&=-\det M_{\mathrm{Out}}(f_1)^2=-\frac{1}{c^2z^2}\det M_{\mathrm{Out}}(f)^2\end{aligned}\tag{7.19}$$

另外，请注意，

$$M(f_2^{\frac{\pi}{2}})=M(f_1)NM(f_1^{\pi})=\begin{bmatrix} 2\mathrm{i}^{j-m}a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}^{-m-n}(a^2+\mathrm{i}^{j+k}) & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \mathrm{i}^{-m-n}(a^2+\mathrm{i}^{j+k}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mathrm{i}^{k-m-2n}a \end{bmatrix}.$$

令 $x_3=0$ 和 $x_4=1$ 分别取 (0, 1, 0, 0)^T，可得到二元签名 (0, 2, $\mathrm{i}^{-m-n}(a^2+\mathrm{i}^{j+k})$, 0)^T。于是，要么 $a^2+\mathrm{i}^{j+k}=0$，要么 $|a^2+\mathrm{i}^{j+k}|=2$；否则，根据引理 7.2，Pl-Holant $\left(\neq_2|\,f, (0, 2, \mathrm{i}^{-m-n}(a^2+\mathrm{i}^{j+k}), 0)^T\right)$ 是 #P-困难，因此 Pl-Holant ($\neq_2|\,f$) 是 #P-困难。

我们首先假设 $a^2+\mathrm{i}^{j+k}\neq 0$。根据引理 5.7，要么 $f_2\in\mathscr{M}$，要么 Pl-Holant ($\neq_2|\,f_2$) 是 #P-困难，因此 Pl-Holant ($\neq_2|\,f$) 是 #P-困难。若 $f_2\in\mathscr{M}$，则根据引理 2.24 和公式7.19，有 det $M_{\mathrm{In}}(f)^2=$det $M_{\mathrm{Out}}(f)^2$。若 det $M_{\mathrm{In}}(f)=$det $M_{\mathrm{Out}}(f)$，则 $f\in\mathscr{M}$。否则，det $M_{\mathrm{In}}(f)=-$det $M_{\mathrm{Out}}(f)$。于是 $a^2=\mathrm{i}^{j+k}+\mathrm{i}^{\ell}-\mathrm{i}^{m+n}$。由于 $\ell-m-n\equiv 2$(模 4)，$a^2=\mathrm{i}^{j+k}+2\mathrm{i}^{\ell}$。若 $\ell-j-k\equiv 0$ (模 4)，则 $a^2=3\mathrm{i}^{j+k}$，这与 $|a^2+\mathrm{i}^{j+k}|=2$ 矛盾。若 $\ell-j-k\equiv 2$ (模 4)，则 $a^2=\mathrm{i}^{j+k}$，这与 $a^2+\mathrm{i}^{j+k}\neq 0$ 的假设矛盾。

现在我们假设 $a^2+\mathrm{i}^{j+k}=0$。那么 $M(f)=\begin{bmatrix} \mathrm{i}^{\frac{j+k}{2}+\epsilon} & 0 & 0 & \mathrm{i}^{j} \\ 0 & \mathrm{i}^{m} & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}^{\ell} & \mathrm{i}^{n} & 0 \\ \mathrm{i}^{k} & 0 & 0 & \mathrm{i}^{\frac{j+k}{2}+\epsilon} \end{bmatrix}$，其中 $\epsilon=\pm 1$。令 $r=j+m$。我们应用由 $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&\gamma\end{smallmatrix}\right]$ 定义的全息变换，其中 $\gamma^2=\mathrm{i}^{\frac{j+k}{2}+r+\epsilon}$，于是得到 Pl-Holant ($\neq_2|\,f$) $\equiv_T$Pl-Holant $\left(\neq_2|\,\hat{f}\right)$，其中 $\hat{f}=\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&\gamma\end{smallmatrix}\right]^{\otimes 4}f$，其签名矩阵为 $M(\hat{f})$ $=\mathrm{i}^{\frac{j+k}{2}+\epsilon}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i}^{j+r} \\ 0 & \mathrm{i}^{m+r} & \mathrm{i}^{r} & 0 \\ 0 & \mathrm{i}^{\ell+r} & \mathrm{i}^{n+r} & 0 \\ \mathrm{i}^{k+r} & 0 & 0 & -\mathrm{i}^{j+k+2r} \end{bmatrix}$。根据 $\ell\equiv m+n+2$（模 4），我们有

$$M(\hat{f})=\mathrm{i}^{\frac{j+k}{2}+\epsilon}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i}^{j+r} \\ 0 & \mathrm{i}^{r} & \mathrm{i}^{m+r} & 0 \\ 0 & \mathrm{i}^{n+r} & -\mathrm{i}^{m+n+r} & 0 \\ \mathrm{i}^{k+r} & 0 & 0 & -\mathrm{i}^{j+k+2r} \end{bmatrix}.$$

这是一个仿射函数；事实上，令

$$Q(x_1,x_2,x_3)=(k-n-r)x_1x_2+(2j+2)x_1x_3+(2j)x_2x_3+(n+r)x_1+rx_2+(j+r)x_3,$$

那么在 $\hat{}\ f$ 的支撑集上，$\hat{}f(x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_3) = \mathrm{i}^{\frac{j+k}{2}+\epsilon} \cdot \mathrm{i}^{Q(x_1,x_2,x_3)}\ x_1+x_2+x_3+x_4 \equiv 0$(模 2)。此外，$k-n-r \equiv j+k+n+m \equiv 0$ (模 2)，所有交叉项的系数都是偶数。因此 $\hat{}f \in \mathscr{A}$。□

定理 7.4. 设 f是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$，且满足$abcdyzw \neq 0$。若不满足以下情形：对于某个 $\epsilon = \pm 1$，有 $b = \epsilon y$、$c = \epsilon z$和 $d = \epsilon w$，则要么 $f \in \mathscr{M}$，要么 f 是 $\mathscr{A}$-可变换的，要么Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是#P-困难的。

证明。若 $by = cz = dw$，则根据引理7.1 f 满足箭头反转相等，这与结论矛盾。否则，由于外对（$b,\ y$）和（$c,\ z$）的旋转对称性，我们可以假设 $\left[\begin{smallmatrix} c & d \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$是满秩的。

根据引理 A.1，我们可以实现 $(0, 1, t, 0)^T$，其中 $t \neq \pm 1$。若 $t = 0$，则有 $(0, 1, 0, 0)^T$，于是由引理 7.3 可得结论。否则，有 $(0, 1, t, 0)^T$，其中 $t \neq 0$ 且 $t \neq \pm 1$。若 t^i 对于$1 \leq i \leq 5$互不相同，则由引理 7.2 可得结论。否则，t 是 n次单位根，其中 $n = 3$为 4。于是，根据推论 A.5 可得 $(0, 1, 0, 0)^T$，再次由引理 7.3 可得结论。□

最后，我们已经准备好证明主定理：定理3.1。

8 主定理的证明

如果 $ax = 0$，由引理 2.3，可得 Pl-Holant $(\neq_2|\ f) \equiv_T$Pl-Holant $(\neq_2|\ f')$，其中 f'的签名矩阵为 $M(f') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。这对应于平面六顶点模型，其复杂度已由定理 2.34完全刻画。

现在假设 $ax \neq 0$。通过使用 $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt[4]{\frac{a}{x}} \end{bmatrix}$ 的全息变换，f 被变换为~~签名~~ $\tilde{f}$，其签名矩阵为

$$M(\tilde{f}) = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{b}{\sqrt{ax}} \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{ax}} & \frac{d}{\sqrt{ax}} & 0 \\ 0 & \frac{w}{\sqrt{ax}} & \frac{z}{\sqrt{ax}} & 0 \\ \frac{z}{\sqrt{ax}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

且 Pl-Holant $(\neq_2|\ f) \equiv^p_T$Pl-Holant $\left(\neq_2|\ \tilde{f}\right)$ 由定理 2.8。如果$\{b, y, c, z, d, w\}$中至少有一个零点，那么由定理 5.18，要么 Pl-Holant $\left(\neq_2|\ \tilde{f}\right)$ 是 #P-困难，因此 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$~~$\tilde{}$~~也是 #P-困难；要么 f 属于 $\mathscr{P}$，或者是 $\mathscr{A}$-可变换的，或者是 $\mathscr{M}$-可变换的，这意味着 f是 $\mathscr{P}$-可变换的，或者是 $\mathscr{A}$-可变换的，或者是 $\mathscr{M}$-可变换的。

下文假设 $\{b, y, c, z, d, w\}$ 中没有零点。

如果 $\{(b, y), (c, z), (d, w)\}$ 是三个相等对，那么根据定理 6.23，要么 Pl-Holant $\left(\neq_2|\ \tilde{f}\right)^{\sim}$ 是 #P-困难，因此 Pl-Holant $(\neq_2|\ f)$ 是 #P-困难；要么 f 是 $\mathscr{P}$-可变换、$\mathscr{A}$-可变换、$\mathscr{L}$-可变换或 $\mathscr{M}$-可变换；这分别意味着 f 是 $\mathscr{P}$-可变换、$\mathscr{A}$-可变换、$\mathscr{L}$-可变换或 $\mathscr{M}$-可变换；或者 $\left(\frac{d}{\sqrt{ax}} = \frac{w}{\sqrt{ax}} = \pm 1\right) \wedge \left(\frac{b}{\sqrt{ax}} = -\frac{c}{\sqrt{ax}} = \mathrm{i}\tan(\frac{\beta\pi}{8})\right)$, 这意味着对~~于某个奇整数~~，$(d = w = \pm\sqrt{ax}) \wedge (b = -c = \mathrm{i}\tan(\frac{\beta\pi}{8})\sqrt{ax})$

β。因此，三个相等对的情形下定理成立。类似地，如果 $\{(b,y),(c,z),(d,w)\}$ 是三个相反对，则由引理6.25可得定理成立。

如果并非如此： $\{(b,\ y)$、$(c,\ z)$、$(d,\ w)\}$ 是三对相等或相反的数，则该定理由定理7.4得证。□

A 通过 Möbius 变换进行插值

我们首先证明，在假设并非如此： $b=\epsilon y,\ c=\epsilon z$ 且 $d=\epsilon w$ 对于某个$\epsilon=\pm1$，我们可以实现一个二元签名 $g=(0,\ 1,\ t,\ ,$ 它可作为"触发器"，利用 Möbius 变换技术生成多项式数量的二元签名（引理¨（A.4，推论A.5）。

引理 A.1。设 f 是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f)=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$。若并非如此： $b=\epsilon y$、$c=\epsilon z$ 和 $d=\epsilon w$，其中 $\epsilon=\pm1$，则

$$\text{Pl-Holant}\left(\neq_2\right|\left.(0,1,t,0),f\right)\leq_T^p\text{Pl-Holant}\left(\neq_2\right|\left.f\right),$$

对于某些 $t\in\mathbb{C}$ 和 $t\neq\pm1$。

证明。我们先假设并非 $c=\epsilon z$ 和 $d=\epsilon w$的情形。

- 先处理 $\det A=0$ 的情形，其中 $A=\left[\begin{smallmatrix} c & d \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$。由于并非 $c=\epsilon z$和$d=\epsilon w$ （其中 $\epsilon=\pm1$）的情形， A 的四个元素不可能全为 0。根据f的旋转对称性，我们可以假设 $c\neq0$ 或 $d\neq0$。

  我们先考虑 $c\neq0$的情形。将 $c=1$归一化后，我们有 $A=\left[\begin{smallmatrix} 1 & d \\ w & dw \end{smallmatrix}\right]$。通过对 f的x_1、x_2沿着（$\neq_2$）取一个环，以及对 f的 x_3、x_4沿着（$\neq_2$）取一个环，我们得到（$1+w$）（0, 1, d, 0）^{T}和（$1+d$）（0, 1, w, 0）^{T}。如果 $w=\pm1$且 $d=\pm1$，那么对于$\epsilon=dw=\pm1$，我们有 $1=\epsilon\cdot dw$和 $d=\epsilon\cdot w$，矛盾。因此，我们有 $w\neq\pm1$ 或 $d\neq\pm1$。假设 $w\neq\pm1$；另一种情形对称。由于我们有（$1+d$）·（0, 1, w, 0）^{T}，如果 $d\neq-1$，那么我们有（0, 1, w, 0）^{T}，其中 $w\neq\pm1$ 满足要求。假设 $d=-1$，那么由（$1+w$）·（0, 1, d, 0）^{T}，可得（0, 1, -1, 0）^{T}。通过对 f的 x_3、x_4沿着（0, 1, -1, 0）^{T}取一个环，我们得到（$1-d$）·（0, 1, w, 0）^{T} =2（0, 1, w, 0）^{T}，其中 $w\neq\pm1$ 满足要求。

  现在考虑情形 $d\neq0$。对 $d=1$ 归一化后，我们得到 $A=\left[\begin{smallmatrix} c & 1 \\ cz & z \end{smallmatrix}\right]$。通过在 x_1 上取一个环，利用 ($\neq_2$) 得到 f 的 x_2；再通过在 x_3 上取一个环，利用 ($\neq_2$) 得到 f 的 x_4，我们得到 $(1+z)(0,c,1,0)^T$ 和 $(1+c)(0,1,z,0)^T$。如果 $c=\pm1$ 且 $z=\pm1$，那么对于 $\epsilon=cz=\pm1$，我们有 $c=\epsilon\cdot z$ 和 $1=\epsilon\cdot cz$，矛盾。因此，我们有 $c\neq\pm1$ 或 $z\neq\pm1$。假设 $c\neq\pm1$；另一种情况对称。由于我们有 $(1+z)\cdot(0,c,1,0)^T$，如果 $z\neq-1$，那么我们有 $(0,c,1,0)^T$，旋转后还得到 $(0,1,c,0)^T$，其中 $c\neq1$ 满足要求。设 $z=-1$，则由 $(1+c)\cdot(0,1,z,0)^T$，可得 $(0,1,-1,0)^T$。通过在 x_1 上取一个环，利用 $(0,1,-1,0)^T$ 得到 f 的 x_2，我们得到 $(1-z)\cdot(0,c,1,0)^T=2(0,c,1,0)^T$，满足要求。

- 下文假设 $\det A\neq0$。通过经由 ($\neq_2$) 连接 f 的 x_3 和 x_4，可得 $(0,c+d,w+z,0)^T$。若 $w+z=0$，则由 $\det A\neq0$ 可知 $c+d\neq0$。因此，我们得到 $(0,1,0,0)^T$，其中 $t=0$ 满足要求。否则，我们可以写成 $(0,c+d,w+z,0)^T=(w+z)\cdot(0,\frac{c+d}{w+z},1,0)^T$。若 $\frac{c+d}{w+z}\neq\pm1$，则结论成立。因此，可以假设 $\frac{c+d}{w+z}=\pm1$。类似地，通过经由 ($\neq_2$) 连接 f 的 x_1 和 x_2，并得到 (0, $c+w$, $d+z$, 0)，可以假设$\frac{c+w}{d+z}=\pm1$。若 $\frac{c+d}{w+z}=-1$ 或 $\frac{c+w}{d+z}=-1$，则我们有

$$c+d+w+z=0, \tag{A.20}$$

并且我们实现了签名 $(0,1,-1,0)^T$。通过经由 $(0,1,-1,0)^T$ 连接 f 的 x_3 和 x_4，可得二元签名 $(0,c-d,w-z,0)^T$。若 $c-d$ 或 $w-z=0$ 其中之一成立，则另一个非零，因为 $\det A \neq 0$，于是得到满足要求的 $(0,1,0,0)^T$。因此，可以假设 $c-d\neq 0$ 和 $w-z\neq 0$，且有 $(0,1,\frac{w-z}{c-d},0)^T$。若 $\frac{w-z}{c-d}\neq \pm 1$，则结论成立。若 $\frac{w-z}{c-d}=1$，则 $c-d=w-z$。结合 (A.20)，可得 $c=-z$ 和 $d=-w$，这与假设矛盾。若 $\frac{w-z}{c-d}=-1$，则 $c-d=z-w$。结合 (A.20)，可得 $c=-w$ 和 $d=-z$。这与 $\det A\neq 0$ 矛盾。

因此，我们可以假设 $\frac{c+d}{w+z}=\frac{c+w}{d+z}=1$。由 $c+d=w+z$ 和 $c+w=d+z$，可得 $c=z$ 和 $d=w$，这与假设矛盾。

若对某个 $\epsilon=\pm 1$，有 $c=\epsilon z$ 和 $d=\epsilon w$，则考虑签名矩阵为 $M(f^{\pi_2})=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & z \\ 0 & b & w & 0 \\ 0 & d & y & 0 \\ c & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ 的 f^{π_2}。根据本引理的假设，有 $b\neq \epsilon y$。那么，$b=\epsilon y$ 和 $w=\epsilon d$（其中 $\epsilon=\pm 1$）不成立。上述论证同样适用。

□

以下引理可由使用多项式插值的标准论证得到。

引理 A.2。 *[11]* 令 $\mathcal{F}$ 为任意签名集。假设在 Pl-Holant $(\neq_2|\,\mathcal{F})$ 中存在一种平面构件构造，可以生成多项式数量个互不相同的二元签名，形式为 $g=(0,\ 1,\ t,\ ,$ 且具有多项式规模描述，那么对于任意 $u\in\mathbb{C}$,

$$\text{Pl-Holant}\left(\neq_2|\,\mathcal{F},(0,1,u,0)^T\right)\leq_T^p \text{Pl-Holant}\left(\neq_2|\,\mathcal{F}\right).$$

推论 A.3。 引理*A.2* 的结论 $\mathcal{F}$ 含有某个二元签名 $g=(0,\ 1,\ t,\ 0)^T$，其中 $t\neq 0$ 且不是单位根。

证明。 将 s个 g 用 $\neq_2$连接起来，我们得到二元签名 g_s，其签名矩阵为$M(g_s)=\left[\begin{smallmatrix}0&1\\t&0\end{smallmatrix}\right]\left(\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}0&1\\t&0\end{smallmatrix}\right]\right)^{s-1}=\left[\begin{smallmatrix}0&1\\t^s&0\end{smallmatrix}\right]$。由于 t 不是单位根，这些构件 g_s 互不相同。

□

下面的引理利用莫比乌斯变换证明：给定一个二元“触发”$g=(0,1,t,0)^T$，且对 $1\leq i\leq 5$而言，各个幂 t^i 互不相同，我们可以实现任意形如 $(0,1,u,0)^T$的二元签名。这在引理 7.2 中很有用。该证明是对 [9], 中引理 4.1 的非平凡推广，因为我们受到平面小工具构造的限制。具体而言，我们遇到一个由矩阵 $\left[\begin{smallmatrix}1&\lambda\\\lambda&-1\end{smallmatrix}\right]$定义的莫比乌斯变换，其中 $\lambda\in\mathbb{R}\mathrm{i}$，其射影阶为 2（见证明中的情形 $\lambda+\lambda=e^{2\mathrm{i}\theta}\lambda+\bar{\lambda}=0$）。因此，在这种情况下，我们无法用它生成多项式数量的二元签名。相反，我们进行极限分析，并利用关于圆分扩张的事实，构造一个二元签名 $(0,1,u,0)^T$，其中 u 不是单位根。最后，我们通过应用推论 A.3 完成证明。

引理 A.4. 设 $g=(0,1,t,0)^T$ 是一个二元签名，其中 t^i 对于 $1\leq i\leq 5$ 互不相同；设 f 是一个签名，其签名矩阵为 $M(f)=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$，满足 $acdzw\neq 0$，且 $\left[\begin{smallmatrix}c&d\\w&z\end{smallmatrix}\right]$ 满秩。那么对于任意 $u\in\mathbb{C}$,

$\text{Pl-Holant}\left(\neq_2|\,f,\ (0,1,u,0)^T\right)\leq_T^p \text{Pl-Holant}\left(\neq_2|\,f,g\right)$。

证明。通过使用（$\neq_2$）连接两个 g 副本，我们得到一个签名 g_2，其签名矩阵为M（g_2）$=\left[\begin{smallmatrix}0&1\\t&0\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}0&1\\t&0\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}0&1\\t^2&0\end{smallmatrix}\right]$.。类似地，我们可以为 $1\leq i\leq 5$构造至少五个不同的 $g_i=(0,\ 1,\ t^i,\ 0)^T$。

分别使用 $\neq_2$，将签名 f 的变量 x_3 和 x_4 与 g_i的变量 x_1 和 x_2 连接起来，我们得到二元签名

$$h_i = M(f)Ng_i = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t^i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ct^i+d \\ wt^i+z \\ 0 \end{bmatrix}.$$

设 $\varphi(\mathfrak{z}) = \dfrac{c\mathfrak{z}+d}{w\mathfrak{z}+z}$。由于 $\det \left[\begin{smallmatrix} c & d \\ w & z \end{smallmatrix}\right] \neq 0$, $\varphi(\mathfrak{z})$ 是扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的一个 M¨obius 变换。我们将 h_i 重写为 $(wt^i+z)(0, \varphi(t^i), 1, 0)^T$，并约定若 $wt^i+z=0$，则$\varphi(t^i) = \infty$；我们定义 $(wt^i+z)(0, \varphi(t^i), 1, 0)^T$为 $(0, ct^i+d, 0, 0)^T$。拥有 $(0, \varphi(t^i), 1, 0)^T$等价于拥有 $(0, 1, \varphi(t^i), 0)^T$。若存在一个 t^i，使得 $\varphi(t^i) \neq 0, \infty$ 或对于 $1 \leq i \leq 5$为单位根，则根据推论 A.3，Pl-Holant $\left(\neq_2 | f, (0, 1, u, 0)^T\right) \leq_T^p$ Pl-Holant $\left(\neq_2 | f, (0, 1, \varphi(t^i), 0)^T\right)$，对所有 $u \in \mathbb{C}$均成立。否则，$\varphi(t^i)$ 为 $0, \infty$ 或单位根。由于 $\varphi(\mathfrak{z})$ 是 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的双射，因此至多存在一个 t^i 使得 $\varphi(t^i) = 0$，并且至多存在一个 t^i 使得 $\varphi(t^i) = \infty$。这意味着至少存在三个 t^i，使得 $|\varphi(t^i)| = 1$。由于一个 M¨obius 变换由任意三个不同的点唯一确定，将 S^1 中的三个不同点映射到 S^1，意味着这个 $\varphi(\mathfrak{z})$ 将 S^1 同胚地映射到 S^1。因此，事实上，对所有 $1 \leq i \leq 5$，均有 $|\varphi(t^i)| = 1$。

将 S^1 中的 3 个不同点映射到 S^1 的 M¨obius 变换具有特殊形式 $\mathcal{M}(\lambda, e^{\mathrm{i}\theta}): \mathfrak{z} \mapsto e^{\mathrm{i}\theta} \dfrac{\mathfrak{z}+\lambda}{1+\bar{\lambda}\mathfrak{z}}$，其中 $|\lambda| \neq 1$。通过在 f 中归一化，我们可以假设 $z=1$，因为 $z \neq 0$。将系数与 $\varphi(\mathfrak{z})$ 中的系数进行比较，得 $c = e^{\mathrm{i}\theta}, d = e^{\mathrm{i}\theta}\lambda$ 和 $w = \bar{\lambda}$。由于 $w \neq 0$，我们有 $\lambda \neq 0$。因此，

$$M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & e^{\mathrm{i}\theta} & e^{\mathrm{i}\theta}\lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

将 f 旋转 π，我们得到 $M(f^\pi) = \left[\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & e^{\mathrm{i}\theta}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & e^{\mathrm{i}\theta} & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{smallmatrix}\right]$。通过使用 $(\neq_2)^{\otimes 2}$ 连接 f 和 f^π，我们得到一个签名 f_1，其签名矩阵为

$$M(f_1) = M(f)NM(f^\pi) = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & e^{\mathrm{i}\theta}(\lambda+\bar{\lambda}) & e^{2\mathrm{i}\theta}(\lambda^2+1) & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}^2+1 & e^{\mathrm{i}\theta}(\lambda+\bar{\lambda}) & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

- 若 $\lambda + \bar{\lambda} \neq 0$，我们可以用非零标量 $e^{\mathrm{i}\theta}(\lambda+\lambda)$ 将 $M(f_1)$ 归一化，得到 $M(f_1) = \left[\begin{smallmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & \delta & 0 \\ 0 & \bar{\delta} & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{smallmatrix}\right]$，其中 $\delta = e^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda+\bar{\lambda}}$。由于 $|\lambda| \neq 1$，我们有 $\delta \neq 0$。注意，$\left[\begin{smallmatrix} 1 & \delta \\ \bar{\delta} & 1 \end{smallmatrix}\right] = M_{\mathrm{In}}(f_1) = M_{\mathrm{In}}(f)M_{\mathrm{In}}(N)M_{\mathrm{In}}(f^\pi)$ 是三个非奇异 2×2矩阵的乘积，因此它也非奇异。所以 $|\delta| \neq 1$。$\left[\begin{smallmatrix} 1 & \delta \\ \bar{\delta} & 1 \end{smallmatrix}\right]$ 的两个特征值分别为 $1+|\delta|$ 和 $1-|\delta|$，二者均为实数且必定非零。

  显然 $|1+|\delta|| \neq |1-|\delta||$，因为 $|\delta| \neq 0$。这意味着不存在整数 $n > 0$和复数 μ 使得 $\left[\begin{smallmatrix} 1 & \delta \\ \bar{\delta} & 1 \end{smallmatrix}\right]^n = \mu I$，也就是说，$\left[\begin{smallmatrix} 1 & \delta \\ \bar{\delta} & 1 \end{smallmatrix}\right]$ 具有无限射影阶。注意，$\left[\begin{smallmatrix} 1 & \delta \\ \bar{\delta} & 1 \end{smallmatrix}\right]$定义了一个形式为 $\mathcal{M}(\lambda, e^{\mathrm{i}\theta})$ 的莫比乌斯变换 $\psi(\mathfrak{z})$，其中 $\lambda = \delta$ 且 $\theta = 0$: $\mathfrak{z} \mapsto \psi(\mathfrak{z}) = \dfrac{\mathfrak{z}+\delta}{1+\bar{\delta}\mathfrak{z}}$，将 S^1 映射到 S^1。由于 $\left[\begin{smallmatrix} 1 & \delta \\ \bar{\delta} & 1 \end{smallmatrix}\right]$ 具有无限射影阶，莫比乌斯变换 $\psi(\mathfrak{z})$定义了一个无限群。

我们可以通过 N 将二元签名 $g_i(x_1, x_2)$ 连接到 f_1。由此得到以下二元签名（对于 $1 \le i \le 5$）

$$h_i^{(1)} = M(f_1)Ng_i = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & \delta & 0 \\ 0 & \bar{\delta} & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t^i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = C_{(i,0)} \begin{bmatrix} 0 \\ \psi(t^i) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中，$\psi(z)$ 是由矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} 1 & \delta \\ \bar{\delta} & 1 \end{smallmatrix}\right]$ 定义的 M¨obius 变换，且 $C_{(i,0)} = 1 + \bar{\delta}t^i$。由于 ψ 将 S^1 映射到 S^1，并且 $|t^i| = 1$，显然 $C_{(i,0)} \neq 0$，且 $\psi(t^i) \in S^1$。
现在，我们可以用 $h_i^{(1)}(x_2, x_1) = (0, 1, \psi(t^i), 0)^T$ 代替 $g_i(x_1, x_2) = (0, 1, t^i, 0)^T$，并重复这一构造。于是我们得到

$$h_i^{(2)} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & \delta & 0 \\ 0 & \bar{\delta} & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \psi(t^i) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = C_{(i,1)} \begin{bmatrix} 0 \\ \psi^2(t^i) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中，ψ^2 是复合 $\psi \circ \psi$，对应于 $\left[\begin{smallmatrix} 1 & \delta \\ \bar{\delta} & 1 \end{smallmatrix}\right]^2$，且 $C_{(i,1)} = 1 + \bar{\delta}\psi(t^i) \neq 0$。
我们可以迭代这一过程，得到多项式数量的 $h_i^{(k)} = (0, \psi^k(t^i), 1, 0)^T$，其中 $1 \le i \le 5$ 和 $k \ge 1$。

如果对每个 $i \in \{1, 2, 3\}$，都存在某个 $n_i > 0$ 使得 $\psi^{n_i}(t^i) = t^i$，那么对$n_0 = n_1 n_2 n_3 > 0$，有 $\psi^{n_0}(t^i) = t^i$，且对所有 $1 \le i \le 3$ 都成立；也就是说，M¨obius 变换 ψ^{n_0} 固定了三个不同的复数 t、t^2、t^3。因此，M¨obius 变换是恒等映射，也就是说，对所有 $z \in \mathbb{C}$，都有 $\psi^{n_0}(z) = z$。
这意味着 $\psi(z)$ 定义了一个有限阶群，矛盾。因此，存在一个 $i \in \{1, 2, 3\}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\psi^n(t^i) \neq t^i$。这意味着当 $n \in \mathbb{N}$ 时，$(1, \psi^n(t^i))$ 两两不同，因为 ψ 将 S^1 1-1 映射到 S^1。于是，我们可以生成多项式数量的形如 $(0, 1, \psi^n(t^i), 0)^T$ 的不同二元签名。根据引理 A.2，对任意 $u \in \mathbb{C}$，我们有 Pl-Holant $\left(\neq_2 \mid f, (0, 1, u, 0)^T\right) \le_T^p$ Pl-Holant $(\neq_2 \mid f, g)$。

若 $\lambda + \bar{\lambda} = 0$（因此 $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$），但 $e^{2\mathrm{i}\theta}\lambda + \bar{\lambda} \neq 0$，通过使用（$\neq_2$）$^{\otimes 2}$连接 f^π 和 f，我们得到一个签名 f_2，其签名矩阵为

$$M(f_2) = M(f^\pi)NM(f) = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & e^{2\mathrm{i}\theta}\lambda + \bar{\lambda} & 1 + e^{2\mathrm{i}\theta}\lambda^2 & 0 \\ 0 & e^{2\mathrm{i}\theta} + \bar{\lambda}^2 & e^{2\mathrm{i}\theta}\lambda + \bar{\lambda} & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

将 $M(f_2)$ 除以非零标量 $e^{2\mathrm{i}\theta}\lambda + \lambda$ 进行归一化，得到 $M(f_2) = \left[\begin{smallmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & \delta & 0 \\ 0 & \bar{\delta} & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{smallmatrix}\right]$，其中 $\delta = \frac{1 + e^{2\mathrm{i}\theta}\lambda^2}{e^{2\mathrm{i}\theta}\lambda + \lambda}$。（我们用到了 $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ 这一事实。）同样，内部矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} 1 & \delta \\ \bar{\delta} & 1 \end{smallmatrix}\right]$ 具有无限射影阶，并定义了一个从 S^1 到 S^1 的莫比乌斯变换。上述论证同样适用。

- 若 $\lambda + \bar{\lambda} = e^{2\mathrm{i}\theta}\lambda + \bar{\lambda} = 0$，则 $e^{\mathrm{i}\theta} = \pm 1$，因为 $\lambda \neq 0$。若 $e^{\mathrm{i}\theta} = 1$，则 $M(f) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right]$ 具有无限射影阶，并定义了一个从 S^1 到 S^1 的 M¨obius 变换。上述论证同样适用。

在下文中，我们假设 $e^{\mathrm{i}\theta} = -1$。这是一个棘手的情形，我们将用到代数数论中关于分圆域的一些事实。经过 -1 归一化，并注意到$\lambda = -\lambda$，f 的签名矩阵可写为

$$M(f) = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & r\mathrm{i} & 0 \\ 0 & r\mathrm{i} & -1 & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{bmatrix},$$

其中 $r \in \mathbb{R}$ 和 $r \neq 0,\ \pm 1$ 由 $\lambda \neq 0$ 和 $|\lambda| \neq 1$。通过使用 $\neq_2$连接 f的变量 x_1 和 x_2，我们实现了二元签名 $g_0 = (0,\ 1+r\mathrm{i},\ r\mathrm{i}-1,\ 0)^T$。使用 $(\neq_2)^{\otimes 2}$连接两个f 的副本后，我们得到签名 f_3，其签名矩阵为

$$M(f_3) = M(f)NM(f) = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & 2r\mathrm{i} & -r^2-1 & 0 \\ 0 & -r^2-1 & -2r\mathrm{i} & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{bmatrix} = 2r\mathrm{i} \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & \frac{r^2+1}{2r}\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \frac{r^2+1}{2r}\mathrm{i} & -1 & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

定义映射

$$T(r) := \frac{r^2+1}{2r},\ \text{for } r \in \mathbb{R}, r \neq 0, \pm 1.$$

注意，如果 $r \neq 0, \pm 1$，那么 $T(r) \neq 0, \pm 1$。通过使用 $\neq_2$连接 f_3的变量 x_1和 x_2，我们可以实现二元签名 $g_1 = (0, 1+T(r)\mathrm{i}, T(r)\mathrm{i}-1, 0)^T$。如果将 f替换为 f_3，并将 r替换为 $T(r)$，则还可以进一步实现 $g_2 = (0, 1+T^{(2)}(r)\mathrm{i}, T(2)(r)\mathrm{i}-1)^T$。重复此过程，对于任意固定的 $n \in \mathbb{N}$，我们都可以实现 $g_n = (0, 1+T(n)(r)\mathrm{i}, T^{(n)}(r)\mathrm{i}-1)^T$。令$u_n := 1+T^{(n)}(r\mathrm{i})()()$，以及 $v_n := -u_n = \overline{1+T^n(r\mathrm{i})()()()}$。若存在 $n \in \mathbb{N}$使得 u_n不是单位根，则我们得到二元 $g_n = (0, 1, u_n, 0)$，由推论 A.3 可知结论成立。反设对每个 $n \in \mathbb{N}$，u_n 都是单位根，因此 v_n 也是单位根。定义序列 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 如下：$r_0 = r$ 且 $r_{n+1} = T(r_n)$。于是，对每个 $n \in \mathbb{N}$，$v_n = \frac{1+r_n\mathrm{i}}{1-r_n\mathrm{i}}$ 都是单位根。设 $v_0 = \frac{1+r\mathrm{i}}{1-r\mathrm{i}}$ 是一个 p次单位根。显然，$\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}[\zeta_p, \mathrm{i}]$是 $\mathbb{Q}$ 的固定有限扩张（因为 p 是固定的）。

– 假设 $r > 0$。由于 $r \neq 1$，我们有 $r_1 = T(r) = \frac{r^2+1}{2r} > 1$。给定 $r_n > 1$，我们有 $r_{n+1} = T(r_n) = \frac{r_n^2+1}{2r_n} > 1$。此外，$r_{n+1} - r_n = \frac{1-r_n^2}{2r_n} < 0$。因此 $\{r_n\}_{n\geq 1}$ 严格单调递减，所以 $\lim_{n\to\infty} r_n$ 存在且下界为 1（因此极限非零）。在 $r_{n+1} = \frac{r_n^2+1}{2r_n}$ 中取极限，得到 $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$。所以 $\theta_n := \arg(v_n) = 2\arctan(r_n)$ 严格递减，且 $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \frac{\pi}{2}$。对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得$\theta_N \in (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \epsilon)$。根据假设，$v_N$ 是一个阶数为（最小）m 的单位根。于是$m\theta_N = 2k\pi$，其中某个 $k \in \mathbb{N}$。这意味着

$$\frac{\theta_N}{\pi} - \frac{1}{2} = \frac{4k-m}{2m}.$$

由于 $\theta_N > \frac{\pi}{2}$，我们有 $4k - m \geq 1$。因此，

$$\frac{1}{2m} \leq \frac{4k-m}{2m} = \frac{\theta_N}{\pi} - \frac{1}{2} < \frac{\epsilon}{\pi}.$$

所以 $m \geq \frac{\pi}{2\epsilon}$。当 ϵ 任意小时，m 就任意大，并且 $\deg_{\mathbb{Q}}(v_N) = \varphi(m) >_m$ 对数的对数 m 可以任意大，其中 $\varphi(\cdot)$ 是欧拉函数，也就是分圆域 $\mathbb{Q}_m$ 关于 $\mathbb{Q}$ 的域扩张次数，这与 $v_N \in \mathbb{Q}[\zeta_p, \mathrm{i}]$ 矛盾。

– 假设 $r < 0$。类似地，我们可以证明 $\{r_n\}_{n\geq 1}$ 是递增的，且 $\lim_{n\to\infty} r_n = -1$。注意，$v_n = \frac{1-r_n\mathrm{i}}{1+r_n\mathrm{i}}$，其中 $\{r_n\}_{n\geq 1}$ 是递减的，且 $\lim_{n\to\infty}(-r_n) = 1$。于是，与 $r > 0$ 情形相同的论证适用。

□

推论 A.5。设 $g = (0,\ 1,\ t,\ 0)^T$ 是一个二元签名，其中 t 是 n 阶本原单位根，$n = 3$ 为 **4**；设 f 是一个签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$，其中 $acdzw \neq 0$，且 $\left[\begin{smallmatrix} c & d \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$ 满秩，则

$$\text{Pl-Holant}\left(\neq_2 \mid f,\ (0,\ 1,\ 0,\ 0)^T\right) \leq_T^p \text{Pl-Holant}\left(\neq_2 \mid f,\ g\right)。$$

证明。假设我们有二元签名 $(0, 1, t, 0)^T$，其中 t 是 n 次本原单位根，对于 $n = 3$ 或 $n = 4$。则 $(0, 1, t^i, 0)^T$ 对于 $i = 1$、2、3 互不相同。在引理 A.4 的证明中，若 $\varphi(t^i) = 0$ 或 ∞ 之一成立，则我们有 $(0, 1, 0, 0)^T$ 或 $(0, 0, 1, 0)^T$，这意味着两者我们都有。若 $\varphi(t^i) = 0$ 或 ∞ 对于 $i = 1$、2、3 都不成立，则引理 A.4 的证明表明我们有 $(0, 1, u, 0)^T$，对任意 $u \in \mathbb{C}$。因此我们也有 $(0, 1, 0, 0)^T$。推论随之成立。□

推论 A.6. 设 f 是一个四元签名，其签名矩阵为 $M(f) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$。若内部矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} c & d \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$ 恰有三个非零项，则对于任意 $u \in \mathbb{C}$，

$$\text{Pl-Holant}\left(\neq_2 \mid f, (0, 1, u, 0)^T\right) \leq_T^p \text{Pl-Holant}\left(\neq_2 \mid f\right).$$

证明。文献 中推论 4.4 的证明保持了平面性。由旋转对称性，不妨设 $(z = 0) \wedge (cdw \neq 0)$ 或 $(w = 0) \wedge (cdz \neq 0)$，前一种情形已在该文的证明中处理，后一种情形也可类似处理。□

参考文献

[1] Lars Ahlfors。《复分析：单复变解析函数理论导论》。McGraw-Hill，1979年。[2] R. J. Baxter。晶格统计中的八顶点模型。《Physical Review Letters》，26(14):832–834，1971年4月。[3] Andrei Bulatov。计数约束满足问题的复杂度。《Journal of the ACM (JACM)》，60(5):1–41，2013年。[4] Andrei Bulatov、Martin Dyer、Leslie Ann Goldberg、Markus Jalsenius、Mark Jerrum 和 David Richerby。加权与非加权 #CSP 的复杂度。《Journal of Computer and System Sciences》，78(2):681–688，2012年。[5] Jin-Yi Cai 和 Xi Chen。《计数问题的复杂性二分：第1卷，布尔域》。剑桥大学出版社，2017年。[6] Jin-Yi Cai 和 Xi Chen。复权重计数 CSP 的复杂度。《Journal of the ACM (JACM)》，64(3):1–39，2017年。[7] Jin-Yi Cai、Xi Chen 和 Pinyan Lu。非负加权 #CSP：一种有效的复杂性二分。《SIAM计算杂志》，45(6):2177–2198，2016年。[8] Jin-Yi Cai 和 Zhiguo Fu。带匹配门的全息算法对于布尔域上的平面 #CSP 具有普适性。《SIAM计算杂志》，STOC 17 专刊：50–151，2022年。

[9] Jin-Yi Cai 和 Zhiguo Fu。八顶点模型的复杂性分类。《信息与计算》，293:105064，2023年。[10] Jin-Yi Cai、Zhiguo Fu、郭恒和泰森·威廉姆斯。FKT 并非普适——对称约束的平面 Holant 二分定理。《计算系统理论》，66(1):143–308，2022年。[11] Jin-Yi Cai、Zhiguo Fu 和 Shuai Shao。新型平面多项式时间可计算六顶点模型及其完整复杂性分类。载于《SODA》，第1535–1547页。SIAM，2021年。[12] Jin-Yi Cai、Zhiguo Fu 和 夏明吉。六顶点模型的复杂性分类。《信息与计算》，259(Part):130–141，2018年。[13] Jin-Yi Cai、郭恒和泰森·威廉姆斯。捕获消失签名带来了完整的二分定理。《SIAM计算杂志》，45(5):1671–1728，2016年。[14] Jin-Yi Cai 和 刘天宇。通过 MCMC 实现完全多项式时间随机近似方案，即使混合速度很慢（且所需工作极少）。《CoRR》，abs/2010.05425，2020年。[15] Jin-Yi Cai、Pinyan Lu 和 夏明吉。Holant 问题的计算复杂性。《SIAM计算杂志》，40(4):1101–1132，2011年。[16] Jin-Yi Cai、Pinyan Lu 和 夏明吉。复权布尔 #CSP 的复杂度。《计算机与系统科学杂志》，80(1):217–236，2014年。[17] Gemma De las Cuevas、Wolfgang D¨ur、Maarten Van den Nest 和 Miguel A MartinDelgado。经典格点模型的量子算法。第13卷，093021页。IOP出版社，2011年。[18] Martin Dyer 和 David Richerby。计数约束满足问题的有效二分定理。《SIAM计算杂志》，42(3):1245–1274，2013年。[19] 范重鹏和吴福宇。一般相变格点模型。《物理评论B辑》，2(3):723，1970年。[20] Leslie Ann Goldberg 和 Mark Jerrum。铁磁波茨模型配分函数的近似计算。《Journal of the ACM (JACM)》，59(5):1–31，2012年。[21] Leslie Ann Goldberg、Mark Jerrum 和 Mike Paterson。二态自旋系统的计算复杂性。《随机结构与算法》，23(2):133–154，2003年。[22] Mark Jerrum 和 Alistair Sinclair。伊辛模型的多项式时间近似算法。《SIAM计算杂志》，22(5):1087–1116，1993年。[23] Pieter W. Kasteleyn。图论与晶体物理学。《图论与理论物理学》，第43–110页，1967年。[24] Pieter W. Kasteleyn。格上的二聚体统计。载于《组合学经典论文》，第281–298页。施普林格，2009年。

[25] Liang Li、Pinyan Lu 和 Yitong Yin。自旋系统中直至唯一性的相关性衰减。载于第二十四届 *ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集，第 67–84 页。SIAM，2013年。[26] Linus Pauling。冰及其他原子排列具有一定随机性的晶体的结构与熵。美国化学会志，57(12):2680–2684，1935年。[27] Shuai Shao 和 Jin-Yi Cai。实布尔Holant问题的二分定理。载于 第*61*届 *IEEE*计算机科学基础年会（*FOCS*）论文集，第 1091–1102 页，2020年。[28] Bill Sutherland。不遵循冰规则的二维氢键晶体。数学物理学杂志，11(11):3183–3186，1970年。[29] Harold N. V. Temperley 和 Michael E. Fisher。统计力学中的二聚体问题——一个精确结果。哲学杂志，6(68):1061–1063，1961年。[30] Leslie G. Valiant。枚举与可靠性问题的复杂度。*SIAM*计算杂志，8(3):410–421，1979年。[31] Leslie G. Valiant。匹配门的表达能力。理论计算机科学，289(1):457– 471，2002年。[32] Leslie G. Valiant。可在多项式时间内通过经典方法模拟的量子电路。*SIAM*计算杂志，31(4):1229–1254，2002年。[33] Leslie G. Valiant。全息算法。*SIAM*计算杂志，37(5):1565–1594，2008年。[34] D.J.A. Welsh。欧拉与二分拟阵。组合理论杂志，6(4):375 – 377，1969年。[35] Peng Yang、Yuan Huang 和 Zhiguo Fu。具有复边函数的 k正则非对称自旋系统的复杂性三分定理。理论计算机科学，1020:114835，2024年。