arXiv:2602.11371v1 [math.OA] 11 Feb 2026

非交换 L^p-空间中映射的柯西-施瓦茨不等式。

´GIORGIA BELLOMONTE、STEFAN IVKOVIC 和 CAMILLO TRAPANI

Abstract. 本文针对取值于非交换L^p-空间的正半双线性映射，得到了 $p > 1$ 下的一般化柯西-施瓦茨不等式。本文还给出了其实部和虚部的界估计，并以此为应用，给出了非交换 L^2-空间中不确定性关系的一种推广。接下来，本文证明了一个柯西-施瓦茨不等式，该不等式适用于取值于从冯·诺依曼代数到配备数值半径范数的 C^*-代数的有界线性算子空间的正半双线性映射。本着同样的思路，本文提出了非交换 L^2-空间上的一种新范数，该范数推广了希尔伯特空间上有界线性算子的经典数值半径范数；并证明了一个柯西-施瓦茨不等式，该不等式适用于取值于从冯·诺依曼代数到配备此新范数的非交换 L^2-空间的有界线性算子空间的正半双线性映射。这些结果用于在若干不同情形下，获得取值于非交换 L^p-空间及某些算子空间的广义正线性映射的表示。文中还给出了一些具体例子。

1. Introduction

本章的主题是针对各种正映射类的广义柯西-施瓦茨不等式（这些映射类在我们此前发表的论文中并未研究 [5, 6, 7]）。这项研究的基本动机在于多种结构的表示论，例如代数、模等。众所周知，柯西-施瓦茨不等式在 *-代数或偏 *-代数的通常表示论中发挥着关键作用，是从正线性泛函或取值于

日期：2026年2月13日。2020 数学主题分类。主要分类号 46K10、47A07、16C10。关键词和短语。柯西-施瓦茨不等式，非交换 L^p-空间，正映射，不确定性关系，冯·诺依曼代数，数值半径范数，拟 *-代数，循环 *-表示。

复数域的半双线性型构造 Gelfand-Naimark-Segal 表示的基本要素。鉴于更一般表示的构造，以正线性映射或半双线性映射取代后者是有意义的。

这些考量似乎是促使人们研究算子值映射的柯西-施瓦茨不等式多种变体的主要原因之一：自从针对C^*-代数之间正映射的著名 Kadison-Schwarz 不等式问世以来，相关研究便不断展开；参见 [6, 10, 14, 20, 22, 23, 24,25, 26, 31, 39] 。此外，人们还证明了C^*-代数之间正映射的其他不等式，例如 [16] 中的结果。在近期的一篇论文[6]中，我们证明，对取值于某些以*-代数为底的有序 Banach 双模（特别是非交换 L^1-空间）的正映射，某种柯西-施瓦茨型不等式成立。本章将为从冯·诺依曼代数映到非交换L^p-空间、且满足 $p > 1$ 的正映射，导出柯西-施瓦茨型不等式。若 $p > 1$， [6] 中采用的方法便不适用。因此，我们在此发展了一些不同的技巧。所得结果是一个广义柯西–施瓦茨不等式，其右端出现因子 2（命题 3.1）。然而，正如命题 3.7 所证明的，若 Φ 是从向量空间 $\mathfrak{X}$ 映入非交换 L^p-空间的正半双线性映射，且满足 $p > 1$，那么对于满足 $\Phi(x,\ y)$ 为正规算子的元素对 $x,\ y \in \mathfrak{X}$，适当的柯西-施瓦茨不等式成立。命题 3.7 和推论 3.8 的动机来自针对正规元的 Kadison-Schwarz 不等式（见注 3.9）。此外，在命题 3.3 中，我们给出了取值于非交换 L^2-空间的正半双线性映射的范数估计，以及其实部和虚部的界。这些界估计使我们得以在这一框架下推广不确定性关系（命题 3.4 和命题 3.7）。注 3.5 提出了这一结果可能的一种物理解释。命题 3.10 证明了取值于一类特殊的、以*-代数为底的有序 Banach 双模的正半双线性映射满足柯西-施瓦茨不等式。正如例 3.11 所述，这类双模包括含幺 C^*-代数的对偶空间。

涉及数值半径范数的算子不等式是一个活跃的国际研究领域（参见 [11], 及其中的参考文献）。受此启发，在第4节中，我们研究取值于从冯·诺依曼代数映射到希尔伯特空间上有界线性算子空间的正半双线性映射，其中该算子空间赋有数值半径范数；并在命题 4.1 中证明柯西-施瓦茨不等式（关于算子范数）。正如下面的注4.2 所指出的，该不等式使我们能够构造从含幺 *-代数到

冯·诺依曼代数上有界线性算子的算子代数的一般正线性映射的表示。

此外，我们在非交换 L^2-空间上引入了一种新范数，它推广了希尔伯特空间上有界线性算子空间的经典数值半径范数（见第 4.2 小节和注 4.6）；并在引理 4.5 中证明该范数定义良好。随后，我们在推论 4.7 中证明，取值于非交换 L^2-空间的每个正线性映射都满足关于这一新范数的柯西-施瓦茨不等式。最后，我们考虑从冯·诺依曼代数到非交换 L^2-空间的有界线性算子空间，并赋予其这一新范数；我们证明，取值于该算子空间的每个正半双线性映射都满足算子范数意义下的柯西-施瓦茨不等式。这一结果可用于在巴拿赫空间中表示从含幺 *-代数到由冯·诺依曼代数映入非交换 L^2-空间的有界线性算子空间的正半双线性映射，其中该空间配备标准范数（备注 4.11）。

最后一节专门讨论应用。通过应用前几节得到的柯西-施瓦茨不等式，并重复 [5, 6, 7], 中的广义 GNS 构造过程，我们得到了前几节所讨论的一般正映射在（拟）巴拿赫空间中的表示。正映射在量子物理、量子信息论（参见 [13, 15, 32] 及其中的参考文献），以及算子理论和线性动力学中通常都发挥着重要作用；参见 [21, 36, 37], 。这也是我们研究这些映射的表示的主要动机。最后，我们注意到，取值于有序巴拿赫双模或算子空间的一般正半双线性映射所满足的柯西-施瓦茨不等式，对于生成表示具有重要作用，而且还能为某些类别的完全正映射导出新的相关不等式，参见 [6, 第 4]节中的讨论。本章末尾，我们还讨论了一些具体例子。

2. Notation and preliminary results

本文中，我们始终用 $\mathfrak{B}(\mathcal{X},\ \mathcal{Y})$ 表示从赋范空间 $\mathcal{X}$ 到赋范空间 $\mathcal{Y}$ 的有界线性映射空间。如果$\mathcal{X} = \mathcal{Y}$，我们将简写为 $\mathfrak{B}(\mathcal{X}) = \mathfrak{B}(\mathcal{X},\ \mathcal{X})$。设 $\mathcal{H}$为希尔伯特空间。若 $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$，我们用 T^*表示其伴随算子，用 $N(T)$ 和$R(T)$分别表示其零空间和值域，并用 $\|T\|$表示其范数。

设 $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}$ 的稠密子空间， $A : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$为闭算子，则存在一个偏等距算子 Z ，其初始空间为闭包$R(A^*)$，终空间为 $R(A)$ [28,第二卷，第六章，定理 6.1。2]，使得

$$A = Z(A^*A)^{1/2} = (AA^*)^{1/2}Z$$

这称为 A 的 极分解。事实上，若 $A = BC$ ，其中 B 是一个偏等距算子，其初始空间为 $R(C)$，且 C 是一个正算子，则 $B = Z$ 且 $C = (A^*A)^{1/2}$。若 $N(A) = N(A^*) = \{0\}$，则 Z 是一个酉算子。

希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ [30, 上冯·诺依曼代数 $\mathfrak{M}$ 的一个迹是一个线性函数 $\rho : \mathfrak{M}^+ \to [0, +\infty]$ ，其中 $\mathfrak{M}^+$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的正锥（$\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$ 且 $\rho(\lambda X)$， $\forall X$， $Y \in \mathfrak{M}^+, \forall \lambda \geq 0$） ，满足

$$\rho(X^*X) = \rho(XX^*), \quad \forall X \in \mathfrak{M} \ \text{(tracial property)}$$

（按通常约定 $0 \cdot \infty = \infty$）。称迹 ρ 为
忠实 若对于任意非零 $X \in \mathfrak{M}^+$， $\rho(X) > 0$ ，半有限 若对于每个非零 $X \in \mathfrak{M}^+$ ，都存在某个非零 $Y \in \mathfrak{M}^+$ ，使得 $\rho(Y) < +\infty$, 且 $0 \leq Y \leq X$；正规 若对于每个有界递增网$\{X_i\} \subseteq \mathfrak{M}^+$， $\rho(\sup_i X_i) = \sup_i \rho(X_i)$；有限 若 $\rho(I) < \infty$。

若 ρ 是正规且有限的，则对于所有投影 $P \in \mathfrak{M}$， $\rho(P) < \infty$ 。若 $\mathfrak{M}$ 的中心 $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ 仅由单位元 I的标量（复数）倍数组成，则称 $\mathfrak{M}$ 为因子，因此其所有中心投影都是平凡的，且不能分解为较小冯·诺依曼代数的直和。Murray–von Neumann 分类将因子分为以下类型：*I* 型 因子是指与某个希尔伯特空间 $\mathcal{K}$上的 $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ 同构的因子，它们包含极小投影；*II* 型 因子是指没有极小投影、但存在忠实正规半有限迹的因子；而*III* 型 因子则没有非零半有限迹。

设 $\mathfrak{M}$ 是作用在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的冯·诺依曼代数，其上赋有定义于 $\mathfrak{M}^+$的忠实正规半有限迹 ρ 。对于每个$p \geq 1$ ，我们将 $L^p(\rho)$ 记作 $\mathfrak{M}$ 的*-理想的巴拿赫空间完备化（见 [33, 34]）：

$$\mathcal{J}_p = \{X \in \mathfrak{M} : \rho(|X|^p) < \infty\}$$

（其中，按通常记号，$|X| = (X^*X)^{1/2}$），关于范数

$$\|X\|_p = \rho(|X|^p)^{1/p}, \quad X \in \mathcal{J}_p.$$

我们沿用记号 ρ 表示将 ρ 自然延拓到 $L^p(\rho)$。若$p = \infty$，则定义 $L^\infty(\rho) = \mathfrak{M}$ 以及 $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|$（$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 中的算子范数）；于是，当 ρ 为有限时，对每个 $p \geq 1$，有 $L^\infty(\rho) \subset L^p(\rho)$。对于$1 \leq p < \infty$，我们用 $L^p(\rho)$表示与 ρ 上的 L^p-空间相关的非交换 $\mathfrak{M}$，它由所有（可能无界的）X 构成；这些算子隶属于 $\mathfrak{M}$，且满足 $\|X\|_p < \infty$。若 $1 < p < \infty$，我们将 q 记作共轭指数，$1/p + 1/q = 1$。

在本文中我们将经常使用非交换 H¨older 不等式（例如参见 [34, 第 3]节）：设 $\mathfrak{M}$是一个赋有正规、忠实、半有限迹 ρ的冯·诺依曼代数；若 $A \in L^p(\rho)$ 且$B \in L^q(\rho)$，其中 $1/p + 1/q = 1$，则 $AB \in L^1(\rho)$ 且

$$\rho(|AB|) \leq \|A\|_p \|B\|_q.$$

若 $\mathfrak{X}$ 是一个复向量空间，则映射 $\Phi\colon \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathcal{B}$（其中 $\mathcal{B}$ 要么是 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$，要么是 $L^p(\rho)$）称为半双线性的，如果它对第一个变量是线性的，对第二个变量是共轭线性的。若对每个 $x \in \mathfrak{X}$，$\Phi(x, x) \geq 0$（作为算子或作为 $L^p(\rho)$ 中的元素）成立，则称其为正的。

我们将使用 $L^p(\rho)$ 与 $L^q(\rho)$ 之间的对偶配对（后者是所有满足泛函$A \mapsto \rho(AB)$ 在 $L^p(\rho)$ 上有界的算子 B（属于 $\mathfrak{M}$ 或与 $\mathfrak{M}$ 相关联）的空间），其定义为

$$\langle A, B\rangle = \rho(AB), \qquad A \in L^p(\rho),\ B \in L^q(\rho).$$

回顾对偶公式

$$\|A\|_p = \sup\{\, |\rho(AB)| : B \in L^q(\rho),\ \|B\|_q \leq 1 \,\}.$$

注 2.1. 由 H¨older 的非交换不等式和 [17, 推论 3.4.6] 可得

$$|\rho(AB)| \leq \|AB\|_1 \leq \|A\|_p \|B\|_q, \quad \forall A \in L^p(\rho), \forall B \in L^q(\rho).$$

因此，若 $A_n \to A$ 属于 $L^p(\rho)$，且 $B_n \to B$ 属于 $L^q(\rho)$，其中 $n \to \infty$，则

$$\rho(A_n B_n) \to \rho(AB), \quad \text{as } n \to \infty.$$

我们将在证明中频繁使用这一事实。

引理 2.2. [5, 引理 4.8] 设 $\mathfrak{M}$ 是一个 *I* 型或 *II* 型因子冯·诺依曼代数，且 ρ 是 $\mathfrak{M}$ 上的半有限迹。设 $W \in \mathfrak{M}$

满足 $W \geq 0$ 且 $W \in L^p(\rho)$。那么存在 $\mathfrak{M}$ 中有限投影的一个序列 $\{P_n\}_n$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \|W(I-P_n)\|_p = 0.$$

注 2.3. 根据 $[5, \text{引理 } 4.8]$,，每个 $P_n = E_W(1/n,\ \infty)$，其中 E_W 是对应于 $W \in \mathfrak{M}$的谱测度。

引理 2.4. 设 ρ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上冯·诺依曼代数 $\mathfrak{M}$ 上的忠实半有限正规迹。设 $p > 1$ 和 $q = \frac{p}{p-1}$。那么，

- 若 $A \in L^p(\rho)$ 且 $B \in L^q(\rho)$，其中 A、$B \geq 0$，则 $\rho(AB) \geq 0$;
- 若 $A \in L^p(\rho)$ 且 $B \in L^q(\rho)$，其中 $A = A^*$ 和 $B = B^*$，则$\rho(AB) \in \mathbb{R}$。

证明。首先取 $A_+ \in L^p(\rho)$ 和 $B_+ \in L^q(\rho) \cap \mathcal{L}^\infty(\rho)$，其中 $A_+,\ B_+ \geq 0$。若 $P \in L^\infty(\rho)$ 是任意一个与 B_+对易的有限投影，则根据 $[35, \text{引理 } 3.1]$ 不难验证

$$\rho\big(A_+B_+P\big) = \rho(PB_+^{1/2}PA_+PB_+^{1/2}P) \geq 0.$$

根据引理 2.2，我们可以选取一列与 B_+ 对应的有限谱投影$\{P_n\}$，使得

$$\|B_+ - B_+P_n\|_p \to 0, \quad \text{as } n \to \infty.$$

由于对所有 n都有 $\rho(A_+B_+P_n) \geq 0$，令 $n \to \infty$并应用 H¨older 不等式，得到

$$\rho(A_+B_+) \geq 0.$$

由于对所有 $B_+ \in L^\infty(\rho) \cap L^q(\rho)$ 此结论均成立，令$\tilde{}$ 趋于极限可得，对所有 $B_+ \in L^q(\rho)$ 此结论也成立，其中 $B_+ \geq 0$

现在，对于任意的自伴 $A \in L^p(\rho) \cap L^\infty(\rho)$和 $B \in L^q(\rho) \cap L^\infty(\rho)$，其中 $A = A^*$ 且 $B = B^*$，我们可以写成

$$A = A_+ - A_-, \qquad B = B_+ - B_-,$$

其中 $A_\pm \in L^p(\rho) \cap L^\infty(\rho)$且 $B_\pm \in L^q(\rho) \cap L^\infty(\rho)$，并且 $A_\pm,\ B_\pm \geq 0$。因此，根据上述结果，

$$\rho(AB) = \rho(A_+B_+) - \rho(A_+B_-) - \rho(A_-B_+) + \rho(A_-B_-) \in \mathbb{R}.$$

最后，对于一般的自伴 $A \in L^p(\rho)$与 $B \in L^q(\rho)$，选取自伴元素序列 $\{A_n\} \in L^p(\rho) \cap L^\infty(\rho)$与 $\{B_n\} \in L^q(\rho) \cap L^\infty(\rho)$，

$$A_n \to A \quad \text{in } L^p(\rho), \qquad B_n \to B \quad \text{in } L^q(\rho), \quad \text{as } n \to \infty.$$

由于 $\rho(A_nB_n) \in \mathbb{R}$ 对所有 n成立，令 $n \to \infty$ 并应用H¨older不等式，可得 $\rho(AB) \in \mathbb{R}$。□

一个拟 *-代数 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 是由一个向量空间 $\mathfrak{A}$ 和一个 *-代数 $\mathfrak{A}_0$ 组成的有序对，其中 $\mathfrak{A}_0$ 是 $\mathfrak{A}$ 的子空间，并且满足

- $\mathfrak{A}$ 上有一个对合 $a \mapsto a^*$，它扩张了 $\mathfrak{A}_0$ 上的对合；
- $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}_0$ 上的双模，且模乘法扩张了 $\mathfrak{A}_0$ 上的乘法。特别地，以下结合律成立：

$$(ca)d = c(ad); \quad a(cd) = (ac)d, \quad \forall\, a \in \mathfrak{A},\ c, d \in \mathfrak{A}_0;$$

- $(ac)^* = c^*a^*$，对任意 $a \in \mathfrak{A}$ 和 $c \in \mathfrak{A}_0$ 均成立。

$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 的恒等元或单位元（若存在）是唯一确定的元素 $\mathsf{e} \in \mathfrak{A}_0$，满足 $a\mathsf{e} = a = \mathsf{e}a$，对所有 $a \in \mathfrak{A}$ 均成立。

我们始终假设

$$ac = 0,\ \forall c \in \mathfrak{A}_0 \Rightarrow a = 0$$
$$ac = 0,\ \forall a \in \mathfrak{A} \Rightarrow c = 0.$$

显然，如果 $(\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}_0)$ 具有单位元 e，则这两个条件都会自动满足。

如果 $\mathfrak{A}$ 是一个赋范空间，并且其范数 $\|\cdot\|$ 满足以下性质，则称拟 *-代数 $(\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}_0)$ 是赋范的

- 存在 $\gamma > 0$，使得对于每个 $a \in \mathfrak{A}$，$\max\{\|ac\|, \|ca\|\} \le \gamma\|a\|, \qquad \forall c \in \mathfrak{A}_0$；
- $\|a^*\| = \|a\|, \quad \forall a \in \mathfrak{A}$；
- $\mathfrak{A}_0$ 在 $\mathfrak{A}[\|\cdot\|]$ 中稠密。

如果赋范向量空间 $\mathfrak{A}[\|\cdot\|]$ 是完备的，则称 $(\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}_0)$ 为巴拿赫拟 *-代数。

例 2.5。若 $\mathfrak{M}$ 是冯·诺依曼代数，且 ρ 是定义在 $\mathfrak{M}_+$ 上的正规忠实半有限迹，则 $(L^p(\rho)\ L^p(\rho) \cap L^\infty(\rho))$ 是一个巴拿赫拟 *-代数，参见 [18, 命题 5.6。4]。

有关拟 *-代数及其性质的更多细节，请参见例如[2, 8, 9, 19] 以及专著 [18]。

定义 2.6。设 $\mathfrak{Y}$ 是 *-代数 $\mathfrak{Y}_0$ 上的一个 Banach 双模。若 $\mathfrak{Y}$ 是一个关于 $\mathfrak{Y}_0$ 的有序巴拿赫双模，则称

(i) $\mathfrak{Y}$ 是一个有序向量空间；也就是说，$\mathfrak{Y}$包含一个（正）锥 $\mathfrak{K}$，即 $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{Y}$ 满足以下条件：$\mathfrak{K} + \mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}$、$\lambda\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}$ 对 $\lambda \ge 0$成立，且 $\mathfrak{K} \cap (-\mathfrak{K}) = \{0\}$；

(ii) $z^*\mathfrak{K}z \subset \mathfrak{K}, \quad \forall z \in \mathfrak{Y}_0.$

设 $\mathfrak{X}$ 为一个向量空间， $\mathfrak{Y}$ 为 $\mathfrak{Y}_0$ 上带正锥 $\mathfrak{K}$ 的有序巴拿赫模。设 Φ 是 $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ 上取值于 $\mathfrak{Y}$ 的正半双线性映射

$$\Phi : (x_1, x_2) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \Phi(x_1, x_2) \in \mathfrak{Y};$$

即，具有以下性质的映射

$i)$ $\Phi(x_1, x_1) \in \mathfrak{K}$,

$ii)$ $\Phi(\alpha x_1 + \beta x_2, \gamma x_3) = \overline{\gamma}[\alpha\Phi(x_1, x_3) + \beta\Phi(x_2, x_3)]$,

对于 x_1， x_2， $x_3 \in \mathfrak{X}$ 和 α， β， $\gamma \in \mathbb{C}$。

取值于 $\mathfrak{Y}$ 的正半双线性映射 Φ 称为忠实的，如果

$$\Phi(x, x) = 0_{\mathfrak{Y}} \ \Rightarrow \ x = 0.$$

定义2.7。 设 $\mathfrak{X}$ 为一个向量空间， $\mathfrak{Y}$ 为 $\mathfrak{Y}_0$ 上的有序巴拿赫双模。若 Φ 是 $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ 上取值于 $\mathfrak{Y}$ 的忠实正半双线性映射，则称其为 $\mathfrak{Y}$值拟内积，我们通常记作 $\langle x_1|x_2\rangle_\Phi := \Phi(x_1, \ x_2)$， x_1， $x_2 \in \mathfrak{X}$。如果

$$\|\Phi(x, y)\|_{\mathfrak{Y}} \leq k\|\Phi(x, x)\|_{\mathfrak{Y}}^{1/2} \|\Phi(y, y)\|_{\mathfrak{Y}}^{1/2}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{X}$$

对于某些 $k > 1$、 Φ ，称其满足广义柯西–施瓦茨不等式。若 Φ 满足严格柯西–施瓦茨不等式，即若

$$\|\Phi(x, y)\|_{\mathfrak{Y}} \leq \|\Phi(x, x)\|_{\mathfrak{Y}}^{1/2} \|\Phi(y, y)\|_{\mathfrak{Y}}^{1/2}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{X}$$

则 Φ 称为 $\mathfrak{Y}$值内积。

若一个 $\mathfrak{Y}$值拟内积 $\Phi : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ 满足广义柯西–施瓦茨不等式，则它在 $\mathfrak{X}$上诱导出一个拟范数 $\|\cdot\|_\Phi$:

$$\|x\|_\Phi := \sqrt{\|\langle x|x\rangle_\Phi\|_{\mathfrak{Y}}} = \sqrt{\|\Phi(x, x)\|_{\mathfrak{Y}}}, \quad x \in \mathfrak{X},$$

因为（见 [7]）

$$\|x_1 + x_2\|_\Phi \leq \sqrt{k}(\|x_1\|_\Phi + \|x_2\|_\Phi), \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathfrak{X}.$$

于是，空间 $\mathfrak{X}$关于拟范数 $\|\cdot\|_\Phi$构成一个拟赋范空间。同样， $\mathfrak{Y}$值内积在 $\mathfrak{X}$上诱导出一个范数。

定义2.8。 如果复向量空间 $\mathfrak{X}$关于拟范数 $\|\cdot\|_\Phi$完备，则称 $\mathfrak{X}$为带有 $\mathfrak{Y}$值拟内积的拟巴拿赫空间，或简写为拟 $B_{\mathfrak{Y}}$空间。

如果 Φ 不是忠实的，我们可以考虑集合

$$\mathfrak{N}_\Phi = \{x_1 \in \mathfrak{X} : \Phi(x_1, x_2) = 0_\mathfrak{Y}, \forall x_2 \in \mathfrak{X}\},$$

它是 $\mathfrak{X}$ 的子空间（参见 [7]）。如果广义（或通常的）柯西-施瓦茨不等式成立，那么

$$\mathfrak{N}_\Phi = \{x \in \mathfrak{X} : \Phi(x, x) = 0_\mathfrak{Y}\}.$$

我们用 $\Lambda_\Phi(x)$ 表示包含 $x \in \mathfrak{X}$ 的陪集；即 $\Lambda_\Phi(x) = x + \mathfrak{N}_\Phi$，并定义如下取值于 $\mathfrak{Y}$ 的正半双线性映射：

$$\langle \Lambda_\Phi(x_1) | \Lambda_\Phi(x_2) \rangle_\Phi := \Phi(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{X}. \tag{2.1}$$

相应的拟范数为：

$$\|\Lambda_\Phi(x)\|_\Phi := \sqrt{\|\Phi(x, x)\|_\mathfrak{Y}}, \quad x \in \mathfrak{X}. \tag{2.2}$$

商空间 $\mathfrak{X}/\mathfrak{N}_\Phi = \Lambda_\Phi(\mathfrak{X})$ 是一个拟赋范空间（参见 [7]）。~我们用 $\mathfrak{X}$ 表示 $(\mathfrak{X}/\mathfrak{N}_\Phi, \ \|\cdot\|_\Phi)$ 的完备化。

定义 2.9。设 $(\mathfrak{A}, \ \mathfrak{A}_0)$ 是一个拟 *-代数，且 $\Phi : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{Y}$ 是一个正半双线性映射。映射 Φ 称为

- 左不变，如果

$$\Phi(ac, d) = \Phi(c, a^* d), \quad \forall\ a \in \mathfrak{A},\ c, d \in \mathfrak{A}_0.$$

如果拟 *-代数还带有范数，则称 Φ 为

- 有界，如果存在常数 $M > 0$ 使得

$$\|\Phi(a, b)\|_\mathfrak{Y} \leq M\|a\|\|b\|, \quad \forall a, b \in \mathfrak{A}.$$

3. Generalized Cauchy-Schwarz inequality for L^p-valued positive maps

本节证明了取值于 $L^p(\rho)$ 的一般正半双线性映射的广义柯西–施瓦茨不等式。该不等式在 [6] 中仅针对情形 $p = 1$（而非 $p > 1$）进行了研究。借助这一不等式，我们可以在拟 $B_\mathfrak{Y}$-空间中表示这类取值于正 $L^p(\rho)$ 的映射（见第 5 节）。由于 $L^p(\rho)$ 带有算子对合，正半双线性映射 $\Phi : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to L^p(\rho)$ 若满足对每个 $x, y \in \mathfrak{X}$，均有 $\Phi(y, x) = \Phi(x, y)^*$，则称为厄米。

命题 3.1. 设 $\mathfrak{M}$ 是一个带有忠实正规半有限迹 ρ的冯·诺依曼代数，设 $1 < p < \infty$，并设 $\mathfrak{X}$ 是一个复向量空间。若 $\Phi : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \longrightarrow L^p(\rho)$ 是一个正半双线性映射，则

$$\|\Phi(x, y)\|_p \leq 2\|\Phi(x, x)\|_p^{1/2} \, \|\Phi(y, y)\|_p^{1/2}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{X}.$$

证明。固定 $x, y \in \mathfrak{X}$。若它们满足 $\Phi(x,y) = 0$，则结论成立。现在设 $x, y \in \mathfrak{X}$ 满足 $\Phi(x,y) \neq 0$，并选取一个序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\rho) \cap L^p(\rho)$，使得

$$z_n \longrightarrow \Phi(x,y) \quad \text{in } L^p(\rho) \quad \text{as } n \to \infty.$$

令 $z_n = u_n|z_n|$ 为任意 $n \in \mathbb{N}$对应的 z_n 的极分解。由于$z_n \in L^p(\rho)$, 我们有 $|z_n|^{p-1} \in L^q(\rho)$，其中$q = \frac{p}{p-1}$，再由 H¨older 不等式可得,

$$z_n|z_n|^{p-1} \in L^1(\rho).$$

因此,

$$\rho(|z_n|^p) = \rho\big(u_n^* z_n\,|z_n|^{p-1}\big) = \rho\big(z_n|z_n|^{p-1}u_n^*\big) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

所以,

$$\begin{aligned}
\big|\|\Phi(x,y)\|_p^p - &\rho\big(\Phi(x,y)\,|z_n|^{p-1}u_n^*\big)\big| \\
&\le \big|\|\Phi(x,y)\|_p^p - \|z_n\|_p^p\big| + \big|\rho\big((\Phi(x,y)-z_n)\,|z_n|^{p-1}u_n^*\big)\big| \\
&\le \big|\|\Phi(x,y)\|_p^p - \|z_n\|_p^p\big| + \|\Phi(x,y)-z_n\|_p\,\||z_n|^{p-1}u_n^*\|_q \\
&\le \big|\|\Phi(x,y)\|_p^p - \|z_n\|_p^p\big| + \|\Phi(x,y)-z_n\|_p\,\||z_n|^{p-1}\|_q \\
&= \big|\|\Phi(x,y)\|_p^p - \|z_n\|_p^p\big| + \|\Phi(x,y)-z_n\|_p\,\|z_n\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

由于当 $n \to \infty$时， $z_n \to \Phi(x,y)$ 在 $L^p(\rho)$ 中，因此对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 及某个 $M > 0$，都有 $\|z_n\|_p^{p-1} \le M$，从而我们得到

$$\rho\big(\Phi(x,y)\,|z_n|^{p-1}u_n^*\big) \longrightarrow \|\Phi(x,y)\|_p^p, \qquad \text{as } n \to \infty.$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，记

$$|z_n|^{p-1}u_n^* = \xi_1^{(n)} - \xi_2^{(n)} + i\big(\xi_3^{(n)} - \xi_4^{(n)}\big),$$

其中 $\xi_j^{(n)} \in L^q(\rho) \cap L^\infty(\rho)$， $\xi_j^{(n)} \ge 0$对所有 $n \in \mathbb{N}$和 $j \in \{1,\dots,4\}$均成立，并且满足 $\xi_1^{(n)}\xi_2^{(n)} = \xi_3^{(n)}\xi_4^{(n)} = 0$ 和 $\xi_1^{(n)} - \xi_2^{(n)} = Re(|z_n|^{p-1}u_n^*)$、$\xi_3^{(n)} - \xi_4^{(n)} = Im(|z_n|^{p-1}u_n^*)$，对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。于是，对所有 $n \in \mathbb{N}$

$$\|\xi_1^{(n)} - \xi_2^{(n)}\|_q = \|\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)}\|_q \le \|\,|z_n|^{p-1}u_n^*\|_q$$

and

$$\|\xi_3^{(n)} - \xi_4^{(n)}\|_q = \|\xi_3^{(n)} + \xi_4^{(n)}\|_q \le \|\,|z_n|^{p-1}u_n^*\|_q.$$

因此我们有

$$|\rho\big(\Phi(x,y)\,|z_n|^{p-1}u_n^*\big)| \le \sum_{j=1}^{4} |\rho\big(\Phi(x,y)\,\xi_j^{(n)}\big)|.$$

定义标量半双线性形式

$$\varphi_j^{(n)}(a,b) := \rho\big(\Phi(a,b)\,\xi_j^{(n)}\big), \qquad a,b \in \mathfrak{X},\ j=1,\dots,4.$$

由于 Φ 是正的且 $\xi_j^{(n)} \ge 0$, 根据引理 2.4, 每个 $\varphi_j^{(n)}$ 都是 $\mathfrak{X}$ 上的正半双线性型。

对每个 $j \in\{1,\dots,4\}$ 将标量柯西–施瓦茨不等式应用于 $\varphi_j^{(n)}$, 得到

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{4} \big|\rho\big(\Phi(x,y)\,\xi_j^{(n)}\big)\big| &\le \sum_{j=1}^{4} (\varphi_j^{(n)}(x,x))^{1/2}\,(\varphi_j^{(n)}(y,y))^{1/2} \\
&\le \left(\sum_{j=1}^{4} (\varphi_j^{(n)}(x,x))^{1/2}\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{4} (\varphi_j^{(n)}(y,y))^{1/2}\right)^{1/2} \\
&= \left(\rho\big(\Phi(x,x)\sum_{j=1}^{4}\xi_j^{(n)}\big)\right)^{1/2} \left(\rho\big(\Phi(y,y)\sum_{j=1}^{4}\xi_j^{(n)}\big)\right)^{1/2} \\
&\le \|\Phi(x,x)\|_p^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|_p^{1/2} \left\|\sum_{j=1}^{4}\xi_j^{(n)}\right\|_q \\
&\le \|\Phi(x,x)\|_p^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|_p^{1/2}(\|\xi_1^{(n)}+\xi_2^{(n)}\|_q + \|\xi_3^{(n)}+\xi_3^{(n)}\|_q) \\
&\le 2\|\Phi(x,x)\|_p^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|_p^{1/2}\|\,|z_n|^{p-1}u_n^*\|_q.
\end{aligned}$$

利用 $\mathbb{R}^4$ 中的柯西-施瓦茨不等式和 H¨older 不等式。

由于

$$\|\,|z_n|^{p-1}u_n^*\|_q \le \|\,|z_n|^{p-1}\|_q \|u_n^*\|_\infty \le \||z_n|^{p-1}\|_q = \|z_n\|_p^{p-1},$$

则

$$\begin{aligned}
\big|\rho\big(\Phi(x,y)\,|z_n|^{p-1}u_n\big)\big| &\le 2\,\|\Phi(x,x)\|_p^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|_p^{1/2}\,\|\,|z_n|^{p-1}u_n^*\|_q \\
&\le 2\,\|\Phi(x,x)\|_p^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|_p^{1/2}\,\|z_n\|_p^{p-1}. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

并令 $n\to\infty$, 得到

$$\|\Phi(x,y)\|_p^p \le 2\,\|\Phi(x,x)\|_p^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|_p^{1/2}\,\|\Phi(x,y)\|_p^{p-1}.$$

两边同时除以 $\|\Phi(x,\ y)\|_p^{p-1} \ne 0$, 得到

$$\|\Phi(x,y)\|_p \le 2\,\|\Phi(x,x)\|_p^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|_p^{1/2}.$$

□

值得注意的是，当 $p = 2$ 时，不等式中的常数 2 可以降为 $\sqrt{2}$。

注 3.2. 令 $p = 2$。若 $A \in L^2(\rho) \cap L^\infty(\rho)$，则

$$\begin{aligned}\rho(AA^*) &= \rho\big((\Re A - i\Im A)(\Re A + i\Im A)\big)\\ &= \rho\big((\Re A)^2\big) + \rho\big((\Im A)^2\big) + i\big(\rho(\Re A\,\Im A) - \rho(\Im A\,\Re A)\big).\end{aligned}$$

由于 $\Re A,\ \Im A \in L^2(\rho)$，我们有

$$\rho(\Re A\,\Im A) = \rho(\Im A\,\Re A).$$

因此，$\rho(AA^*) = \rho((\Re A)^2) + \rho((\Im A)^2)$。将此等式应用于命题 3.1 的证明，我们推得对每个 $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{gathered}\||z_n|^{p-1}u_n^*\|_2 = \||z_n|u_n^*\|_2 = (\|\xi_1^n - \xi_2^n\|_2^2 + \|\xi_3^n - \xi_4^n\|_2^2)^{1/2}\\ (\|\xi_1^n + \xi_2^n\|_2^2 + \|\xi_3^n + \xi_4^n\|_2^2)^{1/2}\end{gathered}$$

因为对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\xi_1^n\xi_2^n = \xi_3^n\xi_4^n = 0$。然而，根据 $\mathbb{R}^2$ 中内积的柯西－施瓦茨不等式，我们得到对每个 $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(\|\xi_1^n + \xi_2^n\|_2^2 + \|\xi_3^n + \xi_4^n\|_2^2)^{1/2} &\le \sqrt{2}\left(\|\xi_1^n + \xi_2^n\|_2^2 + \|\xi_3^n + \xi_4^n\|_2^2\right)^{1/2}\\ &= \sqrt{2}\||z_n|u_n^*\|_2.\end{aligned}$$

3.1.正元的实部和虚部的估计$L^2(\rho)$值半双线性映射。 受 [22, 引理 1]，的启发，我们现在给出正元$L^2(\rho)$值半双线性映射的实部和虚部的范数估计。

命题 3.3。 设 $\Phi\colon\ \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to L^2(\rho)$ 是一个正半双线性映射。则对所有 x、$y \in \mathfrak{X}$，

$$\|\Re\Phi(x,\ y)\|_2^2 \le \|\Phi(x,\ x)\|_2\,\|\Phi(y,\ y)\|_2, \qquad \|\Im\Phi(x,\ y)\|_2^2 \le \|\Phi(x,\ x)\|_2\,\|\Phi(y,\ y)\|_2,$$

其中

$$\Re\Phi(x,y) = \frac{\Phi(x,y) + \Phi(x,y)^*}{2}, \qquad \Im\Phi(x,y) = \frac{\Phi(x,y) - \Phi(x,y)^*}{2i}.$$

证明。任取 $x,\ y \in \mathfrak{X}$。我们只证明关于 $\Re\Phi(x,\ y)$ 的第一个不等式；第二个不等式的证明类似。由引理 2.4，有

$$\Re\left(\rho\big((\Re\Phi(x,y))\ \Phi(x,y)\big)\right) = \rho\big(\Re\Phi(x,y)\,\Re\Phi(x,y)\big) = \|\Re\Phi(x,y)\|_2^2.$$

确实，

$$\rho\big((\Re\Phi(x,y))\ \Phi(x,y)\big) = \rho\big((\Re\Phi(x,y))^2\big) + i\,\rho\big((\Re\Phi(x,y))\ (\Im\Phi(x,y))\big),$$

并且由上述内容可知， $\rho\left(\left(\Re\Phi(x,\ y)\right)^2\right)$ 和 $\rho\left(\Re\Phi(x,\ y)\Im\Phi(x,\ y)\right)$ 都是实数，因此

$$\Re\left(\rho\big((\Re\Phi(x,y))\ \Phi(x,y)\big)\right)=\rho\left(\left(\Re\Phi(x,y)\right)^2\right).$$

设 $\{z_n\}\subset L^2(\rho)\cap L^\infty(\rho)$ 满足 $z_n\to\Phi(x,y)$ 在 $L^2(\rho)$ 中成立，其中 $n\to\infty$。那么

$$\Re z_n=\frac{z_n+z_n^*}{2}\to\Re\Phi(x,y)=\frac{\Phi(x,y)+(\Phi(x,y))^*}{2}\quad\text{in } L^2(\rho),\ \text{as } n\to\infty.$$

对每个 $n\in\mathbb{N}$，记

$$\Re z_n=z_n^+-z_n^-,\qquad \text{where } z_n^\pm\geq 0\qquad \text{and } z_n^+z_n^-=0.$$

Then

$$\left|\Re\left(\rho(\Phi(x,y)\,\Re\Phi(x,y))\right)\right|\leq\left|\rho\big(\Phi(x,y)\,(\Re\Phi(x,y))\big)\right|,$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\left|\rho(\Phi(x,y)(z_n^+-z_n^-))\right|&\leq\|\Phi(x,x)\|_2^{1/2}\|\Phi(y,y)\|_2^{1/2}\|z_n^++z_n^-\|_2\\&=\|\Phi(x,x)\|_2^{1/2}\|\Phi(y,y)\|_2^{1/2}\|z_n^+-z_n^-\|_2\end{aligned}$$

如命题 3.1 的证明中所示。在两边取 $n\to\infty$，得到

$$\begin{aligned}\|\Re\left(\Phi(x,y)\right)\|_2^2&\leq\left|\rho(\Phi(x,y)\,\Re\Phi(x,y))\right|\\&\leq\|\Phi(x,x)\|_2^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|_2^{1/2}\,\|\Re\Phi(x,y)\|_2.\end{aligned}$$

证明完毕。 □

考虑由所有可闭算子组成的偏 *-代数 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})$ A，其中 $D(A)=\mathcal{D}$, $D(A^*)\supset\mathcal{D}$。对合定义为 $A^\dagger:=A^*_{\restriction\mathcal{D}}$.

设 $\Phi\colon\ \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\ \mathcal{H})\times\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\ \mathcal{H})\to L^2(\rho)$ 是一个正半双线性映射。设 $A,\ B\in\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\ \mathcal{H})$。若存在 $\mathfrak{C}\in\in\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\ \mathcal{H})$ 使得....., 则称 $A,\ B$ 具有一个 Φ-交换子。

$$\Phi(AX,B^\dagger Y)-\Phi(BX,A^\dagger Y)=\Phi(CX,Y),\quad\forall X,Y\in\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})_b$$

其中 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})_b$ 表示 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\ \mathcal{H})$ 的有界算子 *-代数，且满足 $A\mathcal{D}\subset\mathcal{D}$, $A^\dagger\mathcal{D}\subset\mathcal{D}$. 。特别地，若 $A=A^\dagger,\ B=B^\dagger$ 是对称算子，且存在一个 Φ-交换子 C，则 $C=iK$，其中 $K=K^\dagger$。

若 $A\in\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{H})$ 是一个对称算子（即 $A=A^\dagger$），我们定义映射 $(\Delta A)_\Phi\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 如下:

$$(\Delta A)_\Phi(\lambda)=\|\Phi(A-\lambda I,A-\lambda I)\|_2^{1/2},\quad\lambda\in\mathbb{R}\}.$$

它可以被解释为 A 的某种不确定性 。

命题 3.3 使我们能够为某些对称算子对得到一个不确定性关系。

命题 3.4. 设 $A, B, K \in \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}, \mathcal{H})$ 是满足以下条件的对称算子

(a) $\Phi(AX, Y) = \Phi(X, AY)$, $\Phi(BX, Y) = \Phi(X, BY)$ *for every* $X, Y \in \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})_b$.
(b) $\Phi(AX, BY) - \Phi(BX, AY) = \Phi(iKX, Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})_b$

那么，对于每个 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，以下不确定性关系成立

$$(\Delta A)_\Phi(\lambda)(\Delta B)_\Phi(\mu) \geq \frac{1}{2}\gamma_\Phi(K), \tag{3.2}$$

其中 $\gamma_\Phi(K) = \|\Phi(K, I)\|_2$

证明。 正如通过直接而简单的计算可以证明的，条件 (a) 意味着：若 A, B 满足条件 (b)，那么 $A - \lambda I$ 和 $B - \mu I$也满足同样的条件，且右端是同一个算子 K。于是，由 (b) 显然可得

$$\Phi(A - \lambda I, B - \mu I) - \Phi(B - \mu I, A - \lambda I) = \Phi(iK, I). \tag{3.3}$$

由命题 3.3，我们得到

$$\|\Re\Phi(iK, I)\|_2 \leq 2\|\Phi(A - \lambda I, A - \lambda I)\|_2^{1/2}\|\Phi(B - \mu I, B - \mu I)\|_2^{1/2}$$

and

$$\|\Im\Phi(iK, I)\|_2 \leq 2\|\Phi(A - \lambda I, A - \lambda I)\|_2^{1/2}\|\Phi(B - \mu I, B - \mu I)\|_2^{1/2}.$$

考虑到 (3.3)，我们可以证明 $\Phi(K, I)$ 是自伴的。于是，

$$\|\Phi(K, I)\|_2 \leq 2\|\Phi(A - \lambda I, A - \lambda I)\|_2^{1/2}\|\Phi(B - \lambda I, B - \lambda I)\|_2^{1/2}.$$

换言之

$$\|\Phi(K, I)\|_2 \leq 2(\Delta A)_\Phi(\lambda)(\Delta B)_\Phi(\mu).$$

□

注 3.5. 前一个命题之所以重要，在于它与量子物理中的不确定性关系十分相似，而后者与对易关系相关。项 $\gamma_\phi(K)$ 可解释为 K 关于 Φ 的某种平均值，而类似 $(\Delta A)_\Phi$ 这样的项则可理解为 A 关于 Φ 的方差。

在更抽象的情形下，可以得到一个类似于命题 3.4 的结论。设 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ 是一个带单位元 e 的拟 *-代数，且$\Phi\colon \mathfrak{A}\times\mathfrak{A} \to L^2(\rho)$ 是一个满足不变性条件的正半双线性映射

$$\Phi(ax, y) = \Phi(x, a^*y), \quad \forall a \in \mathfrak{A},\ x, y \in \mathfrak{A}_0.$$

和之前一样，如果 a， $b \in \mathfrak{A}$，我们称 a， b 存在一个 Φ-交换子，如果存在 $c \in \mathfrak{A}$ 使得

$$\Phi(ax, b^*y) - \Phi(bx, a^*y) = \Phi(cx, y), \quad \forall x, y \in \mathfrak{A}_0.$$

对于 $a \in \mathfrak{A}$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，我们定义

$$\Delta_\Phi(a)(\lambda) = \|\Phi(a - \lambda\mathsf{e}, a - \lambda\mathsf{e})\|_2.$$

命题 3.6. 设 a, b 是 $\mathfrak{A}$ 的对称元，并假设它们存在一个 Φ-交换子 c。那么，对于任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，

$$(\Delta a)_\Phi(\lambda)(\Delta b)_\Phi(\mu) \geq \frac{1}{2}\gamma_\Phi(c), \tag{3.4}$$

其中 $\gamma_\Phi(c) = \|\Phi(c,\mathsf{e})\|_2$。

3.2. **()中的正规元的柯西-施瓦茨不等式**。设 ρ 是冯·诺依曼代数$\mathfrak{M}$上的忠实正规半有限迹。我们有以下命题。

命题 3.7. 设 $p > 1$，并设 $\Phi\colon \mathfrak{X}\times\mathfrak{X} \to L^p(\rho)$ 是一个正半双线性映射。假设对于某些 $x, y \in \mathfrak{X}$，有 $\Phi(x, y) \in L^p(\rho)\cap L^\infty(\rho)$。如果 (x, y) 是正规的，那么

$$\|\Phi(x, y)\|_p \leq \|\Phi(x, x)\|_p^{1/2}\, \|\Phi(y, y)\|_p^{1/2}.$$

证明。若 $x, y \in \mathfrak{X}$ 满足 $\Phi(x, y) \in L^p(\rho)\cap L^\infty(\rho)$ 且 $\Phi(x, y) = 0$，则不等式成立，因此不妨设 $\Phi(x, y) \neq 0$。令 $V_{x,y}$ 表示 $\Phi(x, y)$ 的极分解中的偏等距算子

$$\Phi(x, y) = V_{x,y}\,|\Phi(x, y)|.$$

Let

$$\Pi = \sum_{j=1}^{N} c_j P_j$$

是 $L^q(\rho) \cap L^\infty(\rho)$ 中的简单算子值函数，其中 P_j 是 $L^q(\rho) \cap L^\infty(\rho)$ 中两两正交的正交投影。于是，

(3.5)

$$
\begin{aligned}
|\rho(\Phi(x,y)\Pi)| &\le \sum_{j=1}^{N} |c_j| \, |\rho(\Phi(x,y)P_j)| \\
&\le \sum_{j=1}^{N} |c_j| \, \left(\rho\left(\Phi(x,x)P_j\right)\right)^{1/2} \left(\rho\left(\Phi(y,y)P_j\right)\right)^{1/2} \\
&\le \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| \rho\left(\Phi(x,x)P_j\right)\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| \rho\left(\Phi(y,y)P_j\right)\right)^{1/2} \\
&= \left(\rho\left(\Phi(x,x)\left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| P_j\right)\right)\right)^{1/2} \left(\rho\left(\Phi(y,y)\left(\sum_{j=1}^{N} |c_j| P_j\right)\right)\right)^{1/2} \\
&= \left(\rho\left(\Phi(x,x)\left(|\Pi|\right)\right)\right)^{1/2} \left(\rho\left(\Phi(y,y)\left(|\Pi|\right)\right)\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

其中，在第二个不等式中，我们对由下式给出的半双线性形式 φ_j：$\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$, $j \in \{1, \dots, N\}$ 应用了柯西-施瓦茨不等式

$$\varphi_j(x,y) = \rho(\Phi(x,y)P_j), \quad \forall x, y \in \mathfrak{X}$$

由于 Φ 的 Positivity 以及引理 2.4，这些形式是正的；而在最后一个不等式中，我们对 $\mathbb{R}^N$ 中的内积应用了柯西-施瓦茨不等式；在最后一个等式中，则使用了如下事实：$|\Pi| = \sum_{j=1}^{N} |c_j| P_j$，因为当 $i \neq j$ 时 $P_i P_j = 0$。

现在，根据 H¨older 不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left(\rho\left(\Phi(x,x)\left(\Pi\right)\right)\right)^{1/2} \left(\rho\left(\Phi(y,y)\left(\Pi\right)\right)\right)^{1/2} \\
&\qquad \le \|\Phi(x,x)\|_p^{1/2} \, \|\Phi(y,y)\|_p^{1/2} \, \|\Pi\|_q .
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

现在假设 $\Phi(x, y)$ 是正规的。那么

$$|\Phi(x,y)|^{p-1} V_{x,y}^* = \int_{\sigma(\Phi(x,y))} \operatorname{sgn}(z) |z|^{p-1} \, dE(z)$$

其中 E 是 $\Phi(x, y)$ 的谱测度，而 sgn : $\sigma(\Phi(x, y)) \to \mathbb{C}$由下式给出

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & \text{if } z \neq 0 \\ 0, & \text{if } z = 0. \end{cases}$$

根据引理 2.2，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在 $|\Phi(x,y)|$ 的一个谱投影 P_m，使得

$$\||\Phi(x,y)|(I-P_m)\|_p \leq \frac{1}{m}.$$

现在，由注 2.3，我们有 $P_m = F((\frac{1}{m},\infty))$，其中 F 是与 $|\Phi(x,y)|$ 对应的谱测度。由于对所有 $t \in \sigma(|\Phi(x,y)|)$，$t^p\chi_{[0,\frac{1}{m}]}(t) = (t\chi_{[0,\frac{1}{m}]}(t))^p$，根据谱函数演算，我们有

$$|\Phi(x,y)|^p(I-P_m)^p = (|\Phi(x,y)|(I-P_m))^p$$

并且由于 $(I-P_m)^p = I - P_m = (I-P_m)^q$，我们得到：

$$\||\Phi(x,y)|^{p-1}(I-P_m)\|_q = \||\Phi(x,y)|(I-P_m)\|_p^{p-1} < m^{-(p-1)}.$$

设 $\{\Pi_n\}$ 是定义在 $\sigma(\Phi(x,y))$ 上的一列简单函数，它们在上确界范数下收敛于函数

$$z \to \operatorname{sgn}(z)|z|^{p-1},$$

那么，$\{\int_{\sigma(\Phi(x,y))} \Pi_n dE\}_n$ 是一列算子值函数，在算子范数下收敛于 $|\Phi(x,y)|^{p-1}V_{x,y}^*$。现在，对每个 n，考虑 $\{A_1,\dots,A_N\}$ 这一组两两不交的博雷尔子集，取自 $\sigma(\Phi(x,y))$，且满足 $\sigma(\Phi(x,y)) = \sum_{j=1}^N A_j$，使得

$$\int_{\sigma(\Phi(x,y))} \Pi_n dE = \sum_{j=1}^N c_j E(A_j)$$

对于某些标量 $c_1,\dots,c_n$（注意，不仅 $\{A_1,\dots,A_N\}$，N 和标量 $\{c_1,\dots,c_N\}$ 也依赖于 n）

现在，对于每个 j，P_m 都与 $E(A_j)$ 相互交换，因为 P_m 是对应于 $|\Phi(x,y)|$ 的谱投影，而 E 是对应于 $\Phi(x,y)$ 的谱测度；后者是正规的，因此与 $|\Phi(x,y)|$ 交换。因此，由于两个相互交换的正交投影的乘积仍是正交投影（例如，见 [12, 定理 2.8.4]），我们得到，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，算子 $\left(\int_{\sigma(\Phi(x,y))} \Pi_n dE\right) P_m$ 也是 $\mathfrak{M}$ 中的一个简单算子值函数，因为

$$\left(\int_{\sigma(\Phi(x,y))} \Pi_n dE\right) P_m = \sum_{j=1}^N c_j E(A_j) P_m$$

并且对于每个 $j \in \{1,\dots,N\}$，$E(A_j)P_m$ 都是正交投影；此外，对于所有 $i \neq j$，当 $i,\ j \in \{1,\dots,N\}$ 时，

$$E(A_j)P_m E(A_i)P_m = P_m E(A_j)E(A_i)P_m = 0.$$

此外， P_m 与 $V^*_{x,\ y}$可交换。事实上，由于 $\Phi(x,\ y)$ 是正规算子，因此 $V^*_{x,\ y}$ 与 $|\Phi(x,\ y)|$ 可交换；又由于 P_m 是对应于 $|\Phi(x,\ y)|$的谱投影，我们必有

$$P_m V^*_{x,y} = V^*_{x,y} P_m.$$

现在注意到，由于 P_m 是有限投影（即 $\rho(P_m) < \infty$），因此 $P_m \in L^q(\rho)$,

$$\begin{aligned}&\left\| \left(\int_{\sigma(\Phi(x,y))} \Pi_n dE \right) P_m - |\Phi(x,y)|^{p-1} V^*_{x,y} P_m \right\|_q \\ &\leq \left\| \int_{\sigma(\Phi(x,y))} \Pi_n dE - |\Phi(x,y)|^{p-1} V^*_{x,y} \right\|_\infty \left\| P_m \right\|_q \to 0,\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\| \, |\Phi(x,y)|^{p-1} V^*_{x,y} (P_m - I) \|_q &= \| \, |\Phi(x,y)|^{p-1} (P_m - I) V^*_{x,y} \|_q \\ &\leq \| \, |\Phi(x,y)|^{p-1} (P_m - I) \|_q \| V^*_{x,y} \|_\infty \\ &\leq \| \, |\Phi(x,y)|^{p-1} (P_m - I) \|_q < m^{-(p-1)}\end{aligned}$$

正如前面所证明的。

由于 $\left(\int_{\sigma^{(\Phi(x(y))}} \Pi_n dE \right) P_m$ 是$L^q(\rho) \cap L^\infty(\rho)$中的简单算子值函数, 对每个 n 都有，并且对所有 $j \in \{1, \ldots, N\}$， $E(A_j) P_m \in L^q(\rho)$，由 (3.5) 和 (3.6) 得到

$$\begin{aligned}&\left| \rho \left(\Phi(x,y) \left(\int_{\sigma(\Phi(x,y))} \Pi_n dE \right) P_m \right) \right| \\ &\leq \| \Phi(x,x) \|_p^{1/2} \, \| \Phi(y,y) \|_p^{1/2} \, \| \left(\int_{\sigma(\Phi(x,y))} \Pi_n dE \right) P_m \|_q.\end{aligned} \tag{3.7}$$

在 (3.7) 两边取 $n \to \infty$，则对每个 $m \in \mathbb{N}$都有:

$$\begin{aligned}&\left| \rho(\Phi(x,y) \, |\Phi(x,y)|^{p-1} V^*_{x,y} P_m) \right| = \left| \rho(\Phi(x,y) \, |\Phi(x,y)|^{p-1} P_m V^*_{x,y}) \right| \\ &\leq \| \Phi(x,x) \|_p^{1/2} \, \| \Phi(y,y) \|_p^{1/2} \, \| |\Phi(x,y)|^{p-1} P_m V^*_{x,y} \|_q.\end{aligned}$$

因此，令 $m \to \infty$，并利用

$$|\Phi(x,y)|^{p-1} P_m V^*_{x,y} \to |\Phi(x,y)|^{p-1} V^*_{x,y}, \quad \text{in } L^q(\rho) \text{ as } m \to \infty$$

我们得到

$$\begin{aligned}|\rho \left(|\Phi(x,y)|^p \right)| &= \left| \rho \left(\Phi(x,y) |\Phi(x,y)|^p V^*_{v-y} \right) \right| \\ &\leq \| \Phi(x,x) \|_p^{1/2} \, \| \Phi(y,y) \|_p^{1/2} \, \| |\Phi(x,y)|^{p-1} V^*_{x,y} \|_q.\end{aligned}$$

由于 $\||\Phi(x,y)|^{p-1}V_{x,y}^*\|_q \le \||\Phi(x,y)|^{p-1}\|_q = \||\Phi(x,y)|\|_q^{p-1}$，将两边同时除以 $\|\Phi(x,y)\|_p^{p-1}$可得

$$\|\Phi(x,y)\|_p \le \|\Phi(x,x)\|_p^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|_p^{1/2}.$$

证明至此完成。 □

受 [38, 定理 1.3.1 (ii)] 的启发，我们给出以下

推论 3.8。设 $\mathfrak{A}$ 是一个 $*$-代数，并设 $\omega:\ \mathfrak{A}\to L^p(\rho)$ 是一个正线性映射。若 $\omega(y^*x)\in L^p(\rho)\cap L^\infty(\rho)$ 且对某些 x、$y\in\mathfrak{A}$ 是正规的，则

$$\|\omega(y^*x)\|_p \le \|\omega(x^*x)\|_p^{1/2}\,\|\omega(y^*y)\|_p^{1/2}.$$

证明。对于 $a,\ b\in\mathfrak{A}$ 定义 $\Phi_\omega(x,\ y)=\omega(y^*x)$，并将命题 4.1 应用于正半双线性映射 Φ_ω。 □

注 3.9。注意，若 $\mathfrak{A}$ 是一个带单位元 e 的 C^*-代数且 $\|\omega\|\le 1$，则对所有满足 $\omega(a)\in L^p(\rho)\cap L^\infty(\rho)$ 且 $\omega(a)$ 正规的 $a\in\mathfrak{A}$，

$$\|\omega(a)\|_p^2 \le \|\omega(a^*a)\|_p\|\omega(\mathsf{e})\|_p \le \|\omega(a^*a)\|_p^2,$$

因此，我们得到了与正规元的 Kadison-Schwarz不等式之间的某种联系（例如，参见 [38, 定理 1.3.1 (ii)]）。事实上，在非交换 L^p-空间的框架下，推论 3.8 可视为 [38, 定理 1.3.1 (ii)], 的对偶或对称版本：因为在 [38, 定理 1.3.1 (ii)] 中，假设 a是一个正规元；而在推论 3.8 中，我们假设 $\omega(a)$是正规的。

3.3. 取值于 *-代数上的有序 Banach 双模的正半双线性映射情形。

回想一下，$L^p(\rho)$实际上是 *-代数 $L^\infty(\rho)$上的一个 Banach 双模。受取值于正 $L^p(\rho)$的正半双线性映射的广义柯西–施瓦茨不等式启发，本小节将研究取值于一类特殊的 *-代数上的有序 Banach 双模的正半双线性映射所满足的柯西-施瓦茨不等式。

我们假设 $\mathfrak{Y}$是一个关于 *-代数 $\mathfrak{Y}_0$ 的（有序）Banach 双模（其中 $\mathfrak{Y}_0$ 配备了一个不一定满足次乘法性的范数 $\|\cdot\|_{\mathfrak{Y}_0}$），其相应的锥为 $\mathfrak{K}$ 和 $\mathfrak{K}_0$，且

$$\mathfrak{K}_0=\left\{\sum_{i=1}^N z_i^*z_i,\, z_i\in\mathfrak{Y}_0, i=1,\dots,N; N\in\mathbb{N}\right\},$$

满足以下条件：

($C1$) Every $z\in\mathfrak{Y}_0$ can be written as $z=z_1-z_2+i(z_3-z_4)$, where $z_j\in\mathfrak{K}_0$ and $\|z_1-z_2\|_{\mathfrak{Y}_0}=\|z_1+z_2\|_{\mathfrak{Y}_0}\le\|z\|_{\mathfrak{Y}_0}$ and $\|z_3-z_4\|_{\mathfrak{Y}_0}=\|z_3+z_4\|_{\mathfrak{Y}_0}\le\|z\|_{\mathfrak{Y}_0}$.

$(C2)$ 存在一族半双线性型 $\varphi:\ \mathfrak{Y}\times\mathfrak{Y}_0\to\mathbb{C}$，具有以下性质：i) 对于每个 $y^+\in\mathfrak{K}$ 和 $z^+\in\mathfrak{K}_0$，$\varphi(y^+,z^+)\geq 0$，对所有 $\varphi\in\mathcal{F}$. 均成立；ii) 对于每个 $y\in\mathfrak{Y}$ 和 $z\in\mathfrak{Y}_0$,

$$|\varphi(y,z)|\leq\|y\|_{\mathfrak{Y}}\|z\|_{\mathfrak{Y}_0},\quad\forall\varphi\in\mathcal{F}.$$

iii) 对每个 $y\in\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}$中的范数

$$\|y\|_{\mathfrak{Y}}=\sup_{\substack{z\in\mathfrak{Y}_0\\ \|z\|_{\mathfrak{Y}_0}\leq 1}}\sup_{\varphi\in\mathcal{F}}|\varphi(y,z)|.$$

在这些假设下，以下命题成立。

命题 3.10. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个复向量空间， $\mathfrak{Y}$ 是定义在带有正闭锥 $\mathfrak{K}$的 *-代数 $\mathfrak{Y}_0$ 上的有序巴拿赫双模，并满足 $(C1)-(C2)$。设 $\Phi:\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ 是一个正半双线性映射。那么，对所有 x_1、$x_2\in\mathfrak{X}$，有

$$\|\Phi(x_1,x_2)\|_{\mathfrak{Y}}\leq 2\|\Phi(x_1,x_1)\|_{\mathfrak{Y}}^{1/2}\|\Phi(x_2,x_2)\|_{\mathfrak{Y}}^{1/2}.$$

证明。 设 $\mathcal{F}$ 是 $(C2)$ 中的族。对每个固定的 $\varphi\in\mathcal{F}$ 和 $z^+\in\mathfrak{K}_0$，令 $\widetilde{\varphi}_{z^+}$ 为定义在 $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ 上的半双线性型，其定义为

$$\widetilde{\varphi}_{z^+}(x_1,x_2)=\varphi(\Phi(x_1,x_2),z^+),\quad\forall x_1,x_2\in\mathfrak{X}.$$

由于 Φ 是正的，由 $(C2)$ $i)$，可得 $\widetilde{\varphi}_{z^+}$ 是正的。因此，由 $(C2)$ $ii)$，对所有 x_1, $x_2\in\mathfrak{X}$，有

$$|\widetilde{\varphi}_{z^+}(x_1,x_1)||\widetilde{\varphi}_{z^+}(x_2,x_2)|\leq\|\Phi(x_1,x_1)\|_{\mathfrak{Y}}\|\Phi(x_2,x_2)\|_{\mathfrak{Y}}\|z^+\|_{\mathfrak{Y}_0}^2.\tag{3.8}$$

现在，如果我们选择 $z\in\mathfrak{Y}_0$，根据假设，可以找到 z_1^+, z_2^+, z_3^+, $z_4^+\in\mathfrak{K}_0$，使得 $z=z_1^+-z_2^++i(z_3^+-z_4^+)$，并且对所有 $j\in\{1,...,4\}$. 都有 $\|z_j^+\|_{\mathfrak{Y}_0}\leq\|z\|_{\mathfrak{Y}_0}$ 因此，将柯西-施瓦茨不等式应用于

正半双线性型 $\widetilde{\varphi}_{z_j^+}$，并根据（3.8），可得

$$\begin{aligned}
|\varphi(\Phi(x_1,x_2),z)| &\leq \sum_{j=1}^{4} |\varphi(\Phi(x_1,x_2),z_j^+)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{4} \left(\varphi(\Phi(x_1,x_1),z_j^+)\right)^{1/2} \left(\varphi(\Phi(x_2,x_2),z_j^+)\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{4} \varphi(\Phi(x_1,x_1),z_j^+)\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{4} \varphi(\Phi(x_2,x_2),z_j^+)\right)^{1/2} \\
&\leq \|\Phi(x_1,x_1)\|_{\mathfrak{Y}}^{1/2} \|\Phi(x_2,x_2)\|_{\mathfrak{Y}}^{1/2} (\|z_1^+ + z_2^+\|_{\mathfrak{Y}_0} + \|z_3^+ + z_4^+\|_{\mathfrak{Y}_0}) \\
&\leq 2\|\Phi(x_1,x_1)\|_{\mathfrak{Y}}^{1/2} \|\Phi(x_2,x_2)\|_{\mathfrak{Y}}^{1/2} \|z\|_{\mathfrak{Y}_0}
\end{aligned}$$

对所有 x_1，$x_2 \in \mathfrak{X}$ 以及所有 $\varphi \in \mathcal{F}$，其中第三个不等式由对 $\mathbb{R}^4$ 中的内积应用柯西-施瓦茨不等式得到。因此，对于每个 $z \in \mathfrak{Y}_0$，若 $\|z\|_{\mathfrak{Y}_0} \leq 1$ 且对所有 x_1，$x_2 \in \mathfrak{X}$，则有

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{F}} |\varphi(\Phi(x_1,x_2),z)| \leq 2\|\Phi(x_1,x_1)\|_{\mathfrak{Y}}^{1/2} \|\Phi(x_2,x_2)\|_{\mathfrak{Y}}^{1/2}.$$

然而，由（$C2$） iii），我们推得，对所有 x_1，$x_2 \in \mathfrak{X}$

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x_1,x_2)\|_{\mathfrak{Y}} &= \sup_{\substack{z\in\mathfrak{Y}_0 \\ \|z\|_{\mathfrak{Y}_0}\leq 1}} \sup_{\varphi\in\mathcal{F}} |\varphi(\Phi(x_1,x_2),z)| \\
&\leq 2\|\Phi(x_1,x_1)\|_{\mathfrak{Y}}^{1/2} \|\Phi(x_2,x_2)\|_{\mathfrak{Y}}^{1/2}.
\end{aligned}$$

□

例 3.11。设 $\mathfrak{Y}_0$ 是一个含幺 C^*-代数，$\mathfrak{Y}$ 是其对偶空间。若 $\phi \in \mathfrak{Y}$ 且 $z \in \mathfrak{Y}_0$，则乘法定义为

$$(\phi \cdot z)(w) = \phi(zw) \text{ and } (z \cdot \phi)(w) = \phi(wz), \forall w \in \mathfrak{Y}_0.$$

设 $\mathfrak{K}_0$ 是 $\mathfrak{Y}_0$ 中由 $\mathfrak{Y}_0$ 中正元素构成的自然锥，且 $\mathfrak{Y}$ 中的锥 $\mathfrak{K}$ 是对偶锥，即由所有满足如下条件的 $\phi \in \mathfrak{Y}$ 构成：只要 $z \in \mathfrak{K}_0$，就有 ϕ（z） ≥ 0。我们可以取由唯一一个半双线性型 φ： $\mathfrak{Y} \times \mathfrak{Y}_0 \to \mathbb{C}$ 构成的集合 $\mathcal{F}$，其定义为

$$\varphi(\phi, z) = \phi(z^*).$$

4. Numerical radii norms and Cauchy-Schwarz inequalities

4.1. 关于 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上的数值半径范数及相关的柯西–施瓦茨不等式。回顾一下，$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上的数值半径范数（记作 $\|\cdot\|_{n.r.}$）定义为

$$\|T\|_{n.r.} = \sup_{h\in\mathcal{H},\,\|h\|=1} |\langle Th, h\rangle|.$$

对于每个 $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$,

$$\frac{1}{2}\|T\| \le \|T\|_{n.r.} \le \|T\|$$

一般而言，不等式是严格的。

容易看出，每个取值于正元 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$的半双线性映射都满足柯西–施瓦茨不等式。事实上，若

$$\Phi : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

是正的半双线性映射，那么对每个满足 $\|h\| = 1$的 $h \in \mathcal{H}$ ，映射

$$\varphi_h(x, y) = \langle \Phi(x, y)h, h\rangle, \qquad x, y \in \mathfrak{X},$$

都是正半双线性型。将标量柯西–施瓦茨不等式应用于 φ_h，可得

$$\begin{aligned} |\langle \Phi(x, y)h, h\rangle| &\le \langle \Phi(x, x)h, h\rangle^{1/2}\langle \Phi(y, y)h, h\rangle^{1/2} \\ &\le \|\Phi(x, x)\|_{n.r.}^{1/2}\|\Phi(y, y)\|_{n.r.}^{1/2}, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

对所有单位向量 $h \in \mathcal{H}$取上确界，得到

$$\|\Phi(x, y)\|_{n.r.} \le \|\Phi(x, x)\|_{n.r.}^{1/2}\|\Phi(y, y)\|_{n.r.}^{1/2}, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{X}.$$

现在设 $\mathfrak{M}$ 是一个冯·诺依曼代数，并考虑空间

$$\mathfrak{B}\big(\mathfrak{M}, (\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{n.r.})\big)$$

该空间由从 $\mathfrak{M}$ 到 $(\mathfrak{B}(\mathcal{H})\ \|\cdot\|_{n.r.})$ 的所有有界线性算子构成，并配备算子范数。这个空间有一个显然的正元素锥，由所有将 $\mathfrak{M}$ 的正元素映射到 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 的正元素的算子组成。

现在我们将证明取值于 $\mathfrak{B}\big(\mathfrak{M},\ (\mathfrak{B}(\mathcal{H})\ \|\cdot\|_{n.r.})\big)$ 的正半双线性映射的柯西-施瓦茨不等式。证明思路受到 [6, 命题 3.1] 的证明启发。

命题 4.1. 设 $\Phi:\ \mathfrak{X}\times\mathfrak{X} \to \mathfrak{B}\big(\mathfrak{M},(\mathfrak{B}(\mathcal{H})\ \|\cdot\|_{n.r.})\big)$ 是一个正半双线性映射。则对所有 $x, y \in \mathfrak{X}$,

$$\|\Phi(x, y)\|_{n.r.} \le \|\Phi(x, x)\|_{n.r.}^{1/2}\,\|\Phi(y, y)\|_{n.r.}^{1/2}.$$

证明. 设 $\Pi=\sum_{j=1}^{N}c_jP_j$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的一个简单算子值函数，其中 P_j 是两两正交投影，且 $\sum_j P_j=I$。对于满足 $\|h\|=1$ 的每个$h\in\mathcal{H}$，我们有

$$\begin{aligned}|\langle\Phi(x,y)(\Pi)h,h\rangle| &= \left|\sum_{j=1}^{N}c_j\langle\Phi(x,y)(P_j)h,h\rangle\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{N}|c_j|\,|\langle\Phi(x,y)(P_j)h,h\rangle| \\ &\le \|\Pi\|_{\mathfrak{M}}\sum_{j=1}^{N}|\langle\Phi(x,y)(P_j)h,h\rangle|\,,\quad \forall x,y\in\mathfrak{X}.\end{aligned}$$

对于每个 $j\in\{1,\dots,N\}$，我们将标量柯西–施瓦茨不等式应用于 $\mathfrak{X}$ 上的正半双线性型

$$\varphi_j(x,y)=\langle\Phi(x,y)(P_j)h,h\rangle,\quad x,y\in\mathfrak{X}.$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\|\Pi\|_{\mathfrak{M}}\sum_{j=1}^{N}|\langle\Phi(x,y)(P_j)h,h\rangle| \\ &\le \|\Pi\|_{\mathfrak{M}}\sum_{j=1}^{N}\langle\Phi(x,x)(P_j)h,h\rangle^{1/2}\langle\Phi(y,y)(P_j)h,h\rangle^{1/2} \\ &\le \|\Pi\|_{\mathfrak{M}}\left(\sum_{j=1}^{N}\langle\Phi(x,x)(P_j)h,h\rangle\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{N}\langle\Phi(y,y)(P_j)h,h\rangle\right)^{1/2},\ \forall x,y\in\mathfrak{X}.\end{aligned}$$

最后一个不等式源于 $\mathbb{R}^N$ 中内积的柯西-施瓦茨不等式。

对 j 求和并利用 $\sum_j P_j=I$，得到

$$\sum_{j=1}^{N}\langle\Phi(a,a)(P_j)h,h\rangle=\langle\Phi(a,a)(I)h,h\rangle\le\|\Phi(a,a)(I)\|_{n.r.}^{1/2}\le\|\Phi(a,a)\|^{1/2},$$

对于任意 $a\in\mathfrak{X}$，因此

$$|\langle\Phi(x,y)(\Pi)h,h\rangle|\le\|\Pi\|_{\mathfrak{M}}\|\Phi(x,x)\|^{1/2}\|\Phi(y,y)\|^{1/2},\quad\forall x,y\in\mathfrak{X}.$$

对所有单位向量 $h\in\mathcal{H}$ 取上确界，得到

$$\|\Phi(x,y)(\Pi)\|_{n.r.}\le\|\Pi\|_{\mathfrak{M}}\|\Phi(x,x)\|^{1/2}\|\Phi(y,y)\|^{1/2},\quad\forall x,y\in\mathfrak{X}.\tag{4.1}$$

现在选取一列简单算子值函数 $\{\Pi_n\}$，使其一致收敛于一个酉元 $U \in \mathfrak{M}$。对于每个 Π_n，式 (4.1) 都成立；令 $n \to \infty$ 并取极限，得到

$$\|\Phi(x,y)(U)\|_{n.r.} \leq \|\Phi(x,x)\|^{1/2}\|\Phi(y,y)\|^{1/2}, \quad \forall x,y \in \mathfrak{X}.$$

由于任意酉算子的凸组合 V 都满足相同的不等式，而每个满足 $\|T\|_{\mathfrak{M}} \leq 1$ 的 $T \in \mathfrak{M}$ 都是此类凸组合序列 $\{V_n\}$ 的一致极限，因此我们得出

$$\|\Phi(x,y)(T)\|_{n.r.} \leq \|\Phi(x,x)\|^{1/2}\|\Phi(y,y)\|^{1/2}, \qquad \|T\|_{\mathfrak{M}} \leq 1.$$

最后，对所有满足 $\|T\| \leq 1$ 的 $T \in \mathfrak{M}$ 取上确界，即得所需的不等式。□

注 4.2。由于 $\|\cdot\|_{n.r.} \leq \|\cdot\|$ 在 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上，因此它

$$\mathfrak{B}\big(\mathfrak{M}, (\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)\big) \subseteq \mathfrak{B}\big(\mathfrak{M}, (\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{n.r.})\big).$$

现在，冯·诺依曼代数 $\mathfrak{M}$ 可以等距嵌入到 $(\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ 中，其中 $\mathcal{H}$ 是适当的希尔伯特空间，因此由上述结果可得

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{B}\big(\mathfrak{M}, (\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{n.r.})\big)$$

对于适当的希尔伯特空间。正如我们将在第 5 节（推论 5.9 和注 5.10）中看到的，根据命题 4.1，我们能够在 $B_{\mathfrak{Y}}$-空间中表示每个定义在含幺 *-代数 $\mathfrak{A}$ 上的正线性映射 $\omega\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}\big(\mathfrak{M}, (\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{n.r.})\big)$。然而，由上述结果可知，每个正线性映射 $\Omega\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ 因此都可以在 $B_{\mathfrak{Y}}$-空间中表示。最后，我们注意到，命题 4.1 的证明很容易推广到以下情形：将 $(\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{n.r.})$ 替换为配备数值半径范数 ν 的含幺C^*-代数 $\mathfrak{A}$，其中该范数定义为

$$\nu(a) = \sup\{|\theta(a)| : \theta \text{ is a state on } \mathfrak{A}\}, \quad a \in \mathfrak{A}.$$

证明与命题 4.1 的证明相同，只需令作用于 $\mathfrak{A}$ 上的态发挥泛函的作用

$$T \to \langle Th, h\rangle, \quad h \in \mathcal{H}, \|h\| = 1, T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}).$$

令 $\mathfrak{B}\big(\mathfrak{M}, \mathfrak{B}(\mathfrak{M},(\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{n.r.}))\big)$ 表示从 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{B}(\mathfrak{M},(\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{n.r.}))$ 的所有有界线性算子所构成的空间，并赋予算子范数。

通过采用与命题 4.1 证明中相同的技巧和步骤，我们现在可以给出以下内容

推论4.3。令 $\Phi\colon \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{B}\big(\mathfrak{M}、\mathfrak{B}(\mathfrak{M}、(\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{n.r.})\big)$ 为正半双线性映射。则对于所有 $x、y \in \mathfrak{X}$，有

$$\|\Phi(x,y)\| \leq \|\Phi(x,x)\|^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|^{1/2}.$$

证明。令 $\Pi=\sum_{i=1}^{N} c_i P_i$ 和 $\Theta=\sum_{j=1}^{M} d_j Q_j$ 为 $\mathfrak{M}$中的两个简单算子值函数。对于满足 $\|h\|=1$ 的每个 $h\in\mathcal{H}$，有

$$\begin{aligned}
&\left|\langle \Phi(x,y)(\Pi)(\Theta)h,h\rangle\right| \le \|\Pi\|_{\mathfrak{M}}\|\Theta\|_{\mathfrak{M}} \sum_{i,j}\left|\langle \Phi(x,y)(P_i)(Q_j)h,h\rangle\right| \\
&\le \|\Pi\|_{\mathfrak{M}}\|\Theta\|_{\mathfrak{M}} \left(\langle \Phi(x,x)(I_{\mathfrak{M}})(I_{\mathfrak{M}})h,h\rangle\right)^{1/2} \left(\langle \Phi(y,y)(I_{\mathfrak{M}})(I_{\mathfrak{M}})h,h\rangle\right)^{1/2} \\
&\le \|\Pi\|_{\mathfrak{M}}\|\Theta\|_{\mathfrak{M}} \|\Phi(x,x)\|^{1/2}\|\Phi(y,y)\|^{1/2}.
\end{aligned}$$

按照命题 4.1 证明中的相同论证，我们可以推得

$$\|\Phi(x,y)(\Pi)\| \le \|\Pi\|_{\mathfrak{M}}\|\Phi(x,x)\|^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|^{1/2}$$

然后，再次重复相同步骤，即先用简单算子值函数逼近 $\mathfrak{M}$ 中的酉算子，再取酉算子的凸组合并应用 Russo–Dye 定理，最终得到

$$\|\Phi(x,y)\| \le \|\Phi(x,x)\|^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|^{1/2}.$$

□

注 4.4. 通过归纳应用这一过程，我们可以证明，对于每个取值于 Φ 的正半双线性映射，柯西 – 施瓦茨不等式在范数意义下都成立

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{M},\mathfrak{B}(\mathfrak{M},\mathfrak{B}(\mathfrak{M},\dots(\mathfrak{B}(\mathcal{H}),\|\cdot\|_{n.r.})\dots))).$$

若 $\mathfrak{K}$ 是 $\mathfrak{B}(\mathfrak{M},(\mathfrak{B}(\mathcal{H})\ \|\cdot\|_{n.r.}))$ 中由那些将 $\mathfrak{M}$ 中正元素映射为 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 中正元素的算子组成的锥，则 $\mathfrak{B}(\mathfrak{M},(\mathfrak{B}(\mathcal{H})\ \|\cdot\|_{n.r.}))$ 是一个以 $\mathfrak{M}$ 为基的有序巴拿赫双模，其乘法定义与例 3.11 中相同。通过归纳重复这一构造，我们可以推得，$\mathfrak{B}(\mathfrak{M},\mathfrak{B}(\mathfrak{M},\mathfrak{B}(\mathfrak{M},\dots(\mathfrak{B}(\mathcal{H})\ \|\cdot\|_{n.r.})\dots)))$ 也是一个以 $\mathfrak{M}$ 为基的有序巴拿赫双模。

4.2. 上的广义数值半径范数(ρ) 及相关的柯西-施瓦茨不等式。本节将介绍 $L^2(\rho)$ 上的一种新范数，它是 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上数值半径范数的推广。该范数使得取值于 $L^2(\rho)$ 的每个正半双线性映射都满足关于这一新范数的柯西-施瓦茨不等式。因此，我们可以在巴拿赫空间而不只是拟巴拿赫空间中表示这类映射。

设 $\mathfrak{M}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的 I 型或 II 型因子，且 ρ 是 $\mathfrak{M}$ 上的忠实半有限迹。设 $|||\cdot|||_2 : L^2(\rho) \to \mathbb{R}^+$ 是

由下式给出

$$|||F|||_2 = \sup_{\substack{W\in L^\infty(\rho)\cap L^2(\rho),\\ W\geq 0\\ \|W\|_2\leq 1,\,\|W\|_\infty\leq 1}} \|WFW\|_1. \tag{4.2}$$

引理 4.5. </style}映射 是 (ρ)上的一个范数。

证明. 首先证明 $|||\cdot|||_2$ 定义良好。若 $F \in L^2(\rho)$ 且$W \in L^\infty(\rho)$，则 $FW \in L^2(\rho)$。此外，若 $W \in L^2(\rho)$，则由非交换 Hölder 不等式， $WFW \in L^1(\rho)$，并且

$$\|WFW\|_1 \leq \|W\|_2 \|FW\|_2 \leq \|W\|_2 \|F\|_2 \|W\|_\infty \leq \|F\|_2.$$

因此 $|||\cdot|||_2$ 定义良好。

齐次性和三角不等式由$\|\cdot\|_1$ 是一个范数这一事实推出。还需证明忠实性。

假设 $|||F|||_2 = 0$，则对于每个满足 $W > 0$ 的有限算子 $W \in L^\infty(\rho)$，都有 $WFW = 0$。令 $D \in L^\infty(\rho) \cap L^2(\rho)$，并将其写为

$$D = D_1 - D_2 + i(D_3 - D_4), \qquad D_j \geq 0, \forall j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

于是，对每个 $j \in \{1, \ldots, 4\}$， $\|D_j\|_2 \leq \|D\|_2$。

根据引理 2.2，对每个 j，都存在一列有限投影 $\{P_n^{(j)}\}_n$，属于 $\mathfrak{M}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \|D_j(I - P_n^{(j)})\|_2 = 0, \qquad \forall j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

此外，根据引理 9.8], 的证明中的构造，对于每个 $P_{(j}_n = E_{D_j}\big(\tfrac{1}{n}, \infty\big)$，对所有$-n \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \{1, \ldots, 4\}$，其中 E_{D_j} 是与 D_j 对应的谱测度，因此对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \{1, \ldots, 4\}$， $P_n^{(j)}$ 与 ${D_j}^{1/2}$ 交换。

由于 $P_{(j}_n {D_j}^{1/2} P_n^{(j))}$ 是有限正算子，因此我们得到

$$\begin{aligned}\rho(FD_jP_n^{(j)}) &= \rho(FD_j{}^{1/2}D_j{}^{1/2}P_n^{(j)}P_n^{(j)}) = \rho(F(D_j{}^{1/2}P_n^{(j)})^2)\\ &= \rho(D_j{}^{1/2}P_n^{(j)}FD_j{}^{1/2}P_n^{(j)})\\ &= \rho(P_n^{(j)}D_j{}^{1/2}P_n^{(j)}FP_n^{(j)}D_j{}^{1/2}P_n^{(j)})\end{aligned}$$

因为对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \{1, \ldots, 4\}$， ${D_j}^{1/2}P_{(j}_n = {D_j}^{1/2}P^{)(j)n}\ P_{(}_n{}^j = P_n^{(j)}{D_j}^{1/2}P^{)(j)n}$。由于对于每个正有限算子 W， $WFW = 0$，我们得到

$$\rho(FD_jP_n^{(j)}) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

另一方面，由于

$$|\rho(FD_j(I-P_n^{(j)}))| \le \|FD_j(I-P_n^{(j)})\|_1 \le \|F\|_2 \, \|D_j(I-P_n^{(j)})\|_2 \to 0,$$

如 $n \to \infty$，我们推得，对于每个 $j \in \{1,\dots,4\}$， $\rho(FD_j) = 0$。因此，对于每个 $D \in L^\infty(\rho) \cap L^2(\rho)$，$\rho(FD) = 0$，从而 $\rho(FF^*) = 0$。因此 $F = 0$，因为 $\|F\|_2 = 0$，且 $\|\cdot\|_2$ 是范数。□

注 4.6. 如果 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 是由复数项构成的 $n \times n$ 矩阵空间，那么对于每个 $x \in \mathbb{C}^n$，我们有

$$|\langle Ax, x\rangle| = \operatorname{tr}(|X^*AX|),$$

其中， $X \in M_n(\mathbb{C})$ 是一个算子，其第一列为向量 $x \in \mathbb{C}^n$，其余各列均为$\mathbb{C}^n$ 的零向量。这样，范数 $|||\cdot|||_2$ 可以视为数值半径范数的一种推广。

推论 4.7. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个向量空间， Φ： $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to (L^2(\rho)\ |||\cdot|||_2)$是一个正半双线性映射。那么对于所有的 x、 $y \in \mathfrak{X}$，

$$|||\Phi(x,y)|||_2 \le |||\Phi(x,x)|||_2^{1/2} \, |||\Phi(y,y)|||_2^{1/2}.$$

证明。 给定具有 $W \ge 0$, $\|W\|_2, \|W\|_\infty \le 1$的 $W \in L^\infty(\rho) \cap L^2(\rho)$，定义

$$\Phi_W(x,y) := W\Phi(x,y)W, \quad \forall x, y \in \mathfrak{X}.$$

那么 Φ_W 是一个取值于 $L^1(\rho)$ 的正半双线性映射。根据 [6,命题 3.1 的第 7], 部分，我们有

$$\begin{aligned}\|\Phi_W(x,y)\|_1 &\le \|\Phi_W(x,x)\|_1^{1/2} \, \|\Phi_W(y,y)\|_1^{1/2} \\ &\le |||\Phi(x,x)|||_2^{1/2} \, |||\Phi(y,y)|||_2^{1/2}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{X}.\end{aligned}$$

对所有此类 W 取上确界，即得所述结论。 □

注 4.8。 正如我们将在第 5 节看到的，利用推论 4.7，我们将能够在一个 $B_{\mathfrak{Y}}$-空间中表示从含幺 *-代数到 $L^2(\rho)$ 的每个正线性映射，参见推论 5.9。

令 $\mathfrak{Y} = \mathcal{L}^2(\rho)$ 为 $(L^2(\rho)\ |||\cdot|||_2)$ 的完备化，且令 $\mathfrak{M}$ 为 I 型或 II 型因子。现在考虑空间 $\mathfrak{B}(\mathfrak{M},\ \mathcal{L}^2(\rho))$，并将 $\mathfrak{B}(\mathfrak{M},\ \mathcal{L}^2(\rho))$ 上的算子范数记为 $\|\cdot\|_{o.n.}$。若 $\mathfrak{K}$ 是 $\mathfrak{B}(\mathfrak{M},\ \mathcal{L}^2(\rho))$ 中的锥，由所有将 $\mathfrak{M}$ 中的正元素映射为 $L^2(\rho)$ 中正元素的算子组成，则 $\mathfrak{B}(\mathfrak{M},\ \mathcal{L}^2(\rho))$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的有序巴拿赫双模，其中乘法的定义方式与例 3.11 中相同。

定义 4.9。 半双线性映射 $\Phi\colon \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{B}(\mathfrak{M},\ \mathcal{L}^2(\rho))$ 若满足：对于所有 $x\in\mathfrak{X}$，只要 $T\in\mathfrak{M}$ 且 $T\geq 0$，$\Phi(x,\ x)(T)$ 就是 $L^2(\rho)$ 中的正元素，则称其为正的。

[6, 命题 3.1]和命题 4.1 的证明为下一个定理的证明提供了启发。

定理 4.10. 设 $\Phi:\ \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{B}(\mathfrak{M},\mathcal{L}^2(\rho))$ 是一个正半双线性映射。那么对所有的 $x,y\in\mathfrak{X}$,

$$\|\Phi(x,y)\|_{o.n.}\leq\|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2}.$$

证明。 设 $W\in L^2(\rho)\cap L^\infty(\rho)$，其中 $W\geq 0$, $\|W\|_2\leq 1$, $\|W\|_\infty\leq 1$和 Π 以及 Θ 是 $\mathfrak{M}$ 中的两个简单算子值函数

$$\Pi=\sum_{i=1}^{N}c_iP_i,\qquad\Theta=\sum_{j=1}^{M}d_jQ_j,$$

其中 c_i,d_j 对每个 $i\in\{1,\dots,N\}$, $j\in\{1,\dots,M\}$ 都是标量，而$\{P_i\}$和 $\{Q_j\}$是两两正交投影族，且$\sum_{i=1}^{N}P_i=\sum_{j=1}^{M}Q_j=I$。那么，如果 $x,\ y\in\mathfrak{X}$

$$|\rho(\Pi\,W\Phi(x,y)(\Theta)W)|=\left|\sum_{i,j}c_id_j\,\rho(P_iW\Phi(x,y)(Q_j)W)\right|.$$

因此,

$$\begin{aligned}&\left|\rho\left(\sum_{i=1}^{N}c_iP_iW\Phi(x,y)\left(\sum_{j=1}^{M}d_jQ_j\right)W\right)\right|\\&\leq\sum_{i,j}|c_i|\,|d_j|\,|\rho(P_iW\Phi(x,y)\,(Q_j)\,W)|\\&=\sum_{i,j}|c_i|\,|d_j|\,\left|\rho\big(P_i^2W\Phi(x,y)\,(Q_j)\,W\big)\right|\\&=\sum_{i,j}|c_i|\,|d_j|\,|\rho(P_iW\Phi(x,y)\,(Q_j)\,WP_i)|\,.\end{aligned}$$

对每一对 $(i,\ j)$，在 $\mathfrak{X}$ 上定义半双线性型

$$\psi_{ij}(x,y)=\rho(P_iW\Phi(x,y)(Q_j)WP_i)\,,\quad x,y\in\mathfrak{X}.$$

由于 Φ 是正的，每个 ψ_{ij} 都是正的。对每个 ψ_{ij} 应用柯西–施瓦茨不等式，并利用 $\sum_i P_i = \sum_j Q_j = I$ 这一事实，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j} |c_i|\,|d_j|\,|\rho(P_i W\Phi(x,y)\,(Q_j)\,WP_i)| \\
&\le \sum_{i,j} |c_i|\,|d_j|\,(\rho(P_iW\Phi(x,x)(Q_j)WP_i))^{1/2}\,(\rho(P_iW\Phi(y,y)(Q_j)WP_i))^{1/2} \\
&\le \left(\sum_{i,j} |c_i|\,|d_j|\rho(P_iW\Phi(x,x)(Q_j)WP_i)\right)^{1/2} \\
&\qquad\qquad \cdot \left(\sum_{i,j} |c_i|\,|d_j|\rho(P_iW\Phi(y,y)(Q_j)WP_i)\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i,j} |c_i|\,|d_j|\rho(P_iW\Phi(x,x)(Q_j)W)\right)^{1/2} \\
&\qquad\qquad \cdot \left(\sum_{i,j} |c_i|\,|d_j|\rho(P_iW\Phi(y,y)(Q_j)W)\right)^{1/2} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \|\Pi\|_\infty\,\|\Theta\|_\infty \rho(P_iW\Phi(x,x)(Q_j)W)\right)^{1/2} \\
&\qquad\qquad \cdot \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \|\Pi\|_\infty\,\|\Theta\|_\infty \rho(P_iW\Phi(y,y)(Q_j)W)\right)^{1/2} \\
&= \|\Pi\|_\infty\,\|\Theta\|_\infty\,(\rho(W\Phi(x,x)(I)W))^{1/2}\,(\rho(W\Phi(y,y)(I)W))^{1/2} \\
&\le \|\Pi\|_\infty\,\|\Theta\|_\infty |||\Phi(x,x)(I)|||_2^{1/2}\,|||\Phi(y,y)(I)|||_2^{1/2} \\
&\le \|\Pi\|_\infty\,\|\Theta\|_\infty \|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

由于这对 $\mathfrak{M}$ 中的所有简单函数 Π，Θ 都成立，给定一个酉算子 $U \in \mathfrak{M}$，存在一个由 $\mathfrak{M}$ 中的简单算子值函数构成的序列 $\{\Pi_n\}_n$，使得 $\Pi_n \to U$ 在算子范数下趋于 $n \to \infty$。因此，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，根据 [17, 命题 3.4.5 和推论 3.4.6]，可得

$$
\begin{aligned}
&|\rho\,((U-\Pi_n)W\Phi(x,y)(\Theta)W)| \le \rho(|(U-\Pi_n)W\Phi(x,y)(\Theta)W|) \\
&\le \|U-\Pi_n\|_\infty \|W\Phi(x,y)(\Theta)W\|_1 \to 0, \quad \text{as } n\to\infty.
\end{aligned}
$$

另一方面，由上述不等式可得

$$
|\rho\,(\Pi_n W\Phi(x,y)(\Theta)W)| \le \|\Pi_n\|_\infty \|\Theta\|_\infty \|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2}\,\|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2}
$$

并且由于两边的 $n \to \infty$，我们得到

$$|\rho\left(UW\Phi(x,y)(\Theta)W\right)| \leq \|\Theta\|_\infty \|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2} \|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2}.$$

若此时 V 是 $\mathfrak{M}$ 中酉算子的凸组合，则我们也很容易得到

$$|\rho\left(VW\Phi(x,y)(\Theta)W\right)| \leq \|\Theta\|_\infty \|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2} \|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2}. \tag{4.3}$$

设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $A_m \in L^1(\rho) \cap L^\infty(\rho)$ 满足

$$\|A_m - W\,\Phi(x,y)(\Theta)W\|_1 < \frac{1}{2^m}$$

并设 Z_m 为 A_m 的极分解中的偏等距算子，选取 $\mathfrak{M}$ 中酉算子的凸组合序列 $\{V_n^{(m)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$，使得

$$V_n^{(m)} \to Z_m^* \quad \text{in the operator norm as } n \to \infty.$$

于是，

$$\left|\rho\left(\left(V_n^{(m)} - Z_m^*\right) W\Phi(x,y)(\Theta)W\right)\right| \leq \|V_n^{(m)} - Z_m^*\|_{\mathfrak{M}} \|W\Phi(x,y)(\Theta)W\|_1 \to 0,$$

as $n \to \infty$. By (4.3), for every $n \in \mathbb{N}$, it is

$$\left|\rho\left(V_n^{(m)} W\Phi(x,y)(\Theta)W\right)\right| \leq \|\Theta\|_{\mathfrak{M}} \|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2} \|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2}.$$

令 $n \to \infty$，我们得到

$$|\rho\left(Z_m^* W\Phi(x,y)(\Theta)W\right)| \leq \|\Theta\|_{\mathfrak{M}} \|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2} \|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2}.$$

现在注意到

$$\begin{aligned}
&|\rho(|A_m|) - |\rho\left(Z_m^* W\Phi(x,y)(\Theta)W\right)|\,| \\
&= |\rho(Z_m^* A_m) - |\rho\left(Z_m^* W\Phi(x,y)(\Theta)W\right)|\,| \\
&\leq |\rho(Z_m^*(A_m - W\Phi(x,y)(\Theta)W))| \\
&\leq \|Z_m^*\|_\infty \|A_m - W\Phi(x,y)(\Theta)W\|_1.
\end{aligned}$$

根据 [17, 命题 3.4.5，推论 3.4.6]，，于是

$$\begin{aligned}
&|\,\|W\Phi(x,y)(\Theta)\|_1 - |\rho\left(Z_m^* W\Phi(x,y)(\Theta)W\right)|\,| \\
&= |\,\|W\Phi(x,y)(\Theta)\|_1 - \|A_m\|_1 + \|A_m\|_1 - |\rho\left(Z_m^* W\Phi(x,y)(\Theta)W\right)|\,| \\
&\leq |\,\|W\Phi(x,y)(\Theta)\|_1 - \|A_m\|_1\,| + |\rho(|A_m|) - |\rho\left(Z_m^* W\Phi(x,y)(\Theta)W\right)|\,| \\
&\leq \frac{1}{2^m} + \|Z_m^*\|_\infty \|A_m - W\Phi(x,y)(\Theta)W\|_1 < \frac{1}{2^{m-1}}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\|W\Phi(x,y)(\Theta)W\|_1 \leq \|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2} \|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2} + \frac{1}{2^{m-1}}.$$

由于这对所有 $m \in \mathbb{N}$ 都成立，我们可以推得

$$\|W\Phi(x,y)(\Theta)W\|_1 \le \|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2} \|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2}.$$

接下来，给定一个酉算子 $U \in \mathfrak{M}$，选取 $\mathfrak{M}$ 中的一列简单算子值函数 $\{\Theta_n\}$，使得当 $n \to \infty$ 时，$\Theta_n \to U$ 在算子范数下成立。于是，

$$\begin{aligned}\| W\Phi(x,y)(\Theta_n - U)W\|_1 &\le |||\Phi(x,y)(\Theta_n - U)|||_2 \\ &\le \|\Theta_n - U\|_\infty \|\Phi(x,y)\|_{o.n.} \to 0, \quad \text{as } n \to \infty.\end{aligned}$$

由此可得

$$\|W\Phi(x,y)(\Theta_n)W\|_1 \longrightarrow \|W\Phi(x,y)(U)W\|_1, \quad \text{as } n \to \infty.$$

然而，根据上面证明的不等式，

$$\|W\Phi(x,y)(\Theta_n)W\|_1 \le \|\Theta_n\|_\infty \|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2} \|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2} \qquad \text{for all } n,$$

因此，令 $n \to \infty$，可得

$$\|W\Phi(x,y)(U)W\|_1 \le \|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2} \|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2}.$$

再次，如果 V 是 $\mathfrak{M}$中酉算子的凸组合，同样的论证表明

$$\|W\Phi(x,y)(V)W\|_1 \le \|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2} \|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2}. \tag{4.4}$$

现在令 $T \in \mathfrak{M}$ 满足 $\|T\|_\infty \le 1$，并令 $\{V_n\} \subset \mathfrak{M}$ 为 $\mathfrak{M}$ 中酉算子的凸组合所成的一列，使得当 $n \to \infty$ 时，$V_n \to T$ 在算子范数下成立。于是，

$$\begin{aligned}&|\|W\Phi(x,\ y)(V_n)W\|_1 - \|W\Phi(x,\ y)(T)W\|_1| \\ &\quad \le \|W\Phi(x,\ y)(V_n - T)W\|_1 \le \|V_n - T\|_\infty \|\Phi(x,\ y)\|_{o.n.} \to 0, \quad \text{当 } n \to \infty. \text{时。因此，}\end{aligned}$$

$$\|W\Phi(x,y)(V_n)W\|_1 \to \|W\Phi(x,y)(T)W\|_1, \quad \text{as } n \to \infty$$

因此，由于 (4.4) 对每一个 V_n 都成立，我们可以断定它是

$$\|W\Phi(x,y)(T)W\|_1 \le \|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2} \|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2}.$$

由于 $W \in \mathfrak{M}$ 满足 $W \ge 0$，且 $\|W\|_\infty \le 1$ 与 $\|W\|_2 \le 1$ 均为任意选取，对所有这样的 W 取上确界，可得

$$|||\Phi(x,y)(T)|||_2 \le \|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2} \|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2}.$$

最后，对所有满足 $\|T\|_\infty \le 1$ 的 $T \in \mathfrak{M}$ 取上确界，我们得出

$$\|\Phi(x,y)\|_{o.n.} \le \|\Phi(x,x)\|_{o.n.}^{1/2} \|\Phi(y,y)\|_{o.n.}^{1/2}.$$

证明完毕。 □

备注 4.11。 注意，由于 $|||\cdot|||_2 \leq \|\cdot\|_2$，因此

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{M}, (L^2(\rho), \|\cdot\|_2)) \subseteq \mathfrak{B}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}^2(\rho)).$$

正如我们稍后将在第 5 节看到的，根据定理 4.10，我们能够在一个 $B_{\mathfrak{Y}}$-空间中表示每个有界正左不变半双线性映射 $\Phi\colon \mathfrak{A}\times\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}^2(\rho))$，使得 $\Phi(x, y)(\mathfrak{M}) \subseteq L^2(\rho)$，对每个$x, y \in \mathfrak{A}$均成立，其中 $\mathfrak{A}$ 是一个含幺拟 *-代数。然而，根据上文，这意味着我们能够在一个 $B_{\mathfrak{Y}}$-空间中表示每个有界正左不变半双线性映射 $\Phi\colon \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{M}, (L^2(\rho) \ \|\cdot\|_2))$。

5. Applications

设 $\mathcal{K}$ 是一个拟 $B_{\mathfrak{Y}}$-空间，且 $D(T)$ 是 $\mathcal{K}$ 的稠密子空间。若线性映射 $T\colon D(T) \to \mathcal{K}$ 满足以下条件，则称其为 Φ-可伴随的：存在一个定义在子空间 $D(T^*) \subset \mathcal{K}$ 上的线性映射 T^*，使得

$$\Phi(T\xi, \eta) = \Phi(\xi, T^*\eta), \quad \forall \xi \in D(T), \eta \in D(T^*).$$

设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{K}$ 的稠密子空间，并考虑以下作用于 $\mathcal{D}$上的线性算子族:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}, \mathcal{K}) &= \{T \ \Phi\text{-adjointable}, D(T) = \mathcal{D};\ D(T^*) \supset \mathcal{D}\} \\
\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}) &= \{T \in \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}, \mathcal{K}) : T\mathcal{D} \subset \mathcal{D};\ T^*\mathcal{D} \subset \mathcal{D}\} \\
\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})_b &= \{T \in \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}) : T \text{ is bounded on } \mathcal{D}\}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}, \mathcal{K})$ 中的对合定义为 $T^\dagger := T^* \restriction \mathcal{D}$，即将 T^*的 Φ-伴随算子限制到 $\mathcal{D}$ 上。

集合 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})$ 和 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})_b$ 都是 *-代数。

注记 5.1。 若 $T \in \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}, \mathcal{K})$，则 T是可闭的。记其 Φ-伴随算子为 T^*，其定义域为 $D(T^*)$。 T^* 是一个闭算子。

注记 5.2。 与希尔伯特空间的情形一样，可以证明 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}, \mathcal{K})$ 关于以下运算构成一个 偏 *-代数 [1]：通常的加法 $T_1 + T_2$、数乘 λT、对合 $T \mapsto T^\dagger := T^* \restriction \mathcal{D}$，以及在存在 $W \in \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}, \mathcal{K})$ 使得下式成立时定义的 （弱）偏乘法 $\square$：

$$\Phi(T_2\xi, T_1\eta) = \Phi(W\xi, \eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{D}.$$

由于 $\mathcal{K}$ 中 $\mathcal{D}$ 的稠密性，若元素 W 存在，则它是唯一的。我们记 $W = T_1 \square T_2$。

定义 5.3. 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{K}$ 的稠密子空间。若 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}, \mathcal{K})$ 的 $\dagger$-不变子集，则 $\mathcal{Y}$ 的弱有界交换子定义为集合

$$(\mathcal{Y}, \mathcal{D})'_w = \{B \in \mathfrak{B}(\mathcal{K}) : \Phi(BY\xi, \eta) = \Phi(B\xi, Y^\dagger\eta),\ \forall Y \in \mathcal{Y},\ \xi, \eta \in \mathcal{D}\}.$$

定义 5.4. 设 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 是带单位元 e 的拟 *-代数。设 $\mathcal{D}$ 是某个 $B_{\mathfrak{Y}}$-空间 $\mathcal{K}$ 的稠密子空间，其中带有 $\mathfrak{Y}$ 值内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$。若线性映射 π 将 $\mathfrak{A}$ 映入 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D},\mathcal{K})$，且满足以下性质，则称其为 $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 的*-表示：

(i) $\pi(a^*)=\pi(a)^\dagger:=\pi(a)^*\restriction\mathcal{D},\quad\forall\, a\in\mathfrak{A}$;
(ii) for $a\in\mathfrak{A}$ and $c\in\mathfrak{A}_0$, $\pi(a)\,\square\,\pi(c)$ is well-defined and $\pi(a)\,\square\,\pi(c)=\pi(ac)$.

我们假设，对于每个作用于 $\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0$ 的 *-表示 π，$\pi(\mathsf{e})=\mathbb{I}_{\mathcal{D}}$ 是空间 $\mathcal{D}$ 上的恒等算子。令 t_π 为由半范数 $\xi\in\mathcal{D}\to\|\xi\|_{\mathcal{K}}+\|\pi(a)\xi\|_{\mathcal{K}}$, $a\in\mathfrak{A}$ 所定义的图拓扑，其中 $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ 是由 $\mathcal{K}$ 上的内积诱导的范数。

*-表示 π 称为

- 闭的，如果 $\mathcal{D}[t_\pi]$是完备的;
- 循环的，如果存在 $\xi\in\mathcal{D}$，使得 $\pi(\mathfrak{A}_0)\xi$ 在其范数拓扑下于 $\mathcal{K}$ 中稠密。在这种情况下，ξ 称为循环向量。

定义 5.5。我们用 $\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}^{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{A})$ 表示所有从 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{Y}$ 值正半双线性映射的集合，它们满足以下性质：

(i) $\Lambda_\Phi(\mathfrak{A}_0)=\mathfrak{A}_0/\mathfrak{N}_\Phi$ 在 $\mathfrak{A}$ 的完备化 $\mathfrak{A}$ 中稠密。(ii) $\Phi(ac,d)=\Phi(c,a^*d)\quad\forall\, a\in\mathfrak{A},\ c,d\in\mathfrak{A}_0$（左不变）。

定理 5.6. 设$(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0)$ 是一个带单位元e 的拟 *-代数，且 Φ 是 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$ 上取值于 $\mathfrak{Y}$ 的左不变正半双线性映射。以下陈述等价：

(i) $\Phi\in\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}^{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{A})$; *(ii)* 存在一个（拟） $B_{\mathfrak{Y}}$-空间 $\mathcal{K}_\Phi$，其上有取值于 $\mathfrak{Y}$ 的（拟）内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathcal{K}_\Phi}$、一个稠密子空间 $\mathcal{D}_\Phi\subseteq\mathcal{K}_\Phi$，以及一个闭循环*-表示 $\pi:\mathfrak{A}\to\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}_\Phi,\mathcal{K}_\Phi)$，其循环向量为 ξ_Φ，使得

$$\langle\pi(a)\xi|\eta\rangle_{\mathcal{K}_\Phi}=\langle\xi|\pi(a^*)\eta\rangle_{\mathcal{K}_\Phi},\quad\forall\xi,\eta\in\mathcal{D}_\Phi,a\in\mathfrak{A}$$

并且满足

$$\Phi(a,b)=\langle\pi(a)\xi_\Phi|\pi(b)\xi_\Phi\rangle_{\mathcal{K}_\Phi},\quad\forall a,b\in\mathfrak{A}.$$

证明. 证明思路与 [7, 定理 3.2], 的证明类似，这同样归功于正半 $\mathfrak{Y}$ 双线性映射的柯西–施瓦茨型不等式。□

注 5.7. 采用与 [7,推论 3.5] 相同的论证，可以证明，定义在含幺赋范拟 *-代数上的任意 $\mathfrak{Y}$值有界正半双线性映射都属于 $\mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}^{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{A})$。

注 5.8. 既然我们已经有了 $\Phi \in \mathcal{I}_{\mathfrak{A}_0}^{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{A})$的表示，其中$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$是带单位元的拟 *-代数，那么定义在 $\mathfrak{A}$ 上的线性映射可定义为

$$\omega_\Phi(a) = \Phi(a, \mathsf{e}), \quad \forall a \in \mathfrak{A}$$

通过对文献中关于带单位元的拟 *-代数上线性泛函的已知结果稍作修改，也可以得到表示，参见例如 [18, 定理 2.4.8]。与无单位元 *-代数上的正线性映射 $\mathfrak{A}_0$ 并不一定能自动扩张为其单位化上的（*-可表示）正线性映射 $\mathfrak{A}_0$的情形类似，当线性映射定义在无单位元的拟 *-代数上时，情况也一样。不过，已有一些关于无单位元拟 *-代数上的正线性映射何时可以扩张为带单位元的拟 *-代数上的正线性映射的条件，参见 [3, 4]。这一情形的分析留待今后研究。

推论 5.9。 [6, 推论 3。12] 设 $\mathfrak{A}$ 是带单位元 e的 *–代数，且 ω 是定义在 $\mathfrak{A}$上的取值于 $\mathfrak{Y}$的正线性映射。则存在一个（拟） $B_{\mathfrak{Y}}$-空间 $\mathcal{K}_\Phi$ ，其（拟）范数由取值于 $\mathfrak{Y}$的（拟）内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathcal{K}_\Phi}$诱导，并存在一个稠密子空间 $\mathcal{D}_\omega \subseteq \mathcal{K}_\Phi$ 以及一个闭的循环 *–表示 Π_ω ，其定义域为 $\mathcal{D}_\omega$，使得

$$\omega(b^* a c) = \langle \Pi_\omega(a)\Lambda_\omega(c) | \Lambda_\omega(b)\rangle_{\mathcal{K}_\Phi}, \quad \forall a, b, c \in \mathfrak{A}.$$

此外，存在一个循环向量 η_ω，使得

$$\omega(a) = \langle \Pi_\omega(a)\eta_\omega | \eta_\omega\rangle_{\mathcal{K}_\Phi}, \quad \forall\ a \in \mathfrak{A}.$$

该表示在酉等价意义下唯一。

注5.10. 若定理 5.6 中的 Φ 满足范数 $\mathfrak{Y}$ 下的严格柯西–施瓦茨不等式，则我们得到的是一个严格 $B_{\mathfrak{Y}}$-空间上的表示，而不只是准 $B_{\mathfrak{Y}}$-空间上的表示。对推论 5.9 也可作类似的考虑。

例 5.11. 设 ρ 为有限迹。设 $W \in L^\infty(\rho)$，其中 $W \geq 0$。设 $k \in C([0, \|W\|] \times [0, \|W\|])$，使得 $k \geq 0$。那么，对每个 $x \in [0, \|W\|]$，函数 $\eta_x\colon [0, \|W\|] \to \mathbb{C}$ 由 $\eta_x(t) = k(x, t)$ 定义，是 $[0, \|W\|]$ 上的连续正函数。因此，根据函数演算， $\eta_x(W)$ 在 $L^\infty(\rho)$ 中定义了一个正算子。对每个 $x \in [0, \|W\|]$ 和 $X, Y \in L^2(\rho)$，定义

$$\varphi(X, Y)(x) = \rho(X\eta_x(W)Y^*). \tag{5.1}$$

那么，对于所有 $X, Y \in L^2(\rho)$， $\varphi(X, Y) \in C([0, \|W\|])$。此外， $\varphi : L^2(\rho) \times L^2(\rho) \to C([0, \|W\|])$ 是一个有界、左不变、正的半双线性映射（见 [7]）。

设 $T \in L^4(\rho)$，并考虑映射

$$\widetilde{\varphi} : L^2(\rho) \times L^2(\rho) \to L^2(\rho)$$

由 $\widetilde{\varphi}(X,\ Y) = T(\varphi(X,\ Y)(W))T^*$ 给出。对所有 $X,\ Y \in L^2(\rho)$，根据泛函演算，它也是一个有界、左不变的正半双线性映射。现在，若 $A, B \in L^\infty(\rho)$ 满足 $A = A^*$ 和 $B = B^*$，令 $K := i(AB - BA)$。则 $K = K^*$。此外，通过一些计算可以验证，在这种情况下，命题 3.6 的条件均得到满足。

现在假设 $T \in L^\infty(\rho) \cap L^4(\rho)$，并设

$$\Phi : L^2(\rho) \times L^2(\rho) \to \mathfrak{B}(\mathfrak{M}, (\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{n.r.}))$$

由下式给出

$$\Phi(X,Y)(S) = T\rho\left(X\eta_x(W)S\eta_x(W)Y^*\right)(W)T^*$$

对所有 $S \in \mathfrak{M}$ 和 $X,\ Y \in L^2(\rho)$，其中 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 满足 $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$。通过一些直接计算可以验证，$\Phi$ 是一个左不变的正半双线性映射。此外，也可以验证 Φ 是有界的，因为

$$\left\|\Phi(X,Y)(S)\right\|_{n.r.} \leq \|T\|_{\mathfrak{M}}^2 \|k\|_\infty^2 \|X\|_2 \|Y\|_2 \|S\|_{\mathfrak{M}}$$

对所有 $S \in \mathfrak{M}$ 和 $X,\ Y \in L^2(\rho)$。最后，对每个 $X,\ Y \in L^2(\rho)$ 以及 $S \in \mathfrak{M}$，$\Phi(X,\ Y)(S) \in L^2(\rho) \cap L^\infty(\rho)$ 和

$$|||\Phi(X,Y)(S)|||_2 \leq \|T\|_4^2 \|k\|_\infty^2 \|X\|_2 \|Y\|_2 \|S\|_{\mathfrak{M}},$$

因此，Φ 也可视为从 $L^2(\rho) \times L^2(\rho)$ 到 $\mathcal{L}^2(\rho)$ 的有界、正、左不变共轭线性映射，并且满足 $\Phi(X,\ Y)(\mathfrak{M}) \subset L^2(\rho) \cap L^\infty(\rho)$。对所有 $X,\ Y \in L^2(\rho)$。

若 $T \in L^4(\rho) \setminus L^\infty(\rho)$，则对所有 $S \in \mathfrak{M}$ 和 $X,\ Y \in L^2(\rho)$，仍有 $\Phi(x,\ y)(S) \in L^2(\rho)$。

致谢： GB 感谢本项工作在 UMI 逼近理论与应用小组以及 INdAM 的 GNAMPA 的活动框架内完成。SI 获得塞尔维亚共和国科学、技术发展与创新部资助，项目编号：451-03-66/2024-03/200029。

References

1. J.-P. Antoine, A. Inoue, C. Trapani, 《部分 *-代数及其算子实现》, Kluwer，Dordrecht，2002。2. F. Bagarello, C. Trapani, Salvatore Triolo, 《可测算子的拟 *-代数》，Studia Mathematica，172 (2006)，289–305。

3. G. Bellomonte，《可表示正线性泛函到单位化拟 *-代数的扩张》，Mediterr. J. Math.，10 (2013) 1461–1473。4. G. Bellomonte，《可表示正线性泛函到单位化拟 *-代数的扩张：一种新方法》，Mediterr. J. Math.，12 (2015)，997-1008。5. G. Bellomonte, B. Djordjevi´c, S. Ivkovi´c，《非单位拟 *-代数上正映射的表示与拓扑性质》，Positivity，28 (2024)，文章编号 66（29 页）。6. G. Bellomonte, S. Ivkovi´c, C. Trapani，《Banach 双模值正映射：不等式与表示》，Banach Journal of Mathematics，Banach J. Math. Anal. 20，12 (2026)。7. G. Bellomonte, S. Ivkovi´c, C. Trapani，《拟 *-代数上 C^*值正半双线性映射的 GNS 构造》，Mediterr. J. Math. 21 (2024)，文章编号 166（22 页）。8. G. Bellomonte, C. Trapani，《拟 *-代数与 C^*-代数的广义归纳极限》，Studia Mathematica，202 (2011)，165–190。9. G. Bellomonte, C. Trapani，《具有足够多 *-表示的拟 *-代数的拓扑性质》，Banach J. Math. Anal.，17 (2023)，文章编号 81。10. R. Bhatia, C. Davis，《算子的柯西-施瓦茨不等式及其应用》，Linear Algebra and its Applications，第223–224卷，(1995)，119–129。11. P. Bhunia, S.S. Dragomir, M.S. Moslehian K. Paul，《数值半径不等式讲义》，Infosys Science Foundation 数学科学系列，Springer Cham 2022。12. M.S. Birman, M.Z. Solomjak，《希尔伯特空间中自伴算子的谱理论》，Mathematics and its Applications，D. Reidel Publishing Company，Dordrecht，荷兰，1987。13. Chiribella, G., Davidson, K.R., Paulsen, V.I., Rahaman, M，《实希尔伯特空间中的正映射与纠缠》，arXiv:2207.02510v2。14. H. Choi, Y. Kim, E. Ko，《满足广义柯西-施瓦茨不等式的算子》，Proceedings of the American Mathematical Society，145 (2017)，3447–3453。15. A. Dadkhah, M. Kian and M.S. Moslehian，《迹正映射的分解及其在量子信息中的应用》，Analysis and Mathematical Physics 14 (2024)，文章编号 48。16. A. Dadkhah, M.S. Moslehian，《 C^*-代数上正线性映射的 Gr ¨uss 型不等式》，Linear and Multilinear Algebra 65 (2017)，1386–1401。17. P.G. Dodds, B. de Pagter, F.A. Sukochev，《非交换积分与算子理论》，Progress in Mathematics，Birkh¨auser Cham，2023。18. M. Fragoulopoulou, C. Trapani，《局部凸拟 *-代数及其表示》，Lecture Notes in Mathematics 2257，Springer，2020。19. M. Fragoulopoulou, C. Trapani, S. Triolo，《具有足够多 *-表示的局部凸拟 *-代数》，J. Math. Anal. Appl.，388 (2012) 1180–1193。20. M. Fujimoto, Y. Seo，《通过算子值内积与几何算子均值得到的施瓦茨不等式》，Linear Algebra and its Applications，561 (2019)，141–160。21. S. Ivkovi´c，《Banach 函数空间上的孔性与超循环算子》，Complex Anal. Oper. Theory 20，(2026)，文章编号 25，26 页。

22. B. Janssens，《经典编码与柯西-施瓦茨不等式》。arXiv:quant-ph/0610229 23. D.R. Joci´c，算子值函数弱 * 积分的柯西–施瓦茨范数不等式，《泛函分析杂志》，218 (2005)，318–346。24. D.R. Joci´c，D. Krtini´c，M. Lazarevi´c，紧算子的 Q^* 范数理想中内积型变换算子的柯西–施瓦茨不等式，Positivity，24 (2020)，933–956。25. D.R. Joci´c，M. Lazarevi´c，由次正规算子族生成的初等算子和内积型变换算子的柯西–施瓦茨范数不等式。Mediterr. J. Math.，19 (2022)，art.n. 49。26. D.R. Joci´c，M. Lazarevi´c，《紧算子范数理想中内积型变换算子的柯西–施瓦茨算子不等式与范数不等式及其应用》。载于：Aron, R.M., Moslehian, M.S., Spitkovsky, I.M., Woerde- man, H.J.（编），《算子与范数不等式及相关主题》。数学趋势。Birkh¨auser，沙姆，2022。27. R.V. Kadison，《算子代数的广义施瓦茨不等式与代数不变量》，《数学年刊》，56 (1952)，494–503。28. R.V. Kadison，《无界函数与算子代数》，Exposition. Math.，4 (1986)，3–33。29. R. Kadison，J. Ringrose，《算子代数理论基础》。第一卷：初等理论，美国数学会，Birk¨auser，波士顿，1997。30. R. Kadison，J. Ringrose，《算子代数理论基础》。第二卷：进阶理论，美国数学会，Birk¨auser，波士顿，1997。31. R. Kumar，R. Sharma，《一定条件下涉及正线性映射的一些不等式》，《算子与矩阵》，13 (2019)，843–854。32. W.A. Majewski，《量子信息中的正映射》，Russ. J. Math. Phys. 21 (2014) 362–372。33. E. Nelson，《解析向量》，《数学年刊》，70 (1959)，572–615。34. E. Nelson，《非交换积分札记》，《泛函分析杂志》，15 (1974)，103–116。35. T. Ogasawara，K. Yoshinaga，《算子的非交换积分理论》，J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A，18 (1955) 311–347。36. H. Petersson，《超循环共轭算子》。Integr. equ. oper. theory 57，(2007) 413–423。37. E. Størmer，《映射锥》。载于：《算子代数的正线性映射》。施普林格数学专著。Springer，柏林，海德堡，2013。38. E. Størmer，《算子代数上的正线性映射》，施普林格数学专著，海德堡，2013。39. A. Zamani，满足广义柯西–施瓦茨型不等式的 C^*-模算子，Linear and Multilinear Algebra，72 (2024)，644-654。

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo, Via Archirafi n. 34, I-90123 Palermo, Italy电子邮箱地址: giorgia.bellomonte@unipa.it

Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences andArts, Kneza Mihaila 36, 11000 Beograd, Serbia电子邮箱地址: stefan.iv10@outlook.com

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo, Via Archirafi n. 34, I-90123 Palermo, Italy电子邮箱地址: camillo.trapani@unipa.it