arXiv:2602.11296v1 [math.CV] 11 Feb 2026

调和三项式方程的参数空间

´WALDEMAR BARRERA、LUCIA CAMPA 和 JUAN PABLO NAVARRETE

Abstract. 我们分析形如 $z^{n+m}+bz^m+c$ 的调和三项式方程的参数空间，其中 $n,$ $m\in\mathbb{Z}^+$ 互素,¯且 $b,c\in\mathbb{C}$。利用适用于调和三项式的 Bohl 和 Egerv´ary 定理的若干版本，我们描述参数空间中的几何曲线：这些曲线分别对应存在单根或重根，或两个不同的根具有相同模数的情形。我们尤其研究这些称为旋轮线的曲线的几何性质。

Introduction

三项式方程的研究是数学中的一个经典课题，多年来催生了大量重要研究 [6], [10], [11], [12]。这些方程至今仍是一个活跃的研究领域。例如，2019 年，Belki´c [5]汇编了 250 多年来关于三项式方程及其在复杂现象建模中的应用的理论。

最近，Thorsten 和 De Wolff 在 [19] 中研究了三项式方程的参数空间，以及此前尚未揭示的若干几何与拓扑性质。在该研究中，形式为

$$z^{n+m}+bz^m+c=0 \tag{1}$$

的三项式方程空间记为 T_A，其中 b 和 c 是不同为零的复数。基于这一框架，作者提出并回答了以下问题:

(I) 给定 c时，使方程 (1) 存在一个模为 $v>0$的根的所有 b 构成的集合具有怎样的几何结构? (II) 给定 c时，使方程 (1) 存在两个模为 $v>0$的根的所有 b 构成的集合具有怎样的几何结构? (III) 记 U_j^A为 T_A 中这样一个三项式子集：其按模排序后第 j小的根与第 $(j+1)$ 小的根具有不同的模，$1\le j\le n+m-1$。更形式地，他们还考虑 U_0^A和 U_{n+m}^A，并规定对每个三项式 $f\in T_A$，$f\in U_0^A$且 $f\in U_{n+m}^A$。那么，集合$U_j^A\subseteq T_A$ 及其补集具有哪些几何与拓扑性质?

沿着这一研究方向，我们可以在形如 $az^{n+m}+bz^{\,m}+c$ 的调和三项式背景下，表述前面的问题（I、II 和 III），其中 $n,$ $m\in\mathbb{Z}^+$,$a,$ $b,$ $c\in\mathbb{C}$,¯ 并加入一个反解析项，从而引入非平凡的几何与拓扑行为。这一方法与调和函数理论中的更广泛发展相契合，在该理论中已经发现了多种应用。例如，在 [14], [15],

日期：2026年2月13日。

Khavinson 和 Neumann 展示了调和多项式的一个子类，它与引力透镜产生的多重像有关，并且能够生成类似于调和三项式所描述的几何结构的图案。同样，在 [1], An 研究了影响引力透镜势的弱扰动与所产生焦散形状之间的关系。基于这些原因，通过引入一个反解析项，将此前针对解析三项式建立的若干结果推广到更一般的情形，是一种特别自然且具有相关性的尝试。

受 Thorsten 和 De Wolff 在第4节 [19], 中的研究结果启发，这些结果基于 Amoeba理论以及 Bohl [6] 和 Egerv´ary [10] 关于解析三项式方程的定理；我们也受到 Brilleslyper 等人 [7], 研究结果的启发，该结果主要依赖 Rouch´e 定理和调和函数辐角原理。我们探讨调和三项式方程是否存在类似的结果。

令 H 为所有满足 n 和 m 互素的调和三项式所构成的空间。若固定参数 c，考虑所有形如以下形式的调和三项式：

$$h(z) = z^{n+m} + b\overline{z}^{\,m} + c, \tag{2}$$

(A) 满足条件（2）且有一个模为 $v > 0$的根的所有 b 所构成集合，其几何结构是什么？（定理 2.1）(B) 满足条件（2）且有两个同范数根的所有 b 所构成集合，其对应轨迹是什么？（定理 2.11）(C) 若固定参数 b，由满足条件（2）且有一个模为 $v > 0$的根的所有 c 构成的曲线是什么？（定理 2.4）(D) 令 U_j 表示 H 中所有调和三项式构成的子集，其中第 j 个根和第 $(j+1)$ 个根（按模从小到大排列）的模互不相同，且 $1 \le j \le l$；这里 l 表示按此顺序排列时，条件（2）中模最大的最后一个根的下标，并满足 $l \le n + 3m$。集合 U_j 及其在 H 中的补集具有哪些几何与拓扑性质？（定理 2.8、2.19 和推论 2.26）

我们注意到，由于代数基本定理，问题 (D) 与前一个问题 (III) 不同。对于形式为 (1) 的三项式方程，我们引入与 (III) 中相同的集合 U_j^A，而这些方程恰有 $n+m$ 个根；因此，此类集合 U_j^A 至多有 $n+m+1$ 个。然而，对于调和三项式，这一性质并不成立。根据 [2], ，任何形式为 (2) 的调和三项式至多有 $n+3m$ 个根。因此，集合 U_j 恰有 $n+3m+1$ 个。

本文分为两节。第1节中，我们介绍本文后续内容所需的实用工具。此外，我们还概述了[19]中关于三项式方程的第4节，其中有一小节讨论旋轮线曲线；这些曲线有助于描述与调和三项式方程相关的几何结构。第2节通过分析固定调和三项式的一个系数后得到的参数空间的局部结构，探讨问题 (A、B、C 和 D)。

最后，我们强调，本文并未采用 [19] 中的 Amoeba理论。相反，本文所使用、用于推导相关结果的数学工具，依赖于 Bohl定理和 Egerv´ary 定理在调和三项式方面的版本；这些版本最近在 [2] 和 [4] 中得到了发展。

1. Preliminaries

1.1. 调和三项式的 Bohl定理。 为方便读者，我们给出调和三项式方程的定义，以及 Bohl 定理在调和三项式方面的版本中的一些主要结果；这些结果见 [2], [3], ，并将在第2节的部分证明中使用。

D定义 1.1. 调和三项式方程是如下形式的表达式

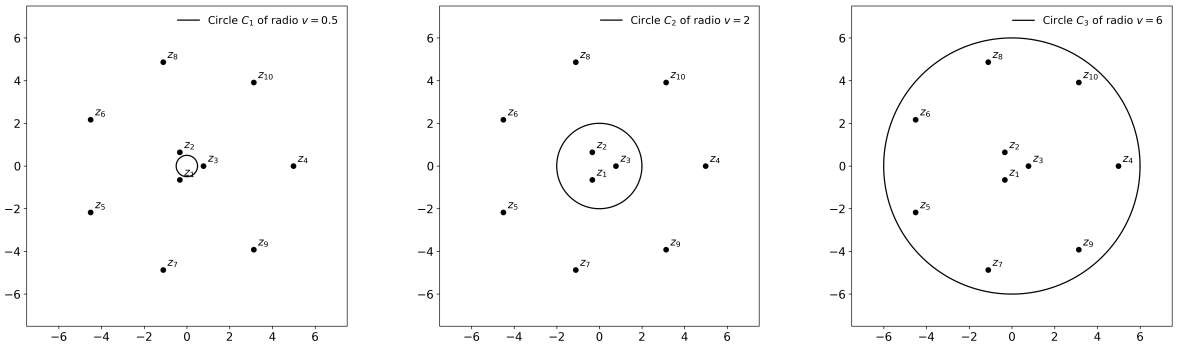
$$az^{n+m} + b\overline{z}^{\,m} + c = 0,$$

其中 a、b、$c \in \mathbb{C}^*$ 和 n、m 均为正整数。

定理1.2 (调和三项式的 Bohl 定理，[2])。设 $h(z) = az^{n+m} + bz^{\,m} + c$ 对所有$z \in \mathbb{C}$ 均为一个调和三项式，其中 a、b、$c \in \mathbb{C}$。设 v 为正实数， k为模小于 v 的根的个数。那么，以下结论成立：

- 若 $|c| > |a|v^{n+m} + |b|v^m$，则 $k = 0$。
- 若 $|a|v^{n+m} > |b|v^m + |c|$，则 $k = n + 3m$。
- 若 $|b|v^m > |a|v^{n+m} + |c|$，则 $k = m$。

例 **1.3.** 设 $h(z) = z^4 - 5z^{\,3} + 2$。对于 $v = \frac{1}{2}$、2、6，圆 C_1、C_2、C_3 内分别有 $k = 0$、3、10 个根，如图*1A*、*1B*和*1C*所示。



(A) 圆内 C_1，有 $k = 0$ 个根。 (B) 圆内 C_2，有 $k = 3$ 个根。 (C) 圆内 C_3，有 $k = 10$ 个根。

FIGURE 1. 调和三项式 $h(z) = z^4 - 5z^{\,3} + 2$的根 z_1，z_2，……，z_{10}。圆$-C_1$、C_2和 C_3的半径分别为 $v = \frac{1}{2}$、2和6。

定理1.2分析了这样的情形：对于任意 $v \in \mathbb{R}^+$，与调和三项式 $h(z) = az^{n+m} + bz^{\,m} + c$ 相关的长度 $|a|v^{n+m}$、$|b|v^m$和 $|c|$ 无法构成三角形的边。然而，也存在这些长度确实能构成三角形边的情形。以下在 [2],中定义的元素将在定理 1.4 中使用。设

$$A(v) = |a|v^{n+m} - |b|v^m - |c|, \quad B(v) = -|a|v^{n+m} + |b|v^m - |c| \quad \text{and} \quad C(v) = -|a|v^{n+m} - |b|v^m + |c|. \tag{3}$$

令 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{c}$ 分别为 A 和 C 的唯一正根。此外， $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{c}$是界定区域 $\mathbb{T}$ 的端点，其中 $\mathfrak{c} < v < \mathfrak{a}$，而 $|a|v^{n+m}$、$|b|v^m$ 和 $|c|$ 构成三角形的边。于是， $\mathbb{T}$ 有三种可能的情形：

- $\mathbb{T} = (\mathfrak{c}, \mathfrak{a})$。
- $\mathbb{T} = (\mathfrak{c}, \mathfrak{b}) \cup (\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$，其中 $\mathfrak{b}$ 是 h的一个二重根。
- $\mathbb{T} = (\mathfrak{c}, \mathfrak{b}_1) \cup (\mathfrak{b}_2, \mathfrak{a})$，其中 $\mathfrak{b}_1 \neq \mathfrak{b}_2$ 是 h的根。

在上述每种情形中，这些区间的边界上都会形成一个退化三角形。更多详情请参见 [2], [6]。

给定 $v \in \mathbb{R}^+$ 和一个调和三项式函数 $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，我们定义集合$Z_h(v) := \{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, h(\zeta) = 0$ 和 $|\zeta| < v\}$。我们用 Card(X) 表示集合 X的基数；为简洁起见，不写 Card$(X \cap \mathbb{Z})$，而写作 Card$_{\mathbb{Z}}(X)$。

定理 1.4（调和三项式的 Bohl 定理，[2], [3]）。设 $h(z) = az^{n+m} + bz^m + c$对所有 $z \in \mathbb{C}$均为一个调和三项式，且满足 $a, b, c \in \mathbb{C}$。令 $v > 0$，并假设 $|a|v^{n+m}$,$|b|v^m$和 $|c|$ 是某个（非退化）三角形的边。令 w_1 和 w_2 分别为与长度为 $|a|v^{n+m}$ 和 $|b|v^m$的边相对的角。对于 $\mathfrak{c} < v < \mathfrak{a}$，其中 $v \neq \mathfrak{b}_j$ 且 $j \in \{1, 2\}$（包括 $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2$的情形），可得

$$Card(Z_h(v)) = Card_{\mathbb{Z}}(P_* - w_*(0, v)) + Card_{\mathbb{Z}}(P_* + w_*(0, v)) + \mathbf{1}_{\{P_* \in \mathbb{Z}\}},$$

其中支点 P_* 和 $w_*(v)$ 由下式给出

$$P_* := \frac{(n+m)(\beta - \gamma - \pi) + m(\alpha - \gamma - \pi)}{2\pi} \quad and \quad w_*(v) := \frac{(n+m)w_1 - mw_2}{2\pi},$$

with

$$\begin{aligned} P_* - w_*(0, v) &:= \{P_* - w_*(u) : u \in (0, v)\}, \\ P_* + w_*(0, v) &:= \{P_* + w_*(u) : u \in (0, v)\}, \end{aligned}$$

其中 α、β和 γ 分别是 a、b和 c的辐角，并且当 P_*为整数时 $\mathbf{1}_{\{P_* \in \mathbb{Z}\}} := 1$，否则 $\mathbf{1}_{\{P_* \in \mathbb{Z}\}} := 0$。

Whe$\boldsymbol{n}$ $|a|v^{n+m}$、$|b|v^m$和 $|c|$ 构成退化三角形的边时，我们定义

$$w_*(v) = \begin{cases} 0 & if \ \ |c| = |a|v^{n+m} + |b|v^m, \\ \frac{n+m}{2} & if \ \ |a|v^{n+m} = |b|v^m + |c|, \\ -\frac{m}{2} & if \ \ |b|v^m = |a|v^{n+m} + |c|, \end{cases}$$

并且由于 w_1 和 w_2 是 v的连续函数，我们可以如下连续延拓 $w_*(v)$:

$$w_*(v) = \begin{cases} 0 & if \ \ |c| \geq |a|v^{n+m} + |b|v^m, \\ \frac{n+m}{2} & if \ \ |a|v^{n+m} \geq |b|v^m + |c|, \\ -\frac{m}{2} & if \ \ |b|v^m \geq |a|v^{n+m} + |c|. \end{cases}$$

最后，当 $|a|v^{n+m}$、$|b|v^m$和 $|c|$不构成任何三角形的边时，该 n

i) $\boldsymbol{Card}(Z_h(v)) = 0$，适用于 $0 < v < \mathfrak{c}$。ii) 包括 $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2$ 的情形，$\boldsymbol{Card}(Z_h(v)) \leq m$，适用于 $0 < v < \mathfrak{b}_1$；而 $\boldsymbol{Card}(Z_h(v)) \geq m$，适用于 $v > \mathfrak{b}_2$。iii) $n \leq \boldsymbol{Card}(Z_h(v)) \leq n + 3m$，适用于 $v \in (\mathfrak{a}, \infty)$。

因此，

$$Card(Z_h(v)) = \begin{cases} 0 & if \ \ |c| > |a|v^{n+m} + |b|v^m, \\ n+3m & if \ \ |a|v^{n+m} > |b|v^m + |c|, \\ m & if \ \ |b|v^m > |a|v^{n+m} + |c|. \end{cases}$$

例 *1.5*。当 $h = z^3 + z + \sqrt{2}$ 和 $v = 1$ 时，长度为 *1*、*1*、$\sqrt{2}$ 的线段构成一个非退化三角形。*7 4* 和 *9 4* 之间唯一的整数是 *2*，因此 $k = 1$。事实上，h 的根的模为 $|z_1| \approx 0.83404$、$|z_2| = |z_3| \approx 1.35620$。由于 $P_* = -2$ 和 $w_*(v) = 1/4$，因此 $Card_{\mathbb{Z}}(P_* - w_*(0, v)) = Card_{\mathbb{Z}}(-2.25, -2) = 0$，$Card_{\mathbb{Z}}(P_* + w_*(0, v)) = Card_{\mathbb{Z}}(-2, -1.75) = 0$，且 $\mathbf{1}_{\{P_* \in \mathbb{Z}\}} = 1$。也就是说，$h$ 有 $k = 1$ 个根，其模小于 $v = 1$。

1.2. 埃格尔 ́瓦里定理：调和三项式。 下面给出文献 [4] 中介绍的两个埃格尔 ́瓦里等价调和三项式的定义和主要结果。定理 1.7 对第2节中的一些证明很有用。

定义 1.6。考虑调和三项式

$$h_1(z) = a_1 z^{n+m} + b_1 \overline{z}^m + c_1 \quad for \ all \ z \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

$$h_2(z) = a_2 z^{n+m} + b_2 \overline{z}^m + c_2 \quad for \ all \ z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

其系数均为非零复数。若 h_1 和 h_2 满足以下两个条件之一，我们称它们埃格尔 ́瓦里等价，记作 $h_1 \sim h_2$:

a) $h_1(z) = k h_2(e^{i\delta} z) \quad for \ all \ z \in \mathbb{C}$,
b) $h_1(z) = k \overline{h}_2(e^{i\delta} z) \quad for \ all \ z \in \mathbb{C}$,

其中 k 是非零复数，δ 是实数，并且对于所有 $z \in \mathbb{C}$，$h_2(z) = a_2 z^{n+\overline{m}} + b_2 z^{\overline{m}} + c_2$。

定理 1.7 (埃格尔 ́瓦里调和三项式，[4])。设 h_1 和 h_2 是如(4) 和(5)所示的调和三项式。对于 $j = 1,2$，记 $\alpha_j :=$辐角(a_j)、$\beta_j :=$辐角(b_j) 和 $\gamma_j :=$辐角(c_j)。调和三项式 h_1 和 h_2 等价，当且仅当

$$\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{|b_1|}{|b_2|} = \frac{|c_1|}{|c_2|}, \quad and$$

$$m(\alpha_1 \pm \alpha_2) + (n+m)(\beta_1 \pm \beta_2) - (n+2m)(\gamma_1 \pm \gamma_2) \equiv 0 \ （模 \ 2\pi）。$$

示例 **1.8.** 调和三项式 $h_1(z) = z^5 + 3z^2 + 2$ 和 $h_2(z) = 2\bar{z}^5 - 6z^2 - 4$ 是等价的，因为

$$\frac{|1|}{|2|} = \frac{|3|}{|-6|} = \frac{|2|}{|-4|}, \quad and$$

$$2(0 \pm 0) + 5(0 \pm \pi) - 7(0 \pm \pi) \equiv 0 \mod 2\pi.$$

1.3. Thorsten y Wolff 提出的三项式方程结果。 在 [19],Thorsten, T. 和 Wolff, T. 对三项式系数的参数空间进行了研究，并取得了一些进展，三项式形式为

$$f(z) = z^{n+m} + bz^m + c, \quad z \in \mathbb{C},$$

其中 b, $c \in \mathbb{C}$ 和 n, m 是正的互素整数。

由于我们关注的是调和三项式系数的参数空间，因此本小节将概述 [19]第4节中的研究结果，以辨明针对三项式所得结论与考察调和三项式时所得结论之间的异同。

- 首先，他们证明，对于固定的 $c \in \mathbb{C}^*$，所有满足 f 具有模为 v 的根的$b \in \mathbb{C}$ 所构成集合的几何结构对应于一条内旋轮线，其中

$$-b \in \left\{(R-r)\cdot e^{i\cdot\varphi} + d\cdot e^{i\left(\gamma+\frac{(R-r)}{2R}\cdot\varphi\right)} : \varphi \in [0, 2\pi)\right\}$$

  并且 $R = \frac{v^n}{m}(n+m)$、 $r = \frac{v^n}{m}\cdot n$ 和 $d = |c|\cdot v^{-m}$。他们还证明，对于固定的 $b \in \mathbb{C}^*$，所有满足 f 具有模为 v 的根的 $c \in \mathbb{C}$ 所构成集合的几何结构对应于一条外旋轮线（见 [19] 中的定理4.1、4.16）。
- 接着，他们证明，对于三项式 f，模为v的根至多有两个。此外， f 的两个根具有相同的模 v，当且仅当 b 位于一组射线的并集上。这组射线由若干条射线组成，它们都从复平面中的原点出发，沿着由参数 n, $m \in \mathbb{N}^*$ 和 $\gamma =$ 辐角 c 确定的特定方向向外延伸。每条射线对应于可能的角 $\theta_k = {}_{(n+2m)}{}^{\gamma+k\pi}_{n+m}$ 之一，适用于 $k = 0, \cancel{1, \cdots,}$ $2(n+m) - 1$。根据 k 是偶数还是奇数，这些射线分别称为偶射线或奇射线。同样，他们还证明， f 存在两个模相同的根，当且仅当 b 是内旋轮线的一个奇点（参见 [19]中的命题 4.3、定理4.4、4.5和推论4.6）。
- 他们指出，对于系数非零的实系数三项式，按模对所有根排序后， f 的实根出现在第 1、 m、 $m+1$或第 $n+m$ 位（参见 [19] 中的定理 4.8）。

- 他们还定义了集合 U_j^A，它由所有满足以下条件的三项式方程 f 构成：按模排序后，第 j 个根与第（$j+1$）个根的模不同，其中 $1 \le j \le n+m-1$。随后，他们利用这一点证明，对于固定的 $c \in \mathbb{C}^*$ 和给定的$f_b = z^{n+m} + bz^m + c$，以 $b \in \mathbb{C}$ 为参数的三项式参数族满足以下性质：如果 $n+j$ 是偶数（分别为奇数），那么 f_b 属于 U_j^A，当且仅当 b 不属于处于偶数（分别为奇数）位置的射线并。此外，利用 Greenfield 和 Drucker 在 [13], 中定义的判别式，他们证明，判别式所定义的超曲面上的任意三项式都位于 $(U_m^A)^c$ 的边界上。最后，他们证明，对于固定的 $c \in \mathbb{C}^*$，如果$n+j$ 是偶数（分别为奇数），那么 f 属于集合 U_m^A，当且仅当 b 不属于半径为 r 的闭圆盘与处于偶数（分别为奇数）位置的射线并的交集（见 [19] 中的定理 4.9 和推论4.12、4.13）。

1.4. 摆线。 第2节介绍了利用摆线曲线对某些调和三项式进行参数化的方法。现在，我们回顾与这些参数曲线相关的定义。

定义 1.9。 在 *[16]* 和 *[17]*中，旋轮线被描述为平面上的点集：圆（或其延长线）上的一个定点在不打滑的情况下沿着一条固定直线（或一个固定圆）滚动时所生成的点集。

旋轮线的一般参数化形式如下：

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= u_0 + a\cos(x_1\varphi+\eta) + d\cos(x_2\varphi+\gamma), \\ v(\varphi) &= v_0 + a\sin(x_1\varphi+\eta) + d\sin(x_2\varphi+\gamma), \end{aligned} \tag{6}$$

其中 a、 d、 x_1、 x_2、 η和 γ 为常数， φ 为自变量。旋轮线的中心为$(u_0,\ v_0)$。为简便起见，当此中心为原点时，我们就简称其为旋轮线。

我们将关注式（6）所示的旋轮线参数化形式，其中心位于原点，参数为 $R, r, d \in \mathbb{R}^+$，其中 $a = R - r$、 $\eta = 0$、 $x_1 = 1$ 与 $x_2 = \frac{R-r}{2R}$：

$$\begin{aligned} u(t) &= (R-r)\cos(t) + d\cos\left(\tfrac{R-r}{2R}t+\gamma\right), \\ v(t) &= (R-r)\sin(t) + d\sin\left(\tfrac{R-r}{2R}t+\gamma\right). \end{aligned}$$

其复方程的形式为：

$$T(\varphi) = (R-r)e^{i\varphi} + de^{i\left(\gamma+\frac{R-r}{2R}\varphi\right)}. \tag{7}$$

1.5. 调和函数的雅可比矩阵。 由于 Greenfield 和 Drucker 在 [13] 中提出的判别式结果无法推广到具有非实复变量的调和三项式，我们现在给出定义、说明和计算，供后文用于探讨判别式对调和三项式的含义。

定义 1.10。 调和多项式是形如 $H(z) = P(z) + \overline{Q(z)}$ 的调和函数（即满足拉普拉斯方程），其中 P 和 Q 是复多项式，且 $z = x + iy$ 的实变量为 x 和 y。

如果一个复函数（例如 P 和 Q）满足柯西–黎曼方程，则称其在某个区域内解析。此外，如果一个函数是解析的，那么它的实部和虚部都是调和函数，因此 $H(z)$ 是调和函数 [8]。

考虑到前面的观察，设 $P(z) = P_1(x,\ y) + iP_2(x,\ y)$ 和$Q(z) = Q_1(x,\ y) + iQ_2(x,\ y)$，其中 P 和 Q 是满足柯西–黎曼方程的解析函数。那么，我们有 $P'(z) = \frac{\partial P_1}{\partial x} + i\frac{\partial P_2}{\partial x} = \frac{\partial P_1}{\partial x} - i\frac{\partial P_1}{\partial y}$，$\overline{Q'(z)} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + i\frac{\partial Q_2}{\partial x} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} - i\frac{\partial Q_1}{\partial y}$.因此，$H(z)$的雅可比矩阵为

$$J_H(z) = |P'(z)|^2 - |Q'(z)|^2. \tag{8}$$

当如(8)中的雅可比矩阵非零时， [8], [9] 调和函数 $H(z) = P(z) + \overline{Q(z)}$的零点 z_0的阶被定义，并且该定义是根据泰勒的

展开：

$$P(z) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k (z - z_0)^k, \qquad Q(z) = q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k (z - z_0)^k.$$

若 H 保向，则 z_0 的阶等于级数 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k (z - z_0)^k$ 的阶；若 H 反向保向，则 z_0 的阶等于级数 $\sum_{k=1}^{\infty} q_k (z - z_0)^k$ 的阶。

当 $J_H(z_0) = 0$ 时，调和三项式方程至少有二重零点，但这未必符合 z_0 阶的给定定义。

此外，沿用 [18], 中提出的思路， H 的临界曲线定义为 $\mathbb{C}$ 中雅可比矩阵为零的所有点的集合；对于调和三项式而言，它对应于一个以原点为圆心、半径特定的圆。

例如， $z_0 = 1$ 是 $H = z^2 - 2z + 1$ 的一个二重零点，其中 $J_H = 0$ 在 $z_0 = 1$ 处。将 H 重写为 $H = (z-1)^2 + 2(z-1) - 2(z-1)$ 后，我们观察到 $z_0 = 1$ 是一个“阶”为 1 的零点。

2. Results

本节描述由 (1.1) 定义的所有调和三项式所构成的空间 H，确定具有一个或两个同范数根的调和三项式的几何形状，并研究引言中定义的子集 U_j 及其补集的一些几何与拓扑性质。

定理 2.1. 设 $h(z) = z^{n+m} + b\,z^m + c$ 是一个调和三项式，其中 $b \in \mathbb{C}$ 且 $c \in \mathbb{C}^*$，并设 $v \in \mathbb{R}^+$。那么， h 有一个模为 v 的根，当且仅当 b 位于一条参数为 $R = \binom{v^n}{2m}(n + 2m)$、 $r = \frac{v^n}{2m} \cdot n$ 和 $d = \frac{|c|}{v^m}$ 的旋轮线上（相差一个旋转）。

注 2.2. 以下证明改编自 *[19],* 中定理 *4.1* 的证明，并将其置于调和三项式方程的语境下表述。

证明。设 $\zeta = ve^{i\theta}$ 是 h 的一个根，并写作 $c = |c|e^{i\gamma}$，则 $-b = v^n e^{i(n+2m)\theta} + \frac{|c|}{v^m} e^{i(\gamma + m\theta)}$。利用 $R - r = v^n$、 $\dfrac{R-r}{2R} = \dfrac{m}{n+2m}$ 以及变量替换 $\varphi = (n+2m)\theta$，可得 $m\theta = \binom{R-r}{2R}\varphi$，因此

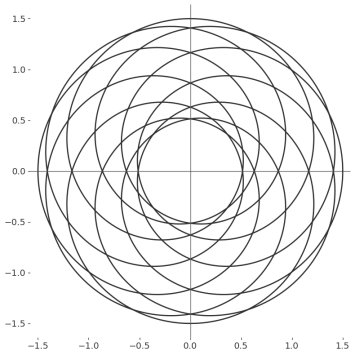
$$-b \in \left\{ (R-r)e^{i\varphi} + de^{i\left(\gamma + \frac{R-r}{2R}\varphi\right)} : \varphi \in [0, 2\pi) \right\}. \tag{9}$$

这对应于以原点为中心的旋轮线参数化的复数形式，如第 1.4 小节中定义的式 (7) 所示。 □

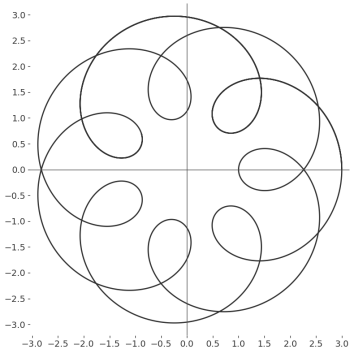
例 *2.3*。调和三项式 $h_1(z) = z^8 + b\,z^3 + \frac{1}{2}$、 $h_2(z) = z^7 + b\,z^2 + 2$ 和 $h_3(z) = z^5 + b\,z + 1$ 分别有一个模为一的根，当且仅当 $b \in \mathbb{C}$ 位于参数为 $(R, r, d) = (11/6, 5/6, 1/2)$、$(R, r, d) = (9/4, 5/4, 2)$ 和 $(R, r, d) = (3, 2, 1)$ 的旋轮线上。参见图 *2A* 、 *2B* 和 *2C*。

定理中调和三项式方程的 $-b$ 参数化与旋轮线的细节，与 *[19]*中所呈现的内旋轮线具有(2.1)相似性。 $-b$ 的存在

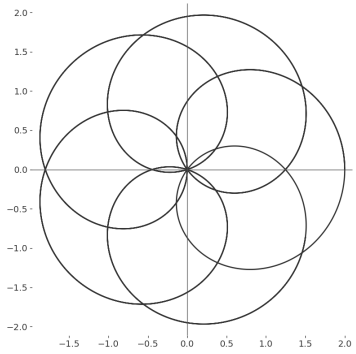
于（9）第二项中，而不是标准内旋轮线参数化的第二项中的 $\binom{r-R}{r}$，改变了该曲线的周期性和行为。



(A) 旋轮线 with parameters $(R, r, d) = (11/6, 5/6, 1/2)$.



(B) 带参数的旋轮线-参数 $(R, r, d) = (9/4, 5/4, 2)$。



(C) 参数为参数 $(R, r, d) = (3, 2, 1)$。

FIGURE 2. 将 h_1, h_2 y h_3 的给定范数的根参数化为参数为 R, r y d的旋轮线。

定理 2.4. 设 $h(z) = z^{n+m} + bz^m + \bar{c}$是一个调和三项式，其中 $b \in \mathbb{C}$ 和 $c \in \mathbb{C}^*$，且设 $v \in \mathbb{R}^+$。那么， h 有一个模为 v 的根，当且仅当 c 经过旋转后位于一条摆线上，该摆线的参数为 $R = \frac{v^m \cdot |b| \cdot n}{n+m}$，$r = \frac{v^m \cdot |b| \cdot m}{n+m}$ 和 $d = v^{n+m}$。

证明。 证明与定理 (2.1) 的证明类似。 □

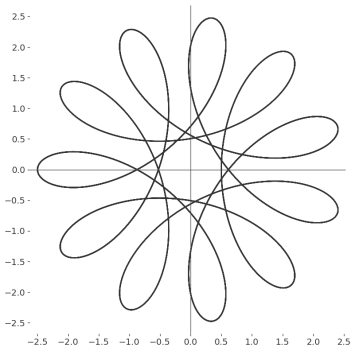
例 **2.5.** 作为与(2.3)中示例相对应的典型情形，调和三项式 $h_4 = z^8 + \frac{3}{2}z^3 + c$, $h_5 = z^7 - \frac{7}{2}z^2 + c$和$\bar{h}_6 = z^5 + z + c$有模为一的根，当且仅当 $\bar{c}$位于参数为(R, r, d) $=(15/16, 9/16, 1)$、$(5/2, 1, 1)$和 $(4/5, 1/5, 1)$ 的旋轮线上。参见图 *3A* 、 *3B* 和 *3C*。

命题 2.6. 设 $h(z) = z^{n+m} + b\,z^m + c$，其中 b、$c \in \mathbb{C}^*$、 n和 m是互素整数，且 $v \in \mathbb{R}^+$。设 ζ 是 h 的一个根，满足 $|\zeta| = v$。那么 h 至多有两个模为 v的根。

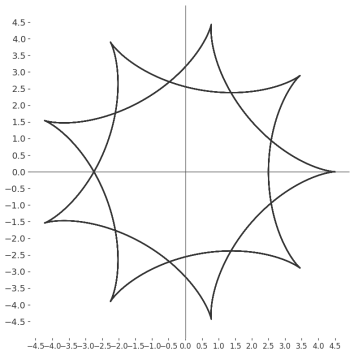
证明。 令 $h(z) = z^{n+m} + b\,\bar{z}^m + c$，其中 $b \in \mathbb{C}$且 $c \in \mathbb{C}^*$。设 ζ是 h的一个根，使得 $|\zeta| = v \in \mathbb{R}^+$。注意到 $\zeta\bar{\zeta} = v^2$，则当且仅当 $\zeta^{n+2m} + b\,v^{2m} + c\,\zeta^m = 0$时， $h(\zeta) = 0$。定义 $p(z) := z^{n+2m} + cz^m + b\,v^{2m}$，其中 $p(\zeta) = 0$。注意到 n， m互质，当且仅当$n + 2m$和 m互质。此外，根据 [19], 中的命题 4.3，多项式 $p(z)$至多有两个模为 v的根。因此，调和三项式方程 h 至多有两个模为 v的根。□

例 **2.7.** 调和三项式 $h = z^3 - z + (_{13})^{3/2}$的根如下：$z_1 \approx 0.2005$、 $z_2 \approx 0.8846$、 $z_3 \approx 0.0479 + 1.0034i$、 $z_4 \approx 0.0479 - 1.0034i$ 和 $z_5 \approx -1.0851$。

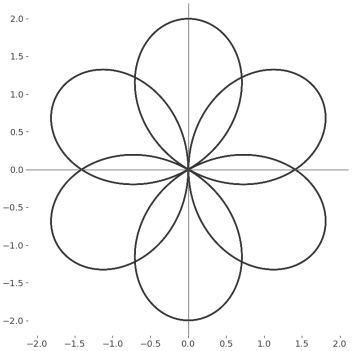
其中 $|z_3| = |z_4| \approx 1.0046$。



(A) 旋轉线 with parameters $(R,\ r,\ d) = (15/16,\ 9/16,\ 1)$。



(B) 带参数的旋轮线项 $(R, r, d) = (5/2, 1, 1)$。



(C) 旋轮线，参数为 ters $(R, r, d) = (4/5, 1/5, 1)$.

FIGURE 3. 将 h_4, h_5 y h_6 的一个根参数化为参数为 R, r y d的旋轮线。

在此背景下，遵循 Thorsten 和 Wolff 在 [19], 中的思路，将射线并定义为

$$\mathcal{R}(n,m,c) = \bigcup_{0\le k\le 2(n+m)-1} \mathbb{R}^+ \cdot e^{i\left(\frac{(n+2m)\gamma+k\pi}{n+m}\right)}, \tag{10}$$

对于参数 $n, m \in \mathbb{N}^*$ 和 $c \in \mathbb{C}^*$，它们由调和三项式 $h(z) = z^{n+m} + b\, z^{\,m} + c$ 给出。

式 (10) 中由 $\mathcal{R}(n,m,c)$ 定义的 $2(n+m)$ 条射线称为偶射线（$\mathcal{R}^{\text{even}}$）或奇射线（$\mathcal{R}^{\text{odd}}$），具体取决于 k 是偶数还是奇数，其中 $0 \le k \le 2(n+m) - 1$。

定理 2.8. 设 $h(z) = z^{n+m} + b\, z^{\,m} + c$，其中 $b \in \mathbb{C}$ 且 $c \in \mathbb{C}^*$，满足对于 h 的两个根 z_1、z_2，有 $|z_1| = |z_2|$。那么，$((n+m)\beta - (n+2m)\gamma)/\pi \in \mathbb{Z}$ 当且仅当 $b \in \mathcal{R}(n,m,c)$。特别地，对于每个 $1 \le j \le n+m-1$，有 $(U_j)^c \subseteq \mathcal{R}(n,m,c)$。

注 2.9. *[19]* 中定理 *4.4* 给出的类似结果，只对应于“当且仅当”陈述中的一个包含方向。然而，定理 *2.8* 证明了双向包含（非调和三项式也成立）。

证明。设 z_1、z_2 是 h 的根，且满足 $|z_1| = |z_2| = v \in \mathbb{R}^+$。根据 [4], 中的推论 1.5, h 与一个实系数调和三项式 Egerv´ 等价。此外，根据 [4], 中的推论 1.4(ii), 关系 $m\alpha + (n+m)\beta - (n+2m)\gamma \equiv 0 \pmod{\pi}$ 成立。回顾一下，我们假设了 $\alpha = 0$, 因此 $(n+m)\beta - (n+2m)\gamma \in \pi\mathbb{Z}$。现在，由射线并的定义（10）可得 $b \in \mathcal{R}(n,m,c)$; 由 U_j 的定义可得 $(U_j)^c \subset \mathcal{R}(n,m,c)$。

另一方面，令 $b = \lambda \cdot e^{i\left(\frac{(n+2m)\gamma+k\pi}{n+m}\right)}$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}^+$。那么 $\arg(b) := \beta = \frac{(n+2m)\gamma+k\pi}{n+m}$ 对于某个 $0 \le k \le 2(n+m) - 1$。因此，$(n+m)\beta - (n+2m)\gamma = k\pi$ 对于某个 $0 \le k \le 2(n+m) - 1$。□

例 **2.10.** 对于 $h = z^2 - 2z + 1$，根 $-1 + 2i$ 和 $-1 - 2i$ 具有相同模数。注意，$(n+m)\beta-(n+2m)_\pi \quad \gamma = 2 \in \mathbb{Z}$，因此 $b = -2 \in \mathcal{R}(n, m, c)$。特别地，$(U_j^A)^c \subseteq \mathcal{R}(n, m, c)$ 对于 $j = 1$（见图 *4*）。

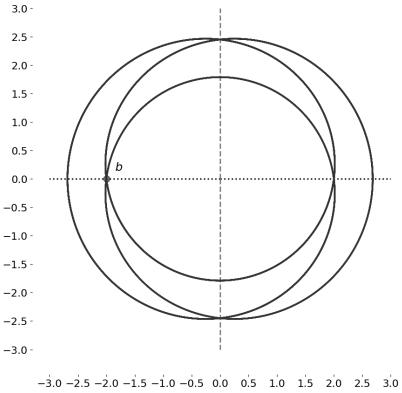


FIGURE 4. 与 $h = z^2 - 2z + 1$ 相关的旋轮线，取模数为 $\sqrt{5}$的一个根。点线表示偶射线（$\mathcal{R}^{\text{even}}$），虚线表示奇射线（$\mathcal{R}^{\text{odd}}$）。我们观察到 $b = -2 \in \mathcal{R}$。

定理 2.11。设 $h(z) = z^{n+m} + b\,z^m + c$ 满足 $b \in \mathbb{C}$ 且 $c \in \mathbb{C}^*$。当且仅当 b 是由(9)确定的旋轮线$h^v - b$ 的奇点时，存在 z_j, z_{j+1}个满足 $|z_j| = |z_{j+1}| = v \in \mathbb{R}^+$ 的 h 根。特别地:

(1) h 有两个不同的根，且它们的模数相同 v，当且仅当 b 位于旋轮线的一个双重点上。(2) h 有一个模数为 v 的二重根，当且仅当 b 是一个尖点且 $b = {}^{n+m}\underline{v^n e^{i(n+2m)\phi}}$。$_m(3)$ 对于 $n > m$，h 有多于两个模数为 v 的根，当且仅当 $b = 0$；而这又当且仅当该旋轮线是玫瑰线，且在原点处有一个重数为$n + m$ 的点。

注 2.12。以下证明改编自 *[19],* 中定理 *4.5* 的证明，此处改为针对调和三项式表述，并运用标准的微分几何论证推导出一个方程组。

证明。**(1)** 设 z_j 和 z_{j+1} 是 h 的两个不同的根，且它们具有相同模数 $v \in \mathbb{R}^+$。条件 $z_j \neq z_{j+1}$ 等价于存在两个不同的角 $\phi, \varphi \in [0, 2\pi)$，使得 $\phi \neq \varphi$ 且 $h^v(\phi) = h^v(\varphi) = 0$，其中

$$h^v(\phi) = b + v^n e^{i(n+2m)\phi} + |c| v^{-m} e^{i(\gamma + m\phi)} = 0, \qquad \text{for some } \phi \in [0, 2\pi).$$

因此 $h^v(\phi) - b = h^v(\varphi) - b = -b$。当且仅当旋轮线两次取到参数 $-b$ 的值时，这种情况才会发生。也就是说，$-b$ 位于旋轮线的一个双重点上。

(2) 现在假设 $z_j = z_{j+1}$，也就是说，h 有一个二重根。我们考察由 $\phi \to \varphi$ 给出的一族调和三项式的极限，因此 $z_j \to z_{j+1}$。这意味着曲线 $h^v(\phi) - b$ 上两个光滑分支的交点退化为一个尖点。

现在，如果旋轮线 $h^v(\phi) - b$ 有一个尖点，那么

$$h^v(\phi) = b + v^n e^{i(n+2m)\phi} + |c| v^{-m} e^{i(\gamma + m\phi)} = 0, \quad \text{and} \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}h^v(\phi) = v^n i(n+2m)e^{i(n+2m)\phi} + |c|v^{-m}ime^{i(\gamma+m\phi)} = 0. \tag{12}$$

求解由 (11) 和 (12) 给出的方程组可得 $b = \frac{n+m}{m}\, v^n e^{i(n+2m)\phi}$，因此

$$|b|e^{i\beta} = \frac{n+m}{m}v^n e^{i(n+2m)\phi}.$$

因此 $|b| = \frac{n+m}{m}v^n$ 且 $\beta \equiv (n+2m)\phi$ (模 π)，从而 $\phi = \frac{\beta}{n+2m}$。

我们注意到，对于 h 的 $\zeta = ve^{i\phi}$ 根，有 $h(\zeta) = v^{n+m}e^{i(n+m)\phi} + be^{-im\phi} + |c|e^{i\gamma} = 0$，于是 $\frac{\partial}{\partial\phi}h(\zeta) = 0.$。也就是说，$h$ 在 $\zeta = ve^{i\phi}$ 处为零，并且 h 关于 ϕ 的导数在 $ve^{i\phi}$ 处也为零。因此，h 有一个重数为 2 且模为 v 的根。

(3) 我们假设 h有多于两个模为 v的根。根据命题 2.6，这意味着 $b = 0$ 或 $c = 0$，但根据假设 $c \in \mathbb{C}^*$，所以必有$b = 0$。如果 $b = 0$，则 $h(z) = z^{n+m} + c$。这意味着该旋轮线满足形如 $f(z) = z^{n+m} + bz^m + c$ 的三项式方程的特征，其中 $b = 0$（见 [19]中的定理 4.1 和 4.2）。

□

例 **2.13.** 设 $h(z) = z^{n+m} + b\, z^{\,m} + c$ 满足 $b \in \mathbb{C}$ 且 $c \in \mathbb{C}^*$；我们观察到：

(1) 对于 $h(z) = z^2 - 2z + 1$，如例 (2.10)所示，$-1 + 2i$ 和 $-1 - 2i$ 是两个不同的根，且模数相同，为 $v = \sqrt{5}$；b 位于旋轮线的一个双重点上（见图 (4)）。

(2) 对于 $h(z) = z^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}z - 1$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 是一个具有相同模数的二重根，而 b 是相关旋轮线上的一个尖点（见图 *5*）。

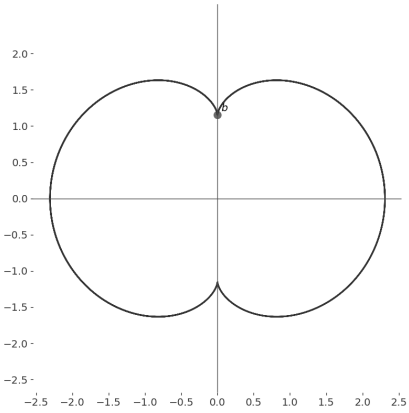


FIGURE 5. 与 $h = z^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}z - 1$ 相关的旋轮线，其二重根的模为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$。

(3) 若 $h = z^3 + 1$，即取 $b = 0$，则根为 $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$、$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$和 $z_3 = -1$。换言之，h 有三个模为 $v = 1$的根。

引理 2.14. 设 $h(z) = z^{n+m} + bz^{\,m} + c$，其中 $b, c \in \mathbb{R}^*$，且设 $Z(h) = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$为 h 的完整根集，使得 $|z_1| \le |z_2| \le \cdots \le |z_k|$，其中 k 表示按给定次序排列的 h 中的最后一个根，并满足 $k \le n + 3m$。设 $\zeta \in \mathbb{C}^*$ 为 $h(z)$的一个根。那么，$-\zeta$ 是 $h(-z)$的一个根。此外，在变量替换 $-z$下，模的次序保持不变。

注 2.15. 前述引理给出了通过变量替换得到的调和三项式的一个结果，而对于 *[19]* 中介绍的非调和三项式，则不存在类似结果。

证明。我们观察到 $h(z) = z^{n+m} + bz^m + c$，其中 $b,\ c \in \mathbb{R}^*$，并且 $h(-z) = (-1)^{n+m}z^{n+m} + (-1)^m bz^m + c := g(z)$ 是 Egervary 等价的。事实上，对于 $k = 1, \delta = \pi$ 以及任意 $z \in \mathbb{C}$，都有 $g(z) = kh(e^{i\delta}z)$。

设 $\zeta \in \mathbb{C}^*$ 是 $h(z)$ 的一个根。由于 $h(\zeta) = 0$，可得 $g(-\zeta) = h(\zeta) = 0$；因此，$-\zeta$ 是 $g(z)$ 的一个根。特别地，由于 $|\zeta| = |-\zeta|$，模的次序得以保持。此外，恒等式 $g(z) = h(e^{i\pi}z)$ 可从几何上解释为：$h(z)$ 与 $g(z) = h(-z)$ 的根仅相差一次旋转，但其排列顺序并未改变。□

以下结果是定理 4.8 的一种改写，在 $[19]$, 中现针对调和三项式给出；其证明考察了式 (3) 中给出的多项式，而这些多项式此前并未在非调和三项式的情形中讨论。

定理 2.16. 设 $h(z) = z^{n+m} + bz^m + c$，其中 b、$c \in \mathbb{R}^*$，并令 $Z(h)$ 如引理 *2.14* 中所述。假设存在 $\lambda \in \mathbb{R}^*$，它是 h的根。那么 $\lambda = z_1$，或 $\lambda = z_{m-1}$，或$\lambda = z_m$，或 $\lambda = z_{m+1}$，或 $\lambda = z_{n+m-1}$。

此外，若 $\lambda = z_m$，则区间 $(|z_m|, |z_{m+1}|)$ 位于由边长为 λ^{n+m}、$|b|\lambda^m$ 和 $|c|$ 的三角形所确定的区域之外。特别地：

- 若 $\lambda = z_{m-1} = \mathfrak{b}_1$ 是 h的根，则 $z_m = \mathfrak{b}_2$，
- 若 $\lambda = z_m = \mathfrak{b}_1$ 是 h的根，则 $z_{m+1} = \mathfrak{b}_2$，
- 若 $\lambda = z_m = \mathfrak{b}$ 是 h的根，则 $z_{m+1} = \mathfrak{b}$。也就是说，$\lambda = \mathfrak{b}$ 是 h的二重根。

证明。设 $\lambda = z_j \in \mathbb{R}^+$ 是 h的一个根。要使 $h(\lambda)$ 为零，必须出现以下某一种符号配置：

(1) 第一种情况： $b > 0$ 和 $c < 0$。设 $C(\lambda) = -\lambda^{n+m} - |b|r^m + |c| = 0$。则 $|c| = \lambda^{n+m} + |b|\lambda^m$，因此 $-c = \lambda^{n+m} + b\lambda^m$。由[2], 中的定理 2.8 可知 $\lambda = \mathfrak{c}$。由于 h 没有模小于 $\lambda = \mathfrak{c}$的根，我们得出 $\lambda = z_1 = \mathfrak{c}$。

(2) 第二种情况： $b < 0$ 和 $c > 0$。设 $B(\lambda) = -\lambda^{n+m} + |b|\lambda^m - |c| = 0$。则 $|b|\lambda^m = \lambda^{n+m} + |c|$，因此 $-b\lambda^m = \lambda^{n+m} + c$。由 $[2]$,中的定理 2.8 可知 $\lambda \in \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\}$ 或 $\lambda = \mathfrak{b}$。

- 若 $\lambda = \mathfrak{b}_1$，则 $w_1 = 0$ 且 $w_2 = \pi$，由此得出 $w_*(\mathfrak{b}_1) = -m/2$。区间 $(P_* + w_*(0,\ \mathfrak{b}_1)\ P_* - w_*(0,\ \mathfrak{b}_1))$ 的长度为 m。由于 $P_* - w_*(\mathfrak{b}_1)$ 是等于 0 的整数，因此 $P_* + w_*(\mathfrak{b}_1)$ 也是整数。因此，该区间内包含的整数个数为：若 P_* 不是整数，则为 $m-1$；若 P_* 是整数，则为 m。因此 $j = m-1$，即 $\lambda = z_{m-1} = \mathfrak{b}_1$，或者 $j = m$，即 $\lambda = z_m = \mathfrak{b}_1$。

  此外，$z_m = \mathfrak{b}_2$，因为 $z_m < \mathfrak{b}_2$ 会推出 $\mathfrak{b}_1 = z_{m-1} < z_m < \mathfrak{b}_2$，而这是不可能的，因为该区间位于三角形区域之外。同样的论证表明 $z_{m+1} = \mathfrak{b}_2$：若 $z_{m+1} < \mathfrak{b}_2$，则 $\mathfrak{b}_1 = z_m < z_{m+1} < \mathfrak{b}_2$，这同样与该区间位于三角形区域之外相矛盾。

- 若 $\lambda = \mathfrak{b}$，则根据 [2], 中的调和三项式 Bohl 定理，它必须 $j = m$，也就是说，$\lambda = z_m = \mathfrak{b}$。由于在 $\lambda = \mathfrak{b}$ 处，函数 $B(\lambda) = -\lambda^{n+m} + |b|\lambda^m - |c|$ 与 x 轴相切，我们得出 $\lambda = \mathfrak{b}$ 是 B的二重根。因为 $h(\lambda) = -B(\lambda)$，所以 $\lambda = \mathfrak{b}$也是 h的二重根。

(3) 第三种情况： $b < 0$ 和 $c < 0$。设 $A(\lambda) = \lambda^{n+m} - |b|\lambda^m - |c| = 0$。那么 $\lambda^{n+m} = |b|\lambda^m + |c|$，因此 $\lambda^{n+m} = -b\lambda^m - c$。根据 [2], 中的定理 2.8，我们得到 $\lambda = \mathfrak{a}$。若 $\lambda = \mathfrak{a}$，则 $w_1 = \pi$ 且 $w_2 = 0$，由此可得 $w_*(\mathfrak{a}) = (n+m)/2$。区间 $(P_* + w_*(0, \mathfrak{a})$ $P_* - w_*(0, \mathfrak{a}))$ 的长度为 $n + m$。由于 $P_* - w_*(\mathfrak{a})$ 是整数，$P_* + w_*(\mathfrak{a})$ 也必须是整数。因此，该区间内包含的整数个数为 $n + m - 1$，于是 $j = n + m - 1$，即 $\lambda = z_{n+m-1} = \mathfrak{a}$。

□

例 **2.17.** 设 $h = z^5 - 6\,z^2 + 1$，实根为 $z_1 \approx -0.405991$、$z_2 = \mathfrak{b}_1 \approx 0.410624$ 和 $z_3 = \mathfrak{b}_2 \approx 1.784863$。对于 $h = z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}$，实根为$z_2 = \overline{z_3} = \mathfrak{b} = 1$ （一个二重根）。

我们现在给出一个 [19] 中未提及、但在调和三项式的后续结果中必不可少的结果。

引理 2.18. 设 $h(z) = z^{n+m} + b\,z^m + c$，其中 $b \in \mathbb{C}$ 且 $c \in \mathbb{C}^*$。那么，可以对 h的根的模进行重新缩放，同时保持其顺序。

证明。设 $h(z) = z^{n+m} + b\,z^m + c = 0$，其中 $b \in \mathbb{C}$ 且 $c \in \mathbb{C}^*$。记 $c = |c|e^{i\theta}$，并定义 $\zeta = \frac{z}{|c|^{1/(n+m)}}$。那么，$h(\zeta) = 0$ 当且仅当 $\zeta^{n+m} + \frac{b}{|c|^{n/(n+m)}}\zeta^m + e^{i\theta} = 0$，而这仍是一个调和三项式。

此外，若 z_1，z_2，...，$z_k \in \mathbb{C}^*$ 表示 h 的根，并按以下方式排序：$|z_1| \le |z_2| \le \cdots \le |z_k|$，其中 z_k 表示该排序中的最后一个根，则上述变量替换会对根的模进行缩放，同时保持其排序不变。□

定理 2.19。固定一个 $c \in \mathbb{C}^*$，并考虑调和三项式的参数族 $h_b(z) = z^{n+m} + b\,z^m + c$，其中 $b \in \mathbb{C}$。对于 $j \in \{1, \ldots, k-1\} \setminus \{m\}$，有如下结论：

$$\textit{If } n + j \textit{ is even, then } h_b \in U_j \textit{ if and only if } b \notin \mathcal{R}^{even}.$$

$$\textit{If } n + j \textit{ is odd, then } h_b \in U_j \textit{ if and only if } b \notin \mathcal{R}^{odd}.$$

特别地，集合 $\{b \in \mathbb{C}^* : \ h_b \in U_j\}$ 是不连通的。当在 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ 中考虑集合 U_j 时，这一性质对集合 $\{b \in \mathbb{C} : \ h_b \in U_j\}$ 仍然成立。

对于 U_m，$n+j$ 偶数或奇数的条件同样成立，但需额外修改：$h_b \in U_m$ 只要存在 $\lambda \in \mathbb{R}^+$，使得区间 $(|z_m|, |z_{m+1}|)$ 中的每个点 $h_b(\lambda) \in \mathbb{R}$ 都位于三角形区域之外。

注记 2.20. 定理 *2.19* 与 *[19]* 中的定理 *4.9* 类似；然而，我们针对调和三项式给出了采用不同且更为详细策略的证明。

证明. 设 $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}^*$ 是 h_b 的所有可能的根，并按其模排列，即 $|z_1| \le |z_2| \le \cdots \le |z_k|$, 其中 z_k 是此排列中的最后一个根，且其中$k \le n+3m$。由定理 2.8，只需考虑 $b \in \mathcal{R}(n,m,c)$ 的情形。

根据引理 2.18，可以在保持根的模次序不变的情况下对 h_b 的根的模进行重新缩放，因此我们可以假设 $|c| = 1$。此外，当 $|c| = 1$时，多项式$h_b(z) = z^{n+m} + b\,z^m + c$在 Egerv´ary 意义下等价于通过旋转辐角得到的另一个调和三项式；因此我们还可以假设 $c = 1$。

对于 $b = 0$ ，所有根都满足 $z = (-1)^{1/(n+m)}$ ，且模为 1。因此，$h_b \notin U_j$对每个 $j \in \{1, \ldots, k-1\}$. 都成立。由此，从现在起我们可以假设 $b \in \mathbb{C}^*$。

请回忆，区间 $(P_* + w_*(0,\ v))\ \cup (P_* - w_*(0,\ v))$ 与模为 v的根的数量有关。每当 v^{n+m}、 $|b|v^m$和 $|c|$ 构成一个非退化三角形时，对每个 $j \in \{1, \ldots, k-1\} \setminus \{m\}$,

$$h_b \in U_j \text{ with } j \text{ even} \iff P_* \notin \mathbb{Z}, \qquad \text{and} \qquad h_b \in U_j \text{ with } j \text{ even} \iff P_* \notin \mathbb{Z}.$$

在我们的情形中， $\alpha = 0$ 和 $\gamma = 0$，因此 $P_* = \frac{(n+m)\beta - (n+2m)\pi}{2\pi}$。求解 β 可得

$$\beta = \frac{(2P_* + n + 2m)\pi}{n+m} = \frac{l\pi}{n+m},$$

其中 $l := 2P_* + n + 2m \in \mathbb{Z}$。这恰好对应于式（10）中给出的射线并 $b \in \mathcal{R}(n,m,c)$的定义。因此， $b \in \mathcal{R}(n,m,c)$当且仅当$\beta = \frac{l\pi}{n+m}$, $l \in \{0, \ldots, 2(n+m) - 1\}$。

由此， P_* 变为

$$P_* = \frac{l - (n+2m)}{2}. \tag{13}$$

此外，由于 $b \in \mathcal{R}(n,m,c)$满足

$$b \in \mathcal{R}^{\text{even}} \iff \frac{(n+m)\beta}{\pi} \text{ is even} \iff l \text{ is even}, \quad \text{and}$$

$$b \in \mathcal{R}^{\text{odd}} \iff \frac{(n+m)\beta}{\pi} \text{ is odd} \iff l \text{ is odd}.$$

由式（13）可得以下几种情况:

$$l \text{ and } n \text{ have the same parity} \iff P_* \in \mathbb{Z}, \quad \text{and}$$

$$l \text{ 和 } n \text{ 的奇偶性不同} \iff P_* \notin \mathbb{Z}.$$

我们还有如下结论:

- 如果 l 不是偶数，那么 $b \notin \mathcal{R}_{\text{偶数}}$。– l 是奇数，且 n 是偶数，这意味着 $P_* \notin \mathbb{Z}$，因此 $h_b \in U_j$ 为偶数，其中 j。– 或者 l 是奇数，且 n 是奇数，这意味着 $P_* \in \mathbb{Z}$，因此 $h_b \in U_j$ 为奇数，其中 j。
- 如果 l 不是奇数，那么 $b \notin \mathcal{R}_{\text{奇数}}$。– l 是偶数，且 n 是偶数，这意味着 $P_* \in \mathbb{Z}$，因此 $h_b \in U_j$ 为奇数，其中 j。– 或者 l 是偶数，且 n 是奇数，这意味着 $P_* \notin \mathbb{Z}$，因此 $h_b \in U_j$ 为偶数，其中 j。

因此,

$$n + j \ \text{ even} : h_b \in U_j \iff b \notin \mathcal{R}^{even},$$
$$n + j \ \text{ odd} : h_b \in U_j \iff b \notin \mathcal{R}^{odd}.$$

对于 $c=1$， U_j 沿 $\mathbb{C}$ 切片（H）$_c$ 的不连通性直接源于这一事实：

$$\mathbb{C}\setminus\mathcal{R}^{\mathrm{odd}}(n,m,c) \quad \text{and} \quad \mathbb{C}\setminus\mathcal{R}^{\mathrm{even}}(n,m,c)$$

都是非连通集合。

还需考虑 $j=m$ 的情形。前面的论证仍然适用，但根据定理1.4和定理2.16，我们还可得出：只要存在 $\lambda\in\mathbb{R}^+$ 使得 $h_b(\lambda)$ 位于三角形区域之外，就有 $h_b\in U_m$ 。□

例 2.21. 设 $h=z^5+6z^3+1$，其中 $j=\{1,2,\ldots,10\}\backslash\{3\}$. 我们有：对于 $j=1$，5，7，9， $(n+j)$ 是奇数，该条件成立，也就是说，当且仅当 $b\notin\mathcal{R}^{\mathrm{odd}}$ 时， $h\in U_j$ 。

对于 $j=2$ $4(n+j)$ 是偶数 $(6+j)$ ，且该条件不成立 。对于 $j=m$，$(n+m)=5$ 是奇数。因此，当且仅当 $h\in U_3 b\notin\mathcal{R}^{\mathrm{odd}}$（见图6）。然而，

$$h\in U_0\cap U_1\cap U_3\cap U_5\cap U_7\cap U_9\cap U_{11}.$$

此外，存在 $\lambda\in\mathbb{R}^+$，使得区间 $(|z_3|,|z_4|)$ 中的每个点 $h_b(\lambda)\in\mathbb{R}$ 都位于三角形区域之外。

为验证定理 *2.19* 的条件均得到满足，列出了 $h=z^5+6z^3+1$ 的所有根的模。

$$\begin{array}{llllll} 0.54163, & 0.55589, & 0.55589, & 2.43641, & 2.43641, & 2.44415, \\ 2.44415, & 2.45478, & 2.45478, & 2.46209, & 2.46209. & \end{array}$$

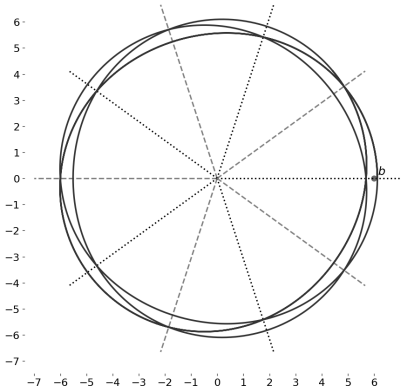


FIGURE 6. 与 $h=z^5+6z^3+1$ 相关联的旋轮线，取模为 $v\approx 0.55589$ 的一个复根。点线表示偶射线（$\mathcal{R}^{\mathrm{even}}$），虚线表示奇射线（$\mathcal{R}^{\mathrm{odd}}$）。我们观察到 $b=6\notin\mathcal{R}^{\mathrm{odd}}$。

以下定理是 Greenfield 和 Drucker 的研究成果，他们给出了首一单变量三项式判别式的显式公式。在我们的情形中，我们感兴趣的是寻找调和三项式的重根。然而，目前尚未为调和三项式建立判别式的概念。因此，我们只能对 [13]中的定理 4 作出一种解释。

定理 2.22。 *(Greenfield 和 Drucker，1984年)* 设 $h(z)=z^{n+m}+bz^m+c$ 是一个三项式，满足 $b,c\in\mathbb{C}$，其中 n 和 m 是互素整数。则 h 的判别式$D(h)$为

$$D(h)=(-1)^{\frac{(n+m)(n+m-1)}{2}}c^{m-1}\left(c^n(n+m)^{n+m}-(-1)^{n+m}b^{n+m}n^nm^m\right).$$

下面我们给出调和三项式重根的相关结果；这些结果在 [19] 的非调和三项式情形中没有对应结论。

引理 2.23. 设 $H(z) = P(z) + Q(z)$ 是一个调和多项式，其中 P 和 Q 是复多项式。设 ζ 是 H 的一个根。那么：

(1) 若 $J_H(\zeta) \neq 0$，则 ζ 是一个单根；(2) 若 $J_H(\zeta) = 0$，则 ζ 的重数至少为 2。

证明可由直接计算得出，故从略。

推论 2.24. 设 $h(z) = az^{n+m} + bz^m + c$ 是一个调和三项式，且 ζ 是 h 的一个根。若 $J_h(\zeta) = 0$，则 ζ 是一个重数至少为 *2* 的根。

推论 2.25. 若调和三项式 $h = z^{n+m} + bz^m + c$ 满足 $b, c \neq 0$，且有一个二重根 $\zeta_j = \zeta_{j+1}$，则 $\theta = \frac{\gamma}{n+m}$ 模 2π，其中 $\theta =$ 辐角(ζ) 和 $\gamma =$ 辐角(c)。

证明。令 ζ_j 为 h 的一个根，使得 $b(\overline{\zeta_j})^m = -(\zeta_j)^{n+m} - c$。于是，$|b||\overline{\zeta_j}|^m = |\zeta_j^{n+m} + c| \leq |\zeta_j|^{n+m} + |c|$。由于 ζ_j 是 h 的二重根，等式 $|\zeta_j^{n+m} + c| = |\zeta_j|^{n+m} + |c|$ 成立。因此 $\zeta_j^{n+m} \cdot c + \zeta_j^{n+m} \cdot \overline{c} = 2|\zeta_j^{n+m}||c|$。现在，令 $\zeta_j = |\zeta_j|e^{i\theta}$，则

$$e^{i(n+m)\theta} \cdot \overline{c} + e^{-i(n+m)\theta} \cdot c = 2|c| \tag{14}$$

另一方面，我们有

$$e^{i(n+m)\theta} \cdot \overline{c} + e^{-i(n+m)\theta} \cdot c = 2\Re(e^{-i(n+m)\theta} \cdot c). \tag{15}$$

由 (14) 和 (15)，我们得到 $\Re(e^{-i(n+m)\theta} \cdot c) = |c|$。令 $e^{-i(n+m)\theta} = \cos((n+m)\theta) - i\sin((n+m)\theta)$ 和 $c = c_1 + ic_2$，则 $\Re([\cos((n+m)\theta) - i\sin((n+m)\theta)](c_1 + ic_2)) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ 且 $\theta = \frac{\arctan\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}{n+m}$。 □

最后，we对 [19]中的推论 4.13 给出关于调和三项式的重新解释 .

推论 2.26。对于固定的 $c \in \mathbb{C}^*$，设 $h_b = z^{n+m} + bz^m + \bar{c}$ 为以 $b \in \mathbb{C}$ 为参数的调和三项式参数族。则：

(1) 当 $n+j$ 为偶数时：$h_b \in U_m$ 当且仅当 $b \notin \mathcal{R}^{\text{even}} \cap B_\rho(0)$，(2) 当 $n+j$ 为奇数时：$h_b \in U_m$ 当且仅当 $b \notin \mathcal{R}^{\text{odd}} \cap B_\rho(0)$，

其中 $\rho = |c|^{n/(n+m)}\left(\binom{m}{n+2m}^{n/(n+m)} + \binom{n}{n+2m}\binom{n+2m}{m}^{m/(n+m)}\right)$ 与 $B_\rho(0)$ 是以原点为中心、半径为 ρ 的闭圆盘。

注 2.27. 以下证明采用了与*[19],* 推论 ***4.13*** 中类似的思路，但在处理与调和三项式相关的三角形区域时，包含了具体细节。

证明。 在定理 2.19中，对于 U_m（回顾一下，$j \in \{1, \ldots, k-1\} \setminus \{m\}$），对 (2.19) 中条件作如下修改后，这些条件仍然成立：另外，$h_b \in U_m$ 如果存在$v \in \mathbb{R}^+$ 使得 h_b 不属于形成三角形的区域。因此，固定 $c \in \mathbb{C}^*$ 所得到的 $\mathbb{C}$-切片上的 $(U_m)^c$，是 $\mathcal{R}^{\text{odd}}$（分别为 $\mathcal{R}^{\text{even}}$）中$h_b$ 属于形成三角形区域的子集。

此外，我们知道，与 h_b相关的线段 $v^{n+m}, |b|v^m,$ 和 $|c|$ 独立于系数的辐角。这一性质在

U_m的一个开子集上仍然成立，该子集位于形成三角形区域之外；特别是，它满足 $|b|v^m > v^{n+m} + |c|$。随着 $|b|$增大，这个不等式仍然成立。事实上，对于 $|b_0| > |b|$，我们有 $|b_0|v^m > |b|v^m > v^{n+m} + |c|$。也就是说，随着 $|b|$增大，满足 $h_b \in U_m$的h_b 仍位于形成三角形的区域之外，其中 U_m 是开集。

因此，对于固定的 c，沿着 $\mathbb{C}$-切片 $(H)_c$ 的 $(U_m)^c$ 由 $\mathcal{R}^{\text{odd}}$（分别为 $\mathcal{R}^{\text{even}}$）与一个闭圆盘的交集给出。

根据推论 2.25 中的推理，该圆盘的边界由选取满足 $h = z^{n+m} + |b|z^m + |c|$ 有一个二重根 $\zeta_m = \zeta_{m+1}$ 的 $|b| > 0$ 来确定。由于对于每个 $\epsilon > 0$， $h_{|b|_{\epsilon>0}}$ 在 ζ_m 处位于三角形区域之外，因此由定理 2.11 的证明中的 $h^{\zeta_j}(\phi) = b + \zeta_j^n e^{i(n+2m)\phi} + |c|\zeta_j^{-m} e^{i(\gamma+m\phi)} = 0$（对于某个 $\phi \in [0, 2\pi)$，求导得 $\frac{\partial}{\partial\phi} h^{\zeta_j}(\phi) = \zeta_j^n i(n+2m)e^{i(n+2m)\phi} + |c|\zeta_j^{-m}(\overline{im})e^{i(\gamma+m\phi)} = 0$，所以$\zeta_j^{n+m} = \frac{-|c|me^{i(\gamma+m\phi)}}{n+2m\ e^{i(n+2m)\phi}()}$，从而得到

$$|\zeta_j| = \sqrt[n+m]{\frac{|c|m}{n+2m}}. \tag{16}$$

此外，由定理 2.11 的证明可知 $b = \frac{n+m}{m}\zeta_j^n e^{i(n+2m)\phi}$，因此 $|\zeta_j|^n = \frac{|b|m}{n+m}$。于是，$|\zeta_j|^n = \frac{|b|m}{n+m}$ 和 $|\zeta_j|^{n+m} = \frac{|c|m}{n+2m}$。将它们相除得

$$|\zeta_j|^m = \frac{|c|(n+m)}{|b|(n+2m)},$$

因此

$$|b\zeta_j^m| = \frac{|c|(n+m)}{n+2m} = \frac{|c|n}{n+2m} + \frac{|c|m}{n+2m}. \tag{17}$$

另一方面，由 (16) 也可写成

$$|b\zeta_j^m| = |b||\zeta_j|^m = |b|\Big(\frac{|c|m}{n+2m}\Big)^{m/(n+m)}. \tag{18}$$

比较 (17) 和 (18)，得到

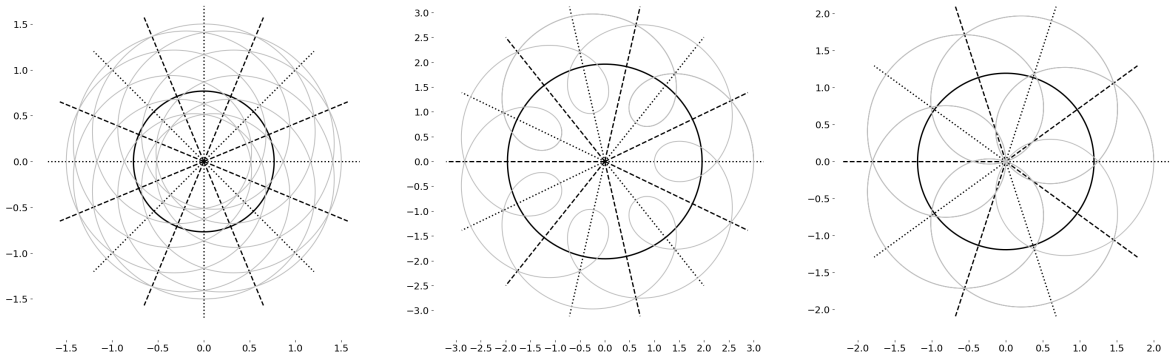
$$|b|\Big(\frac{|c|m}{n+2m}\Big)^{m/(n+m)} = \frac{|c|n}{n+2m} + \frac{|c|m}{n+2m}, \quad \text{so}$$

$$|b| = \frac{\frac{|c|n}{n+2m} + \frac{|c|m}{n+2m}}{\left(\frac{|c|m}{n+2m}\right)^{m/(n+m)}} = |c|^{n/(n+m)}\left(\Big(\frac{m}{n+2m}\Big)^{n/(n+m)} + \Big(\frac{n}{n+2m}\Big)\Big(\frac{n+2m}{m}\Big)^{m/(n+m)}\right).$$

□

例 **2.28.** 设 $h_1(z) = z^8 + bz^3 + \frac{1}{2}$、 $h_2(z) = z^7 + bz^2 + 2$ 和 $h_3(z) = z^5 + bz + 1$ 如例 *2.3* 所示。那么， h_1、 h_2 和 h_3 各有两个相同模数的根，当且仅当 b 位于 $\mathcal{R}^{\text{odd}}$（分别为 $\mathcal{R}^{\text{even}}$）与一个闭合（见图 *7A*、*7B*、*7C*）的交集中。

备注 2.29。与 *[19]* 中三项式相关联的闭圆盘半径，大于推论 *2.26* 中给出的调和三项式半径。由于雅可比矩阵只可能在这些圆盘内消失，我们将此解读为表明



(A) 对应于 $h_1 = z^8 + bz^3 + \frac{1}{2}$ 的射线与半径为$\rho_1 \approx 0.7676$的闭圆盘的可能交点。

(B) 可能相交射线的点对应于 $h_1 = z^7 + b\bar{z}^2 + 2$ 以及半径为 $\rho_2 \approx 1.9616$。

(C) 可能的交点的 rays 对应于 $h_1 = z^5 + bz + 1$ 以及半径为 $\rho_3 \approx 1.2052$ 的闭圆盘。

FIGURE 7. 灰色曲线上描绘了纤维函数 $h_1^1 - b$、$h_2^1 - b$ 和 $h_3^1 - b$ 的轨迹，它们各自都有一个模为 $v = 1$ 的根；同时还绘出了半径分别为 ρ_1、ρ_2 和 ρ_3 的圆。点线表示偶射线（$\mathcal{R}^{\text{even}}$），虚线表示奇射线（$\mathcal{R}^{\text{odd}}$）。

调和三项式可能出现奇异零点的区域比非调和三项式的更小。

ACKNOWLEDGEMENTS

作者 rs 感谢尤卡坦自治大学给予的支持 .

FUNDING

W. Barrera 获得了 SECIHTI 的部分资助，资助编号为 SNI 45382。J.P. Navarrete 获得了 SECIHTI 的部分资助，资助编号为 SNI 44867。L. Campa 感谢 SECIHTI 通过国家奖学金项目提供的支持（540598）。

DECLARATIONS

2.1. 利益冲突。 作者声明不存在利益冲突。

References

[1] J. H. An. 扰动作用下的引力透镜：具有不变焦散的扰动势的对称性。皇家天文学会月刊，356(4):1409–1428，2005年02月。[2] G. Barrera、W. Barrera 和 J. P. Navarrete。调和三项式的根的个数。数学分析与应用杂志，514(2):126313，2022年。[3] G. Barrera、W. Barrera 和 J. P. Navarrete。《调和三项式的根的个数》勘误，[j. math. anal. appl. 514 (2) (2022) 126313]。数学分析与应用杂志，535(1):128213，2024年。[4] G. Barrera、W. Barrera 和 J. P. Navarrete。调和三项式的 Egerv´ary 定理。匈牙利数学学报，172(1):170–186，2024年。[5] D. Belki´c。Lambert 级数、Bell 多项式和 Fox–Wright 函数中的所有三项式根及其幂和对数：基因组多重性在受辐照细胞存活中的示例。数学化学杂志，57(1):59–106，2019年01月。[6]P. Bohl。关于三项方程理论。Mathematische Annalen，65(4):556–566，1908年。[7]M. Brilleslyper、J. Brooks、M. Dorff、R. Howell 和 L. Schaubroeck。单参数调和三项式族的零点。美国数学会会刊 B 辑，7:82–90，2020年。[8] P. Duren。《平面上的调和映射》。剑桥数学专著丛书。剑桥大学出版社，2004年。[9] P. Duren、W. Hengartner 和 R. S. Laugesen。调和函数辐角原理。美国数学月刊，103(5):411–415，1996年。[10] J. Egerv´ary。关于三项方程。Matematikai ´es Fizikai Lapok，37:36–57，1930年。[11]L. Euler。关于 Lambert 级数及其诸多显著性质。圣彼得堡帝国科学院学报 2，29–51（1783）（原始出版年份：1773）；重印于 L. Euler，《数学著作》，第一辑《代数论述》，6(6):350–369，1921年。[12]L. Euler。关于重复的指数公式。重印于《莱昂哈德·欧拉全集》，第一辑，《数学著作》（原始出版年份：1777），5(15):268–297，1927年。[13]G. R. Greenfield 和 D. Drucker。关于三项式的判别式。线性代数及其应用，62:105–112，1984年。[14]D. Khavinson 和 G. Neumann。从代数基本定理到天体物理学：一条“调和”之路。美国数学会通报，55，2008年01月。[15] D. Khavinson 和 G. ´Swiatek。关于某些调和多项式的零点个数。美国数学会会刊，2(131):409–414，2003年。[16] J. Lawrence。《特殊平面曲线目录》。多佛数学丛书。多佛出版社，1972年。[17] J. M. Monsingh、A. Sinha 和 H. Chung。利用广义一致性策略为双积分器动态智能体生成旋轮线图案。European

控制杂志，76:100928，2024。[18] O. S`ete 和 J. Zur。平面上的调和映射下原像的数量与位置。*Annales Fennici Mathematici*，46(1):225–247，2021年6月。[19] T. Theobald 和 T. De Wolff。三项式的根的模。*Mathematische An-nalen*，366:219–247，2016。

Facultad de Matemáticas, UADY.电子邮箱：bvargas@correo.uady.mx
Facultad de Matemáticas, UADY.电子邮箱：lucia.campa@alumnos.uady.mx
Facultad de Matemáticas, UADY.电子邮箱：jpnavarrete@correo.uady.mx