arXiv:2602.11372v1 [math.DG] 11 Feb 2026

X–ADM质量与 X–正质量定理

CARLO MANTEGAZZA 与 FRANCESCA ORONZIO

摘要。对于给定的可容许向量场 X，我们为渐近平坦三维流形定义一种几何量，称为*–ADM*质量，并通过沿适当格林函数的水平集的单调性公式，建立一个相对正质量定理。在对 X施加不同假设的情况下，我们得到“经典”正质量定理的推广，例如针对加权流形的版本，以及在某些拓扑限制下“带电荷”的版本。最后，我们也讨论刚性情形。

MSC2020：53C21、31C12、31C15、53C24、53Z05。
关键词：单调性公式、格林函数、几何不等式。

1. X–ADM质量与主定理

设（M， g）为一个黎曼流形。我们分别用 Ric 和 R 表示里奇张量和标量曲率。符号 ∇ 表示列维-奇维塔联络，而相应的拉普拉斯-贝尔特拉米算子为 $\Delta = \mathrm{tr}\nabla^2$。除非另有说明，始终采用重复指标求和约定。

为准确陈述我们的主要结果，我们回顾渐近平坦流形的定义，并引入 X–ADM质量的概念。

定义1.1。若存在一个闭且有界的子集 K，使得 $M \setminus K$ 可通过坐标映射 $\varphi\colon M \setminus K \to \mathbb{R}^3 \setminus B_r(0)$ 微分同胚于 $\mathbb{R}^3$ 去掉一个闭球 $B_r(0)$，则称一个三维黎曼流形（M， g）（有边界或无边界）是渐近平坦的，其中

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O_2(|x|^{-\tau}), \tag{1.1}$$

对于某个 $\tau > 1/2$ 以及所有 i， $j \in \{1,2,3\}$。这对 $(M \setminus K,\ \varphi)$ 称为 $(M,\ g)$ 的渐近平坦坐标图，实数 τ 称为度量 g 在此类渐近平坦坐标图中的衰减阶（简称阶）。

上文采用了 Landau 大-O 记号（该约定很容易推广到这样的流形：在某个闭有界子集之外，它与 $\mathbb{R}^3$ 减去一个以原点为中心的闭球所得的空间微分同胚）。这里简要回顾这一记号。设 f 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 的某个紧集之外的光滑实值函数，且 $\tau \in \mathbb{R}$。若存在常数 $C > 0$，使得对每个 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_R(O)$，当 $R > 0$ 充分大时，对每个满足 $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$的多重指标 α，都有 $|\partial^\alpha f(x)| \leqslant C|x|^{-|\alpha|-\tau}$，则记作 $f = O_k(|x|^{-\tau})$。

定义 1.2（X–ADM质量）。设（M^3, g）是一个渐近平坦流形。若存在一个渐近平坦坐标图（$M \setminus K, \varphi$），使得对每个 $i = 1,2,3$ 以及某个 $\tau_0 > 1/2$，都有 $X^i = O_1(|x|^{-1-\tau_0})$，则称 M 上的光滑向量场 X 是可容许的。

给定一个可容许光滑向量场 X，我们将假设 $\mathrm{R} + 2\,\mathrm{div}(X) \in L^1(M, g)$，从而极限

$$m_X = \frac{1}{16\pi} \lim_{r\to+\infty} \int_{\{|x|=r\}} (\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj} + 2X^i) \frac{x^i}{|x|}\, d\sigma_{\mathrm{eucl}},$$

我们称之为 X–*ADM*质量，它对应于 (M, g)，且存在并有限。事实上，与如今已属“经典”的*ADM*质量一样，上述极限的存在性与有限性，以及它的独立性，

日期：2026年2月13日。

渐近平坦坐标图，可以通过遵循 Bart- nik [5] 或 Chru´sciel [11].的相同论证来确立。

本文旨在证明以下关于 X–ADM 质量的三维广义正质量定理。

定理 1.3 （X–正质量定理）。 设（M, g）是一个可定向、连通且完备的渐近平坦3维流形，且 X 是 M 上的一个可容许光滑向量场。假设：

（a）$\mathrm{R} + 2\mathrm{div}\,(X) \in L^1(M, g)$； （$b$）$\mathrm{R}^{(k)}_X = \mathrm{R} + 2\,\mathrm{div}\,(X) - (1 + 1/k)\,|X|^2 \geqslant 0$，其中某个 $k \in \mathbb{R} \setminus (-2, 0]$；（$c$）的第二整同调群 $H_2(M; \mathbb{Z})$ 不含任何“球面”类。那么，

$$m_X \geqslant 0\,.$$

此外，以下结论成立。

（*1*）若 $\mathrm{R}^{(k)}_X \geqslant 0$，且 $k \in \mathbb{R} \setminus [-2, 0]$ 和 $m_X = 0$ （等号情形），则 X 在 M 上消失，且（M, g）与（$\mathbb{R}^3, g_{\mathrm{eucl}}$）等距。 （*2*）若 $\mathrm{R}^{(-2)}_X \geqslant 0$ 且 $m_X = 0$，则 X 是某个光滑函数的梯度，且（M, g）与（$\mathbb{R}^3, g_{\mathrm{eucl}}$）共形等距。

X–ADM质量的定义及其相关的正质量定理 X–PMT提供了一个统一框架，将若干已知结果作为特殊情形涵盖其中。具体而言：

∘ 如果对于每个 $i \in \{1, 2, 3\}$ 及某个 $\tau_0 > 1/2$， $X^i = O_1(|x|^{-1-2\tau_0})$，则 X–ADM质量与“经典”ADM质量一致

$$m_{\mathrm{ADM}} = m_0 = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \to +\infty} \int\limits_{\{|x| = r\}} (\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj}) \frac{x^i}{|x|}\, d\sigma_{\mathrm{eucl}}$$

通过令 X 恒等于零（这显然是可容许的）， X–PMT在三维情形下便退化为“经典”的正质量定理（见 [41, 47]），并且对于$H_2(M; \mathbb{Z})$不含球面类；而当 X 非零时，在关于标量曲率的更一般假设下， X–PMT仍可推出“经典”的正质量不等式。Hirsch、Miao和 Tsang [26, 推论1.3] 得到了类似结果，允许流形中存在“角点”。然而，在光滑情形下，我们的定理涵盖了更广泛的一类流形。

∘ 在 [4], Baldauf 和 Ozuch 引入了渐近平坦加权流形（M^n， g， f）的加权质量 $m_f(g)$。在 3 维中， ∇f–ADM质量实际上等于$m_f(g)/16\pi$，因此，我们的定理 1.3 包含了 Law、Lopez 和 Santiago 的加权正质量定理 [30,定理 1.6] （该定理基于上述关于$H_2(M; \mathbb{Z})$ 的拓扑假设）。

∘ 定理 1.3 还与下面的带电荷正质量定理有关。设 $\mathcal{E}$ 为代表电场的可容许光滑向量场。若 R 和 div($\mathcal{E}$) 属于 $L^1(M, g)$，且不等式 $\mathrm{R} - 4\,|\mathrm{div}(\mathcal{E})| - 2|\mathcal{E}|^2 \geqslant 0$ 成立，则 $m_{\mathrm{ADM}} \geqslant |\mathcal{Q}|$，其中$\mathcal{Q}$ 是由下式给出的“总电荷”：

$$\mathcal{Q} = (1/4\pi) \int_{\{|x| = r\}} \mathcal{E}^i(x^i/|x|)\, d\sigma_{\mathrm{eucl}}.$$

这种正质量定理是在相当一般的假设下由 Chru´sciel、Reall 和 Tod 在 [12] 中建立的（关于该主题的最新进展，参见 [40] 及其中的参考文献）。我们注意到，（在上述关于 $H_2(M; \mathbb{Z})$ 的拓扑假设下）可由定理 1.3推出。事实上，不妨设$\mathcal{Q} \geqslant 0$，则由于不等式 $\mathrm{R} - 4\,|\mathrm{div}(\mathcal{E})| - 2|\mathcal{E}|^2 \geqslant 0$ 蕴含 $\mathrm{R}^{(-2)}_X \geqslant 0$（其中 $X = -2\mathcal{E}$，应用定理 1.3 （取 $X = -2\mathcal{E}$），我们得到不等式 $m_{\mathrm{ADM}} \geqslant |\mathcal{Q}|$。

通过一个单调性公式，可以证明 X–PMT。该公式沿算子 $\mathcal{L}_X = \Delta - (1/2)\nabla_X$ 的最小正格林函数的正则水平集成立，此格林函数在 M中的某一点有一个极点。

一般而言，单调性公式在几何分析中发挥着重要作用。在比较几何中，经典例子包括极小子流形的单调性公式和 Bishop–Gromov 体积比较定理；在几何流的背景下，则有平均曲率流的 Huisken 单调性公式 [27], 以及 Ricci 流的 Perelman 熵公式 [39] 和逆平均曲率流中 Hawking 质量的 Geroch 单调性 [19, 28]。在一系列研究中 [14, 15, 17], , Colding 和 Minicozzi 针对非抛物型、Ricci 曲率非负的黎曼流形，研究了沿着带有极点的拉普拉斯算子的最小正格林函数的等值集成立的一些单调性公式。利用这些单调性公式，他们证明了 Einstein 流形的切锥唯一性 [16]。文献 [17] 中提出的一参数单调性公式族已推广至具有非负 Bakry–´Emery Ricci 曲率的加权流形 [43],，也推广至正 Ricci 曲率的情形 [32]。在位势理论的背景下，文献 [1] 中使用了与 Colding 和 Minicozzi 的公式类似的单调性公式，以得到新的 Willmore 型几何不等式；文献 [6] 则将其推广，用以证明非抛物型、Ricci 曲率非负的黎曼流形上的 Minkowski 不等式的最优版本

近年来，“水平集方法”背景下的单调性公式被广泛应用于研究具有非负标量曲率的三维流形。Stern 在 [44], 中迈出了这方面的重要一步：他利用 Bochner 公式、取迹的 Gauss 方程和 Gauss–Bonnet 定理，推导出一条积分不等式，将闭三维流形的标量曲率与映入 $\mathbb{S}^1$ 的调和映射联系起来。此后，适用于调和函数及 p–调和函数水平集的新的单调性公式带来了具有非负标量曲率的三维流形研究的新成果，尤其是在渐近平坦情形下。例如， [3] 中给出了正质量定理的新证明； [2, 25] 中则利用 p–调和函数，找到了黎曼 Penrose 不等式（不涉及刚性情形）的更简洁证明。通过调和函数， [35, 37] 确立了涉及 ADM 质量/p–容量以及面积/p–容量关系的新结果；而 [34, 48] 则利用 p–调和函数得到了这方面的新结果。对于渐近平坦情形之外的情况，[10, 18, 36, 38] 为具有非负标量曲率的三维流形建立了梯度积分估计；此外， [29] 最近利用拉普拉斯算子的带极点格林函数，证明了渐近双曲三维流形上的一项新正质量定理。在正质量定理的诸多相关进展中，还包括其向加权流形的推广。Schoen 和 Yau 在 [41, 42] 中证明了 $3 \leqslant n \leqslant 7$ 情形下的定理，Witten 则在 [47] 中证明了自旋情形下的定理。Baldauf–Ozuch 最近在 [4] 中建立了自旋情形下的推广，Chu–Zhu 在 [13] 中建立了 $3 \leqslant n \leqslant 7$情形下的推广，而 Law–Lopez–Santiago 则在 [30]中针对光滑度量测度空间建立了推广。光滑度量测度空间中 Ricci 曲率和标量曲率的对应概念，是针对 $m \neq 0$的 m–Bakry–´Emery Ricci 曲率和标量曲率。对于给定的 C^∞ 类权函数 f， m–Bakry–´Emery Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}+\nabla df-(1/m)df\otimes df$ 的一种自然推广，是针对给定光滑向量场 X的 m–Bakry–´Emery Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}+(1/2)L_X g-(1/m)X^\flat\otimes X^\flat$。考虑相应的标量曲率后，便可得到 X–PMT 的表述。最后，漂移拉普拉斯算子的使用并非新鲜事，早在 [7]中就已出现。该文的作者研究了渐近于线性坐标函数的解；因此，本文与 [7] 之间的类比，与 [3] 和 [8]之间的类比相同。不过，两者有三个主要区别，下面逐一说明。首先，我们允许光滑向量场具有非零散度，而 Bray、Hirsch、Kazaras、Khuri 和 Zhang 在他们的工作中只考虑了散度为零的向量场。其次，他们的设定允许流形具有渐近柱状端。第三，为了完整描述刚性情形（不含渐近柱状端），我们还允许对标量曲率施加其他更强的假设。

如上所述，定理 1.3 的关键要素是以下单调性结果。

定理 1.4。设(M,g) 是一个完备、非紧、可定向的3维黎曼流形，并设 X 是 M上的一个光滑向量场。假设：

$(a)\,\mathrm{R}_X^{(k)}=\mathrm{R}+2\,\mathrm{div}(X)-(1+1/k)\,|X|^2\geqslant 0$，对于某个 $k\in\mathbb{R}\setminus(-2,0]$;$(b)$ 第二整同调群 $H_2(M;\mathbb{Z})$ 不包含任何球面类。

假设存在最小正格林函数 $\mathcal{G}_o$，其定义在 $\mathcal{L}_X = \Delta - (1/2)\nabla_X$ 上，在某点 $o \in M$ 处有一个极点，并且在“无穷远处”趋于零，我们考虑函数

$$u \,=\, 1 - 4\pi\mathcal{G}_o\,,$$

并令 $F\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$F(t) \;=\; 4\pi t \;+\; t^3 \int\limits_{\{u=1-1/t\}} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{H}^2 \;-\; t^2 \int\limits_{\{u=1-1/t\}} |\nabla u| \mathrm{H} \, d\mathcal{H}^2 \;+\; t^2 \int\limits_{\{u=1-1/t\}} g(X,\nabla u) \, d\mathcal{H}^2\,, \tag{1.2}$$

其中H 是水平集 $\{u = 1 - 1/t\} \setminus \{|\nabla u| = 0\}$ 正则部分上的平均曲率，该曲率是相对于单位法向量场 $\nu = \nabla u/|\nabla u|$计算的。于是，我们有

$$0 < s \leqslant t < +\infty \quad \Longrightarrow \quad F(s) \,\leqslant\, F(t)\,,$$

假设 $1 - 1/s$ 和 $1 - 1/t$ 是 u的正则值。

粗略地说，定理 1.3 可由定理 1.4 通过取 $F(t)$ 的极限得到 as $t \to 0^+$ 并且当 $t \to +\infty$时。

本文结构如下：第2节证明算子 $\mathcal{L}_X = \Delta - (1/2)\nabla_X$在 M为渐近平坦时，具有极点的最小正格林函数存在，并具备所需性质。第3节证明上述单调性结果，即定理 1.4。最后，第4节得到 X–正质量定理，即定理 1.3。

2. 算子 $\mathcal{L}_X$ 的带极点最小正格林函数

本节旨在证明算子 $\mathcal{L}_X = \Delta - (1/2)\nabla_X$ 的最小正格林函数 $\mathcal{G}_o$存在，该函数在某点 $o \in M$处有极点；并描述其在极点附近及无穷远处的渐近行为。这里考虑的是完备渐近平坦三维流形 (M, g)，并假设 X 是 M上的可容许光滑向量场。

2.1. 最小正格林函数的存在性及其渐近行为 $\mathcal{G}_o$ 在算子 $\mathcal{L}_X$ 极点附近。

我们采用循序渐进的方法。第二步和第三步与 [29, 节 3]的思路相同。

步骤 1. 设 Ω 是任意一个具有光滑边界的有界连通开集，且满足 $o \in \Omega$。算子 $\mathcal{L}_X$ 在 Ω 中存在唯一的正的极小格林函数 $\mathcal{G}_o^\Omega$，其极点为 o；该函数是 $\mathcal{L}_X$ 在 Ω 中以 o 为极点的狄利克雷格林函数。此外，对于任意一个以 o 为中心、定义在开球 $B_{r_o}(o)$ 上的正规坐标系 (x^1, x^2, x^3)，若 $B_{r_0}(o) \subseteq \Omega$，则存在常数 $b_{i_1}^{(0)}$, $a^{(1)}$, $c_{i_1 i_2}^{(1)}$,$e_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(1)}$, $b_{i_1}^{(2)}$, $d_{i_1 i_2 i_3}^{(2)}$, $f_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}^{(2)}$, $a^{(3)}$, $c_{i_1 i_2}^{(3)}$, $e_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(3)}$, $h_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6}^{(3)}$ 和 $l_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7 i_8}^{(3)}$，它们取决于度量 g 的系数及向量场 X；并且存在一个函数 $f \in C^2(\Omega)$，使得

$$\begin{aligned}
4\pi\mathcal{G}_o^\Omega = {} & \frac{1}{|x|} + b_{i_1}^{(0)} \frac{x^{i_1}}{|x|} + |x| \left[a^{(1)} + c_{i_1 i_2}^{(1)} \frac{x^{i_1} x^{i_2}}{|x|^2} + e_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(1)} \frac{x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3} x^{i_4}}{|x|^4} \right] \\
& + |x|^2 \left[b_{i_1}^{(2)} \frac{x^{i_1}}{|x|} + d_{i_1 i_2 i_3}^{(2)} \frac{x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3}}{|x|^3} + f_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}^{(2)} \frac{x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3} x^{i_4} x^{i_5}}{|x|^5} \right] \\
& + |x|^3 \left[a^{(3)} + c_{i_1 i_2}^{(3)} \frac{x^{i_1} x^{i_2}}{|x|^2} + e_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(3)} \frac{x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3} x^{i_4}}{|x|^4} + h_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6}^{(3)} \frac{x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3} x^{i_4} x^{i_5} x^{i_6}}{|x|^6} \right. \\
& \left. + l_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7 i_8}^{(3)} \frac{x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3} x^{i_4} x^{i_5} x^{i_6} x^{i_7} x^{i_8}}{|x|^8} \right] + f,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

在 $B_{r_o/4}(o)$ 。

在去心开球 $B_{r_o}(o)\setminus\{o\}$ 上，我们考虑函数

$$\begin{aligned} w = {} & \frac{1}{|x|} + b^{(0)}_{i_1}\frac{x^{i_1}}{|x|} + |x|\Big(a^{(1)} + c^{(1)}_{i_1i_2}\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2} + e^{(1)}_{i_1\cdots i_4}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_4}}{|x|^4}\Big) \\ & + |x|^2\Big(b^{(2)}_{i_1}\frac{x^{i_1}}{|x|} + d^{(2)}_{i_1i_2i_3}\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}}{|x|^3} + f^{(2)}_{i_1\cdots i_5}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_5}}{|x|^5}\Big) \\ & + |x|^3\Big(a^{(3)} + c^{(3)}_{i_1i_2}\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2} + e^{(3)}_{i_1\cdots i_4}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_4}}{|x|^4} + h^{(3)}_{i_1\cdots i_6}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_6}}{|x|^6} + l^{(3)}_{i_1\cdots i_8}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_8}}{|x|^8}\Big)\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

展开算子 $\mathcal{L}_X = \Delta - (1/2)\nabla_X$的系数，即展开函数 X^i、 g^{ij} 和 Γ^k_{ij}，即可确定常数 $b^{(0)}_{i_1}$ 、 $a^{(1)}$、 $c^{(1)}_{i_1i_2}$、 $e^{(1)}_{i_1i_2i_3i_4}$、 $b^{(2)}_{i_1}$ 、 $d^{(2)}_{i_1i_2i_3}$、 $f^{(2)}_{i_1i_2i_3i_4i_5}$、 $a^{(3)}$、 $c^{(3)}_{i_1i_2}$、 $e^{(3)}_{i_1i_2i_3i_4}$、 $h^{(3)}_{i_1i_2i_3i_4i_5i_6}$ 和 $l^{(3)}_{i_1i_2i_3i_4i_5i_6i_7i_8}$，使函数 w 满足

$$\mathcal{L}_X w = h \quad \text{on} \quad B_{r_o}(o)\setminus\{o\}\,,$$

其中 h 是去心开球 $B_{r_o}(o)\setminus\{o\}$ 上的光滑函数，且在 C^1–上可延拓$B_{r_o}(o)$，延拓后仍记为 h。证明见附录 A 。

于是，根据 [20], 中的定理 6.14，存在唯一解 f 满足狄利克雷问题

$$\mathcal{L}_X f = -h \quad \text{in } B_{r_o}(o) \qquad \text{with} \qquad f = -w|_{\partial B_{r_o}(o)} \quad \text{on } \partial B_{r_o}(o)$$

属于 $C^{2,\alpha}\big(B_{r_o}(o)\big)$。我们断言 $w+f = 4\pi\mathcal{G}^{B_{r_o}(o)}_o$，事实上，根据构造，它满足$\mathcal{L}_X\big(w+f\big) = -4\pi\delta_o$ 在分布意义下成立于 $B_{r_o}(o)$（此处， δ_o表示位于 o 的狄拉克δ测度）。事实上，对于每个 $\psi\in C^\infty_c($ $B_{r_o}(o)$)，均有

$$\begin{aligned} & \int_{B_{r_o}(o)} g\big(\nabla(w+f),\nabla\psi\big) + \frac{1}{2}\,\psi\, g\big(X,\nabla(w+f)\big)\,d\mu \\ & = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{B_{r_o}(o)\setminus B_\varepsilon(o)} g\big(\nabla(w+f),\nabla\psi\big) + \frac{1}{2}\,\psi\, g\big(X,\nabla(w+f)\big)\,d\mu \\ & = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\int_{\partial B_\varepsilon(o)}\psi\, g\big(\nabla(w+f),\nu\big)\,d\mathcal{H}^2 - \int_{B_{r_o}(o)\setminus B_\varepsilon(o)}\psi\,\mathcal{L}_X(w+f)\,d\mu\right] \\ & = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\varepsilon(o)}\psi\, g\big(\nabla(w+f),\nu\big)\,d\mathcal{H}^2 = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\varepsilon(o)}\psi\, g\big(\nabla w,\nu\big)\,d\mathcal{H}^2 = 4\pi\psi(o)\,, \end{aligned}$$

其中 ν 是 $\partial B_\varepsilon(o)$ 的外法向量，最后一个极限是利用2.2式，在正规坐标系 w 中得到的 $(x^1,\ x^2,\ x^3)$。

由极大值原理可知， $f+w$ 在 $B_{r_o}(o)\setminus\{o\}$中为正。此外，对于任意以 o为极点的 $B_{r_0}(o)$中 $\mathcal{L}_X$的正格林函数 $\widetilde{G}^{B_{r_o}(o)}_o$，由于 $\mathcal{L}_X\big(4\pi\widetilde{G}^{B_{r_o}(o}_{\ o} - w - f\big) = 0$)在分布意义下成立，函数 $4\pi\widetilde{G}^{B_{r_o}(o)}_{\ o} - w - f$ 可以光滑地延拓到整个$B_{r_0}(o)$上，并且再次由极大值原理可得

$$\inf_{B_{r_o}(o)}\big(4\pi\widetilde{G}^{B_{r_o}(o)}_o - w - f\big) = \inf_{\partial B_{r_o}(o)}\big(4\pi\widetilde{G}^{B_{r_o}(o)}_o - w - f\big) = 4\pi\inf_{\partial B_{r_o}(o)}\widetilde{G}^{B_{r_o}(o)}_o \geqslant 0\,,$$

因此，结论得证。

现在考虑一般情形：Ω是 M 的连通有界开集，具有光滑边界，且满足 $o\in\Omega$。在这种情况下，我们选取一个光滑的截断函数 ψ ，它在 $B_{r_o/4}(o)$中恒等于1，并在$M\setminus B_{r_o/2}(o)$中为0。于是，狄利克雷问题存在唯一解 f

$$\mathcal{L}_X f = -\psi h - w\mathcal{L}_X\psi - 2g(\nabla w,\nabla\psi) \text{ in } \Omega \qquad \text{with} \qquad f = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

属于 $C^{2,\alpha}\big(\Omega\big)$，并如前论证，可得 $4\pi\mathcal{G}^\Omega_o = \psi w + f$。

步骤 2. 外部与全局障碍的存在性。

We 在以 $o\in M$ 为中心、定义于开球 $B_{r_o}(o)$ 上的正规坐标系，并 an

衰减率为 $\tau > 1/2$ 的渐近平坦坐标图 $\big(U,\ \varphi = (x^1,\ x^2,\ x^3)\big)$，其中 $(M,\ g)$ asym 定义中的 1.1 定义。

对于任意 $0 < \varepsilon < \tau$，我们考虑函数

$$\phi_+ \,=\, \frac{1}{|x|} \,-\, \frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\,.$$

可以验证

$$\mathcal{L}_X \phi_+ \,=\, g^{ij}\partial_{x^i}\partial_{x^j}\phi_+ \,-\, g^{ij}\,\Gamma^k_{ij}\partial_{x^k}\phi_+ \,-\, (1/2)\,X^i\partial_{x^i}\phi_+ \,=\, -\,\varepsilon\,(1+\varepsilon)|x|^{-3-\varepsilon} + O(|x|^{-3-\tau})\,,$$

根据假设 (1.1) 和 $X^i = O(|x|^{-1-\tau})$。于是，存在 $R > 1$ 使得ϕ_+ 是一个满足条件 $\mathcal{L}_X\phi_+ < 0$ 的正函数，其中 $\{|x| \geqslant R\}$。类似地，可以证明，可能需要取更大的 $R > 1$，正函数

$$\phi_- \,=\, \frac{1}{|x|} \,+\, \frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\,.$$

在集合 $\{|x| \geqslant R\}$ 中满足 $\mathcal{L}_X\phi_- > 0$。

不失一般性，我们可以假设 $B_{r_o}(o) \cap \{|x| \geqslant R\} = \emptyset$，接着考虑两个非负截断函数 ψ_{r_o} 和 ψ_R，使得：

- ψ_{r_o} 是步骤 1 中使用的同一个截断函数：在 $B_{r_o/4}(o)$ 上恒等于 1，并在 $M \setminus B_{r_o/2}(o)$ 中为零；
- ψ_R 在 $\{|x| > 4R\}$ 上恒等于 1，并在 $M \setminus \{|x| \geqslant 2R\}$ 中为零。

借助这些截断函数，我们可以在整个 M 上定义函数

$$\widetilde{h}_+ = -\psi_{r_o} h - w\mathcal{L}_X\psi_{r_o} - 2g(\nabla w, \nabla\psi_{r_o}) + \psi_R\,\mathcal{L}_X\phi_+\,.$$

根据 [9, 第 4], 节，存在唯一的函数 $v_+ \in C^2(M)$，它在无穷远处趋于零，并满足$\mathcal{L}_X v_+ = h_+$ 在 M中。现在，函数 $\widetilde{v}_+ = \psi_{r_o} w + v_+$在 $M \setminus \{o\}$ 中光滑，并满足$\mathcal{L}_X\widetilde{v}_+ = -4\pi\delta_o + \psi_R\,\mathcal{L}_X\phi_+$ 在 M中（按分布意义）。因此，$\widetilde{v}_+$是 $\mathcal{L}_X$ 在 $M \setminus \{o\}$中的一个超解，它在 $+\infty$趋近极点 o 时趋于该值，并在无穷远处趋于零。由极大值原理可知，$\widetilde{v}_+$ 在 $M \setminus \{o\}$中为正。

步骤 3。算子 $\mathcal{L}_X$ 在 M中存在唯一的正的极小格林函数 $\mathcal{G}_o$，其极点为 o，并且在无穷远处趋于零。此外，对于以 $o \in M$为中心、定义在开球 $B_{r_o}(o)$上的任意正规坐标系 $(x^1,\ x^2,\ x^3)$，函数 $4\pi\mathcal{G}_o$ 在 $B_{r_o/4}(o)$上可写成公式 (2.1) 的形式，其中 $f \in C^2(M)$。

令 $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为 M的（预紧）穷竭，即由 M中一列有界、连通且边界光滑的开子集构成，并满足 $B_{r_o}(o) \subseteq \Omega_1, \Omega_j \subseteq \Omega_{j+1}$ 且 $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\Omega_j = M$。在步骤 1 中，我们证明了对每个 $j \in \mathbb{N}$，算子 $\mathcal{L}_X$ 都存在唯一的正的极小格林函数 $\mathcal{G}_o^{\Omega_j}$，其极点为 o；它就是 Ω_j中 $\mathcal{L}_X$ 的极点为 o 的狄利克雷格林函数。由极大值原理可知，$\{\mathcal{G}_o^{\Omega_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是严格递增的正函数序列，且每个函数 $\mathcal{G}_o^{\Omega_j}$都满足 $4\pi\mathcal{G}_o^{\Omega_j} \leqslant \widetilde{v}_+$。因此，结合内部 Schauder 椭圆估计、Ascoli–Arzel´a 定理和标准的对角化论证可得，可能在取子列后，序列 $\mathcal{G}_o^{\Omega_j}$在 $M \setminus \{o\}$ 上于 C^k_{loc} 中收敛到函数 $\mathcal{G}_o$，对任意固定的 $k \geqslant 2$ 均如此。特别地，函数 $\mathcal{G}_o$在 $M\setminus\{o\}$中满足 $\mathcal{L}_X\mathcal{G}_o = 0$。现在，我们注意到在去心开集 $\Omega_j \setminus \{o\}$ 上有如下不等式链：

$$\psi_{r_o} w + f^{\Omega_j} = 4\pi\mathcal{G}_o^{\Omega_j} \leqslant 4\pi\mathcal{G}_o \leqslant \widetilde{v}_+ = \psi_{r_o} w + v_+\,, \tag{2.3}$$

其中 w 是定义在 $B_{r_o}(o) \setminus \{o\}$ 上的光滑函数，由步骤 1 确定，并满足方程$\mathcal{L}_X w = h$ 在 $B_{r_o}(o) \setminus \{o\}$上，函数 h 可延拓为 C^1到 $B_{r_o}(o)$，仍记为 h，ψ_{r_o}是步骤 2 中引入的截断函数，而函数 f^{Ω_j} 是公式 (2.1) 中出现的函数，对应于子集 Ω_j。

于是，序列 $\{f^{\Omega_j}\}_{j\geqslant k}$ 不仅单调不减，而且在每个 Ω_k 上都有上界，对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。因此，再次结合内部椭圆估计与

Arzel´a 定理和对角化论证，并在必要时取一个子列，序列 $\{f^{\Omega_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $C^2_{\mathrm{loc}}(M)$ 中的一个函数 f。这意味着函数 f 满足

$$\mathcal{L}_X f = -\psi_{r_o} h - w\mathcal{L}_X\psi_{r_o} - 2g(\nabla w, \nabla\psi_{r_o})$$

在 M中，因为每个 f_{Ω^j}都在 Ω^j中满足同一个方程。接着，可以验证 $\mathcal{L}_X\mathcal{G}_o = -\delta_o$在 M中成立，因为 $4\pi\mathcal{G}_o = \psi_{r_o} w + f$ 在 M 中成立（将公式（2.3）左边的等式取极限即可）。

此外，公式（2.3）意味着 $\mathcal{G}_o > 0$ 在 $M\setminus\{o\}$ 上成立，并且 $\mathcal{G}_o$ 在无穷远处趋于零。最后，若 $\mathcal{G}_o$是 M上的一个正格林函数，也就是说，$\mathcal{G}_o$是满足分布意义下 $\mathcal{L}_X\mathcal{G}_o = -\delta_o$在 M 中成立的正函数，则由极大值原理可得 $\mathcal{G}_o^{\Omega_j} \leqslant \widetilde{\mathcal{G}}_o$ 在 $\Omega_j\setminus\{o\}$中成立。取极限可得 $\mathcal{G}_o \leqslant \mathcal{G}_o$ 在 $M\setminus\{o\}$中成立。

2.2. **最小正格林函数在无穷远处的渐近行为 $\mathcal{G}_o$ 对于算子 $\mathcal{L}_X$ 其极点位于 $o\in M$。** 最小正格林函数在无穷远处的渐近行为 $\mathcal{G}_o$ 对于算子 $\mathcal{L}_X$，其极点位于 o，在一般的渐近平坦坐标图中，其推导方式与 [33, 附录 A]（参见 [24, 第 4] 节中关于共形格林函数渐近展开的内容）相同。为完整起见，我们在此给出证明。

令 $\big(U,\ \varphi=(x^1,\ x^2,\ x^3)\big)$ 为 $(M,\ g)$ 的一个渐近平坦坐标图，如步骤 2 所示。在那里，我们证明存在 $R>1$，使得函数

$$\phi_+ = \frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}} \qquad \text{and} \qquad \phi_- = \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}$$

为正，并且分别在集合 $\{|x|\geqslant R\}$ 中满足 $\mathcal{L}_X\phi_+ < 0$ 和 $\mathcal{L}_X\phi_- > 0$。因此，由步骤 3 可知，极大值原理意味着

$$\Big(\frac{1}{R} + \frac{1}{R^{1+\varepsilon}}\Big)\Big(\min_{\{|x|=R\}}\mathcal{G}_o\Big)\phi_- \leqslant \mathcal{G}_o \leqslant \Big(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^{1+\varepsilon}}\Big)\Big(\max_{\{|x|=R\}}\mathcal{G}_o\Big)\phi_+ \tag{2.4}$$

在 $\{|x|\geqslant R\}$上。现在，为了得到所需的估计，我们考虑一个截断函数 ψ_R，它在 $\{|x|>4R\}$ 上恒等于 1，并在 $\mathbb{R}^3\setminus\{|x|\geqslant 2R\}$中为零。利用这个截断函数，我们定义

$$\widehat{g} = \psi_R\,\varphi_* g + (1-\psi_{2R})\,g_{\mathrm{eucl}}\,,$$

它是 $\mathbb{R}^3$上的一个完备渐近平坦黎曼度量；光滑可容许向量场 $\widehat{X} = \psi_R\,\varphi_* X$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上，以及 $\widehat{\mathcal{G}}_o = \psi_R\,\varphi_*\mathcal{G}_o$，它是一个满足以下条件的光滑函数

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\widehat{X}}\widehat{\mathcal{G}}_o = \Delta_{\widehat{g}}\widehat{\mathcal{G}}_o - (1/2)\,\nabla^{\widehat{g}}_{\widehat{X}}\widehat{\mathcal{G}}_o \in C^\infty_c(\mathbb{R}^3)\,,$$

存在两个正常数 C_1，C_2，使得

$$C_1|x|^{-1} \leqslant \widehat{\mathcal{G}}_o \leqslant C_2|x|^{-1}$$

在某个足够大的开球之外。
在 [31], 中应用定理 A.33，我们得到 $\widehat{\mathcal{G}}_o = O_2(|x|^{-1})$；结合这一结果以及 $\widehat{\mathcal{L}}_{\widehat{X}}\widehat{\mathcal{G}}_o \in C^\infty_c(\mathbb{R}^3)$ 和 $\widehat{g}_{ij} - \delta_{ij} = O_2(|x|^{-\tau})$ 这一事实，可得

$$\Delta_e\widehat{\mathcal{G}}_o = f = O(|x|^{-3-\tau})\,.$$

不失一般性，假设 $\tau\in(1/2,1)$，并利用函数 f 的渐近行为，我们便有

$$\widehat{\mathcal{G}}_o(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(y)}{|x-y|}\,dy\,.$$

现在我们按如下方式将 $\widehat{\mathcal{G}}_o$ 在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 中改写：

$$\widehat{\mathcal{G}}_o(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}\int_{\mathbb{R}^3} f(y)\,dy + \frac{1}{4\pi|x|}\int_{\{|y|\geqslant|x|/2\}} f(y)\,dy + \frac{1}{4\pi}\int_{\{|y|<|x|/2\}}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{|x-y|}\right) f(y)\,dy$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\{|y-x|<|x|/2\}}\frac{f(y)}{|x-y|}\,dy - \frac{1}{4\pi}\int_{\{|y-x|\geqslant|x|/2 \text{ and } |y|\geqslant|x|/2\}}\frac{f(y)}{|x-y|}\,dy\,.$$

由于 $f = O(|x|^{-3-\tau})$ 且 $\{|y-x| < |x|/2\} \cap \{|y| < |x|/2\} = \emptyset$，第二、第四和第五个积分的绝对值可轻易地由某个常数 $C > 0$ 乘以 $C|x|^{-1-\tau}$ 控制。关于第三个积分，我们首先注意到

$$\left|\frac{1}{|x|}-\frac{1}{|x-y|}\right| = \left|\frac{|x-y|^2-|x|^2}{|x|\,|x-y|\,\big(|x-y|+|x|\big)}\right| = \left|\frac{|y|^2-2x^iy^i}{|x|\,|x-y|\,\big(|x-y|+|x|\big)}\right|$$
$$\leqslant \frac{|y|^2}{|x|^2\,|x-y|} + \frac{2|y|}{|x|\,|x-y|} \leqslant \frac{2|y|^2}{|x|^3} + \frac{4|y|}{|x|^2}\,,$$

其中，最后一个不等式由 $\{|y-x| < |x|/2\} \cap \{|y| < |x|/2\} = \emptyset$ 得出。因此，衰减率 $f = O(|x|^{-3-\tau})$（其中 $\tau \in (1/2,\ 1)$）意味着第三个积分的绝对值也可由某个常数 $C > 0$ 乘以 $C|x|^{-1-\tau}$ 控制。于是，我们有

$$\widehat{\mathcal{G}}_o(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}\int_{\mathbb{R}^3} f(y)\,dy + z(x)$$

在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 中，其中 $z = O(|x|^{-1-\tau})$。

我们注意到函数 $\psi_R z$ 满足 $\widehat{\mathcal{L}}_{\widehat{X}}(\psi_R z) = O_1(|x|^{-3-\tau})$，因此，再次应用 [31], 中的定理 A.33，可得 $z = O_2(|x|^{-1-\tau})$。最后，将这些结果与公式（2.4）结合起来，我们得到

$$\mathcal{G}_o = \frac{A}{|x|} + O_2(|x|^{-1-\tau})\,,$$

其中 A是一个正常数。

3. 单调性公式

在给出定理1.4的证明之前，我们回顾一些结果，这些结果保证函数 F 定义良好。

- 每个 $u = 1 - 4\pi\mathcal{G}_o$ 的水平集都是紧集，且其2维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^2$ 是有限的；关于$M(\,g,)$，由 [22, 定理 1.7]可知。
- 集合 $\{|\nabla u| = 0\}$ 具有局部有限的一维豪斯多夫测度，见 [21, 定理 1.1]。特别地， $\mathcal{H}^2(\{|\nabla u| = 0\}) = 0$。

- 若 f 是 $M \setminus \{o\}$上的连续函数，则等式

$$\int_{\{u=s\}} f\,d\mathcal{H}^2 = \int_{\{u=s\}^*} f\,d\sigma$$

根据前两点可得， σ 表示与 $\{u = s\}^* = \{u = s\} \setminus \{|\nabla u| = 0\}$上的诱导黎曼度量相对应的典范（体积）测度。

定理的证明 1.4。 与之前一样，我们分步骤进行。

步骤 1. 辅助函数

$$\widetilde{F} : s \in (-\infty, 1) \longmapsto \int_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1} g(\nabla|\nabla u|, \nabla u)\,d\mathcal{H}^2 \in \mathbb{R}$$

属于 $W^{1,1}_{\text{局部}}(-\infty,1)$。

为此，我们首先注意到 $\widetilde{F}\in L^1_{\text{loc}}(-\infty,1)$，根据余面积公式 [6, 命题 2.1 和注 2。2]。考虑向量场 Y，定义为

$$Y=\nabla|\nabla u|\,,$$

该向量场在开集 $M_o\setminus\text{Crit}(u)$ 上定义良好且光滑，其中 M_o 定义为

$$M_o=M\setminus\{o\}\,.$$

注意到

$$\widetilde{F}(s)\,=\int\limits_{\{u=s\}}g\Big(Y,\,\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\Big)\,d\mathcal{H}^2$$

处处成立，并且 Y在 $M_o\setminus\text{Crit}(u)$ 上的散度可表示为

$$\text{div}(Y)=|\nabla u|^{-1}\Big(|\nabla du|^2\,-\,|\,\nabla|\nabla u|\,|^2\,+\,\text{Ric}(\nabla u,\nabla u)\,+\,g(\nabla\Delta u,\nabla u)\Big)\,,$$

根据 Bochner 公式。此外，我们还有

$$2g(\nabla\Delta u,\nabla u)\,=\,2\nabla u\,(\Delta u)\,=\,\nabla u\,(g(X,\nabla u))\,=\,g\big(\nabla_{\nabla u}X,\nabla u\big)\,+\,\nabla du(X,\nabla u)\,,$$

因为 u 在 M_o 中满足方程 $\mathcal{L}_Xu=0$。我们断言

$$\text{div}(Y)\in L^1_{\text{loc}}(M_o)\,.$$

事实上，若 K 是 M_o 的紧子集，根据 Sard 定理，$K\subseteq E^S_s=\{s<u<S\}$；对于某些正则值 s，S（属于 u），使得 $-\infty<s<S<1$。接着，类似于 [3], 中定理 1.1 的证明，我们考虑一列定义在 $(0,\,+\infty)$ 上的光滑单调不减截断函数 $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得

$$\eta_k\equiv0\ \text{ in }\left(0\,,\frac{1}{3^k}\right],\qquad0\leqslant\eta_k\leqslant3^k\ \text{ in }\left[\frac{1}{3^k}\,,\frac{1}{3^{k-1}}\right],\qquad\eta_k\equiv1\ \text{ in }\left[\frac{1}{3^{k-1}}\,,+\infty\right).$$

注意到该序列逐点单调收敛于在 $(0,\,+\infty)$ 上恒等于 1 的函数。我们利用这些截断函数，对每个 $k\in\mathbb{N}$ 定义向量场

$$Y_k\,=\,\eta_k\big(|\nabla u|\big)\,Y\,,$$

它在 M_o 上光滑。对于任意这样的 Y_k，其散度为

$$\text{div}(Y_k)=\eta_k\big(|\nabla u|\big)Y\,+\,\eta_k'\big(|\nabla u|\big)\,|\,\nabla|\nabla u|\,|^2\,,\tag{3.1}$$

并且在 $M_o\setminus\text{Crit}(u)$ 的任意紧子集上，只要 k 足够大，它就与向量场 Y 重合。基于这些考虑并应用散度定理，可得

$$\widetilde{F}(S)-\widetilde{F}(s)\,=\int\limits_{E^S_s}\text{div}(Y_k)\,d\mu\,\geqslant\int\limits_{E^S_s}P_k\,d\mu\,+\int\limits_{E^S_s}D_k\,d\mu\,,\tag{3.2}$$

其中我们设

$$P_k\,=\,\eta_k\big(|\nabla u|\big)\,P\qquad\text{and}\qquad D_k\,=\,\eta_k\big(|\nabla u|\big)\,D\,,$$

with

$$P\,=\,|\nabla u|^{-1}\Big[|\nabla du|^2\,-\,|\,\nabla|\nabla u|\,|^2\Big]\mathbb{1}_{M_o\setminus\text{Crit}(u)}\,\geqslant\,0\,,$$

and

$$D\,=\,|\nabla u|^{-1}\left[\text{Ric}(\nabla u,\nabla u)\,+\,\frac{1}{2}\big(\nabla X\big)^\flat(\nabla u,\nabla u)\,+\,\frac{1}{2}\nabla du(X,\nabla u)\right]\mathbb{1}_{M_o\setminus\text{Crit}(u)}\,.$$

现在，由于函数 D_k 满足不等式

$$|D_k|\,\leqslant\,|\nabla u|\,(|\text{Ric}|\,+\,|\nabla X|)\,+\,|X|\,|\nabla du|\,\in L^1_{\text{loc}}(M_o)\,,$$

应用控制收敛定理，我们有 $D\in L^1(E^S_s)$，并且

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{E^S_s}D_k\,d\mu\,=\int\limits_{E^S_s}D\,d\mu\,<+\infty\,.$$

这一事实结合不等式（3.2），意味着函数序列 P_k 的积分从上方一致有界。现在注意到，由于 $P \geqslant 0$ 且序列$\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$是单调不减的，非负函数 P_k 逐点单调收敛到函数 P 在 M_o上。因此，单调收敛定理给出

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{E_s^S} P_k \, d\mu \, = \int_{E_s^S} P \, d\mu \, < +\infty \, .$$

特别地，我们有 $P \in L^1(E_s^S)$。由于 $\mathrm{div}(Y)\mathbb{1}_{M_o\setminus \mathrm{Crit}(u)} = P + D$，因此可得 $\mathrm{div}(Y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(M_o)$，证毕。

现在我们可以证明 $\widetilde{F} \in W^{1,1\,\mathrm{loc}}(-\infty, 1)$，其弱导数为

$$\widetilde{F}'(s) \, = \int_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1} \, \mathrm{div}(Y) \, d\mathcal{H}^2$$

在 $(-\infty,1)$几乎处处成立。首先注意到，右端是一个属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(-\infty,1)$ 的函数，这由余面积公式 [6, 命题 2.1 和注 2.2], 以及结果 $\mathrm{div}(Y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(M_o)$ 得出。接着，取测试函数 $\psi \in C^\infty_c(-\infty,1)$，有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{1} \psi'(\tau) \, \widetilde{F}(\tau) \, d\tau \, &= \int_{-\infty}^{1} d\tau \int_{\{u=s\}} \psi'(u) \, |\nabla u|^{-1} g(Y, \nabla u) \, d\mathcal{H}^2 \, = \int_{M_o} g\big(Y, \, \nabla\psi(u)\big) \, d\mu \\ &= \lim_{k\to+\infty} \int_{M_o} g\big(Y_k, \, \nabla\psi(u)\big) \, d\mu \, = \, - \lim_{k\to+\infty} \int_{M_o} \psi(u) \, \mathrm{div}(Y_k) \, d\mu \, , \end{aligned}$$

其中，第二个等式由余面积公式得出，第三个等式由控制收敛定理得出，而最后一个等式则是简单的分部积分。令 $-\infty < s < S < 1$使得 $\mathrm{supp}\,\psi \subseteq (s, S)$ 且 s, S 是 u 的正则值。根据恒等式（3.1），可得

$$\int_{M_o} \psi(u) \, \mathrm{div}(Y_k) \, d\mu \, = \int_{E_s^S} \psi(u) \, \Big[P_k \, + \, D_k \, + \, \eta_k'\big(|\nabla u|\big) \, |\, \nabla |\nabla u|\, |^2 \Big] \, d\mu \, .$$

标准恒等式

$$|\nabla du|^2 - |\, \nabla|\nabla u|\, |^2 = |\nabla u|^2 |\mathrm{h}|^2 + |\, \nabla^\top |\nabla u|\, |^2 = |\nabla u|^2 |\mathring{\mathrm{h}}|^2 + |\, \nabla^\top |\nabla u|\, |^2 + |\nabla u|^2 (\mathrm{H}^2/2) \, , \tag{3.3}$$

再结合以下事实

$$\mathrm{H} \, = \, \frac{\Delta u}{|\nabla u|} \, - \, \frac{g(\nabla|\nabla u|, \nabla u)}{|\nabla u|^2} \, = \, \frac{1}{2} \, \frac{g(X, \nabla u)}{|\nabla u|} \, - \, \frac{g(\nabla|\nabla u|, \nabla u)}{|\nabla u|^2} \, , \tag{3.4}$$

可得

$$\begin{aligned} |\nabla du|^2 - |\, \nabla|\nabla u|\, |^2 \, &\geqslant \, \frac{1}{2} \, |\, \nabla^\top |\nabla u|\, |^2 \, + \, \frac{1}{2} \, |\, \nabla^\perp |\nabla u|\, |^2 \, - \, \frac{1}{2} \, |X| \, |\nabla u| \, |\, \nabla |\nabla u|\, | \\ &\geqslant \, \frac{1}{2} \, |\, \nabla |\nabla u|\, |^2 \, - \, \frac{1}{2} \, |X| \, |\nabla u| \, |\, \nabla du| \end{aligned}$$

从而得到

$$|\nabla u|^{-1} \, |\, \nabla |\nabla u|\, |^2 \, \leqslant \, 2P \, + \, |X| \, |\nabla du| \, ,$$

在 u 的临界点集之外，因此 $|\nabla u|^{-1} \, |\, \nabla |\nabla u|\, |^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(M_o)$，而 $|\nabla u| \, \eta_k'\big(|\nabla u|\big)$ 始终有界。于是，由于对每个 $\tau \in (0, \, +\infty)$，$\lim_{k\to+\infty} \eta_k'(\tau) \, = 0$，控制收敛定理表明

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{E_s^S} \psi(u) \, \eta_k'\big(|\nabla u|\big) \, |\, \nabla |\nabla u|\, |^2 \, d\mu \, = \, 0 \, .$$

综上，我们得到

$$\int_{-\infty}^{1} \psi'(\tau)\, \widetilde{F}(\tau)\, d\tau \;=\; -\lim_{k\to+\infty} \int_{M_o} \psi(u)\, \mathrm{div}(Y_k)\, d\mu = -\int_{M_o} \psi(u)\, \mathrm{div}(Y)\, d\mu$$
$$= -\int_{-\infty}^{1} \psi(\tau) \int_{\{u=\tau\}} |\nabla u|^{-1}\, \mathrm{div}(Y)\, d\mathcal{H}^2\, d\tau\,,$$

在最后一个等式中，我们再次使用了余面积公式。第一步显然成立 s.

步骤 2. 函数

$$\widetilde{F}_1 \,:\, s\in(-\infty,1) \longmapsto \int_{\{u=s\}} g\big(X, \nabla u\big)\, d\mathcal{H}^2 \in \mathbb{R}$$

属于 $W^{1,1\,\mathrm{loc}}(-\infty, 1)$。

根据余面积公式， $\widetilde{F}_1 \in L^1_{\mathrm{loc}}(-\infty,1)$。我们考虑向量场 Z，其定义如下:

$$Z \;=\; |\nabla u|\, X\,,$$

在开集 $M_o \setminus \mathrm{Crit}(u)$ 上，该向量场处处满足

$$\widetilde{F}_1(s) \;=\; \int_{\{u=s\}} g\bigg(Z,\, \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\bigg)\, d\mathcal{H}^2$$

and

$$\mathrm{div}(Z) \;=\; |\nabla u|\, \mathrm{div}(X) \;+\; g(\nabla|\nabla u|, X)$$

在 $M_o \setminus \mathrm{Crit}(u)$ 上。

在这种情况下，$\mathrm{div}(Z) \in L^1_{\mathrm{loc}}(M_o)$ 显然成立，因此由余面积公式 [6, 命题 2.1 和注 2.2], 几乎处处定义于 $(-\infty,1)$,

$$s \longmapsto \int_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1}\, \mathrm{div}(Z)\, d\mathcal{H}^2$$

属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(-\infty,1)$。考虑测试函数 $\psi \in C^\infty_c(-\infty, 1)$，我们得到

$$\int_{-\infty}^{1} \psi'(\tau)\, \widetilde{F}_1(\tau)\, d\tau \;=\; \int_{-\infty}^{1} d\tau \int_{\{u=s\}} \psi'(u)\, |\nabla u|^{-1} g(Z, \nabla u)\, d\mathcal{H}^2 \;=\; \int_{M_o} g\big(Z,\, \nabla\psi(u)\big)\, d\mu$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \int_{M_o} g\big(Z_k,\, \nabla\psi(u)\big)\, d\mu \;=\; -\lim_{k\to+\infty} \int_{M_o} \psi(u)\, \mathrm{div}(Z_k)\, d\mu\,,$$

其中 Z_k 表示光滑向量场 $\eta_k\big(|\nabla u|\big)\, Z$。令 $s, S \in (-\infty, 1)$ 满足 $\mathrm{supp}\,\psi \subseteq (s, S)$，且 s, S 是 u的正则值。于是有

$$\int_{M_o} \psi(u)\, \mathrm{div}(Z_k)\, d\mu \;=\; \int_{E^S_s} \psi(u) \Big[\eta_k\big(|\nabla u|\big)\, \mathrm{div}(Z) \;+\; |\nabla u|\, \eta_k'\big(|\nabla u|\big)\, g(\nabla|\nabla u|, X)\Big]\, d\mu\,,$$

根据控制收敛定理，可得

$$\int_{-\infty}^{1} \psi'(\tau)\, \widetilde{F}_1(\tau)\, d\tau \;=\; -\lim_{k\to+\infty} \int_{M_o} \psi(u)\, \mathrm{div}(Z_k)\, d\mu \;=\; -\int_{M_o} \psi(u)\, \mathrm{div}(Z)\, d\mu$$
$$= -\int_{-\infty}^{1} \psi(\tau) \int_{\{u=\tau\}} |\nabla u|^{-1}\, \mathrm{div}(Z)\, d\mathcal{H}^2\, d\tau\,.$$

特别地，

$$\widetilde{F}_1'(s) \;=\; \int\limits_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1}\,\mathrm{div}(Z)\,d\mathcal{H}^2$$

几乎处处成立于 $(-\infty,\ 1)$ 中。

步骤 3。 该函数

$$\widetilde{F}_2 \;:\; s\in(-\infty,1)\longmapsto \int\limits_{\{u=s\}} |\nabla u|^2\,d\mathcal{H}^2\in\mathbb{R}$$

属于 $W^{2,\ 1\,\mathrm{loc}}(-\infty,\ 1)$。

如前所述，但将向量场 Z 替换为一个新的向量场

$$W \;=\; |\nabla u|\,\nabla u\,,$$

我们有 $\widetilde{F}_2\in W^{1,\ 1\,\mathrm{loc}}(-\infty,\ 1)$，其弱导数为

$$\widetilde{F}_2'(s) \;=\; \int\limits_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1}\,\mathrm{div}(W)\,d\mathcal{H}^2 \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_{\{u=s\}} g(X,\nabla u)\,d\mathcal{H}^2 \;+\; \int\limits_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1} g(\nabla|\nabla u|,\nabla u)\,d\mathcal{H}^2$$

几乎处处于 $(-\infty,1)$。由于该等式的右端由前两步属于空间$W^{1,1\,\mathrm{loc}}(-\infty,1)$，本步结论随之成立。

步骤 4。 u 的每个正则水平集要么连通，要么其任一连通分支都不是 2–球面。我们首先注意到，若令 $u(o)=-\infty$，则函数 $u\colon M\to[-\infty,1)$ 连续且适当。于是，对 u 的任一正则值 $s\in(-\infty,1)$，集合 $M\setminus\{u=s\}$ 是若干连通开集的不交并。其中存在唯一一个有界开集与$\{u<s\}$重合，而其余每个分支都无界，且它们的并是 $\{u>s\}$。事实上，由于 $u\colon M\to[-\infty,1)$ 连续且适当，集合 $\{u<s\}$ 有界，且必为若干互不相交的有界连通开集的（有限）并，其中每一个的边界由正则水平集 $\{u=s\}$的某些连通分支之并给出。于是，若 o 不属于这些开集中的任何一个，则由极大值原理（u在该处有界）可得 u 为常数，这与该水平集的正则性矛盾。因此，集合$\{u<s\}$ 是包含极点 o的单个有界连通开集。类似地可证， $\{u>s\}$的所有连通分支也都无界。现在假设正则水平集 $\{u=s\}$ 有一个连通分支 Σ是 2–球面。由于第二整同调群 $H_2(M;\,\mathbb{Z})$ 不含任何“球面”类，曲面 Σ 是某个有界连通开集 Ω 的边界（参见例如 [23]）。若 o 不属于 Ω，则 Ω 含于 $M\setminus\{o\}$ 中且以 Σ 为边界，这同样由如上的极大值原理而不可能。因此极点 o 必属于 Ω，从而函数 u 在接近极点时趋于 $-\infty$，且在 $\partial\Omega$ 上 $u=s$。于是由极大值原理可得 $u<s$ 在 Ω 中处处成立，从而 $\Omega\subseteq\{u<s\}$。

若存在一点 $p\in M$ 属于 $\{u<s\}$ 但不属于 Ω，由于集合 $\{u<s\}$ 是连通的，因此存在一条从 o 到 p 且包含于 $\{u<s\}$中的路径。由于 $o\in\Omega$，这条路径必定与其边界相交，而此处函数 u的值为 s。既然这是不可能的，我们便得出 $\Omega=\{u<s\}$，因此 $\Sigma=\partial\Omega=\partial\{u<s\}=\{u=s\}$，这意味着该水平集是连通的。

步骤 5. 证明的结论。

综合前面三个步骤中收集的信息，我们得到 $F\in W^{1,\ 1\,\mathrm{loc}}(0,\ +\infty)$，特别是，它在 $(0,\ +\infty)$ 中存在一个局部绝对连续的代表元，该代表元与F 在定理 1.4 的陈述中逐点定义于集合

$$\mathcal{T} \;=\; \{t\in(0,+\infty)\;:\;1-1/t \text{ is a regular value of } u\,\}\,. \tag{3.5}$$

我们知道，根据 M 的完备性，集合 $\mathcal{T}$ 在 $(0,\ +\infty)$ 中是开集；并且根据 Sard 定理， $\mathcal{T}$ 在 $(0,\ +\infty)$ 中的补集具有零勒贝格测度。注意，函数

F 在开集 $\mathcal{T}$ 上至少是连续可微的；根据先前的结果，我们可以写成

$$
\begin{aligned}
F(t) - F(s) &= \int\limits_{(s,t)\cap\mathcal{T}} F'(\tau)\,d\tau \\
&= \int\limits_{(s,t)\cap\mathcal{T}} \Bigg\{ 4\pi + 3\tau^2 \int\limits_{\Sigma_\tau} |\nabla u|^2\, d\mathcal{H}^2 + \tau \int\limits_{\Sigma_\tau} \Big[\frac{1}{2} g(X,\nabla u) + |\nabla u|^{-1} g(\nabla|\nabla u|,\nabla u) \Big]\, d\mathcal{H}^2 \\
&\qquad - 2\tau \int\limits_{\Sigma_\tau} \Big[\frac{1}{2}\, g(X,\nabla u) - |\nabla u|^{-1} g(\nabla|\nabla u|,\nabla u) \Big]\, d\mathcal{H}^2 \\
&\qquad - \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma_\tau} \Big[\operatorname{div}(X) + |\nabla u|^{-1} g(\nabla|\nabla u|, X) \Big]\, d\mathcal{H}^2 \\
&\qquad + \int\limits_{\Sigma_\tau} |\nabla u|^{-2} \Big[|\nabla du|^2 - |\,\nabla|\nabla u|\,|^2 + \operatorname{Ric}(\nabla u,\nabla u) + \frac{1}{2}\, g\big(\nabla_{\nabla u} X, \nabla u\big) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\, |\nabla u|\, g(\nabla|\nabla u|, X) \Big]\, d\mathcal{H}^2 \\
&\qquad + 2\tau \int\limits_{\Sigma_\tau} g(X,\nabla u)\, d\mathcal{H}^2 + \int\limits_{\Sigma_\tau} \Big[\operatorname{div}(X) + |\nabla u|^{-1} g(\nabla|\nabla u|, X) \Big]\, d\mathcal{H}^2 \Bigg\}\, d\tau\,,
\end{aligned}
$$

其中 Σ_τ 表示水平集 $\{u = 1 - 1/\tau\}$，并且我们使用了恒等式

$$
\nabla du(X,\nabla u) = |\nabla u| g(X,\nabla|\nabla u|)\,.
$$

现在，利用恒等式（3.3）-（3.4）以及取迹的 Gauss 方程，我们得到

$$
\begin{aligned}
F(t) - F(s) = \int\limits_{(s,t)\cap\mathcal{T}} \Bigg\{ 4\pi &- \int\limits_{\Sigma_\tau} \frac{\mathrm{R}^{\Sigma_\tau}}{2}\, d\mathcal{H}^2 + 3\tau^2 \int\limits_{\Sigma_\tau} |\nabla u|^2\, d\mathcal{H}^2 + 3\tau \int\limits_{\Sigma_\tau} \Big[g(X,\nabla u) - |\nabla u|\,\mathrm{H} \Big]\, d\mathcal{H}^2 \\
&+ \int\limits_{\Sigma_\tau} \Big[\frac{\mathrm{R}}{2} + \frac{|\,\nabla^\top|\nabla u|\,|^2}{|\nabla u|^2} + \frac{|\mathring{\mathrm{h}}|^2}{2} + \frac{3\mathrm{H}^2}{4} \Big]\, d\mathcal{H}^2 \\
&- \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma_\tau} \Big[\operatorname{div}(X) - \frac{g\big(\nabla_{\nabla u} X, \nabla u\big)}{|\nabla u|^2} \Big]\, d\mathcal{H}^2 \\
&+ \int\limits_{\Sigma_\tau} \Big[\operatorname{div}(X) + \frac{g(\nabla|\nabla u|, X)}{|\nabla u|} \Big]\, d\mathcal{H}^2 \Bigg\}\, d\tau\,.
\end{aligned}
$$

那么，这些恒等式

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(X) - |\nabla u|^{-2} g\big(\nabla_{\nabla u} X, \nabla u\big) &= \operatorname{div}(X) - g\big(\nabla_\nu X, \nu\big) = \operatorname{div}^\top(X) = \operatorname{div}^\top(X^\top) + g(X,\nu)\mathrm{H}\,, \\
g\Big(\frac{\nabla|\nabla u|}{|\nabla u|}, X \Big) &= g\Big(\frac{\nabla|\nabla u|}{|\nabla u|}, X^\top \Big) + g(X,\nu)\, \frac{g(\nabla|\nabla u|,\nabla u)}{|\nabla u|^2} \\
&= g\Big(\frac{\nabla^\top|\nabla u|}{|\nabla u|}, X^\top \Big) + \frac{1}{2}\, |X^\perp|^2 - g(X,\nu)\,\mathrm{H}\,,
\end{aligned}
$$

其中 $\nu = \nabla u/|\nabla u|$，且 $\mathrm{div}^\top$ 是沿一般曲面的切向散度，这意味着

$$
\begin{aligned}
F(t) - F(s) &= \int_{(s,t)\cap\mathcal{T}} \Bigg\{ 4\pi - \int_{\Sigma_\tau} \frac{\mathrm{R}^{\Sigma_\tau}}{2}\, d\mathcal{H}^2 + 3\tau^2 \int_{\Sigma_\tau} |\nabla u|^2\, d\mathcal{H}^2 + 3\tau \int_{\Sigma_\tau} \Big[g(X,\nabla u) - |\nabla u|\,\mathrm{H} \Big]\, d\mathcal{H}^2 \\
&\qquad - \frac{3}{2}\int_{\Sigma_\tau} g(X,\nu)\mathrm{H}\, d\mathcal{H}^2 + \int_{\Sigma_\tau} \left[\frac{\mathrm{R}}{2} + \mathrm{div}(X) + \frac{|\nabla^\top |\nabla u||^2}{|\nabla u|^2} + g\left(\frac{\nabla^\top |\nabla u|}{|\nabla u|}, X^\top \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{|X^\perp|^2}{2} + \frac{|\mathring{\mathrm{h}}|^2}{2} + \frac{3\mathrm{H}^2}{4} \right] d\mathcal{H}^2 \Bigg\}\, d\tau \\
&= \int_{(s,t)\cap\mathcal{T}} \Bigg\{ 4\pi - \int_{\Sigma_\tau} \frac{\mathrm{R}^{\Sigma_\tau}}{2}\, d\mathcal{H}^2 + 3\tau^2 \int_{\Sigma_\tau} |\nabla u|^2\, d\mathcal{H}^2 + 3\tau \int_{\Sigma_\tau} \Big[g(X,\nabla u) - |\nabla u|\,\mathrm{H} \Big]\, d\mathcal{H}^2 \\
&\qquad - \frac{3}{2}\int_{\Sigma_\tau} g(X,\nu)\mathrm{H}\, d\mathcal{H}^2 + \int_{\Sigma_\tau} \left[\frac{\mathrm{R}}{2} + \mathrm{div}(X) + \left| \frac{\nabla^\top |\nabla u|}{|\nabla u|} + \frac{1}{2} X^\top \right|^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{|X^\top|^2}{4} + \frac{|X^\perp|^2}{2} + \frac{|\mathring{\mathrm{h}}|^2}{2} + \frac{3\mathrm{H}^2}{4} \right] d\mathcal{H}^2 \Bigg\}\, d\tau\,.
\end{aligned}
$$

因此，通过加上再减去项 $|X^\perp|^2/4$，我们得到

$$
\begin{aligned}
F(t) - F(s) &= \int_{(s,t)\cap\mathcal{T}} \Bigg\{ 4\pi - \int_{\Sigma_\tau} \frac{\mathrm{R}^{\Sigma_\tau}}{2}\, d\mathcal{H}^2 + 3\tau^2 \int_{\Sigma_\tau} |\nabla u|^2\, d\mathcal{H}^2 + 3\tau \int_{\Sigma_\tau} \Big[g(X,\nabla u) - |\nabla u|\,\mathrm{H} \Big]\, d\mathcal{H}^2 \\
&\qquad + \int_{\Sigma_\tau} -\frac{3}{2} g(X,\nu)\mathrm{H} + \left[\frac{\mathrm{R}}{2} + \mathrm{div}(X) - \frac{1}{4}|X|^2 + \left| \frac{\nabla^\top |\nabla u|}{|\nabla u|} + \frac{1}{2} X^\top \right|^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{|\mathring{\mathrm{h}}|^2}{2} + \frac{3}{4}|X^\perp|^2 + \frac{3\mathrm{H}^2}{4} \right] d\mathcal{H}^2 \Bigg\}\, d\tau \\
&= \int_{(s,t)\cap\mathcal{T}} \Bigg\{ 4\pi - \int_{\Sigma_\tau} \frac{\mathrm{R}^{\Sigma_\tau}}{2}\, d\mathcal{H}^2 + \frac{3}{4}\int_{\Sigma_\tau} \left[\frac{2|\nabla u|}{1-u} - \mathrm{H} + g(X,\nu) \right]^2 d\mathcal{H}^2 \\
&\qquad + \int_{\Sigma_\tau} \left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{R} + 2\,\mathrm{div}(X) - \frac{1}{2}|X|^2 \right) + \left| \frac{\nabla^\top |\nabla u|}{|\nabla u|} + \frac{1}{2} X^\top \right|^2 + \frac{|\mathring{\mathrm{h}}|^2}{2} \right] d\mathcal{H}^2 \Bigg\}\, d\tau\,.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

现在注意到，u 的每个正则水平集的欧拉示性数都小于或等于 2。这由步骤 4 得出；考虑到 M 是可定向的，u 的正则水平集的每个连通分支本身也是可定向的。因此，Gauss–Bonnet 定理意味着

$$
4\pi - \int_{\Sigma_\tau} \frac{\mathrm{R}^{\Sigma_\tau}}{2}\, d\mathcal{H}^2 \geqslant 0\,,
$$

对每个 $\tau \in \mathcal{T}$。于是，定理 1.4 的结论由等式（3.6）得出，因为

$$
\mathrm{R} + 2\,\mathrm{div}(X) - \frac{1}{2}|X|^2 = \mathrm{R}_X^{(k)} + \frac{k+2}{2k}|X|^2 \tag{3.7}
$$

且 $\mathrm{R}_X^{(k)} \geqslant 0$，根据假设。 □

注 3.1. 我们注意到，根据相同的论证，在定理 1.4 的假设（a）和（b）下，如果函数 u 是取值于区间（τ_1，τ_2）$\subseteq$（$-\infty$，1）内的 $\mathcal{L}_X u = 0$ 的任意解，那么由公式 (1.2) 在区间 $I =$（$1/$（$1-\tau_1$）$1/$（$1-\tau_2$））上定义的函数 F 在集合上单调不减

$$\mathcal{T} = \{t \in I : 1 - 1/t \text{ is a regular value of } u\}.$$

结合定理1.4 以及关于格林函数在极点附近渐近行为的标准事实，可得到以下刚性结论。

命题3.2。 在定理 *1.4*的假设下，如果函数 F 在集合 $\mathcal{T}$（定义见公式(3.5)）上为常数，则：

(a) 如果 $R_X^{(k)} = R + 2\,div(X) - (1 + 1/k)\,|X|^2 \geqslant 0$，对于某个 $k \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$，则 (M, g) 与 $(\mathbb{R}^3, g_{\mathrm{euc}})$ 等距。*(b)* 如果 $R_X^{(-2)} = R + 2\,div(X) - (1/2)\,|X|^2 \geqslant 0$，则 (M, g) 与 $(\mathbb{R}^3, g_{\mathrm{euc}})$ 共形等距。

证明。 根据第2节的步骤 1，算子 $\mathcal{L}_X$ 存在唯一的正的极小格林函数 $\mathcal{G}_o^{B_{r_1}(o)}$，其极点位于 o，且定义在开球 $B_{r_1}(o)$ 内，对任意 $r_1 < \mathrm{inj}(o)$ 均成立。还可知，对于任意以 o 为中心、定义在球 $B_{r_1}(o)$ 上的正规坐标系（x^1, x^2, x^3），渐近行为

$$|\mathcal{G}_o - 1/(4\pi r)| = o(r^{-1}) \qquad \text{and} \qquad |\nabla \mathcal{G}_o^{B_{r_1}(o)} + (\nabla r/4\pi r^2)| = o(r^{-2})$$

成立（这里，r 表示到极点 $o \in M$ 的距离函数）。现在，由于 $\mathcal{G}_o = \mathcal{G}^{B_{r_1}}(o)_o \qquad + w$，其中 w 是一个光滑函数，在 $B_{r_1}(o)$ 内满足 $\mathcal{L}_X w = 0$ 以及适当的边界条件，因此函数 $\mathcal{G}_o$ 在点 o 的某个邻域内没有临界点。因此，存在一个最大时间 $T > 0$，使得 $\nabla u \neq 0$ 在 $u^{-1}(-\infty, 1 - 1/T)$ 内成立。于是，函数 F 在区间 $(0, T)$ 上连续可微；又根据假设，F 在集合 $\mathcal{T}$ 上为常数，因此在 $(0, T)$ 内有 $F' \equiv 0$。由此，对于每个 $t \in (0, T)$，公式 (3.6) 中所有非负被加项都必须为零。现在，我们需要区分情形 (a) 和 (b)。在情形 (a) 下，由等式 (3.7)，以与 [3, 推论 1.3] 相同的方式即可得到结论。值得注意的是，X 在整个 M 上都为零。在情形 (b) 下，对于每个 $t \in (0, T)$，公式 (3.6) 中所有非负被加项都必须为零，这一结果意味着

$$X = -\nabla \log\left(\frac{|\nabla u|^2}{(1-u)^4}\right) \tag{3.8}$$

在开集 $u^{-1}(-\infty, 1 - 1/T)$ 中。若 $T < +\infty$，则存在 $p \in \Sigma_T$，使得 $\nabla u(p) = 0$。我们考虑 $\gamma : [0, \ell] \to M$ 一条由弧长参数化、从 o 到 p 且满足 $\gamma((0, \ell)) \subseteq u^{-1}(-\infty, 1 - 1/T)$ 的光滑曲线。令 f 为函数，其定义为

$$\widetilde{f}(t) = -\log\left(\frac{|\nabla u|^2}{(1-u)^4}\right)(\gamma(t))$$

对每个 $t \in (0, \ell]$。我们注意到

$$\widetilde{f}(\ell - \varepsilon) - \widetilde{f}(\ell/2) = \int_{\ell/2}^{\ell-\varepsilon} \widetilde{f}'(t)\,dt = \int_{\ell/2}^{\ell-\varepsilon} g(X(\gamma(t)), \gamma'(t))\,dt,$$

由此得到

$$|\widetilde{f}(\ell - \varepsilon)| \leqslant |\widetilde{f}(\ell/2)| + \ell \sup_M |X| < \infty,$$

~ 对任意 $\varepsilon \in (0, \ell/2)$ 均成立。这不可能，因为当 $t \to \ell^-$ 时，$f(t) \to +\infty$，这是由于$\nabla u(p) = 0$。因此，$T = +\infty$, u 没有临界点，而 X 是函数 f 的梯度，该函数定义为

$$f = -\log\left(\frac{|\nabla u|^2}{(1-u)^4}\right)$$

上 $M \setminus \{o\}$。注意，由于 X 是整个 M 上的光滑向量场，且 $f(p) \to 0$ 作为$p \to o$，等式（3.8）还意味着 f 在整个 M上光滑。由于 $|\nabla u| \neq 0$ 处处成立，所有

的水平集 u 都是正则的，且彼此微分同胚。更准确地说，由于等式（3.6）中的 Gauss–Bonnet 项消失，它们都与一个 2-球面微分同胚，并且 M 与 $\mathbb{R}^3$微分同胚。此外，度量 g 可以在 $M \setminus \{o\}$ 上写为

$$g = \frac{du \otimes du}{|\nabla u|^2} + g_{\alpha\beta}(u,\vartheta)\, d\vartheta^\alpha \otimes d\vartheta^\beta ,$$

其中 $g_{\alpha\beta}(u, \vartheta)\, d\vartheta^\alpha \otimes d\vartheta^\beta$ 表示由 g 在 u的水平集上诱导的度量。利用水平集的无迹第二基本形式为零这一事实，即不等式（3.6），以及

$$\mathrm{H} = \frac{2|\nabla u|}{1-u} + g(\nabla f, \nu) ,$$

事实证明，系数 $g_{\alpha\beta}(u, \vartheta)$ 满足以下一阶偏微分方程组 s

$$\partial_u g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}\partial_u f = 2\, g_{\alpha\beta}/(1-u) ,$$

因此，

$$e^{-f(u,\vartheta)} g_{\alpha\beta}(u,\vartheta)\, d\vartheta^\alpha \otimes d\vartheta^\beta = (1-u)^{-2} c_{\alpha\beta}(\theta)\, d\vartheta^\alpha \otimes d\vartheta^\beta .$$

因此，我们有

$$\widetilde{g} = e^{-f} g = \frac{|\nabla u|^2}{(1-u)^4}\left(\frac{du \otimes du}{|\nabla u|^2} + g_{\alpha\beta}(u,\vartheta)\, d\vartheta^\alpha \otimes d\vartheta^\beta\right) = \frac{du \otimes du}{(1-u)^4} + \frac{c_{\alpha\beta}(\theta)}{(1-u)^2}\, d\vartheta^\alpha \otimes d\vartheta^\beta .$$

注意到，公式（3.6）中项 $\mathrm{R} + 2\mathrm{div}(X) - (1/2)\,|X|^2$ 的消失意味着，˜度量 $\widetilde{g}$ 的标量曲率 R 处处为零。因此，考虑函数$t = 1/(1-u)$ 并注意到度量 $\widetilde{g}$ 可写成

$$\widetilde{g} = dt \otimes dt + t^2 c_{\alpha\beta}(\theta)\, d\vartheta^\alpha \otimes d\vartheta^\beta ,$$

函数 t 关于度量 $c_{\alpha\beta}(\theta)\, d\vartheta^\alpha \otimes d\vartheta^\beta$的每个水平集的标量曲率恒等于 2。由于函数 t的每个水平集也是函数 u的水平集，且均与 2–球面微分同胚，因此我们得出结论：它们均与 $(\mathbb{S}^2, g_{\mathbb{S}^2})$ 等距，而 $(M, \widetilde{g})$ 与 $(\mathbb{R}^3, g_{\mathrm{eucl}})$ 等距。□

4. 定理1.3的证明

在第 2 节中，我们证明了在一个完备的渐近平坦 3 维流形 (M, g) 上，在假设 X 是 M 的光滑可容许向量场的条件下，算子 $\mathcal{L}_X = \Delta - (1/2)\,\nabla_X$ 存在一个极点位于某点 $o \in M$ 的最小正格林函数 $\mathcal{G}_o$，其衰减阶为 $\tau \in (1/2, 1)$。我们还证明了：

- 对于以 o 为中心、定义在开球 $B_{r_o}(o)$ 上的任意正规坐标系 (x^1, x^2, x^3)，存在常数 $b(0)_{\,i_1}$, $a(1)$, $c(1)_{\,i_1 i_2}$, $e(1)_{\,i_1 i_2 i_3 i_4}$, $b(2)_{\,i_1}$, $d(2)_{\,i_1 i_2 i_3}$, $f(2)_{\,i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}$, $a(3)$, $c(3)_{\,i_1 i_2}$,$e(3)_{\,i_1 i_2 i_3 i_4}$, $h(3)_{\,i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6}$ 和 $l(3)_{\,i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7 i_8}$，它们取决于度量 g 的系数和向量场 X；并且存在函数 $f \in C^2(M)$，使得

$$\begin{aligned}
4\pi\mathcal{G}_o = {} & \frac{1}{|x|} + b^{(0)}_{i_1}\frac{x^{i_1}}{|x|} + |x|\left[a^{(1)} + c^{(1)}_{i_1 i_2}\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2} + e^{(1)}_{i_1 i_2 i_3 i_4}\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}x^{i_4}}{|x|^4}\right] \\
& + |x|^2\left[b^{(2)}_{i_1}\frac{x^{i_1}}{|x|} + d^{(2)}_{i_1 i_2 i_3}\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}}{|x|^3} + f^{(2)}_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}x^{i_4}x^{i_5}}{|x|^5}\right] \\
& + |x|^3\left[a^{(3)} + c^{(3)}_{i_1 i_2}\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2} + e^{(3)}_{i_1 i_2 i_3 i_4}\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}x^{i_4}}{|x|^4} + h^{(3)}_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6}\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}x^{i_4}x^{i_5}x^{i_6}}{|x|^6}\right. \\
& \left. + l^{(3)}_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7 i_8}\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}x^{i_4}x^{i_5}x^{i_6}x^{i_7}x^{i_8}}{|x|^8}\right] + f,
\end{aligned}$$

在 $B_{r_o/4}(o)$中。因此可得

$$\left|\mathcal{G}_o - \frac{1}{4\pi r}\right| = o(r^{-1}), \tag{4.1}$$

$$\left|\nabla\mathcal{G}_o + \frac{1}{4\pi r^2}\nabla r\right| = o(r^{-2}), \tag{4.2}$$

$$\left|\nabla d\mathcal{G}_o - \frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{2}{r}\,dr\otimes dr - \nabla dr\right)\right| = o(r^{-3}). \tag{4.3}$$

其中， r 表示到极点 o的距离。特别地，函数 $\mathcal{G}_o$ 在点 o的某个邻域内没有临界点。

◦ 对于任意渐近平坦坐标图 $(U,\ (x^1,\ x^2,\ x^3))$ ，在$(M,\ g)$上存在一个正 ive

常数 A 使得

$$\mathcal{G}_o = \frac{A}{|x|} + O_2(|x|^{-1-\tau}). \tag{4.4}$$

因此，函数 $\mathcal{G}_o$ 在“趋于无穷远处”时也没有临界点。

In S节3中，我们考察了函数 $u = 1 - 4\pi\mathcal{G}_o$，定义了函数 $F\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ as

$$F(t) = 4\pi t + t^3 \int_{\{u=1-\frac{1}{t}\}} |\nabla u|^2\, d\mathcal{H}^2 - t^2 \int_{\{u=1-\frac{1}{t}\}} |\nabla u|\,\mathrm{H}\, d\mathcal{H}^2 + t^2 \int_{\{u=1-\frac{1}{t}\}} g(X,\nabla u)\, d\mathcal{H}^2,$$

其中，H 是水平集 $\{u = 1 - 1/t\} \setminus \{|\nabla u| = 0\}$ 正则部分上的平均曲率，其计算相对于 $\nu = \nabla u/|\nabla u|$ ，并且证明了

$$0 < s \leqslant t < +\infty \quad \text{and} \quad 1 - 1/s, 1 - 1/t \text{ are regular values of } u \quad \Longrightarrow \quad F(s) \leqslant F(t),$$

if

$$\mathrm{R}_X^{(k)} = \mathrm{R} + 2\,\mathrm{div}(X) - (1 + 1/k)\,|X|^2 \geqslant 0,$$

对于某个 $k \in \mathbb{R} \setminus (-2,\ 0]$，且第二积分同调 $H_2(M;\ \mathbb{Z})$不包含任何球面类。

结合这些结果，我们推知

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) \leqslant \lim_{t\to+\infty} F(t). \tag{4.5}$$

现在我们分析这两个极限。

引理 4.1。 在条件 (4.1)、(4.2)、(4.3) 以及假设 $\mathcal{G}_o \to 0$ 在无穷远处成立时，我们有

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = 0.$$

证明。首先回顾一下，令 $u(o) = -\infty$，函数 $u\colon M \to [-\infty, 1)$ 是连续且适当的，因为 $u \to 1$ 在无穷远处。这个事实与条件（4.2）共同意味着，存在某个 $t \in (0,\ t_0)$ ，使得开集 $\{u < 1 - 1/t_0\}$ 不包含 u 的临界点。因此， $(0,\ t_0) \subseteq \mathcal{T}$，其中集合 $\mathcal{T}$ 由公式（3.5）定义。于是， F 在所考虑的区间上连续可微且单调不减。这种单调性保证了当 $t \to 0^+$ 时， $F(t)$ 的极限存在。我们将此极限记为 ℓ ，为计算它，我们考虑函数

$$\mathcal{F}(t) = 2\pi t^2 + \int_{\{u<1-\frac{1}{t}\}} \left[\frac{|\nabla u|^2}{(1-u)^3} + \frac{g(\nabla|\nabla u|,\nabla u)}{(1-u)^2} + \frac{1}{2}\frac{g(X,\nabla u)}{(1-u)^2}\right]\frac{|\nabla u|}{(1-u)^2}\, d\mu$$

对每个 $t \in (0,\ t_0)$。首先，我们证明函数 $\mathcal{F}$ 是定义良好的。此外，下面的论证还将推出 $\lim_{t\to 0^+} \mathcal{F}(t)/t = 0$。我们注意到，衰减条件(4.1)、(4.2)和(4.3)给出

$$\frac{C_1}{r} \leqslant 1 - u \leqslant \frac{C_2}{r}, \qquad \frac{C_3}{r^2} \leqslant |\nabla u| \leqslant \frac{C_4}{r^2}, \qquad |\nabla du| \leqslant \frac{C_5}{r^3}, \tag{4.6}$$

对某些正常数 $C_i > 0, i = 1, \ldots\ldots, 5$。因此，开集 $\{u < 1 - 1/t\}$ 包含于球 $B_{C_2 t}(o)$中，并且

$$\frac{|\nabla u|}{(1-u)^2} \leqslant \frac{C_4}{C_1^2}\,, \qquad \left|\frac{g(\nabla|\nabla u|, \nabla u)}{(1-u)^3}\right| \leqslant \frac{C_5}{C_1^3}\,, \qquad \left|\frac{g(X, \nabla u)}{(1-u)^2}\right| \leqslant \frac{C_4}{C_1^2}\,|X|\,.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\{u<1-\frac{1}{t}\}} \left|\frac{|\nabla u|^2}{(1-u)^3} + \frac{g(\nabla|\nabla u|, \nabla u)}{(1-u)^2} + \frac{1}{2}\frac{g(X, \nabla u)}{(1-u)^2}\right| \frac{|\nabla u|}{(1-u)^2}\, d\mu \\
&\qquad \leqslant \int_{B_{C_2 t}(o)} \left|\frac{|\nabla u|^2}{(1-u)^3} + \frac{g(\nabla|\nabla u|, \nabla u)}{(1-u)^2} + \frac{1}{2}\frac{g(X, \nabla u)}{(1-u)^2}\right| \frac{|\nabla u|}{(1-u)^2}\, d\mu \\
&\qquad \leqslant \left(\frac{C_4^2}{C_1^4} + \frac{C_5}{C_1^3}\right)\frac{C_4}{C_1^2} \int_{B_{C_2 t}(o)} (1-u)\, d\mu + \frac{C_4^2}{C_1^4}\left(\sup_{B_{C_2 t_0}(o)} |X|\right) \mathrm{Vol}\big(B_{C_2 t}(o)\big)\,. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

现在，估计 $\mathrm{Vol}\big(B_r(o)\big) = \frac{4}{3}\pi r^3 + O(r^5)$ 和 $\mathrm{Area}\big(\partial B_r(o)\big) = 4\pi r^2 + O(r^4)$ 推出

$$\mathrm{Vol}\big(B_r(o)\big) \leqslant \frac{4}{3} C_6 \pi r^3 \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Area}\big(\partial B_r(o)\big) \leqslant 4 C_7 \pi r^2\,, \qquad (4.8)$$

存在某些正的常数 C_6，$C_7 > 0$ 并且对于任意 $r \in (0, r_0)$，其中 $r_0 > 0$ 充分小。因此，将余面积公式应用于不等式（4.7）并使用估计（4.6）和（4.8），我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\{u<1-\frac{1}{t}\}} \left|\frac{|\nabla u|^2}{(1-u)^3} + \frac{g(\nabla|\nabla u|, \nabla u)}{(1-u)^2} + \frac{1}{2}\frac{g(X, \nabla u)}{(1-u)^2}\right| \frac{|\nabla u|}{(1-u)^2}\, d\mu \\
&\qquad \leqslant 2\pi C_2^3 C_7 \left(\frac{C_4^2}{C_1^4} + \frac{C_5}{C_1^3}\right)\frac{C_4}{C_1^2}\, t^2 + C_6 C_2^3 \pi \left(\sup_{B_{C_2 t_0}(o)} |X|\right) \frac{4 C_4^2}{3 C_1^4}\, t^3\,,
\end{aligned}$$

对于所有 $t \in (0,\ t_0)$，必要时可取更小的 $t_0 > 0$。引入函数$\mathcal{F}(t)$的原因在于

$$\mathcal{F}(t) = \int_0^t F(\tau)\, d\tau\,,$$

根据余面积公式。因此，由于 F 在集合 $\mathcal{T}$ 上连续可微，可知 $\mathcal{F}$ 属于 C^2 类，在区间 $(0, t_0)$ 上，并且 $\mathcal{F}'(t) = F(t)$ 对于每个 $t \in (0, t_0)$。然后，[45, 定理 II] 中的 de l'Hˆopital 法则的广义版本给出

$$\ell = \limsup_{t\to 0^+} F(t) \geqslant \limsup_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{F}(t)}{t} = 0 = \liminf_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{F}(t)}{t} \geqslant \liminf_{t\to 0^+} F(t) = \ell\,,$$

这意味着 $\ell = 0$。 □

根据公式（4.4），存在一个正常数 B 使得

$$u = 1 - \frac{B}{|x|} + O_2(|x|^{-1-\tau})\,, \qquad (4.9)$$

当 $u = 1 - 4\pi\mathcal{G}_o$ 时。

引理 4.2。 在定理 *1.3*的假设下，有

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \leqslant 8\pi m_X / B\,. \qquad (4.10)$$

证明。 为了证明这一结论，我们将采用与 [37, 节 3], 类似的方法，但也会用到 [35, 节 2]中的一些结果。原因在于，我们需要以不同于 $\{u = 1 - (1/t)\}$的方式，对足够大的 $t \in (0, +\infty)$ 对应的等值集取得面积估计；在 [37, 节 3], 中，我们使用了函数 u所满足方程的散度形式。首先注意到，存在一个 $T_0 \in (0, +\infty)$ 使得集合 $\{u \geqslant 1 - (1/T_0)\}$

包含于 U 中，其中 $\big(U,\ (x^1,x^2,x^3)\big)$ 是 (M,g) 的一个渐近平坦坐标图，我们从现在起固定该坐标图。若将 T_0 取得更大，则由恒等式 (4.4) 可知，集合 $\{u \geqslant 1 - (1/T_0)\}$不含 u 的临界点。现在注意到，对于满足$t \in [T_0, +\infty)$的所有水平集 $\{u = 1 - (1/t)\}$，它们都是连通的。事实上，由于 M 有一个单端（因为它是渐近平坦的），每个满足 $t \in \mathcal{T}$ 的开集 $\{u > 1 - (1/t)\}$都是连通的。因此，这些水平集的连通性随即成立，因为满足 $t \in [T_0, +\infty)$ 的 $\{u = 1 - (1/t)\}$的连通分支数，与 $\{u = 1 - (1/T_0)\}$的连通分支数相同，而后者又等于 $\{u > 1 - (1/T_0)\}$的连通分支数。此外，由假设 (1.1) 和渐近展开 (4.9)，我们可得

$$|\nabla u| = \frac{B}{|x|^2} + O\big(|x|^{-2-\tau}\big)\,, \tag{4.11}$$

$$(\nabla du)_{ij} = -\frac{B}{|x|^3}\left(\frac{3}{|x|^2}x^i x^j - \delta_{ij}\right) + O\big(|x|^{-3-\tau}\big)\,.$$

Th因此，可能需要将 T_0 扩大，此时对于任意 t，$\{u = 1 - 1/t\}$ 的平均曲率 H $\in [T_0, +\infty)$，相对于单位法向量 $\nu = \nabla u/|\nabla u|$ 计算，满足

$$\mathrm{H} = \frac{2}{|x|} + O(|x|^{-1-\tau})\,. \tag{4.12}$$

这意味着水平集 $\{u = 1 - 1/t\}$ 与坐标球面一样，都是外面积极小的。结合这一事实与估计

$$|x| = Bt + O(t^{1-\tau}) \tag{4.13}$$

在 $\{u = 1 - 1/t\}$ 上，当 $t \to +\infty$ 时，我们可以得出

$$\mathrm{Area}\big(\{u = 1 - 1/t\}\big) = 4\pi B^2 t^2 + O(t^{2-\tau}) \tag{4.14}$$

（见 [35, 第 357–358]页）。

现在，我们利用这一面积估计来证明，函数 F 的下述等价形式中的最后一项

$$F(t) = \frac{t}{4}\left(16\pi - \int\limits_{\{u=1-\frac{1}{t}\}} \mathrm{H}^2\, d\mathcal{H}^2 + 4\int\limits_{\{u=1-\frac{1}{t}\}} \frac{g(X,\nabla u)}{(1-u)}\, d\mathcal{H}^2\right) + \frac{t}{4}\int\limits_{\{u=1-\frac{1}{t}\}} \left(\frac{2|\nabla u|}{1-u} - \mathrm{H}\right)^2 d\mathcal{H}^2\,, \tag{4.15}$$

当 $t \to +\infty$ 时趋于零。事实上，估计式（4.9）、（4.11）和（4.12）给出

$$\frac{2|\nabla u|}{1-u} - \mathrm{H} = O(|x|^{-1-\tau})\,.$$

结合这一点与等式（4.13），由公式（4.14）可知，方程（4.15）中最后一项的积分具有如下形式：$O(t^{-2\tau})$，因此当 $t \to +\infty$ 时它趋于零，因为 $\tau > 1/2$。现在令

$$XM(t) = \frac{t}{4}\left(16\pi - \int\limits_{\{u=1-\frac{1}{t}\}} \mathrm{H}^2\, d\mathcal{H}^2 + 4\int\limits_{\{u=1-\frac{1}{t}\}} \frac{g(X,\nabla u)}{(1-u)}\, d\mathcal{H}^2\right)$$

并分析它在无穷远处的行为。为此，采用上划线或下标 e 来表示相对于渐近平坦坐标图 $\big(U,(x^1, x^2, x^3)\big)$中的欧几里得度量 e 计算的量较为方便，也就是说，$e = \delta_{ij}dx^i \otimes dx^j$。反之，我们约定，相对于度量 g 计算的量不加任何额外符号表示。此外，相对于 g 的协变导数记为 ∇，而符号 D 表示欧几里得协变导数。最后，我们用 γ 表示如下的 (0,2) 阶对称张量：

$$g - e = (g_{ij} - \delta_{ij})\, dx^i \otimes dx^j$$

并且我们注意到，根据公式（1.1），有

$$g^{ij} = \delta^{ij} - \gamma^{ij} + O(|x|^{-2\tau})\,,$$

其中 $\gamma^{ij} = \delta^{i\ell}\delta^{kj}\gamma_{k\ell}$。我们的首要任务是求出$\Sigma_t = \{u = 1 - 1/t\}$ 的平均曲率 H 关于其欧氏平均曲率 H 的展开。我们首先注意到

the 单位法向量 $\nu = \nabla u/|\nabla u|$与欧氏单位法向量 $\nu = \mathrm{D}u/|\mathrm{D}u|_e$ 之间通过 t 相关联 he formula

$$\nu^i = \Big(1 + \frac{\gamma(\overline{\nu},\overline{\nu})}{2}\Big)\,\overline{\nu}^i - \gamma^i_k\,\overline{\nu}^k + O(|x|^{-2\tau})\,,$$

其中 $\gamma^i_k = \delta^{ij}\gamma_{jk}$。由于平均曲率的计算方式为

$$\mathrm{H} = \big(g^{ij} - \nu^i\nu^j\big)\,\frac{(\nabla du)_{ij}}{|\nabla u|} \qquad \text{and} \qquad \overline{\mathrm{H}} = \big(\delta^{ij} - \overline{\nu}^i\overline{\nu}^j\big)\,\frac{(\mathrm{D}du)_{ij}}{|\mathrm{D}u|_e}\,,$$

分别注意到 $|\mathrm{D}du|_e/|\mathrm{D}u|_e = O(|x|^{-1})$通过展开式（4.9）并令 $\eta^{ij} = \delta^{ij} - \nu^i\nu^j$，便得到

$$\mathrm{H} = \Big(1 + \frac{\gamma(\overline{\nu},\overline{\nu})}{2}\Big)\,\overline{\mathrm{H}} - \eta^{ij}\Big(\partial_j g_{ik} - \frac{1}{2}\partial_k g_{ij}\Big)\overline{\nu}^k - \eta^{ik}\eta^{j\ell}\gamma_{k\ell}\frac{(\mathrm{D}du)_{ij}}{|\mathrm{D}u|_e} + O(|x|^{-1-2\tau})\,,$$

这意味着

$$\mathrm{H}^2 = \big(1 + \gamma(\overline{\nu},\overline{\nu})\big)\,\overline{\mathrm{H}}^2 - 2\overline{\mathrm{H}}\,\eta^{ij}\Big(\partial_j g_{ik} - \frac{1}{2}\partial_k g_{ij}\Big)\overline{\nu}^k - 2\overline{\mathrm{H}}\,\eta^{ik}\eta^{j\ell}\gamma_{k\ell}\frac{(\mathrm{D}du)_{ij}}{|\mathrm{D}u|_e} + O(|x|^{-2-2\tau})\,.$$

As Σ_t 上由 g 诱导的度量可写为 $g - \frac{du\otimes du}{|\nabla u|^2}$，面积元可表示为 ed as

$$d\mathcal{H}^2 = \Big[1 + \frac{1}{2}\,\eta^{ij}\gamma_{ij} + O(|x|^{-2\tau})\Big]\,d\overline{\mathcal{H}}^2\,. \tag{4.16}$$

综上，“Willmore 能量被积函数”满足

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^2\,d\mathcal{H}^2 = \Big[&\Big(1 + \gamma(\overline{\nu},\overline{\nu}) + \frac{\eta^{ij}\gamma_{ij}}{2}\Big)\,\overline{\mathrm{H}}^2 - 2\overline{\mathrm{H}}\,\eta^{ij}\Big(\partial_j g_{ik} - \frac{1}{2}\partial_k g_{ij}\Big)\overline{\nu}^k\\ &- 2\overline{\mathrm{H}}\,\eta^{ik}\eta^{j\ell}\gamma_{k\ell}\frac{(\mathrm{D}du)_{ij}}{|\mathrm{D}u|_e} + O(|x|^{-2-2\tau})\Big]\,d\overline{\mathcal{H}}^2\,.\end{aligned} \tag{4.17}$$

现在，再次利用公式（4.9），我们得到

$$\overline{\nu}^i = \frac{x^i}{|x|} + O(|x|^{-\tau})\,, \tag{4.18}$$

$$\frac{(\mathrm{D}du)_{ij}}{|\mathrm{D}u|_e} = \frac{1}{|x|}\Big(\delta_{ij} - 3\,\delta_{ik}\delta_{j\ell}\overline{\nu}^k\,\overline{\nu}^\ell + O(|x|^{-\tau})\Big)\,,$$

这意味着

$$\overline{\mathrm{H}} = \frac{2}{|x|}\big(1 + O(|x|^{-\tau})\big) \tag{4.19}$$

进而，

$$2\overline{\mathrm{H}}\,\eta^{ik}\eta^{j\ell}\gamma_{k\ell}\frac{(\mathrm{D}du)_{ij}}{|\mathrm{D}u|_e} = \frac{4}{|x|^2}\eta^{k\ell}\gamma_{k\ell} + O(|x|^{-2-\tau})\,. \tag{4.20}$$

将上述最后两个等式代入公式（4.17），得到

$$\mathrm{H}^2\,d\mathcal{H}^2 = \Big[\overline{\mathrm{H}}^2 + \frac{4}{|x|^2}\gamma(\overline{\nu},\overline{\nu}) - \frac{2}{|x|^2}\eta^{ij}\gamma_{ij} - \frac{4}{|x|}\eta^{ij}\Big(\partial_j g_{ik} - \frac{1}{2}\partial_k g_{ij}\Big)\overline{\nu}^k + O(|x|^{-2-2\tau})\Big]\,d\overline{\mathcal{H}}^2\,.$$

接下来，我们断言

$$\frac{4}{|x|^2}\gamma(\overline{\nu},\overline{\nu}) - \frac{2}{|x|^2}\eta^{ij}\gamma_{ij} = \frac{2}{|x|}\big(\eta^{ij}\partial_i g_{jk}\overline{\nu}^k - \overline{\mathrm{div}}_{\Sigma_t}\omega^\top\big) + O(|x|^{-2-2\tau})\,, \tag{4.21}$$

其中，ω 是由 $\omega = \gamma_{jk}\nu^k dx^j$ 定义的微分 1–形式，$\omega^\top$ 表示其切向分量。为了证明这一结论，我们首先注意到

$$\omega = \omega^\top + \omega(\overline{\nu})\frac{du}{|\mathrm{D}u|_e} = \omega^\top + \gamma(\overline{\nu},\overline{\nu})\frac{du}{|\mathrm{D}u|_e} \qquad \text{and} \qquad \partial_i\overline{\nu}^k = \eta^{k\ell}\frac{(\mathrm{D}du)_{i\ell}}{|\mathrm{D}u|_e}\,.$$

利用展开式（4.19）和（4.20），我们可以观察到

$$\begin{aligned}\eta^{ij}\partial_i g_{jk}\overline{\nu}^k = \eta^{ij}\partial_i\gamma_{jk}\overline{\nu}^k &= \eta^{ij}\partial_i\omega_j - \eta^{ik}\eta^{j\ell}\gamma_{k\ell}\frac{(\mathrm{D}du)_{ij}}{|\mathrm{D}u|_e}\\ &= \overline{\operatorname{div}}\,\omega - \partial_i\omega_j\overline{\nu}^i\overline{\nu}^j - \frac{1}{|x|}\eta^{ij}\gamma_{ij} + O(|x|^{-2-2\tau})\\ &= \overline{\operatorname{div}}_{\Sigma_t}\omega^\top + \gamma(\overline{\nu},\overline{\nu})\overline{\mathrm{H}} - \frac{1}{|x|}\eta^{ij}\gamma_{ij} + O(|x|^{-2-2\tau})\\ &= \overline{\operatorname{div}}_{\Sigma_t}\omega^\top + \frac{2}{|x|}\gamma(\overline{\nu},\overline{\nu}) - \frac{1}{|x|}\eta^{ij}\gamma_{ij} + O(|x|^{-2-2\tau}),\end{aligned}$$

由此得到公式（4.21）。因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^2\,d\mathcal{H}^2 &= \left[\overline{\mathrm{H}}^2 - \frac{2}{|x|}\overline{\operatorname{div}}_{\Sigma_t}\omega^\top + \frac{2}{|x|}\eta^{ij}\partial_i g_{jk}\overline{\nu}^k - \frac{4}{|x|}\eta^{ij}\partial_j g_{ik}\overline{\nu}^k + \frac{2}{|x|}\eta^{ij}\partial_k g_{ij}\overline{\nu}^k + O(|x|^{-2-2\tau})\right] d\overline{\mathcal{H}}^2\\ &= \left[\overline{\mathrm{H}}^2 - \frac{2}{|x|}\overline{\operatorname{div}}_{\Sigma_t}\omega^\top - \frac{2}{|x|}\delta^{ij}\big(\partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}\big)\overline{\nu}^k + O(|x|^{-2-2\tau})\right] d\overline{\mathcal{H}}^2 .\end{aligned} \tag{4.22}$$

根据等式（4.13，公式（4.22）化为

$$\mathrm{H}^2\,d\mathcal{H}^2 = \left[\overline{\mathrm{H}}^2 - \frac{2}{Bt}\overline{\operatorname{div}}_{\Sigma_t}\omega^\top - \frac{2}{Bt}\delta^{ij}\big(\partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}\big)\nu^k + O(t^{-2-2\tau})\right] d\mathcal{H}^2 \quad \text{在 } \Sigma_t \text{ 上。} \tag{4.23}$$

现在，我们注意到

$$\frac{g(X,\nabla u)}{(1-u)}\,d\mathcal{H}^2 = \left[\delta_{ij}X^i\frac{x^j}{|x|^2} + O(|x|^{-2-2\tau})\right] d\overline{\mathcal{H}}^2 = \left[\frac{1}{|x|}\delta_{ij}X^i\overline{\nu}^j + O(|x|^{-2-2\tau})\right] d\overline{\mathcal{H}}^2 .$$

由估计式（4.9）、（4.16）、（4.18）以及事实 $X = O\left(|x|^{-\tau-1}\right)$ 可知。与前面类似，等式（4.13）于是给出

$$\frac{4g(X,\nabla u)}{(1-u)}\,d\mathcal{H}^2 = \left[\frac{4}{Bt}\delta_{ij}X^i\overline{\nu}^j + O(t^{-2-2\tau})\right] d\overline{\mathcal{H}}^2 \quad \text{on } \Sigma_t . \tag{4.24}$$

将等式（4.14）代入上述恒等式（4.23）和（4.24），我们得到

$$\begin{aligned}XM(t) &= \frac{t}{4}\left(16\pi - \int_{\Sigma_t}\mathrm{H}^2\,d\mathcal{H}^2 + 4\int_{\Sigma_t}\frac{g(X,\nabla u)}{(1-u)}\,d\mathcal{H}^2\right)\\ &= \frac{t}{4}\left(16\pi - \int_{\Sigma_t}\overline{\mathrm{H}}^2\,d\overline{\mathcal{H}}^2\right) + \frac{1}{2B}\int_{\Sigma_t}\overline{\operatorname{div}}_{\Sigma_t}\omega^\top\,d\overline{\mathcal{H}}^2\\ &\quad + \frac{1}{2B}\left(\int_{\Sigma_t}\delta^{ij}\big(\partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}\big)\overline{\nu}^k\,d\overline{\mathcal{H}}^2 + \int_{\Sigma_t}2\delta_{ij}X^i\overline{\nu}^j\,d\overline{\mathcal{H}}^2\right) + O(t^{1-2\tau}) .\end{aligned}$$

根据欧氏*Willmore*不等式（见 [46]），第一项非正；根据散度定理，第二项和为零；第三项趋于 $8\pi m_X/B$，当 $t\to+\infty$ 时（最后一项趋于零）。综上，我们有

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \leqslant \limsup_{t\to+\infty} XM(t) \leqslant 8\pi m_X/B .$$

□

注 4.3. 若渐近平坦坐标图 $\left(U,(x^1,x^2,x^3)\right)$ 中的 $g_{ij} = \delta_{ij} + O_3(|x|^{-\tau})$ 和 $X^i = O_2(|x|^{-1-\tau})$，那么可以证明函数 u 满足

$$u = 1 - \frac{B}{|x|} + O_3(|x|^{-1-\tau}) .$$

接着，依据 [35], 中的定理 2.1 证明思路，可以证明不等式（4.10）实际上是等式。

由引理4.1和4.2，根据不等式（4.5），我们得出 $m_X \geqslant 0$，因为 $B > 0$，因此定理 1.3 的第一部分得证。刚性部分直接由命题 3.2得出。

注 4.4. 定理 1.3 在对度量 g和向量场 X的衰减稍弱的假设下仍然成立。更确切地说，只要度量 g 属于$C^{1,-\tau}_{-}(M)$，且向量场 X属于 $C^{0,-1-\tau_0}_{\alpha_0}(M)$，其中 $\alpha, \alpha_0 \in (0,1)$ 且 $\tau, \tau_0 > 1/2$，结论仍然成立。

回忆一下，若光滑函数 u 在 M 上属于加权 *Hölder* 空间 $C^{k,\alpha}_{s}(M)$，则其加权范数

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}_{s}(M)} = \sum_{i=1}^{k} \sup_{M} |r^{i-s}\nabla^i u| + \sup_{x\in M}\left(r^{k+\alpha-s} \sup_{\substack{y,z\in B_{r/2}(x)\\ x\neq y}} \frac{|\nabla^k u(y) - \nabla^k u(z)|}{d(y,z)^\alpha}\right)$$

有限，其中 r 是定义在 M 上的光滑正函数，并且在渐近平坦坐标图中 $r = |x|$，量 $|\nabla^k u(y) - \nabla^k u(z)|$ 可通过沿连接 y 与 z的极小测地线进行平行移动来定义。若 E 是定义在 M 上的光滑向量丛，且配备丛度量和联络，则截面空间 $C^{k,\alpha}_{s}(E)$可以类似地定义。

注 4.5. 在定理 (2) 的假设下，若我们还假设 X 是 M 上的无散光滑向量场，且 $m_X = 0$，那么 (M, g) 与 $(\mathbb{R}^3, g_{\mathrm{eucl}})$等距。事实上，由命题 3.2的证明可知，$X$ 是函数的梯度

$$f = -\log\left(\frac{|\nabla u|^2}{(1-u)^4}\right),$$

它在整个 M 上光滑（注意，由公式（4.9）可知，它在无穷远处收敛）。因此，假设 X 散度为零，意味着函数 f除了有界之外，在整个 M上也是调和函数，因此由极大值原理可知它是常数。于是，X 处处为零，其余结论可由命题 (a) 中的点 3.2推出。

注 4.6. 定理 1.3 的类似结论也适用于带边流形。设 (M, g) 是一个连通、可定向、完备、渐近平坦的三维流形，其边界紧致且连通，并设 X 是 M 上的可容许光滑向量场。假设 $\mathrm{R} + 2\,\mathrm{div}(X) \in L^1(M, g)$, $\mathrm{R}^{(k)}_X = \mathrm{R} + 2\,\mathrm{div}(X) - (1 + 1/k)\,|X|^2 \geqslant 0$，对某个 $k \in \mathbb{R}\setminus(-2, 0]$, $H_2(M, \partial M; \mathbb{Z}) = 0$, 则,

$$16\pi - \int_{\partial M} \left[\mathrm{H} - g(X,\nu)\right]^2 d\mathcal{H}^2 \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad m_X \geqslant 0\,.$$

此外，以下陈述成立。

(1) 如果 $\mathrm{R}^{(k)}_X \geqslant 0$ 满足 $k \in \mathbb{R}\setminus[-2, 0]$ 和 $m_X = 0$，则 X 在 M 上消失，并且 (M, g) 与 $(\mathbb{R}^3, g_{\mathrm{eucl}})$ 去掉一个开球后的空间等距。(2) 如果 $\mathrm{R}^{(-2)}_X \geqslant 0$ 且满足 $m_X = 0$，则 X 是某个光滑函数的梯度，并且 (M, g) 与 $(\mathbb{R}^3, g_{\mathrm{eucl}})$ 去掉一个开球后的空间共形等距。

证明过程与定理1.3的证明相同。在本情形中，我们考虑由 u 给出的函数

$$\mathcal{L}_X u = 0 \text{ on } M, \qquad u = 0 \text{ at } \partial M \qquad \text{and} \qquad u \to 1 \text{ at infinity.}$$

因此，函数 F由公式（1.2）给出，定义在区间 $[1, +\infty)$ 上。它在集合 $\mathcal{T}$（见公式（3.5））上是非递减的，并将其在 $t = 1 \in \mathcal{T}$处的值与其在

$t \to +\infty$，我们发现存在一个正常数 B，使得

$$\begin{aligned} 8\pi m_X/B &\geqslant 4\pi + \int_{\partial M} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{H}^2 - \int_{\partial M} |\nabla u| \, \mathrm{H} \, d\mathcal{H}^2 + \int_{\partial M} g(X, \nabla u) \, d\mathcal{H}^2 \\ &= 4\pi + \int_{\partial M} \left[|\nabla u| - \frac{\mathrm{H}}{2} + \frac{1}{2} g\left(X, \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \right]^2 d\mathcal{H}^2 - \frac{1}{4} \int_{\partial M} \left[\mathrm{H} - g\left(X, \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \right]^2 d\mathcal{H}^2 \\ &\geqslant \frac{1}{4} \left[16\pi - \int_{\partial M} [\mathrm{H} - g(X, \nu)]^2 \, d\mathcal{H}^2 \right]. \end{aligned}$$

于是，我们得到与定理1.3相同的结论。

附录A. 第2.1 小节第 1 步中函数 w 的存在性证明：第 1 步：在去心开球 2.1上， $B_{r_o}(o) \setminus \{o\}$ 我们考虑函数

$$\begin{aligned} w = {} & \frac{1}{|x|} + b^{(0)}_{i_1} \frac{x^{i_1}}{|x|} + |x| \left(a^{(1)} + c^{(1)}_{i_1 i_2} \frac{x^{i_1} x^{i_2}}{|x|^2} + e^{(1)}_{i_1 \cdots i_4} \frac{x^{i_1} \cdots x^{i_4}}{|x|^4} \right) \\ & + |x|^2 \left(b^{(2)}_{i_1} \frac{x^{i_1}}{|x|} + d^{(2)}_{i_1 i_2 i_3} \frac{x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3}}{|x|^3} + f^{(2)}_{i_1 \cdots i_5} \frac{x^{i_1} \cdots x^{i_5}}{|x|^5} \right) \\ & + |x|^3 \left(a^{(3)} + c^{(3)}_{i_1 i_2} \frac{x^{i_1} x^{i_2}}{|x|^2} + e^{(3)}_{i_1 \cdots i_4} \frac{x^{i_1} \cdots x^{i_4}}{|x|^4} + h^{(3)}_{i_1 \cdots i_6} \frac{x^{i_1} \cdots x^{i_6}}{|x|^6} + l^{(3)}_{i_1 \cdots i_8} \frac{x^{i_1} \cdots x^{i_8}}{|x|^8} \right). \end{aligned}$$

确定常数 $b^{(0)}_{i_1}$，$a^{(1)}$, $c^{(1)}_{i_1 i_2}$, $e^{(1)}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$, $b^{(2)}_{i_1}$，$d^{(2)}_{i_1 i_2 i_3}$, $f^{(2)}_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}$, $a^{(3)}$, $c^{(3)}_{i_1 i_2}$, $e^{(3)}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$,$h^{(3)}_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6}$, $l^{(3)}_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7 i_8}$，使函数 w 满足

$$\mathcal{L}_X w = h \quad \text{on} \quad B_{r_o}(o) \setminus \{o\},$$

其中， h 是在去心开球 $B_{r_o}(o) \setminus \{o\}$ 上的光滑函数，它可在$B_{r_o}(o)$上延拓为 C^1，仍记作 h。我们首先注意到

$$\begin{aligned} \partial_{x^k} \frac{x^{i_1}}{|x|} &= \frac{1}{|x|} \left[\delta^{i_1}_k - \frac{x^{i_1} x^k}{|x|^2} \right], \\ \partial_{x^k} \frac{x^{i_1} x^{i_2}}{|x|^2} &= \frac{1}{|x|} \left[\delta^{i_1}_k \frac{x^{i_2}}{|x|} + \delta^{i_2}_k \frac{x^{i_1}}{|x|} - 2 \frac{x^{i_1} x^{i_2} x^k}{|x|^3} \right], \\ &\cdots\cdots \\ \partial_{x^k} \frac{x^{i_1} x^{i_2} \cdots x^{i_n}}{|x|^n} &= \frac{1}{|x|} \left[\delta^{i_1}_k \frac{x^{i_2} x^{i_3} \cdots x^{i_n}}{|x|^{n-1}} + \delta^{i_2}_k \frac{x^{i_1} x^{i_3} \cdots x^{i_n}}{|x|^{n-1}} + \cdots \right. \\ &\qquad \left. \cdots + \delta^{i_n}_k \frac{x^{i_1} x^{i_2} \cdots x^{i_{n-1}}}{|x|^{n-1}} - n \frac{x^{i_1} x^{i_2} \cdots x^{i_n} x^k}{|x|^{n+1}} \right], \end{aligned}$$

由此得到以下等式

$$\begin{aligned}\partial_{x^l}\partial_{x^k}\frac{x^{i_1}x^{i_2}\cdots x^{i_n}}{|x|^n} &= \frac{1}{|x|^2}\Bigg[\sum_{\substack{r,s=1\\ r\neq s}}^{n}\delta_k^{i_r}\delta_l^{i_s}\frac{x^{i_1}\cdots\widehat{x^{i_r}}\cdots\widehat{x^{i_s}}\cdots x^{i_n}}{|x|^{n-2}}\\ &\qquad -n\sum_{r=1}^{n}\delta_k^{i_r}\frac{x^{i_1}\cdots\widehat{x^{i_r}}\cdots x^{i_n}x^l}{|x|^n}-n\sum_{s=1}^{n}\delta_l^{i_s}\frac{x^{i_1}\cdots\widehat{x^{i_s}}\cdots x^{i_n}x^k}{|x|^n}\\ &\qquad -n\delta_{kl}\frac{x^{i_1}x^{i_2}\cdots x^{i_n}}{|x|^n}+n(n+2)\frac{x^{i_1}x^{i_2}\cdots x^{i_n}x^kx^l}{|x|^{n+2}}\Bigg],\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\partial_{x^k}\partial_{x^k}\frac{x^{i_1}x^{i_2}\cdots x^{i_n}}{|x|^n}=\frac{1}{|x|^2}\Bigg[\sum_{k=1}^{3}\sum_{\substack{r,s=1\\ r\neq s}}^{n}\delta_k^{i_r}\delta_k^{i_s}\frac{x^{i_1}\cdots\widehat{x^{i_r}}\cdots\widehat{x^{i_s}}\cdots x^{i_n}}{|x|^{n-2}}-n(n+1)\frac{x^{i_1}x^{i_2}\cdots x^{i_n}}{|x|^n}\Bigg].$$

By 在极点附近展开函数 X^i、 g^{ij} 和 Γ_{ij}^k，根据前面的等式，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\Big(\frac{1}{|x|}\Big) &= \frac{1}{2|x|^2}X^{i_1}(o)\frac{x^{i_1}}{|x|}+\frac{1}{|x|}\Big[\widehat{A}_{i_1i_2}\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2}+\widehat{B}_{i_1\cdots i_4}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_4}}{|x|^4}\Big]\\ &\quad+\Big[\widehat{C}_{i_1i_2i_3}\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}}{|x|^3}+\widehat{D}_{i_1\cdots i_5}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_5}}{|x|^5}\Big]\\ &\quad+|x|\Big[\widehat{E}_{i_1\cdots i_4}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_4}}{|x|^4}+\widehat{F}_{i_1\cdots i_6}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_6}}{|x|^6}\Big]\\ &\quad+\text{a function that admits a } C^1\text{–extension on } \overline{B}_{r_o}(o),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\widehat{A}_{i_1i_2} &= \frac{1}{2}\Big[\,\partial_{x^{i_1}}X^{i_2}(o)+2\delta^{ij}\partial_{x^{i_1}}\Gamma_{ij}^{i_2}(o)-\delta_{ij}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{ij}(o)\Big],\\ \widehat{B}_{i_1\cdots i_4} &= \frac{3}{2}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{i_3i_4}(o)\,,\\ \widehat{C}_{i_1i_2i_3} &= \frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{2}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}X^{i_3}(o)+\delta^{ij}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}\Gamma_{ij}^{i_3}(o)-\frac{1}{3}\delta_{ij}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}\partial_{x^{i_3}}g^{ij}(o)\Big],\\ \widehat{D}_{i_1\cdots i_5} &= \frac{1}{2}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}\partial_{x^{i_3}}g^{i_4i_5}(o)\,,\\ \widehat{E}_{i_1\cdots i_4} &= \frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{6}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}\partial_{x^{i_3}}X^{i_4}(o)+\frac{1}{3}\delta^{ij}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}\partial_{x^{i_3}}\Gamma_{ij}^{i_4}(o)+\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{ij}(o)\,\partial_{x^{i_3}}\Gamma_{ij}^{i_4}(o)\\ &\qquad-\frac{1}{12}\delta_{ij}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}\partial_{x^{i_3}}\partial_{x^{i_4}}g^{ij}(o)\Big],\\ \widehat{F}_{i_1\cdots i_6} &= \frac{1}{8}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}\partial_{x^{i_3}}\partial_{x^{i_4}}g^{i_5i_6}(o)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\Big(b_{i_1}^{(0)}\frac{x^{i_1}}{|x|}\Big) &= -\frac{2}{|x|^2}b_{i_1}^{(0)}\frac{x^{i_1}}{|x|}-\frac{1}{2|x|}\Big[b_i^{(0)}X^i(o)-b_{i_1}^{(0)}X^{i_2}(o)\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2}\Big]\\ &\quad+\Big[A_{i_1}^*\frac{x^{i_1}}{|x|}+B_{i_1i_2i_3}^*\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}}{|x|^3}+C_{i_1\cdots i_5}^*\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_5}}{|x|^5}\Big]\\ &\quad+|x|\Big[D_{i_1i_2}^*\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2}+E_{i_1\cdots i_4}^*\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_4}}{|x|^4}+F_{i_1\cdots i_6}^*\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_6}}{|x|^6}\Big]\\ &\quad+\text{a function that admits a } C^1\text{–extension on } \overline{B}_{r_o}(o),\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
A^*_{i_1} &= -\Big[\frac{1}{2}b^{(0)}_i\partial_{x^{i_1}}X^i(o)+\delta^{ij}b^{(0)}_k\partial_{x^{i_1}}\Gamma^k_{ij}(o)\Big],\\
B^*_{i_1i_2i_3} &= \Big[\frac{1}{2}\partial_{x^{i_1}}X^{i_2}(o)+\delta^{ij}\partial_{x^{i_1}}\Gamma^{i_2}_{ij}(o)-\frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{ij}(o)\Big]b^{(0)}_{i_3}-b^{(0)}_i\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{ii_3}(o)\,,\\
C^*_{i_1\cdots i_5} &= \frac{3}{2}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{i_3i_4}(o)b^{(0)}_{i_5}\,,\\
D^*_{i_1i_2} &= -\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}b^{(0)}_i\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}X^i(o)+\delta^{ij}b^{(0)}_k\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}\Gamma^k_{ij}(o)\Big],\\
E^*_{i_1\cdots i_4} &= \Big[\frac{1}{4}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}X^{i_3}(o)+\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}\Gamma^{i_3}_{ij}(o)-\frac{1}{6}\delta_{ij}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}\partial_{x^{i_3}}g^{ij}(o)\Big]b^{(0)}_{i_4}\\
&\quad-\frac{1}{3}b^{(0)}_i\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}\partial_{x^{i_3}}g^{ii_4}(o)\,,\\
F^*_{i_1\cdots i_6} &= \frac{1}{2}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}\partial_{x^{i_3}}g^{i_4i_5}(o)b^{(0)}_{i_6}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_X\Big[|x|\Big(a^{(1)}+c^{(1)}_{i_1i_2}\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2}+e^{(1)}_{i_1i_2i_3i_4}\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}x^{i_4}}{|x|^4}\Big)\Big]=\\
&=\frac{1}{|x|}\Big[2\Big(a^{(1)}+\sum_{i=1}^3c^{(1)}_{ii}\Big)+\widetilde{A}_{i_1i_2}\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2}-18e^{(1)}_{i_1\cdots i_4}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_4}}{|x|^4}\Big]\\
&\quad-\frac{1}{2}\Big\{\Big[a^{(1)}X^{i_1}(o)+X^i(o)\big(c^{(1)}_{ii_1}+c^{(1)}_{i_1i}\big)\Big]\frac{x^{i_1}}{|x|}+\widetilde{B}_{i_1i_2i_3}\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}}{|x|^3}-3X^{i_1}(o)e^{(1)}_{i_2\cdots i_5}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_5}}{|x|^5}\Big\}\\
&\quad+|x|\Big[\widetilde{C}_{i_1i_2}\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2}+\widetilde{D}_{i_1\cdots i_4}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_4}}{|x|^4}+\widetilde{E}_{i_1\cdots i_6}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_6}}{|x|^6}\\
&\qquad+\frac{15}{2}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{i_3i_4}(o)e^{(1)}_{i_5\cdots i_8}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_8}}{|x|^8}\Big]\\
&\quad+\text{一个在}B_{r_o}(o)\text{上存在}\,C^1\text{–延拓的函数},
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\widetilde{A}_{i_1i_2} &= 2\Big[-2c^{(1)}_{i_1i_2}+e^{(1)}_{iii_1i_2}+e^{(1)}_{ii_1ii_2}+e^{(1)}_{ii_1i_2i}+e^{(1)}_{i_1iii_2}+e^{(1)}_{i_1ii_2i}+e^{(1)}_{i_1i_2ii}\Big],\\
\widetilde{B}_{i_1i_2i_3} &= -X^{i_1}(o)c^{(1)}_{i_2i_3}+X^i(o)\big(e^{(1)}_{ii_1i_2i_3}+e^{(1)}_{i_1ii_2i_3}+e^{(1)}_{i_1i_2ii_3}+e^{(1)}_{i_1i_2i_3i}\big),\\
\widetilde{C}_{i_1i_2} &= \frac{1}{2}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{ij}(o)\big(\delta_{ij}a^{(1)}+2c^{(1)}_{ij}\big)-a^{(1)}\delta^{ij}\partial_{x^{i_1}}\Gamma^{i_2}_{ij}(o)-\delta^{ij}\partial_{x^{i_1}}\Gamma^k_{ij}(o)\big(c^{(1)}_{ki_2}+c^{(1)}_{i_2k}\big)\\
&\quad-\frac{1}{2}a^{(1)}\partial_{x^{i_1}}X^{i_2}(o)-\frac{1}{2}\partial_{x^{i_1}}X^k(o)\big(c^{(1)}_{ki_2}+c^{(1)}_{i_2k}\big),\\
\widetilde{D}_{i_1\cdots i_4} &= -\frac{1}{2}a^{(1)}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{i_3i_4}(o)-\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{i_3i}(o)\big(c^{(1)}_{ii_4}+c^{(1)}_{i_4i}\big)-\frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{ij}(o)c^{(1)}_{i_3i_4}\\
&\quad+\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{ij}(o)\big(e^{(1)}_{iji_3i_4}+e^{(1)}_{ii_3ji_4}+e^{(1)}_{ii_3i_4j}+e^{(1)}_{i_3iji_4}+e^{(1)}_{i_3ii_4j}+e^{(1)}_{i_3i_4ij}\big)\\
&\quad+\delta^{ij}\partial_{x^{i_1}}\Gamma^{i_2}_{ij}(o)c^{(1)}_{i_3i_4}-\delta^{ij}\partial_{x^{i_1}}\Gamma^k_{ij}(o)\big(e^{(1)}_{ki_2i_3i_4}+e^{(1)}_{i_2ki_3i_4}+e^{(1)}_{i_2i_3ki_4}+e^{(1)}_{i_2i_3i_4k}\big)\\
&\quad+\frac{1}{2}\partial_{x^{i_1}}X^{i_2}(o)c^{(1)}_{i_3i_4}-\frac{1}{2}\partial_{x^{i_1}}X^k(o)\big(e^{(1)}_{ki_2i_3i_4}+e^{(1)}_{i_2ki_3i_4}+e^{(1)}_{i_2i_3ki_4}+e^{(1)}_{i_2i_3i_4k}\big),\\
\widetilde{E}_{i_1\cdots i_6} &= 3\Big[\frac{1}{2}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{i_3i_4}(o)c^{(1)}_{i_5i_6}-\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{ii_3}(o)\big(e^{(1)}_{ii_4i_5i_6}+e^{(1)}_{i_4ii_5i_6}+e^{(1)}_{i_4i_5ii_6}+e^{(1)}_{i_4i_5i_6i}\big)\\
&\quad-\frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{ij}(o)e^{(1)}_{i_3\cdots i_6}+\delta_{ij}\partial_{x^{i_1}}\Gamma^{i_2}_{ij}(o)e^{(1)}_{i_3\cdots i_6}+\frac{1}{2}\partial_{x^{i_1}}X^{i_2}(o)e^{(1)}_{i_3\cdots i_6}\Big].
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{L}_X\Big[|x|^2\Big(b^{(2)}_{i_1}\,\frac{x^{i_1}}{|x|}+d^{(2)}_{i_1i_2i_3}\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}}{|x|^3}+f^{(2)}_{i_1i_2i_3i_4i_5}\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}x^{i_4}x^{i_5}}{|x|^5}\Big)\Big]=$$
$$=\Big[A^\star_{i_1}\frac{x^{i_1}}{|x|}+B^\star_{i_1i_2i_3}\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}}{|x|^3}-24f^{(2)}_{i_1\cdots i_5}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_5}}{|x|^5}\Big]$$
$$+|x|\Big[-\frac{1}{2}X^i(o)b^{(2)}_i+C^\star_{i_1i_2}\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2}+D^\star_{i_1\cdots i_4}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_4}}{|x|^4}+\frac{3}{2}X^{i_1}(o)f^{(2)}_{i_2\cdots i_6}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_6}}{|x|^6}\Big]$$
$$+\text{a function that admits a } C^1\text{–extension on } \overline{B}_{r_o}(o),$$

其中

$$A^\star_{i_1}=2\Big[2b^{(2)}_{i_1}+\sum_{i=1}^3\big(d^{(2)}_{i_1ii}+d^{(2)}_{ii_1i}+d^{(2)}_{iii_1}\big)\Big],$$
$$B^\star_{i_1i_2i_3}=2\Big[-3d^{(2)}_{i_1i_2i_3}+\sum_{i=1}^3\big(f^{(2)}_{iii_1i_2i_3}+f^{(2)}_{ii_1ii_2i_3}+\cdots+f^{(2)}_{i_1i_2i_3ii}\big)\Big],$$
$$C^\star_{i_1i_2}=-\frac{1}{2}\Big[X^{i_1}(o)b^{(2)}_{i_2}+X^i(o)\big(d^{(2)}_{ii_1i_2}+d^{(2)}_{i_1ii_2}+d^{(2)}_{i_1i_2i}\big)\Big],$$
$$D^\star_{i_1\cdots i_4}=-\frac{1}{2}\Big[-X^{i_1}(o)d^{(2)}_{i_2i_3i_4}+X^i(o)\big(f^{(2)}_{ii_1i_2i_3i_4}+f^{(2)}_{i_1ii_2i_3i_4}+\cdots+f^{(2)}_{i_1i_2i_3i_4i}\big)\Big].$$

$$\mathcal{L}_X\Big[|x|^3\Big(a^{(3)}+c^{(3)}_{i_1i_2}\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2}+e^{(3)}_{i_1\cdots i_4}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_4}}{|x|^4}+h^{(3)}_{i_1\cdots i_6}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_6}}{|x|^6}+l^{(3)}_{i_1\cdots i_8}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_8}}{|x|^8}\Big)\Big]$$
$$=|x|\Big\{2\Big(6a^{(3)}+\sum_{i=1}^3c^{(3)}_{ii}\Big)+A^\bullet_{i_1i_2}\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2}+B^\bullet_{i_1\cdots i_4}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_4}}{|x|^4}+C^\bullet_{i_1\cdots i_6}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_6}}{|x|^6}$$
$$-60l^{(3)}_{i_1\cdots i_8}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_8}}{|x|^8}\Big\}$$
$$+\text{a function that admits a } C^1\text{–extension on } \overline{B}_{r_o}(o),$$

其中

$$A^\bullet_{i_1i_2}=2\Big[3c^{(3)}_{i_1i_2}+\sum_{i=1}^3\big(e^{(3)}_{iii_1i_2}+e^{(3)}_{ii_1ii_2}+\cdots+e^{(3)}_{i_1i_2ii}\big)\Big],$$
$$B^\bullet_{i_1\cdots i_4}=2\Big[-4e^{(3)}_{i_1\cdots i_4}+\sum_{i=1}^3\big(h^{(3)}_{iii_1i_2i_3i_4}+h^{(3)}_{ii_1ii_2i_3i_4}+\cdots+h^{(3)}_{i_1i_2i_3i_4ii}\big)\Big],$$
$$C^\bullet_{i_1\cdots i_6}=2\Big[-15h^{(3)}_{i_1\cdots i_6}+\sum_{i=1}^3\big(l^{(3)}_{iii_1i_2\cdots i_6}+l^{(3)}_{ii_1ii_2\cdots i_6}+\cdots+l^{(3)}_{i_1\cdots i_6ii}\big)\Big].$$

因此，结合前面的所有计算，我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_X\Big[&\frac{1}{|x|}+b_{i_1}^{(0)}\frac{x^{i_1}}{|x|}+|x|\Big(a^{(1)}+c_{i_1i_2}^{(1)}\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2}+e_{i_1\cdots i_4}^{(1)}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_4}}{|x|^4}\Big)\\
&+|x|^2\Big(b_{i_1}^{(2)}\frac{x^{i_1}}{|x|}+d_{i_1i_2i_3}^{(2)}\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}}{|x|^3}+f_{i_1\cdots i_5}^{(2)}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_5}}{|x|^5}\Big)\\
&+|x|^3\Big(a^{(3)}+c_{i_1i_2}^{(3)}\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2}+e_{i_1\cdots i_4}^{(3)}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_4}}{|x|^4}+h_{i_1\cdots i_6}^{(3)}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_6}}{|x|^6}+l_{i_1\cdots i_8}^{(3)}\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_8}}{|x|^8}\Big)\Big]\\
=\;&\frac{1}{|x|^2}\Big(\frac{1}{2}X^{i_1}(o)-2b_{i_1}^{(0)}\Big)\frac{x^{i_1}}{|x|}\\
&+\frac{1}{|x|}\Big\{2\Big(a^{(1)}+\sum_{i=1}^{3}c_{ii}^{(1)}\Big)-\frac{1}{2}b_i^{(0)}X^i(o)+\big(\widehat{A}_{i_1i_2}+\frac{1}{2}b_{i_1}^{(0)}X^{i_2}(o)+\widetilde{A}_{i_1i_2}\big)\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2}\\
&\qquad+\big(\widehat{B}_{i_1\cdots i_4}-18e_{i_1\cdots i_4}^{(1)}\big)\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_4}}{|x|^4}\Big\}\\
&+\Big\{\Big[-\frac{1}{2}a^{(1)}X^{i_1}(o)-\frac{1}{2}X^i(o)\big(c_{ii_1}^{(1)}+c_{i_1i}^{(1)}\big)+A_{i_1}^{*}+A_{i_1}^{\star}\Big]\frac{x^{i_1}}{|x|}\\
&\quad+\big(\widehat{C}_{i_1i_2i_3}+B_{i_1i_2i_3}^{*}+\widetilde{B}_{i_1i_2i_3}+B_{i_1i_2i_3}^{\star}\big)\frac{x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}}{|x|^3}\\
&\quad+\big(\widehat{D}_{i_1\cdots i_5}+C_{i_1\cdots i_5}^{*}-3X^{i_1}(o)e_{i_2\cdots i_5}^{(1)}-24f_{i_1\cdots i_5}^{(2)}\big)\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_5}}{|x|^5}\Big\}\\
&+|x|\Big\{2\Big(6a^{(3)}+\sum_{i=1}^{3}c_{ii}^{(3)}\Big)-\frac{1}{2}X^i(o)b_i^{(2)}+\big(D_{i_1i_2}^{*}+\widetilde{C}_{i_1i_2}+C_{i_1i_2}^{\star}+A_{i_1i_2}^{\bullet}\big)\frac{x^{i_1}x^{i_2}}{|x|^2}\\
&\quad+\big(\widehat{E}_{i_1\cdots i_4}+E_{i_1\cdots i_4}^{*}+\widetilde{D}_{i_1\cdots i_4}+D_{i_1\cdots i_4}^{\star}+B_{i_1\cdots i_4}^{\bullet}\big)\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_4}}{|x|^4}\\
&\quad+\big(\widehat{F}_{i_1\cdots i_6}+F_{i_1\cdots i_6}^{*}+\widetilde{E}_{i_1\cdots i_6}+\frac{3}{2}X^{i_1}(o)f_{i_2\cdots i_6}^{(2)}+C_{i_1\cdots i_6}^{\bullet}\big)\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_6}}{|x|^6}\\
&\quad+\Big(\frac{15}{2}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{i_3i_4}(o)e_{i_5\cdots i_8}^{(1)}-60l_{i_1\cdots i_8}^{(3)}\Big)\frac{x^{i_1}\cdots x^{i_8}}{|x|^8}\Big\}\\
&+\text{一个在 }\overline{B_{r_o}(o)}\text{上存在 }C^1\text{–延拓的函数 }h\text{。}
\end{aligned}
$$

然后，我们按以下方式选取常数 $b_{i_1}^{(0)}$，$a^{(1)}$，$c_{i_1i_2}^{(1)}$，$e_{i_1i_2i_3i_4}^{(1)}$，$b_{i_1}^{(2)}$，$d_{i_1i_2i_3}^{(2)}$，$f_{i_1i_2i_3i_4i_5}^{(2)}$，$a^{(3)}$，$c_{i_1i_2}^{(3)}$，$e_{i_1i_2i_3i_4}^{(3)}$，$h_{i_1i_2i_3i_4i_5i_6}^{(3)}$，$l_{i_1i_2i_3i_4i_5i_6i_7i_8}^{(3)}$：

$$
\begin{aligned}
b_{i_1}^{(0)}&=\frac{1}{4}X^{i_1}(o)\,,\\
e_{i_1\cdots i_4}^{(1)}&=\frac{1}{18}\widehat{B}_{i_1\cdots i_4}\,,\\
c_{i_1i_2}^{(1)}&=\frac{1}{4}\Big[2\big(e_{iii_1i_2}^{(1)}+e_{ii_1ii_2}^{(1)}+e_{ii_1i_2i}^{(1)}+e_{i_1iii_2}^{(1)}+e_{i_1ii_2i}^{(1)}+e_{i_1i_2ii}^{(1)}\big)+\widehat{A}_{i_1i_2}+\frac{1}{2}b_{i_1}^{(0)}X^{i_2}(o)\Big],\\
a^{(1)}&=-\sum_{i=1}^{3}c_{ii}^{(1)}+\frac{1}{4}b_i^{(0)}X^i(o)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{(2)}_{i_1i_2i_3i_4i_5} &= \frac{1}{24}\Big(\widehat{D}_{i_1\cdots i_5} + C^*_{i_1\cdots i_5} - 3X^{i_1}(o)e^{(1)}_{i_2\cdots i_5}\Big),\\
d^{(2)}_{i_1i_2i_3} &= \frac{1}{6}\Big[2\sum_{i=1}^{3}\big(f^{(2)}_{iii_1i_2i_3} + f^{(2)}_{ii_1ii_2i_3} + \cdots + f^{(2)}_{i_1i_2i_3ii}\big) + \widehat{C}_{i_1i_2i_3} + B^*_{i_1i_2i_3} + \widetilde{B}_{i_1i_2i_3}\Big],\\
b^{(2)}_{i_1} &= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}a^{(1)}X^{i_1}(o) + \frac{1}{2}X^i(o)\big(c^{(1)}_{ii_1} + c^{(1)}_{i_1i}\big) - A^*_{i_1} - 2\sum_{i=1}^{3}\big(d^{(2)}_{i_1ii} + d^{(2)}_{iii_1} + d^{(2)}_{ii_1i}\big)\Big],\\
l^{(3)}_{i_1i_2i_3i_4i_5i_6i_7i_8} &= \frac{1}{8}\partial_{x^{i_1}}\partial_{x^{i_2}}g^{i_3i_4}(o)e^{(1)}_{i_5\cdots i_8}\,,\\
h^{(3)}_{i_1i_2i_3i_4i_5i_6} &= \frac{1}{30}\Big[\widehat{F}_{i_1\cdots i_6} + F^*_{i_1\cdots i_6} + \widetilde{E}_{i_1\cdots i_6} + \frac{3}{2}X^{i_1}(o)f^{(2)}_{i_2\cdots i_6}\\
&\qquad + 2\sum_{i=1}^{3}\big(l^{(3)}_{iii_1i_2\cdots i_6} + l^{(3)}_{ii_1ii_2\cdots i_6} + \cdots + l^{(3)}_{i_1\cdots i_6ii}\big)\Big],\\
e^{(3)}_{i_1i_2i_3i_4} &= \frac{1}{8}\Big[\widehat{E}_{i_1\cdots i_4} + E^*_{i_1\cdots i_4} + \widetilde{D}_{i_1\cdots i_4} + D^\star_{i_1\cdots i_4}\\
&\qquad + 2\sum_{i=1}^{3}\big(h^{(3)}_{iii_1i_2i_3i_4} + h^{(3)}_{ii_1ii_2i_3i_4} + \cdots + h^{(3)}_{i_1i_2i_3i_4ii}\big)\Big],\\
c^{(3)}_{i_1i_2} &= -\frac{1}{6}\Big[D^*_{i_1i_2} + \widetilde{C}_{i_1i_2} + C^\star_{i_1i_2} + 2\sum_{i=1}^{3}\big(e^{(3)}_{iii_1i_2} + e^{(3)}_{ii_1ii_2} + \cdots + e^{(3)}_{i_1i_2ii}\big)\Big],\\
a^{(3)} &= \frac{1}{24}X^i(o)b^{(2)}_i - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}c^{(3)}_{ii}\,.
\end{aligned}
$$

致谢。所有作者均为 *INdAM–GNAMPA* 成员。第一作者的研究部分得到 *PRIN* 项目 *2022E9CF89“GEPSO–*几何演化问题与形状优化*”*的资助。

参考文献

1. V. Agostiniani、M. Fogagnolo 和 L. Mazzieri，非负 Ricci 曲率流形中闭超曲面的尖锐几何不等式，Invent. Math. 222 (2020), no. 3, 1033–1101。2. V. Agostiniani、C. Mantegazza、L. Mazzieri 和 F. Oronzio，通过非线性势理论证明黎曼 Penrose 不等式，Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 24 (2023), no. 2, 835–866。3. V. Agostiniani、L. Mazzieri 和 F. Oronzio，正质量定理的一个格林函数证明，Comm. Math. Phys. 405 (2024), no. 2, Paper No. 54, 23。4. J. Baldauf 和 T. Ozuch，加权流形上的旋量与质量，Comm. Math. Phys. 394 (2022), no. 3, 1153–1172。5. R. Bartnik，渐近平坦流形的质量，Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986), no. 5, 661–693。6. L. Benatti、M. Fogagnolo 和 L. Mazzieri，非负 Ricci 曲率完备黎曼流形上的 Minkowski 不等式，Anal. PDE 17 (2024), no. 9, 3039–3077。7. H. L. Bray、S. Hirsch、D. Kazaras、M. Khuri 和 Y. Zhang，时空调和函数及其在质量问题中的应用，《标量曲率展望》第2卷，World Sci. Publ.，2023，593–639。8. H. L. Bray、D. Kazaras、M. A. Khuri 和 D. L. Stern，三维渐近平坦黎曼流形上的调和函数与质量，J. Geom. Anal. 32 (2022), no. 6, Paper No. 184, 29。9. A. Chaljub-Simon 和 Y. Choquet-Bruhat，欧几里得流形上无穷远处的二阶椭圆问题，Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5) 1 (1979), no. 1, 9–25。10. P.-Y. Chan、J. Chu、M.-C. Lee 和 T.-Y. Tsang，p–Green 函数的单调性，Int. Math. Res. Not. IMRN (2024), no. 9, 7998–8025。11. P. T. Chru´sciel，从哈密顿量观点看空间无穷远处的边界条件，《时空的拓扑性质与整体结构》（埃里切，1985），NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys.，第138卷，Plenum Press，1986，49–59。12. P. T. Chru´sciel、H. S. Reall 和 P. Tod，关于 Israel–Wilson–Perjes 黑洞，Classical Quantum Gravity ( ), no. – 。13. J. Chu 和 J. Zhu，一种证明加权流形正加权质量定理的非自旋方法，J. Geom. Anal. 34 (2024), no. 9, Paper No. 272, 31。14. T. H. Colding，Ricci 曲率的新单调性公式及其应用（一），Acta Math. 209 (2012), no. 2, 229–263。15. T. H. Colding 和 W. P. Minicozzi，单调性及其解析与几何意义，Proc. Natl. Acad. Sci. USA 110 (2013), no. 48, 19233–19236。16. ，爱因斯坦流形切锥的唯一性，Invent. Math. 196 (2014), no. 3, 515–588。

23 2006 *7,* 2519 2540

17. ，调和函数的 Ricci 曲率与单调性，Calc. Var. Partial Differential Equations 49 (2014), no. 3–4, 1045–1059。18. ，标量曲率的梯度估计，ArXiv Preprint Server – ArXiv:2501.17947, 2025。19. R. Geroch，能量提取，Ann. New York Acad. Sci. 224 (1973), 108–117。20. D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger，二阶椭圆型偏微分方程，数学经典丛书，Springer–Verlag，2001，重印1998年版。21. R. Hardt、H. Hoffmann–Ostenhof、T. Hoffmann–Ostenhof 和 N. Nasirashvili，椭圆方程解的临界集，J. Differential Geom. 51 (1999), no. 2, 359–373。22. R. Hardt 和 L. Simon，椭圆方程解的结点集，J. Differential Geom. 30 (1989), no. 2, 505–522。23. A. Hatcher，代数拓扑，Cambridge University Press，2002。24. S. Hirsch 和 P. Miao，带边流形的正质量定理，Pacific J. Math. 306 (2020), no. 1, 185–201。25. S. Hirsch、P. Miao 和 L.-F. Tam，p–调和函数的单调量及其应用，Pure Appl. Math. Q. 20 (2024), no. 2, 599–644。26. S. Hirsch、P. Miao 和 T.-Y. Tsang，带边界渐近平坦三维流形的质量，Comm. Anal. Geom. 31 (2023), no. 7, 1611–1653。27. G. Huisken，平均曲率流奇点的渐近行为，J. Differential Geom. 31 (1990), no. 1, 285–299。28. G. Huisken 和 T. Ilmanen，逆平均曲率流与黎曼 Penrose 不等式，J. Differential Geom. 59 (2001), no. 3, 353–437。29. K. Kr¨oncke、F. Oronzio 和 A. Pinoy，渐近双曲三维流形上的格林函数与正质量定理，ArXiv Preprint Server – ArXiv:2506.07108, 2025。30. M. B. Law、I. M. Lopez 和 D. Santiago，加权流形与光滑度量测度空间上的正质量及 Dirac算子，J. Geom. Phys. 209 (2025), Paper No. 105386, 20。31. D. A. Lee，几何相对论，数学研究生研究丛书，第201卷，American Mathematical Society，2019。32. C. Manea，正 Ricci 曲率下的尖锐梯度估计与单调性，ArXiv Preprint Server – ArXiv:2512 05467, 2025。33. C. Mantoulidis、P. Miao 和 L.-F. Tam，容量、准局部质量与奇异填充，J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal) 768 (2020), 55–92。34. L. Mazurowski 和 X. Yao，p–调和函数的单调量与尖锐 p–Penrose 不等式，ArXiv Preprint Server – ArXiv:2305.19784, 2023。35. P. Miao，质量、容度函数与质量容量比，Peking Math. J. 8 (2025), no. 2, 351–404。36. O. Munteanu 和 J. Wang，标量曲率有界的三维流形比较定理，Int. Math. Res. Notices (2023), no. 3, 2215–2242。37. F. Oronzio，非负标量曲率渐近平坦三维流形上的 ADM质量、面积与容量，Commun. Contemp. Math. 27 (2025), no. 9, Paper No. 2550011, 35。38. ，非负标量曲率非紧三维流形上的面积、体积与容量，Int. Math. Res. Not. IMRN (2025), no. 18, Paper No. rnaf282, 17。39. G. Perelman，Ricci 流的熵公式及其几何应用，ArXiv Preprint Server – ArXiv:math/0211159, 2002。40. S. Raulot，带电荷自旋初始数据的正能量定理，ArXiv Preprint Server – ArXiv:2509.05244, 2025。41. R. Schoen 和 S. T. Yau，关于广义相对论中正质量猜想的证明，Comm. Math. Phys. 65 (1979), no. 1, 45–76。42. ，广义相对论中时空的能量与线动量，Comm. Math. Phys. 79 1, 47 1981 51 ( ), no. – 。43. B. Song、G. Wei 和 G. Wu，Bakry–Emery Ricci 曲率的单调性公式，J. Geom. Anal. 25 4, 2716 2015 2735 ( ), no. – 。44. D. Stern，标量曲率与映射到 $\mathbb{S}^1$ 的调和映射，J. Differential Geom. 122 (2022), no. 2, 259–269。45. A. E. Taylor，洛必达法则，Amer. Math. Monthly 59 (1952), 20–24。46. T. Willmore，黎曼几何中的全曲率，Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications，Ellis Horwood Ltd.，1982。47. E. Witten，正能量定理的新证明，Comm. Math. Phys. 80 (1981), no. 3, 381–402。48. C. Xia、J. Yin 和 X. Zhou，非负标量曲率三维流形上 p–容度函数的新单调性，Adv. Math. 440 (2024), Paper No. 109526, 40。

(Carlo Mantegazza) "RENATO CACCIOPPOLI"数学与应用系，那不勒斯费德里科二世大学，意大利电子邮箱，C.Mantegazza：carlo.mantegazza@unina.it

(Francesca Oronzio) 南方高等学院，那不勒斯，意大利电子邮箱，F. Oronzio：f.oronzio@ssmeridionale.it