arXiv:2602.11303v1 [math.RA] 11 Feb 2026

弱 σ-余挠环

MANUEL CORT´ES-IZURDIAGA、SERGIO ESTRADA 和 JOS´E MANUEL FRESNEDA

摘要。 我们研究一类环 R，其中每个内射模的直和 R- 模都是余挠的。我们称这类环为弱 Σ-余挠环。其定义性质可视为 Chase 对相干性的刻画的对偶，即以每个投射 R-模的直积都是平坦的来刻画相干性。更一般地，我们研究内射模的直和具有有限余挠维数的环，并称之为弱 n-Σ-余挠环；此外，还研究余挠模的直和具有有限余挠维数的环（称为 n-Σ-余挠环）。在此过程中，我们得到了 n-完美环的新刻画，并推广了 Guil Asensio 和 Herzog，以及 ˇSaroch 和 ˇS ˇtov´ıˇcek 先前的结果。

1 引言

相干环和完美环分别由 Chase [4] 和 Bass [2],在 1960年 的奠基性著作中引入。关于相干性，令 R 为任意环。作为 Chase 定理 [4,定理 2.1], 的推论，右相干环可以通过以下性质定义：任意一族投射左 R-模的直积都是平坦的。事实上，只需检验任意一族 R副本的直积即可。在模型论语言中，右相干环可以用如下性质刻画：投射左 R-模的类 Proj 的可定义闭包包含于（事实上等于）所有平坦左 R-模的类 Flat。

反过来，左完美环的特征是 Flat 类与 Proj 类相等。现在，平坦左 R-模是所谓平坦-余扭对 (Flat,Cot) 的左半部分。这里，Cot 表示余挠左 R-模的类，即满足 $\mathrm{Ext}^1_R(F, C) = 0$ 的左 R-模 C，其中任意平坦左R-模 F。平坦-余扭对是证明平坦覆盖猜想的关键工具（见 Bican、El Bashir 和 Enochs [3]）。使用这一术语，众所周知，环 R 是左完美的，当且仅当 $\mathrm{Cot} = R$-Mod（所有左 R-模的类）。在 [14, 定理 19], 中，Guil Asensio 和 Herzog 证明了：如果环 R 使得类 Cot 对任意直和封闭，那么 R 必须是左完美的，从而为左完美环提供了一个新的刻画。

本文旨在研究内射左R-模类 Inj 和 Cot 在直和运算下的闭包性质，动机有二。其一，我们的结果可特化为一个在本质上与上文提到的 Chase 关于相干性的原始等价条件互为对偶的论断。其二，我们将 Guil Asensio 和 Herzog 对左完美环的刻画扩展到更广泛的所谓左 n-完美环这一类，也就是说，这类环满足每个平坦左 R-模的投射维数至多为 n。值得注意的是，文献中也将这一性质称为 $\mathrm{splf}(R) \leq n$，其中 $\mathrm{splf}(R)$ 表示平坦左 R- 模的投射长度上确界。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16E10, 16D90, 16L30.*Key words and phrases.* 左 n-完美环，左弱 Σ-余挠环， n-Σ-余挠模，内射模的直和。M.C.I. 和 J.M.F. 获得了资助项目 PID2024-158993NB-100 的部分支持。S.E. 和 J.M.F. 获得了资助项目 PID2024-155576NB-I00 的部分支持。两项资助均由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 /FEDER, UE 资助。

第2个问题在第4节的定理 4.2 中得到讨论。我们称左 R-模 M 是n-Σ-余挠的，若对于每个指标集 I，直和 $M^{(I)}$ 的余挠维数至多为 n。此外，若环 R 满足作为左 R-模的 R 是 n-Σ-余挠的，则称其为左 n-Σ-余挠环。在特殊情形$n=0$下，我们得到经典的 Σ-余挠模和左 Σ-余挠环（[14]）的概念。

刻画左 n-完美环。设 $n \geq 0$ 为整数。对任意环 R，下列陈述等价：

(1) R 是左 n-完美的。(2) 每个余挠左 R-模都是 n-Σ-余挠的。(3) R 作为左 R-模的余挠包络 $C(R)$是 n-Σ-余挠的。(4) R 是左 n-Σ-余挠的。(5) R 作为左 R-模的纯内射包络 $PE(R)$是 n-Σ-余挠

n.

本定理证明中的一个关键要素是对ˇSaroch与ˇSˇtov´ıˇcek [30,定理3.3]所给结果的推广；参见定理3.7。

现在，如果我们放宽上述条件（2），只要求每个内射左 R-模都是 n-Σ-余挠的（等价地，每个左内射 R-模的直和都具有至多 n的有限余挠维数），则得到以下结果（见定理5.1）：

刻画内射模的直和具有有限余挠维数的环。设 $n \geq 0$ 为一个整数。则在任意环 R上，以下断言等价：

(1) 每个内射左 R-模都是 n-Σ-余挠的。(2) 左 R-模 R^+ 是 n-Σ-余挠的，其中 R^+ 是 R_R的特征模。(3) 可定义闭包中任意左 R-模（该可定义闭包由内射左 R-模构成）都具有至多 n的有限余挠维数。(4) 每个 FP-内射 R-模都具有至多 n的有限余挠维数。

满足上述任一等价条件的环称为左弱 n-Σ-余挠环。这类环可视为以下环类的内射对偶对应类：对于这些环，每个投射左 R-模的直积都具有有限平坦维数。后者由 Cort´es-Izurdiaga 在 [7]中以右弱 n-相干环之名进行了研究。

情形 $n = 0$ （推论5.4）尤为重要，因为它为上述右相干环的通常刻画提供了一个自然的类比。在此情形下，我们将简单地称 为左弱 Σ-余挠环。

Chase 关于内射模直和的对偶刻画。环 R 的以下性质彼此等价：

(1) R 是左弱 Σ-余挠的，即任意内射左 R-模的直和都是余挠的。(2) 左 R-模 R^+ 是 Σ-余挠的，其中 R^+ 是 R_R的特征模。(3) 内射左 R-模的可定义闭包包含于 Cot 中。(4) 每个 FP-内射 R-模都是余挠的。

此外，在命题 5.5 中，我们汇集了左弱 Σ-余挠环的若干模论性质。

我们想强调，左弱 Σ-余挠环在文献中早已隐含出现。特别是，Estrada、P´erez 和 Zhu [12, 引理 5.1], 在相对同调代数的框架下证明，若平坦类构成一个平衡对的左侧（参见 [12]，了解

相关术语），那么一个环 R 是左弱 Σ-余挠，当且仅当它是左完美环（等价地， R 是左 Σ-余挠）。我们在推论 5.11 中将这一结果推广到左弱 n-Σ-余挠环。

本文最后列举了大量例子和反例，涵盖文中引入的各类环。当然，左诺特环和左完美环都是左弱 Σ-余挠环。然而，许多左弱 Σ-余挠环既非左诺特环，也非左完美环；我们给出了形式三角矩阵环和路径环中的具体例子（见例 5.10(2)和例 5.16(2)）。注意，这类非诺特、非完美的左弱 Σ-余挠环的存在，使得我们可以将 [12, 定理 5.2]和 [9, 定理 4.1]中平坦平衡性缺失的结论推广到诺特环以外的范围。

此外，每个左 n-完美环都是左弱 n-Σ-余挠环，而每个左弱 r-Σ-余挠环都是左弱 n-Σ-余挠环，对所有 $0 \leq r \leq n$皆成立。尽管如此，Kaplansky 的一个经典例子（[18] 见例 5.10(3)）表明，存在左弱 n-Σ-余挠环，满足 $n > 0$，但并非左弱 Σ-余挠。

最后，利用 Nagata 构造（[24, 附录 A1，例 1]），我们在例 5.12(1) 中展示了一个左弱 Σ-余挠环，它对任意 n-都不是左 $n \geq 0$-完美环。这表明，左 n-完美环类严格包含于左弱 n-Σ-余挠环类。

2 预备知识

全文中， R 表示一个（不一定是交换的）含单位元的环。除非另有说明，所有模均假定为左 R-模。若讨论右 R-模，则会明确指出。我们用 Flat、内射模和 Cot 分别表示平坦模、内射模和余挠R-模的类。对于任意整数 $n \geq 0$，记 Cot_n 为余挠维数至多为 n的 R-模类，并注意到 Cot_0 =Cot。回顾一下， R-模 M 的特征模是右 R-模 $M^+ := \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$；右 R-模的定义类似。

现在回顾同调代数中的一些标准概念。给定一个 R-模类 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathcal{C}^{\perp}$ 表示它的右正交类，即由满足以下条件的 R-模 X 组成的类：对于所有 $C \in \mathcal{C}$，$\mathsf{Ext}^1_R(C, X) = 0$。左正交类可对偶地定义。若一对类 $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ 满足 $\mathcal{C}^{\perp} = \mathcal{L}$ 且${}^{\perp}\mathcal{L} = \mathcal{C}$，则称其为余挠对。若对每个 R-模 M，都存在正合列，则称该余挠对完备：

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow C \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad \text{and} \quad 0 \longrightarrow M \longrightarrow L' \longrightarrow C' \longrightarrow 0,$$

其中 C, $C' \in \mathcal{C}$且 L, $L' \in \mathcal{L}$；若对所有 $i \geq 1$、 $C \in \mathcal{C}$和 $L \in \mathcal{L}$，$\mathsf{Ext}^i_R(C, L) = 0$，则称其为遗传的。

现在转向与模的可定义类相关的概念。若一个 R-模类 $\mathcal{D}$ 在直积、直极限和纯子模下封闭，则称其为可定义的。对于一个 R-模类 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathsf{Cogen}(\mathcal{C})$ 表示由 $\mathcal{C}$余生成的模类，即来自 $\mathcal{C}$ 的模的直积的所有子模所组成的类。类似地，$\mathsf{Cogen}_*(\mathcal{C})$ 表示来自 $\mathcal{C}$ 的模的直积的所有纯子模所组成的类，而 $\langle \mathcal{C} \rangle$ 表示 $\mathcal{C}$ 的可定义闭包，即包含 $\mathcal{C}$ 的最小可定义类。若 $\mathcal{C} = \{C\}$，则分别简写为 $\mathsf{Cogen}(C)$、$\mathsf{Cogen}_*(C)$ 和 $\langle C \rangle$。

众所周知，每个可定义类都对纯满同态像 [28, 定理 3.4。8]封闭。此外，可定义闭包 $\langle \mathcal{C} \rangle$ 可以通过先对 $\mathcal{C}$ 取积，再取纯子模，最后取纯满同态像 [15, 引理 2。9]来构造。进一步地，对于任意可定义类 $\mathcal{D}$，存在一个纯内射模 $C \in \mathcal{D}$，使得 $\mathsf{Cogen}_*(C) = \mathcal{D}$ [28, 推论 5.3。52]；这样的R-模称为 $\mathcal{D}$的初等余生成元。

我们以一些与（无限）呈示 R-模有关的事实结束本节。设 λ 为一个基数；我们将 λ^+ 记作 λ的后继基数。若 λ 等于一个由少于 λ 个严格小于 λ的基数组成的族之和，则称 λ 为奇异的。否则，该基数为正则的。

给定一个无限正则基数 λ和一个 R-模 M，若 M存在基数严格小于 λ的生成集，则称其为 $<\lambda$-生成。类似地，若存在正合列 $R^{(\gamma)} \longrightarrow R^{(\mu)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中基数满足 μ，$\gamma < \lambda$，则称 M 为 $<\lambda$-呈示。一个短正合列

$$0 \to M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \to 0,$$

若每个 $<\lambda$-呈示模相对于该短正合列都是投射的，则称其为 λ-纯。在此情况下，称 f 为 λ-纯单态射，称 g为 λ-纯满态射。若 $\lambda = \aleph_0$，则得到通常的纯正合列。

由于我们的一些结果涉及 λ-连续有向系统，接下来我们回顾一些 [30]定义，这些定义将在全文中使用：

- 对于正则不可数基数 λ，一个有向系统

$$\mathcal{M} = (M_i, f_{ji} : M_i \to M_j \mid i < j \in I)$$

的模称为 λ-连续，如果偏序集 $(I, \leq)$ 中所有长度为 $<\lambda$ 的链都有上确界，并且对于任意这样的链 $J \subseteq I$，都有 $M_{\sup J} = \varinjlim_{j \in J} M_j$。
- 设 M 是一个 R-模，$\mathcal{C}$ 是一类 R-模。若 M 是由来自 ${}^{\perp}\mathcal{C}$ 的 $<\lambda$-呈示模组成的 λ-连续有向系统 $\mathcal{S}$ 的直极限，则称 M 为 几乎 $(\mathcal{C}, \lambda)$-投射的。

3 n-Σ-余挠模

设 M 是一个 R-模。我们刻画了 M 的任意多个副本的直和何时具有有限余挠维数。为此，对于每个整数 $n \geq 0$，我们将 [30, 定理 3.3] 推广到更广的类 Cot_n 。这一推广旨在理解余挠维数有界的 R-模的结构，并为随后用这类 R-模刻画环提供一个框架。

定义 3.1。设 M 是一个 R-模，且设 $n \geq 0$ 是一个整数。称 M 是 n-Σ-余挠，如果 M 的任意多个副本的直和都属于 Cot_n。在 $n = 0$ 的情形下，M 简称为 Σ-余挠。

引理 3.2。设 $n \geq 0$ 是一个整数，且设 $\mathcal{C}$ 是一个 R-模的类，并且对直积封闭。那么以下陈述等价：

(1) 类 $\mathcal{C}$ 中的每个 R-模都是 n-Σ-余挠的。(2) 对每个 R-模族 $\{C_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{C}$，直和 $\bigoplus_{i \in I} C_i$ 属于 Cot_n。

证明。显然，(2) $\Rightarrow$ (1)。因此，只需证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。设 $\{C_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{C}$ 是一个R-模族，并令 $T := \prod_{i \in I} C_i$。根据假设，$T \in \mathcal{C}$。注意，每个 C_i 都是 T的一个直和项。因此，R-模 $\bigoplus_{i \in I} C_i$ 是 $T^{(I)}$的一个直和项。由 (1)，模 T 是 n-Σ-余挠的。由于类 Cot_n 对直和项封闭（[21, 命题 19.2.1]），故 $\bigoplus_{i \in I} C_i$属于 Cot_n。□

下列模类将在 Cot_n 的研究中起核心作用：

定义 3.3. 设 $n \geq 1$ 是一个整数。我们用 $\mathcal{C}_n$ 表示所有这样的类：其中 R-模 K 存在一个正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow L_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中每个 L_i 都是一个自由 R-模，而 M 是一个平坦 R-模。注意，类 $\mathcal{C}_n$ 与所有满足以下条件的 R-模 K 构成的类相同：存在如上所述的正合列，其中模 L_i 仅要求是投射的（而非自由的）。

为了建立我们的主要结果，我们首先以三个关键引理的形式发展若干预备工具。这些引理刻画了属于类 Cot_n 的 R-模的本质性质。

引理 3.4. 设 $n \geq 1$ 为一个整数。则下列陈述成立：

(1) $\mathcal{C}_n$ 中的每个 R-模都是平坦的且为 Mittag–Leffler 模。特别地，对任意不可数基数 λ，每个$< \lambda$-生成的 R-模 $K \in \mathcal{C}_n$ 都是 $< \lambda$-呈示的。(2) 有等式 $\mathsf{Cot}_n = \mathcal{C}_n^{\perp}$。因此，$\mathcal{C}_n \subseteq {}^{\perp}\mathsf{Cot}_n$。

证明。 为证明 (1)，注意到每个 R-模在 $\mathcal{C}_n$ 中是一个自由（因而平坦且为 Mittag–Leffler）的 R-模的纯子模。此外，平坦 Mittag–Leffler 模类在纯子模下封闭；参见 [13, 推论 3.20(a)]。最后的断言则直接由 [13, 推论 3.16(c)] 得出。我们现在证明 (2)。回忆：一个 R-模 D 属于 Cot_n 当且仅当 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F, D) = 0$ 对每个平坦R-模 F [21,命题 19.2。1]。

Let $A \in \mathcal{C}_n^{\perp}$ 并设 F 是一个平坦的 R-模。取 F 的长度为 n的部分自由分解：

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

根据构造，$V \in \mathcal{C}_n$，且存在一个同构 $\mathrm{Ext}_R^1(V, A) \cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(F, A)$。由于 $A \in \mathcal{C}_n^{\perp}$，我们有 $\mathrm{Ext}_R^1(V, A) = 0$，因此 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F, A) = 0$，这表明 $A \in \mathsf{Cot}_n$。
反过来，设 $T \in \mathsf{Cot}_n$ 且 $K \in \mathcal{C}_n$。那么存在一个正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中 L_i 自由且 M 平坦。因此 $\mathrm{Ext}_R^1(K, T) \cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, T) = 0$，故 $T \in \mathcal{C}_n^{\perp}$。这证明了 $\mathsf{Cot}_n = \mathcal{C}_n^{\perp}$ 的等式，并由此得到包含关系 $\mathcal{C}_n \subseteq {}^{\perp}\mathsf{Cot}_n$。□

引理 3.5。 固定一个整数 $n \geq 1$。设 λ 为一个不可数基数，并设 $K \in \mathcal{C}_n$。那么存在一个正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F(I_{n-1}) \xrightarrow{d_{n-1}} F(I_{n-2}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(I_1) \xrightarrow{d_1} F(I_0) \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0,$$

其中，对于每个 $r = 0$，1，……，$n-1$，模 $F(I_r)$ 表示以 I_r 为基的自由 R-模。
设 K' 是 K 的任意 $< \lambda$-生成子模，设 L' 是 $\mathrm{Im}(d_1)$ 的任意 $< \lambda$-生成子模，并设对于所有 $r = 1$，2，……，$n-1$，$J_r \subseteq I_r$ 是基数为 $< \lambda$ 的任意子集。那么存在子集 J_r'，使得 $J_r \subseteq J_r' \subseteq I_r$ 且对于所有 $r = 1$，2，……，$n-1$，$|J_r'| < \lambda$，并且存在一个正合列

$$0 \longrightarrow K'' \longrightarrow F(J_{n-1}') \longrightarrow F(J_{n-2}') \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(J_1') \longrightarrow L'' \longrightarrow 0,$$

满足以下条件：

(1) 包含关系 $K' \subseteq K'' \subseteq K$ 和 $L' \subseteq L'' \subseteq \mathrm{Im}(d_1)$ 成立，且 K'' 和 L'' 均为 $< \lambda$-生成的。(2) 子模 L'' 是 $F(I_0)$ 中的纯子模。因此，$K'' \in \mathcal{C}_n$。

证明。 该结果对应于 [31, 命题 1。4]。 □

引理 3.6. 设 $n \geq 1$ 为一个整数。那么，对于每个正则不可数基数 λ，每个 R-模 $\mathcal{C}_n$ 都可以表示为一个由 $\mathcal{C}_n$ 中的 $< \lambda$-呈示R-模组成的 λ-连续有向系统的直极限。

证明。 我们分两种情况讨论。首先考虑 $n = 1$ 的情形。设 $K \in \mathcal{C}_1$。那么存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F(I_0) \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中， $F(I_0)$ 表示以 I_0 为基的自由 R-模，而 M 是一个平坦的 R-模。
令 $\mathcal{S}_\lambda$ 为 K 的所有由 $< \lambda$ 生成的纯子模所成的类。由引理 3.4(1)， K 这个 R-模是平坦的且满足 Mittag–Leffler 条件。由 [13, 推论 3.20] 可知， K 的每个基数为 $< \lambda$ 的子集都包含在 K 的一个纯子模中，该纯子模是 $< \lambda$-呈示的。利用这一事实并结合 λ 的正则性，我们得出，按包含关系排序的 $\mathcal{S}_\lambda$ 构成一个 λ-连续有向系统，其直极限为K。最后注意到， $\mathcal{S}_\lambda$ 中的每个模都属于 $\mathcal{C}_1$，因为类 $\mathcal{C}_1$ 对纯子模封闭，且由引理 3.4(1) 可知它是 $< \lambda$-呈示的。因此， K 可以表示为一个 λ-连续有向系统的直极限，该系统由来自 $\mathcal{C}_1$ 的 $< \lambda$-呈示 R-模组成。

现在我们转向 对 $n \geq 2$ 的引理的证明。令 $K \in \mathcal{C}_n$。那么存在一个正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F(I_{n-1}) \xrightarrow{d_{n-1}} F(I_{n-2}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(I_1) \xrightarrow{d_1} F(I_0) \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0,$$

其中，对于每个 $r = 0$， 1， ....., $n-1$， $F(I_r)$ 表示以 I_r 为基的自由 R-模。
令 $\mathcal{S}_K$ 表示如下形式的正合复形类

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow F(I'_{n-1}) \longrightarrow F(I'_{n-2}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(I'_1) \longrightarrow M' \longrightarrow 0,$$

其中:

(1) K' 是 K 的一个 $< \lambda$-生成子模，而 M' 是 $\mathrm{Im}(d_1)$ 的一个 $< \lambda$-生成纯子模。

(2) $F(I'_r)$ 是自由的，以 $I'_r \subseteq I_r$ 为基，且对每个 $r = 1$， 2， . . . ， $n-1$ 满足 $|I'_r| < \lambda$。

由于 M' 是 $\mathrm{Im}(d_1)$ 的纯子模，且 $\mathrm{Im}(d_1)$ 是 $F(I_0)$ 的纯子模，因此 $K' \in \mathcal{C}_n$。 ˆ 我们在 $\mathcal{S}_K$ 上如下定义一个序。给定 $\mathbb{C}$， $\mathbb{C} \in \mathcal{S}_K$:

$$\mathbb{C} = 0 \longrightarrow K' \longrightarrow F(I'_{n-1}) \longrightarrow F(I'_{n-2}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(I'_1) \longrightarrow M' \longrightarrow 0,$$

$$\hat{\mathbb{C}} = 0 \longrightarrow K'' \longrightarrow F(I''_{n-1}) \longrightarrow F(I''_{n-2}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(I''_1) \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

我们称 $\mathbb{C}$ 小于或等于 ˆ$\mathbb{C}$，并记作 $\mathbb{C} \leq \hat{\mathbb{C}}$，当且仅当 $K' \subseteq K''$， $I'_r \subseteq I''_r$ 对每个$r = 1$， . . . ， $n-1$，且 $M' \subseteq M''$。利用引理 3.5，容易验证 $(\mathcal{S}_K, \leq)$ 是一个有向系统，其结构态射由包含映射给出。

为了证明 $(\mathcal{S}_K, \leq)$ 是 λ-连续的，设 $\{\mathbb{C}_\alpha \mid \alpha < \theta\} \subseteq \mathcal{S}_K$ 是一条长度为 $\theta < \lambda$ 的链。对于每个 $\alpha < \theta$, 复形:

$$\mathbb{C}_\alpha = 0 \longrightarrow K'_\alpha \longrightarrow F(I^\alpha_{n-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(I^\alpha_1) \longrightarrow M'_\alpha \longrightarrow 0$$

满足以下性质： K'_α 是由 $< \lambda$ 生成的， M'_α 是由 $< \lambda$ 生成的，且是 $\mathrm{Im}(d_1)$ 中的纯子模，并且每个 $F(I^\alpha_r)$ 都是一个以 $I^\alpha_r \subseteq I_r$ 为基的自由模，使得 $|I^\alpha_r| < \lambda$。因此，链中所有复形的并本身就是正合复形:

$$0 \longrightarrow \bigcup_{\alpha<\theta} K'_\alpha \longrightarrow F\Big(\bigcup_{\alpha<\theta} I^\alpha_{n-1}\Big) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F\Big(\bigcup_{\alpha<\theta} I^\alpha_1\Big) \longrightarrow \bigcup_{\alpha<\theta} M'_\alpha \longrightarrow 0.$$

由 λ 的正则性以及任意一条纯子模链的并仍是纯子模这一事实[13, 引理 2.25(d)],可知，这个复形属于 $\mathcal{S}_K$。

现在，根据引理 3.5， λ-连续有向系统 $\mathcal{S}_K$ 的直极限是复形:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F(I_{n-1}) \xrightarrow{d_{n-1}} F(I_{n-2}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(I_1) \xrightarrow{d_1} \mathrm{Im}(d_1) \longrightarrow 0.$$

因此， K 可以表示为一个由 λ-连续有向系统的直极限，该系统由 $< \lambda$-呈示的 R-模构成，这些模来自 $\mathcal{C}_n$ （回顾引理 3.4（1）， R-模中的每一个 $\mathcal{C}_n$ 都是 $< \lambda$-呈示的）。□

定理 3.7. 设 $n \geq 0$ 为一个整数，且设 M 是一个 n-Σ-余挠 R-模。那么， R在 $\{M\}$ 的可定义闭包中的每个模都属于 Cot_n。

证明。 情形 $n = 0$ 恰为 [30, 定理 3.3]。现在，假设 $n \geq 1$；我们采用与证明 [30, 定理 3.3]中类似的论证。

首先，我们证明 $\mathsf{Cogen}_*(M) \subseteq \mathsf{Cot}_n$。设 $K \in \mathcal{C}_n$。由引理 3.6， K 是来自 $\mathcal{C}_n$的 λ-连续直极限，其中各项为$< \lambda$-呈示的 R-模。因此，对于任意基数 κ和任意正则的 $\lambda > \aleph_0$， K都是几乎（$M^{(\kappa)}$, λ）-投射的。于是，由 [30,命题 3.2]， $K \in {}^{\perp}\mathsf{Cogen}_*(M)$。由此可得 $\mathcal{C}_n \subseteq {}^{\perp}\mathsf{Cogen}_*(M)$。由引理 3.4(2)， $\mathsf{Cot}_n = \mathcal{C}_n^{\perp}$，故我们得出 $\mathsf{Cogen}_*(M) \subseteq \mathsf{Cot}_n$。
最后，设 T 是 $\{M\}$的可定义闭包中的任意 R-模。那么存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow T \longrightarrow 0,$$

其中 A， $B \in \mathsf{Cogen}_*(M)$。由于 $\mathsf{Cogen}_*(M) \subseteq \mathsf{Cot}_n$，且 Cot_n在单态射的余核下封闭（见 [21, 命题 19.2.3]），因此可得 $T \in \mathsf{Cot}_n$。□

4 n-Σ-余挠环

本节将使用定理 3.7 扩展 [14, 定理 19 和推论 20]，以刻画左 n-完美环。回顾一下，给定 $n \geq 0$, 若环 R 的每个平坦模的投射维数都至多为 n，则称其为左 n-完美环。等价地，定义不变量 $\mathsf{splf}(R)$ 为平坦 R-模的投射长度的上确界，则该不变量等于 $\leq n$。注意，由 [7, 引理 3.9], 可知，如果每个平坦 R-模的投射维数有限，那么对于某个 $n \geq 0$， R 是左 n-完美环。还要注意，R 是左 n-完美环，当且仅当每个 R-模都属于 Cot_n （见 [21, 推论 19.2.7]）。左 n-完美环的经典例子包括克鲁尔维数至多为 n的有限维交换诺特环，以及左戈伦斯坦全局维数至多为 n 的非交换环 R （根据 [16, 定理 2.28] 和[17, 命题 6]）。此外，由 [32], 可知，基数为 $\aleph_n$ 的每个环都是左（且右）$(n+1)$-完美环。

定义 4.1. 设 $n \geq 0$ 为一个整数。 R 称为左 n-Σ-余挠环，如果 R作为左R-模，是 n-Σ-余挠的。在 $n = 0$ 的情况下， R 简称为左 Σ-余挠环。

下述定理表明，左 n-perfect 环类恰好与左n-Σ-余挠环类一致，并给出了这一类环的若干等价刻画。

定理 4.2. 设 $n \geq 0$ 为一个整数。对于环 R，下列命题等价 t:

(1) 每个余挠 R-模都是 n-Σ-余挠的。(2) 余挠 R-模的任一直极限都属于 Cot_n。(3) R 是左 n-完全的。(4) 类 Cot_n 在直和下封闭。(5) 类 Cot_n 在直极限下封闭。(6) R 是左 n-Σ-余挠的。(7) $C(R)$, 即 ${}_R R$的余挠包络，是 n-Σ-余挠的。(8) 每个纯内射 R-模都是 n-Σ-余挠的。(9) $PE(R)$, 即 ${}_R R$的纯内射包络，是 n-Σ-余挠的。(10) 每个纯内射 R-模的直极限都属于 Cot_n。

证明。 显然，(3)⇒蕴含 (2)，而 (2)⇒蕴含 (1)。现在我们证明 (1)⇒蕴含 (3)
由于类 $\langle \mathsf{Cot}\rangle$ 是可定义的，因此它存在一个初等余生成元 $D_0 \in \langle \mathsf{Cot}\rangle$。此外， D_0 是纯内射的，因而属于 Cot。每个 R-模 $T \in \langle \mathsf{Cot}\rangle$ 都是若干个 D_0 的直积的纯子模，因此 $\langle \mathsf{Cot}\rangle = \langle D_0\rangle$。由 (1)， D_0 是 n-Σ-余挠的，因此定理 3.7 得出 $\langle D_0\rangle \subseteq \mathsf{Cot}_n$。因此， $\langle \mathsf{Cot}\rangle \subseteq \mathsf{Cot}_n$。由于余挠对 (Flat,Cot) 是完备的，对于每个 R-模 M，都存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

具有 $C \in \mathsf{Cot}$ 和 $F \in \mathsf{Flat}$。由于 M 是 C 的纯子模，因此可知 $M \in \langle \mathsf{Cot}\rangle \subseteq \mathsf{Cot}_n$。特别地，每个 R-模的余挠维数至多为 n，因此根据 [21, Corollary 19.2.7]， R 是左 n-完美的。由此我们证明了条件 (1)、(2) 和 (3) 等价。此外，注意到 (3)⇒(5)、(5)⇒(4)，以及 (4)⇒(1)。因此，前五个条件等价。

显然，(3) 蕴含 (6) 和 (7)。接下来我们证明 (6)⇒(3)。将定理 3.7 应用于 R-模 R，可得 $\langle R\rangle \subseteq \mathrm{Cot}_n$。由于 $\langle R\rangle = \langle \mathrm{Flat}\rangle$，因此每个平坦的 R-模都属于 Cot_n。由于余挠对 (Flat，Cot) 是完备的，对于任意 R-模 M，存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

具有 $C \in \mathsf{Cot}$ 和 $F \in$平坦。因此，由 [21, 命题 19.2.3]， $M \in \mathsf{Cot}_n$ 。于是，每个 R-模的余挠维数至多为 n，因此根据 [21, 推论 19.2.7]， R 是左 n-完美的。
现在，我们证明 (7)⇒(3)。将定理 3.7 应用于 R-模 $C(R)$，得到 $\langle C(R)\rangle \subseteq \mathsf{Cot}_n$。此外，由于 R 是 $C(R)$ 的纯子模，可知 $\langle \mathsf{Flat}\rangle = \langle R\rangle \subseteq \langle C(R)\rangle \subseteq \mathsf{Cot}_n$。因此，每个平坦的 R- 模都属于 Cot_n，论证过程与证明 (6)⇒(3) 时完全相同。
至此，我们已证明前七个条件等价。显然，(3) 蕴含 (8) 和 (9)。现在证明 (8)⇒(3)。如证明 (1)⇒(3) 时所示，所有 R-模构成的类与可定义闭包 $\langle \mathsf{Cot}\rangle$相同。此外，存在一个纯内射 R-模 D_0 ，使得$\langle \mathsf{Cot}\rangle = \langle D_0\rangle$。根据假设 (8)， D_0 是 n-Σ-余挠的。应用定理 3.7，得到 $\langle D_0\rangle \subseteq \mathsf{Cot}_n$。因此，每个 R-模都属于 Cot_n，故根据 [21, 推论 19.2.7]， R 是左 n-完美的。

现在，我们证明 (9)⇒(6)。根据假设 (9)， $PE(R)$ 是 n-Σ-余挠。应用定理3.7，我们推出 $\langle PE(R)\rangle \subseteq \mathrm{Cot}_n$。由于 R是 $PE(R)$ 的纯子模，且可定义类在直和运算下封闭，因此 R 是左 n-Σ-余挠环。因此，条件 (6) 成立。
最后，显然 (10)⇒(8)，且 (3)⇒(10)。因此，所有条件都等价。 □

注 4.3。(1) 设 $n \geq 0$ 为一个整数。将引理3.2 应用于类 Cot（或纯内射 R-模的类），再结合定理4.2，可得环 R 是左 n-完美环，当且仅当每个余挠 R-模的直和都属于 Cot_n。等价地，当且仅当每个纯内射 R-模的直和都属于 Cot_n时，此结论成立。

(2) 将 [7, 引理 39] 对偶化到内射情形，可得以下结果：如果 R 是一个环，且每个余挠 R-模的直和（或每个纯内射 R-模的直和）都具有有限余挠维数，那么存在一个整数 $n \geq 0$ ，使得每个此类直和的余挠维数都有一个统一上界 n。因此，应用定理4.2，可得 R 是左 n-完全环。

将定理4.2 专门应用于情形 $n = 0$，可得以下结果；该结果可与[14,定理 19 和推论 20]相比较。

推论 4.4. 对于任意的环 R，以下命题等价：

(1) 每个余挠 R-模都是 Σ-余挠的。(2) 类 Cot 在直极限下封闭。(3) R 是左完美的。(4) R 是左 Σ-余挠的。(5) $C(R)$，即 R的余挠包络，是 Σ-余挠的。(6) 每个纯内射 R-模都是 Σ-余挠的。(7) $PE(R)$，即 R的纯内射包络，是 Σ-余挠的。(8) 纯内射模的每个直极限都是余挠的。

满足定理4.2 中关于 $n = 1$ 的条件的环很有趣，因为它们满足余挠模的纯商仍是余挠模这一性质：

推论 4.5。对于环 R，以下条件等价：

(1) R 是左 1-完美的。(2) Cot 在纯商下封闭。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。显然。

(2) $\Rightarrow$ (1)。设 M 是一个 R-模。若取它的余挠包络，

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C(M) \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

我们得到，b y (2)，即 L 是余挠的。于是，对于任意平坦 R-模 F，我们得到正合列 e

$$\mathrm{Ext}^1(F, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(F, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(F, C(M)) \longrightarrow 0$$

由此我们推得 $\mathrm{Ext}^2(F, M) = 0$，因为余挠对（Flat，Cot）是遗传的。这意味着 M 的余挠维数小于或等于 1，并且 R 是左 1-完美的。□

由于存在不是 1-完美的环，类 Cot 通常并不关于纯商封闭。然而，Cot 总是关于某些 κ-纯商封闭的：

命题 4.6。记 λ 为基数 $(|R| + \aleph_0)^+$。则 Cot 关于 λ-纯商封闭。

证明。设 C 是一个余挠 R-模，且 $f: C \to L$ 一个 λ-纯满态射。根据 [13, 引理 3.2。7],L 将是余挠的，只要对每个 $^1(F, L) = 0$ 均有 $< \lambda$-呈示平坦 R-模。设 F 是一个 $< \lambda$-呈示平坦 R-模，并取一个短正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

且为 P 投射。对于任意 $g: K \to L$，由于根据引理 3.4(1)，K 由 $< \lambda$ 呈示，且 f 是 λ-纯的，存在 $h: K \to C$，使得 $fh = g$。由于 C是余挠的，g有一个从 P到 C的扩张 j。于是，fj是 g的一个扩张。由于 g 是任意的，我们得出 $\mathrm{Ext}^1(F, L) = 0$。□

5 弱 n-Σ-余挠环

本节中，我们通过考虑以下环，来研究定理 n4.2 所刻画的左 4.2-完美环的一个较弱版本：环 R 中每个内射 R-模都是 n-Σ-余挠的，其中 $n \geq 0$ 是一个整数。

定理 5.1。设 令 $n \geq 0$ 为一个整数。那么，在任意环 R 上，以下断言等价：

(1) 每个内射 R-模都是 n-Σ-余挠的。(2) 将 R^+ 视为左 R-模时，它是 n-Σ-余挠的。(3) 内射 R-模的可定义闭包包含于 Cot$_n$。

(4) FP-内射 R-模的任一直极限都属于 Cot$_n$。(5) 内射 R-模的任一直极限都属于 Cot$_n$。(6) 每个 FP-内射 R-模都属于 Cot$_n$。

证明。 蕴含关系 (1) ⇒ (2) 是显然的。
现在证明蕴含关系 (2) ⇒ (3)。设 E 是一个内射 R-模。由于 R^+ 是 R-模范畴中的内射余生成元，存在一个集合 Λ，使得 E 嵌入到 $(R^+)^\Lambda$ 中。因为 E是内射的，该嵌入分裂，因此 E 同构于 $(R^+)^\Lambda$的一个直和项。特别地，E 是 $(R^+)^\Lambda$的一个纯子模，因此 E 属于 R^+的可定义闭包。由此可得，R^+ 的可定义闭包与所有内射 R-模构成的类的可定义闭包相同。根据假设 (2)，R^+ 是 n-Σ-余挠的。因此，由定理 3.7，内射 R-模构成的类的可定义闭包包含于 Cot$_n$，从而得到 (3)。

显然，(3) ⇒ (4)、(4) ⇒ (5) 和 (5) ⇒ (1)。因此，条件 (1)–(5) 等价。最后注意到 (3) ⇒ (6)，因为每个 FP- 内射 R- 模都属于内射 R- 模的可定义闭包，而 (6) ⇒(1) 是显然的。因此，所有断言都等价。□

定义 5.2。 若环 R 满足定理 左弱 n-Σ-余挠 的任一等价条件，则称其为5.1。当 $n = 0$ 时，称 R 为左弱 Σ-余挠环。例 5.10中给出了这一类环的若干例子。

注 5.3。 我们对定理 5.1 作如下评论。

(1) 定理 5.1 的条件 (2) 中出现的模 R^+ 可以替换为 R-模范畴中的任意内射余生成元。这是因为，任意内射余生成元的可定义闭包都与所有内射 R-模的可定义闭包相同；证明方法与前一定理中 (2) ⇒ (3) 的证明相同。(2) 将引理 3.9] 对偶化到内射情形，可得：若 R 是一个环，且每个内射 R-模的直和都具有有限余挠维数，则存在一个整数 $n \geq 0$，使得每个此类直和的余挠维数都不超过 n。因此，R 是左弱 n-Σ-余挠环。(3) 将引理 3.2 应用于内射 R-模类，可得环 R 是左弱n-Σ-余挠，当且仅当每个内射 R-模的直和的余挠维数有限且至多为 n。

将定理 5.1 应用于情形 $n = 0$，可得到以下结果。

推论 5.4。 以下断言在任意环 R上等价：

(1) 每个内射 R-模都是 Σ-余挠的。(2) R^+作为左 R-模是 Σ-余挠的。(3) 内射模的可定义闭包包含于 Cot。(4) FP-内射 R-模的任意直极限都是余挠的。(5) 内射 R-模的任意直极限都是余挠的。(6) 每个 FP-内射 R-模都属于 Cot。

现在我们描述左弱 Σ-余挠环的一些性质。

命题 5.5。 设 R 是左弱 Σ-余挠环。那么以下断言成立：

(1) 每个有限生成平坦的 R-模 F 都满足以下性质：每条子模升链 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$，若其并集 $I := \bigcup_{n<\omega} I_n$ 是 F的纯子模，则该链稳定。

(2) 每个有限生成平坦 R-模的可数生成纯子模必为有限生成。(3) 每个有限生成投射 R-模的纯子模都是直和项。因此，每个有限生成平坦 R-模都是投射的。(4) 每个有限生成投射 R-模都可分解为不可分解模的有限直和R。(5) R 没有无限个非零正交幂等元组成的集合；也就是说， R 是一个 I-有限环（见 [25, 第 45]页）。(6) R 满足右理想的直和项上的升链条件，也满足左理想的直和项上的升链条件。(7) R 满足右理想的直和项上的降链条件，也满足左理想的直和项上的降链条件。

证明。 我们从 (1) 开始。设 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$ 是有限生成平坦 R-模 F 的子模升链，其并 $I := \bigcup_{n<\omega} I_n$ 是 F的一个纯子模。定义一个态射

$$f\colon I \longrightarrow \bigoplus_{n<\omega} \frac{F}{I_n}, \qquad f(x) = (x + I_n)_{n<\omega}.$$

注意， f 定义良好，因为对于每个 $x \in I$，集合 $\{\, n < \omega \mid x \notin I_n \,\}$ 都是有限的。
对于每个 $k < \omega$，令 $c_k\colon \frac{F}{I_k} \longrightarrow C_k$ 为一个单态射，其中 $C_k \in$ 内射模（它总是存在）。这诱导出一个态射

$$(\oplus c_k) \circ f\colon I \longrightarrow \bigoplus_{k<\omega} C_k.$$

由于 $\bigoplus_{k<\omega} C_k$ 是余挠的（由假设和注记 5.3(3)可知），且 I 是 F 中的纯子模（因此 F/I 是平坦的），所以

$$\operatorname{Ext}^1_R\left(\frac{F}{I}, \bigoplus_{k<\omega} C_k\right) = 0.$$

因此对每个 $x \in I$。令 $P_i\colon \bigoplus_{k<\omega} C_k \longrightarrow C_i$ 表示典范投影。由于 F 是有限生成的，可写为 $F = \langle x_1, \ldots\ldots, x_n \rangle$。选取 $m < \omega$，使得对所有 $i = 1, \ldots\ldots, n.$，都有 $P_m(h(x_i)) = 0$。于是对所有 $x \in F$，都有 $P_m(h(x)) = 0$。

我们断言，对每个 $k \geq m$，都有 $I_k = I_m$。事实上，令 $x \in I_k$。一方面， $P_m(h(x)) = 0$。另一方面，

$$P_m(h(x)) = P_m([(\oplus c_k) \circ f](x)) = P_m((\oplus c_k)(x + I_n)_{n<\omega}) = P_m((c_n(x + I_n))_{n<\omega}) = c_m(x + I_m).$$

因此 $c_m(x + I_m) = 0$，又由于 c_m 是单态射，我们得出 $x \in I_m$。故该链在 m 处稳定，从而证明了 (1)。

现在证明 (2)。令 K 为有限生成平坦 R-模 F 的可数生成纯子模。取 $\{x_n \mid n < \omega\}$ 作为 K 的生成元，并定义 $K_0 := 0$， $K_1 := Rx_1$，……， $K_n := \sum_{i=1}^n Rx_i.$。于是 $K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$ 是一条升链，且 $K = \bigcup_{n<\omega} K_n.$。应用 (1)，这条链必在某个 $m < \omega$ 处稳定。因此 $K = \sum_{i=1}^m Rx_i$，这就证明了 K 是有限生成的。
现在，我们证明（3）。首先证明：有限生成投射 R-模的每个可数生成纯子模都是直和项，因而是投射的。设 M 是有限生成投射 R-模 P的可数生成纯子模。由（2）可知， R-模 M 是有限生成的。考虑短正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow P/M \longrightarrow 0.$$

由于 P 是有限生成投射的，而 M 是有限生成的，因此 P/M 是有限呈示的平坦 R-模。因此 P/M 根据 [10, 命题 3.2 而是投射的。12]因此该序列分裂，从而M 是 P的直和项。特别地， M 是投射的。

现在，设 K 是有限生成投射 R-模 P 的一个纯子模。我们断言 K 是可数生成的。一旦证明这一点，所需结论便可由前一种情形得出。假设 K 不是可数生成的。取定 $x_0 \in K$。由于 K 是平坦的 Mittag-Leffler 模，由 [13, 推论 3.20(d)] 可知，存在 K 的一个可数生成纯子模 P_0，其中包含 x_0。由于 $P_0 \subsetneq K$，存在 $x_1 \in K - P_0$。再次利用 K 是平坦的 Mittag-Leffler 模，可知存在 K 的一个可数生成纯子模 P_1，其中包含 $P_0 + Rx_1$。如此继续下去，我们得到 P 的纯子模构成的无限升链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots$，且该链不会终止，这与 (1) 矛盾。

为证明 (4)，只需结合 [23, 引理 2.16] 和 [23, 定理 2.17]。
最后，为证明 (5)、(6) 和 (7)，注意到由 [19, 命题 6.59], 可知 (1) 蕴含 (5)；而 (5)、(6) 和 (7) 等价，因为 [19, 命题 6.59] 的证明对左理想和右理想都成立。□

下文中，我们将利用迄今为止得到的结果，推导左弱 n-Σ-余挠环类与其他著名环类之间的若干关系。

推论 5.6。 以下断言对任意环 R均成立：

(1) 若 R 是左弱 Σ-余挠环，且作为左 R-模是余挠的，则 R 是半完美的。(2) 若 R 是左弱 Σ-余挠环，且有限生成 R-模的平坦覆盖是有限生成的，则 R 是左几乎完美的（见 [1, 定义 3.2]）。特别地， R 是半完美的。

证明。 我们先证明 (1)。根据命题 5.5(5)，环 R 是 I-有限的。由假设， R 是余挠的，因此由 [20,定理 3.19] 可知， R 是半完美的。
现在证明 (2)。根据命题5.5(3)，每个有限生成平坦 R-模都是投射模。因此，在平坦覆盖有限生成 R-模都是有限生成模这一假设下，可知这类平坦覆盖都是投射的。因此， R 根据 [1,定理 3.7]，□是左几乎完美的

回顾一下，若环 R 满足每个内射左 R-模都是平坦的，则称其为左 IF 环 （参见 [6]）。下面的推论表明，对于左 IF 环，左诺特环类与左弱Σ-余挠环类相同。

推论 5.7。 设 R 是左 IF 环。则以下命题等价：

(1) R 是左诺特的。(2) R 是
左弱 Σ-余挠的。

证明。 显然，(1) 蕴含 (2)。现在证明 (2) 蕴含 (1)。
L设 $\{E_i \mid i \in I\}$ 是一族内射 R-模。考虑纯正合列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} E_i \longrightarrow \prod_{i\in I} E_i \longrightarrow T \longrightarrow 0.$$

由于 R 是左 IF 环，直积 $\prod_{i\in I} E_i$ 是平坦的。由于该序列是纯的， R-模 T 也是平坦的。由 (2) 和备注 5.3， $\bigoplus_{i\in I} E_i$ 属于 Cot，因此 $\mathrm{Ext}^1_R\big(T, \bigoplus_{i\in I} E_i\big) = 0$。因此，短正合列分裂，且 $\bigoplus_{i\in I} E_i$ 是内射的。因此， R 是左诺特的。□

一个环 R 称为左绝对纯，或称为左FP-内射，如果 R作为其自身上的左 R-模，是 FP-内射的。在定理 4.2中，我们根据余挠包络刻画了左 n-Σ-余挠环

（或环的纯内射包络）是 n-Σ-余挠的。因此，自然会问：如果环的内射包络是 n-Σ-余挠的，会发生什么？基于这一动机，我们得到以下结果：

推论 5.8。 设 R 是一个左绝对纯环。则以下断言等价：

(1) $E(R)$（ R的内射包络）对于某个 $n \geq 0$ 是 n-Σ-余挠的。(2) 对于某个 $m \geq 0$， R 是左 m-完美的。(3) 对于某个 $r \geq 0$， R 是左弱 r-Σ-余挠的。

此外，若上述条件中任意一个（因而全部）成立，则 $n = m = r$。

证明。(1)⇒(2)。由于 R 作为一个 R-模是 FP-内射的，因此 R 是 $E(R)$的一个纯子模。因此， $R \in \langle E(R)\rangle$。另一方面，由 (1) 和定理 3.7 可得， $\langle E(R)\rangle \subseteq \mathsf{Cot}_n$。由于可定义类在直和下封闭，因此 R 是左 n-Σ-余挠的。因此，由定理 4.2 可知， R 是左 n-完美的。

蕴含关系 (2)⇒(3) 和 (3)⇒(1) 显而易见。因此，所有条件均等价。 □

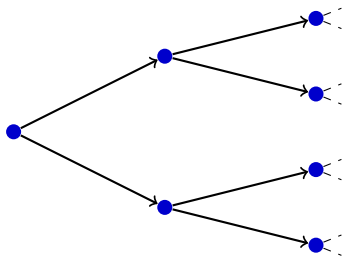
注 5.9。 (1) 设 R 是一个冯·诺依曼正则环。那么 R 具有有限左整体维数，当且仅当它对某个 r-Σ 是左弱 $r \geq 0$-余挠环。事实上，由于冯·诺依曼正则环上的每个 R-模都是 FP-内射的，考虑到冯·诺依曼正则环具有有限左整体维数，当且仅当它对某个 5.8 左 m-完全，那么推论$m \geq 0$即可适用。因此，具有无限左整体维数的冯·诺依曼正则环，对任何 n-Σ 都不可能是左弱 $n \geq 0$-余挠环。例 5.12(2) 给出了一个具体例子。

(2) 设 R 是一个不可分环（见 [29]）。根据 [29, 命题 2。3]， R 既是左 FP-内射模，也是右 FP-内射模，因此推论 5.8 适用于这类环。请注意，存在不是冯·诺依曼正则环的不可分环（见 [29,第 2 节。2]）。

此时，我们给出若干左弱 n-Σ 余挠环的例子。

例 5.10。 (1) 所有左诺特环和所有左 n-完美环都是左弱 n-Σ-余挠环。这可由定义直接得出。注意，若我们将一个非左诺特但左 n-完美的环与一个非左 n-完美但左诺特的环取直积，则所得的环既非左诺特也非左 n-完美，却仍是左弱 n-Σ-余挠环。对于 $n = 0$，说明这种情况的一个例子是环 $T := \mathbb{Z} \times R^{op}$，其中 R 是文献 [11, 例 1] 中构造的环， $\mathbb{Z}$ 表示整数环，而 R^{op} 表示 R的对环。

(2) 设 R 为任意一个左诺特但非左完美环， Q 为一个（无限）有根箭图（按 [27, 定义 1] 的含义），并且其路径环 RQ 不是左诺特的。例如，根据 [8, 引理 3.4 和定理 3.6]， Q 可以是无限二叉树箭图：



于是，存在一族内射的左 RQ-模， $\{E_i \mid i \in I\}$，使得 $\bigoplus_{i\in I} E_i$ 并非内射。然而，由于 R 是左诺特环，根据 [27, 定理 6], ，内射左 RQ-模的任意直和都是余挠的。因此，根据注 5.3(3)， RQ 是一个左弱 Σ-余挠环。

(3) 在 [18], Kaplansky 构造了一个环 R，它是冯·诺依曼正则的，非左诺特的，且左整体维数恰为 2。因此，单射左 R-模的类与余挠 R-模的类相同。由于 R 不是左诺特的，存在一族内射左 R-模，其直和不是内射模，因此在此情形下也不是余挠模，于是根据注 R，它不是左弱 Σ-余挠环5.3(3)。然而，每个左 R-模的余挠维数至多为 2。因此，R 是左弱 2-Σ-余挠环，但它不是左弱 Σ-余挠环。

我们现在证明一个联系左 n-完美环与左弱 n-Σ-余挠环的结果。注意，当$n = 0$时，下面的陈述可还原为 [12, 引理 5.1(1)], ，因此该结果可视为该引理的推广。这里，平衡对的含义与 [12, 引言]中的相同；另见 [10,第 8 节2]。

推论 **5.11.** 设 $n \geq 0$ 为一个整数。对于任意环 R，以下陈述等价 t:

(1) R 是左弱 n-Σ-余挠环，且类 ${}^{\perp}\mathrm{Cot}_n$ 构成一个平衡对的左部。(2) R 是左 n-完美环（等价地，R 是左 n-Σ-余挠环，由定理 4.2）。

证明。对于每个整数 $n \geq 0$，由引理 1.13]可知，$({}^{\perp}\mathrm{Cot}_n, \mathrm{Cot}_n)$ 是一个余挠对。因此，利用定理 4.2，按照引理 5.1(1)], 中的相同论证，可证明蕴含关系 (1) ⇒(2)。现在我们证明 (2) ⇒ (1)。由于 R 是左 n-完美的，每个 R-模的余挠维数至多为n。因此，类 ${}^{\perp}\mathrm{Cot}_n$ 与所有投射 R-模构成的类相同，因而构成一个平衡对的左分量；其右分量由所有内射模 R构成。□

最后，我们给出一些例子，说明左 n-完美环类严格包含于左弱 n-Σ-余挠环类中。我们还证明，对于任意 $n \geq 0$，都存在不是左弱 n-Σ-余挠的环。

E例 5.12. (1) 在一次私人通信中，Keri Ann Sather-Wagstaff 和 Jonathan P. Totushek 解释了如何修改 Nagata 的例子（见 [24, 附录 A1，例 1]），从而构造出一个分式域具有无限投射维数的交换诺特整环 R。因此，对于任意 $n \geq 0$，R 都不是 n-完美的。尽管如此，由于 R 是诺特环，任意内射 R-模的直和都是余挠的，因此根据注 5.3(3)，对所有 $n \geq 0$，R 都是左弱 n-Σ-余挠的。(2) 设 k 是一个域，令 R 为 $\aleph_\omega$ 个 k 的直积。根据构造，R 是冯·诺依曼正则环。此外，根据 [26, 结论 3.1], ，环 R 的整体维数是无限的。因此，根据注 5.9(1)，对任意 $n \geq 0$，R 都不是左 n-Σ-余挠环。由于每个冯·诺依曼正则环都是左相干的，环 R 给出了一个左相干环的例子，它对任意 $n \geq 0$ 都不是左弱 n-Σ-余挠的。此外，令 $T := S^{\mathrm{op}} \times R$，其中 S 是在 [11, 例 1] 中构造的环。那么 T 是左弱相干的（依照 [7] 的含义），但它既不是左相干的，也不是对任意 $n \geq 0$ 都左弱 n-Σ-余挠的。

5.1 弱 n-Σ-余挠三角矩阵环

在本节中，我们确定三角矩阵环在何种条件下对于某个 $n \geq 0$ 是左弱 n-Σ-余挠的。我们将采用 [22] 中确立的记号。设 A 和 B 为环，且设 U 为一个 (B, A)-双模。考虑形式下三角矩阵环 $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$。

回顾一下，每个 T-模都可以表示为

一对 $M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$，其中 M_1 是一个 A-模，M_2 是一个 B-模，而 $\varphi^M\colon U\otimes_A M_1\longrightarrow M_2$ 是一个 B- 同态。类似地，每个右 T- 模 N 都可以表示为一对 $N=\begin{pmatrix}N_1\\N_2\end{pmatrix}_{\tau^N}$，其中 N_1 是一个右 A- 模，N_2 是一个右 B-模，而 $\tau^N\colon N_2\otimes_B U\longrightarrow N_1$ 是一个 A-同态。内射、投射和平坦的 T-模已有完整刻画；例如参见 [22, 引理 3.1]。余挠 T-模也已在 [22, 推论 4.3] 中得到刻画。

注 5.13. 设 $n\geq 0$ 是一个整数。利用 [21, 命题 19.2.1]和 [22,引理 3.2], , 不难验证：T-模 $M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 的余挠维数至多为 n，当且仅当 A-模M_1 和 B-模 M_2 的余挠维数均至多为 n。特别地，M 是 n-Σ-余挠的，当且仅当 M_1 和 M_2 均为 n-Σ-余挠；右模也有相同结论。

命题 5.14. 设 $n\geq 0$ 是一个整数。以下命题等价：

(1) T 是左弱 n-Σ-余挠环。(2) A 和 B 是左弱 n-Σ-余挠环，且 A-模 U^+ 是 n-Σ-余挠的。

证明。正则模 T_T可描述为一对 $\begin{pmatrix}A\oplus U\\B\end{pmatrix}_{\tau}$，其中 $\tau\colon B\otimes_B U\longrightarrow A\oplus U$是由 $\tau(b\otimes u)=(0,bu)$ 定义的 A-同态，对所有 $b\in B$和 $u\in U$均成立。因此，T-模 T^+可表示为一对 $\begin{pmatrix}A^+\oplus U^+\\B^+\end{pmatrix}_{\tau^+}$，其中 $\tau^+\colon U\otimes_A(A^+\oplus U^+)\longrightarrow B^+$ 由 $\tau^+(u\otimes m^+)(b):=m^+(\tau(b\otimes u))$ 给出，对所有 $u\in U$、$m^+\in A^+\oplus U^+$ 和 $b\in B$均成立。因此，应用注记 5.13 和定理 5.1 即得所需结果。□

注 5.15. 设 $n\geq 0$ 为整数。现在我们描述若干种情形：在环 A和 B 都是左弱 n-Σ-余挠的假设下，A-模 U^+ 是 n-Σ-余挠的。首先注意，对每个内射 B-模 E，A-模 $\mathrm{Hom}_B(U,E)$ 都是余挠的。此外，容易验证存在一个 A-模同构 $U^+\cong\mathrm{Hom}_B(U,B^+)$，其中将 B^+ 视为左 B-模。因此，要确保 U^+ 是 n-Σ-余挠的，只需（在 A 和 B 都是左弱 n-Σ-余挠环的假设下）验证以下附加条件之一。在这些条件中的任一条件下，根据命题 5.14，环 T 也为左弱 n-Σ-余挠环。

(1) A 是左 n-完美的。在这种情况下，每个 A-模的余挠维数均有限，且至多为 n。因此，A-模 U^+ 是 n-Σ-余挠的。(2) U 作为右 A-模是平坦的。于是 U^+ 是一个内射 A-模。由于 A 是左弱n-Σ-余挠的，因此 U^+ 是 n-Σ-余挠的。(3) B 是左诺特的，且 U 作为 B-模是有限生成的。U的有限生成性给出：对任意集合 I，有一个同构 $\mathrm{Hom}_B(U,B^+)^{(I)}\cong\mathrm{Hom}_B\big(U,(B^+)^{(I)}\big)$。由于 B是左诺特的，B-模 $(B^+)^{(I)}$ 是内射的，因此 $\mathrm{Hom}_B\big(U,(B^+)^{(I)}\big)$ 是余挠的。于是，对所有整数 $r\geq 0$，U^+ 都是 r-Σ-余挠的。

例 5.16. 现在，在 $n=0$的情形下，我们给出一个环的例子，它满足备注 5.15 中的三个条件之一，同时不满足另外两个。显然，下面给出的三个环都是左弱 Σ-余挠的。

(1) 考虑环 $\begin{pmatrix} R & 0 \\ R^{\Lambda} & R \end{pmatrix}$，其中 R 是 [11, 例 1]中描述的环。由于 R 是左完美的，条件 (1) 得以满足。然而，由于 R 不是右相干的，Chase 定理 [4, 定理 2.1] 保证存在一个集合 Λ，使得 R-模 R^{Λ} 不是平坦模；因此，条件 (2) 不成立。此外，由于 Λ 必为无限集，条件 (3) 也不成立。(2) 考虑环 $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$。这个环显然满足条件 (2)，因为 $\mathbb{Q}$ 是一个平坦的 $\mathbb{Z}$-模。然而，它不满足条件 (1)，因为 $\mathbb{Z}$ 不是左完美的；也不满足条件 (3)，因为 $\mathbb{Q}$不是有限生成的 $\mathbb{Z}$-模。请注意，这个环既不是左诺特环，也不是左完美环。(3) 设 $m > 1$ 为一个整数，并考虑环 $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Z}_m & \mathbb{Z}_m \end{pmatrix}$。这里，$\mathbb{Z}_m$ 表示模 m的整数环。这个环显然满足条件 (3)。然而，它不满足条件 (1)，因为$\mathbb{Z}$ 不是左完美的；也不满足条件 (2)，因为 $\mathbb{Z}_m$ 不是平坦的右 $\mathbb{Z}$-模。

致谢

我们谨此感谢 Lars Winther Christensen 与我们分享 Sather-Wagstaff 和 To- tushek 的笔记，这些笔记引出了例5.12(1)。作者还感谢 Pedro Antonio Guil Asensio 在准备本稿期间给予的有益通信。

参考文献

[1] Amini, A., Ershad, M., Sharif, H., 有限生成模的平坦覆盖均为投射模的环. 载于：《代数通讯》36.8 (2008), pp. 2862–2871. DOI: 10.1080/00927870802108049[2] Bass, H., 有限维与半主环的同调推广. 载于：《美国数学会汇刊》95 (1960年), pp. 466–488. DOI: 10.1090/S0002- 9947-1960- 0157984-8[3] Bican, L., El Bashir, R., Enochs, E.E., 所有模都有平坦覆盖. 载于：《伦敦数学会杂志》33.4 (2001), pp. 385–390. DOI: 10.1017/S0024609301008104[4] Chase, S. U., 模的直积. 载于：《美国数学会汇刊》97.0 (1960). 在模论文献中广泛重印或引用，pp. 457–473. DOI: 10.1090/S0002- 9947-1960-0120260-3[5] Christensen, L.W., Estrada, S., Liang, L., Thompson, P., Wang, J., 单侧Gorenstein环. 载于：Forum Mathematicum (2024). DOI: 10.1515/forum-2023-0303[6] Colby, R.R., 具有平坦内射模的环. 载于：《代数杂志》35.1-3 (1975), pp. 239–252.DOI: 10.1016/0021-8693(75)90049-6[7] Cort´es-Izurdiaga, M., 平坦模的积与相对于 $\mathcal{F}$-Mittag-Leffler模的整体维数. 载于：《美国数学会会刊》144.11 (2016), pp. 4557–4571. DOI: 10. 1090/proc/13059[8] Enochs, E., Garc´ıa Rozas, J.R., Oyonarte, L., Park, S., 诺特箭图. 载于：Quaestiones Mathe-maticae 25.4 (2002), pp. 531–538. DOI: 10.2989/16073600209486037 [9] Enochs, E. E., 与平坦对象的平衡. 载于：《纯粹与应用代数杂志》219.3 (2015), pp. 488– 493. DOI: 10.1016/j.jpaa.2014.05.007

[10] Enochs, E. E., Jenda, O. M. G., 相对同调代数：第1卷. 第2版，修订并扩充. Vol. 30. 数学论丛. De Gruyter, 2011. ISBN: 9783110215205. URL: https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9783110215212/html[11] Estrada, S., Iacob, A., Yeomans, K., Gorenstein射影预覆盖. 载于：《地中海数学杂志》14.1 (2017), p. 33. DOI: 10.1007/s00009-016-0822-5[12] Estrada, S., P´erez, M.A., Zhu, H., 平衡对、余挠三元组与箭图表示. 载于：《爱丁堡数学学会会刊》63.1 (2020), pp. 67–90. DOI: 10.1017/ S0013091519000270[13] G¨obel, R., Trlifaj, J., 模的逼近与自同态代数，第1卷. 第二版，扩充版. Vol. 41. de Gruyter数学论丛. 柏林，波士顿，2012[14] Guil Asensio, P.A., Herzog, I., Sigma-余挠环. 载于：《数学进展》191.1 (2005), pp. 11– 28. DOI: 10.1016/j.aim.2004.01.006[15] Herbera, D., “可定义类与Mittag-Leffler条件”. 载于：《环论及其应用：纪念T. Y. Lam七十寿辰的环论专题会议论文集》. 编者：Huynh, D. V., Jain, S. K., L´opez-Permouth, S. R., Rizvi, S. T., Roman, C. S. Vol. 609. 当代数学. 罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，2014, pp. 137–166. ISBN: 978-0-8218-8797-4. DOI: 10.1090/conm/609/12123[16] Holm, H., Gorenstein同调维数. 载于：《纯粹与应用代数杂志》189.1–3 (2004), pp. 167–193. DOI: 10.1016/j.jpaa.2003.11.007[17] Jensen, C. U., 关于$\varprojlim^{(i)}$的消失. 载于：《代数杂志》15 (1970), pp. 151–166[18] Kaplansky, I., 关于模与代数的维数，X：一个非左遗传的右遗传环. 载于：《名古屋数学杂志》13 (1958), pp. 85–88. DOI: 10.1017/S0027763000023527[19] Lam, T.-Y., 模与环讲义. Vol. 189. Springer-Verlag, 1999[20] Mao, L., Ding, N., 余挠模与相对纯内射性. 载于：《澳大利亚数学会杂志》81.2 (2006), pp. 225–243. DOI: 10.1017/S1446788700015858[21] Mao, L., Ding, N., “模与环的余挠维数”. 载于：《阿贝尔群、环、模与同调代数》. 编者：Goeters, H. P., Jenda, O. M. G., 等. Vol. 249. 纯粹与应用数学讲义. Taylor & Francis Group. 佛罗里达州博卡拉顿：Chapman & Hall/CRC, 2006, pp. 217–233. ISBN: 9781584885528[22] Mao, L., 形式三角矩阵环上的余挠对与逼近类. 载于：《纯粹与应用代数杂志》224.6 (2020), p. 106271. DOI: 10.1016/j.jpaa.2019.106271[23] Mohamed, S.H., M¨uller, B., 连续模与离散模. Vol. 147. 伦敦数学会讲义系列. 剑桥：剑桥大学出版社，1990[24] Nagata, M., 局部环. 纯粹与应用数学跨学科丛书，第13号. MR 0155856. 纽约–伦敦：Interscience Publishers（John Wiley & Sons旗下），1962, pp. xiii + 234[25] Nicholson, W.K., Yousif, M.F., 拟Frobenius环. Vol. 158. 剑桥数学丛书. 英国剑桥：剑桥大学出版社，2003. ISBN: 0-521-81593-2[26] Osofsky, B. L., 同调维数与基数. 载于：《美国数学会汇刊》151 (1970), pp. 253–267. DOI: 10.1090/S0002-9947-1970-0265411-1[27] Oyonarte, L., 箭图的余挠表示. 载于：《代数通讯》29.12 (2001), pp. 5571–5583[28] Prest, M., 纯性、谱与局部化. Vol. 121. 数学及其应用百科全书. 剑桥：剑桥大学出版社，2009

[29] Prest, M., Rothmaler, P., Ziegler, M.，绝对纯模与平坦模及“非离散”环。载于：《代数杂志》174.2（1995），第 349–372 页。 DOI： 10.1006/jabr.1995.1131[30] ˇSaroch,J., ˇSˇtovíˇcek, J.，关于 Σ-余挠模与 Gorenstein 模的奇异紧致性和可定义性。载于：数学精选 26.23（2020），第 23 号文章。 DOI: 10.1007/s00029-020-0543-2[31] Simson, D.，关于平坦模的投射分解。载于：数学讨论会 29.2（1974），第 209–218 页。 URL: http://eudml.org/doc/263236[32] Simson, D.，关于平坦模的投射维数的一则说明。载于：数学年刊 209（1974），第 181–182 页。 DOI: https://doi.org/10.1007/BF01351846