arXiv:2602.11402v1 [math.AC] 11 Feb 2026

常微分算子的 Burchnall-Chaundy 理想的 Gr¨obner 基

Antonio Jim´enez-Pastor 马德里理工大学应用数学系，ETSAM，马德里，西班牙

SoniaL. Rueda 马德里理工大学应用数学系，ETSAM，马德里，西班牙

2026年2月13日

摘要

常微分算子（ODO）的交换环与代数曲线之间的对应关系由 Burchnall 和 Chaundy、Krichever、Mumford 等人确立。为使这一对应关系在计算上切实可行，本文旨在计算谱曲线的定义理想，即 Burchnall-Chaundy（BC）理想。我们给出一种计算 BC 理想 Gr¨obner 基的算法。该算法以计算常微分算子最大交换环的有限生成元集为出发点，这一计算已由作者在 SageMath 的 dalgebra 软件包中实现。计算 BC 理想的算法也已在 dalgebra 中实现。

对相应谱问题（带参数的线性微分方程）的微分伽罗瓦理论而言，对这个由常系数多项式生成的素理想进行计算将大有裨益。特别地，我们证明，将系数域扩张后，由 BC 理想生成的微分理想是素理想。这是为谱问题发展 Picard-Vessiot 理论的一项基础性成果。

1 引言

本文旨在计算常微分算子交换整环的谱曲线Spec($\mathcal{A}$)。特别地，给定一个系数属于微分域 $(\mathbb{K}, \partial)$ 的常微分算子 L，其在微分算子环 $\mathcal{D} = \mathbb{K}[\partial]$ 中的中心化子 $\mathcal{Z}(L)$ 是 $\mathcal{D}$ 的极大交换子环，尤其是一个交换整环。我们将计算谱曲线的定义理想

$$\Gamma = \mathrm{Spec}(\mathcal{Z}(L)).$$

自 Burchnall 和 Chaundy [8]的开创性工作以来，这些代数曲线便与交换微分算子理论密切相关。许多作者研究了常微分算子的所有交换代数的分类，其中包括 Krichever [17, 18] 和 Mumford [26]。重要的研究 [7, 11, 24, 27, 29,31, 32, 33], 促成了以下两者之间的双射对应：具有首一元素的常微分算子交换代数 $\mathcal{A}$的等价类（若可逆函数 $\mathcal{A}$和 $\sigma\mathcal{A}\sigma^{-1}$ 则这两个代数视为相同 σ），以及由代数曲线及其上的一个点、一个向量丛、一个局部覆盖和一个局部平凡化组成的五元组的同构类的等价类。

谱曲线用于构造非线性偏微分方程 [17, 18, 34], Gelfand-Dickey（GD）层级方程的解 [11,13]。另一方面，对于一般参数 λ 和微分算子 L，谱曲线是研究谱问题的 Picard-Vessiot 理论的基本对象 $(L-\lambda)(y) = 0$；该算子的系数是 GD 层级方程中某个方程的解 [3, 22, 23, 30]。这一条件等价于存在非平凡的中心化子 $\mathcal{Z}(L)$，也就是说，其中包含一个算子 A，它不是 L 的常系数多项式。

给定 $\mathbb{K}$的常数域 $\mathbf{C}$， L 的中心化子包含 $\mathbf{C}[L, A]$，其谱曲线由 $f(\lambda, \mu) = 0$定义，其中 f 是一个常系数多项式，可通过微分结式∂Res$(L-\lambda, A-\mu)$的无平方因子部分计算得到。$\mathbf{C}[L, A]$ 的谱曲线是代数曲线 $\Gamma_{L,A}$，其定义理想是素理想 (f)，见 [29, 30, 35],，且 $\mathbf{C}[L, A]$ 同构于坐标环

$$\mathbf{C}[\Gamma_{L,A}] := \frac{\mathbf{C}[\lambda, \mu]}{(f)}. \tag{1}$$

此外， f是一个 Burchnall-Chaundy 多项式，因为 $f(L, A) = 0$。

一般而言， $\mathcal{D}$ 中的交换整环有两个以上的生成元。例如， $\mathcal{D}$ 中三阶常微分算子的典型情形是，中心化子 $\mathcal{Z}(L) = C[L, A_1, A_2]$ 有三个生成元，只有在非常特殊的情况下才会简化为两个生成元 [29, 30]。文献 [30] 使用微分结式计算了该中心化子的谱曲线的定义理想，但本文不会使用微分结式，因为这一结果无法推广到阶数大于 3 的算子。

中心化子 $\mathcal{Z}(L)$ 是一个由有限基 $\{1, G_1, \ldots, G_{t-1}\}$ [12] 生成的$\mathbf{C}[L]$-模，该基提供了一组作为$\mathbf{C}$-代数的生成元

$$\mathcal{Z}(L) = \mathbf{C}[G_0 := L, G_1, \ldots, G_{t-1}]. \tag{2}$$

第3 节回顾了这些事实，使我们能够以算法方式描述谱曲线 Γ，并控制这条（原则上）抽象代数曲线的定义理想。本文计算了¨的定义理想的 Gr Γ obner 基，并证明该理想由所有 Burchnall-Chaundy 多项式组成；这些多项式在 $\mathcal{Z}(L)$的生成元集合上取值为零。与 [29, 30] 一样，我们称其为 L 的 Burchnall-Chaundy（BC）理想，并记作 BC(L)，从而建立了 $\mathcal{Z}(L)$与谱曲线的坐标环之间的显式同构

$$\mathbf{C}[\Gamma] := \frac{\mathbf{C}[\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_{t-1}]}{\mathrm{BC}(L)}. \tag{3}$$

在 [15] 中，我们在 SageMath 的dalgebra 程序包中实现了一种算法 [14]„ 用于计算中心化子$\mathbf{C}[L]$-基 $\mathcal{Z}(L)$。本文提出一种算法，用于计算$\mathbf{C}[L]$-模生成元之间的代数关系。该算法也已在dalgebra中实现，最终可计算 BC(¨)的 GrL obner 基。我们在第4节定义 BC 理想和谱曲线。本文的主要结果见第5节。

由于 $\mathcal{Z}(L) \simeq \mathbf{C}[\Gamma]$ 是一个整环，BC 理想是 $\mathbf{C}[\lambda, \mu]$中的素理想。针对谱问题 $(L - \lambda(y) = 0$的 Picard-Vessiot 理论需要一个包含 $\mathbb{K}$ 和 $C[\Gamma]$ [3, 22, 29] 的系数域。为便于进行有效计算，我们考虑微分环

$$\mathbb{K}[\Gamma] := \frac{\mathbb{K}[\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_{t-1}]}{[\mathrm{BC}(L)]}. \tag{4}$$

作为 Gr¨obner 基应用的一个例子，我们在第 L 节证明，由 BC([) L在] 中生成的微分理想 $\mathbb{K}[\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_{t-1}]$ BC(L) 也是一个素理想。这个结果使我们能够将 6用于发展这一 Picard-Vessiot 理论，其中 $\mathbb{K}(\Gamma)$ 是整环$\mathbb{K}[\Gamma]$的分式域。结论与进一步的研究见第 7 节。

2 基本定义

本节着重介绍理解本文所必需的基本定义和经典结果，因为本文将微分算子及其中心化子与代数几何和交换代数结合起来。

交换代数。我们先介绍交换代数中的一些概念；更多参考资料请参见 [1, 2, 21]。设$\mathbf{C}$ 为一个域，并考虑一个有限生成的$\mathbf{C}$-代数 $\mathcal{A}$。存在 $a_1, \ldots,$ $a_n \in \mathcal{A}$，使得 $\mathcal{A}$ 中的每个元素都可以写成以 $a_1, \ldots, a_n$ 为变量、系数属于$\mathbf{C}$的多项式。这些有限生成代数若同构于某个多项式环模一个素理想所得的商环，则为整环。若已知 $\mathcal{A}$ 的生成元，则可以将同构 ϕ 显式写出：定义一个求值映射，将代数变量 y_i 映射到每个生成元 a_i，使得$\mathbf{C}[y_1,\ldots,y_n]/\ker(\phi)$ 同构于 $\mathcal{A} = \mathbf{C}[a_1, \ldots, a_n]$。素理想 ker($\phi$) 描述了 $\mathcal{A}$这些生成元之间的代数关系。

众所周知，Gr¨obner 基是处理多项式理想的符号计算主要工具之一。关于单项式序的定义和基本结果，请参见 [5, 10]；本文将使用的 Gr¨obner 基的刻画如下。

我们在由变量集 $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ 生成的多项式环 $\mathbf{C}[Y]$ 中固定一个单项式序 $<$。给定 $p \in \mathbf{C}[Y]$，记 deg$_Y$(p) 为 p 关于变量 Y 的总次数，$\ell(p)$ 为其关于单项式序 $<$的首项单项式，lc(p) 为其首项系数。给定 $\mathbf{C}[Y]$ 中的多项式子集 S，记 $\ell(S)$ 为由 S的首项单项式生成的 $\mathbf{C}[Y]$ 中的理想。

令 $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ 为理想 $I \subseteq \mathbf{C}[Y]$的一组生成元。$I$ 的首项理想 为 $\ell(I)$。

定义 2.1 ([10, 定义 2.5。5])。 集合 $\mathcal{B}$ 是理想$I = (\mathcal{B})$ 的一个 *Gr¨obner* 基，如果 I 的首项理想由 $\mathcal{B}$ 的首项单项式生成，即 $\ell(I) = \ell(\mathcal{B})$。

根据除法定理（见 [10], 定理 3，第 64 页），我们可以将 $p \in \mathbf{C}[Y]$ 写作 $p = q + \tilde{p}$，其中 $q \in (\mathcal{B})$，且 $\tilde{p}$ 是 p 关于 $\mathcal{B}$的标准形。众所周知， $\mathcal{B}$ 是格罗布纳基，当且仅当多项式$p \in \mathbf{C}[Y]$ 关于 $\mathcal{B}$化简为 0，当且仅当 $p \in I$。

微分域。关于微分代数基本事实的更多参考资料，请参见 [16, 28] 。设（$\mathbb{K}$， ∂）为一个微分域，即一个域 $\mathbb{K}$ ，配有导子 ∂，它是一个加法同态 $\partial : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ，满足莱布尼茨法则（$\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$）。常数集，即满足 $\partial(c) = 0$的元素 $c \in \mathbb{K}$ ，是 $\mathbb{K}$的子域$\mathbf{C}$ ，也就是它的常数域。在本文中，我们假设$\mathbf{C}$ 是代数闭的，且具有零特征。

微分扩张 $\mathbb{F} \supset \mathbb{K}$ 是一种域扩张，其中 $\mathbb{F}$ 上的导子扩展了 $\mathbb{K}$ 上的导子。在这些扩张中，常数域$\mathbf{C}$ 也可能随之扩张。对于许多算法而言，常数域是必需的，因此构造这些扩张时会保持常数域不变。例如，强正规扩张在保持常数不变的同时，加入非线性微分方程的解（见 [16, 第 VI 节3]或 [19, 20]）；而单项式扩张则加入一个具有给定导子的新超越元，并满足保持常数不变的条件 [4]。

在本文中，我们将使用以下微分域通过示例说明我们的结果：复数域 $\mathbb{C}$ 的单项式扩张 $\mathbb{C}(e^x)$，以及由魏尔斯特拉斯 $\wp$ 函数 $\mathbb{C}\langle\wp\rangle = \mathbb{C}(\wp, \wp')$ 定义的强正规扩张 $\wp = \wp(x; g_2, g_3)$，其中 $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ 对某些常数 g_2, $g_3 \in \mathbb{C}$ 满足 $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$。在这两种情况下，导子均为$\partial = d/dx$。

微分算子。 微分算子环 $\mathbb{K}[\partial]$ 是一个（左右）非交换欧几里得整环，参见例如 [6]。微分算子 $P \in \mathbb{K}[\partial]$ 可以唯一地写成

$$P = a_n\partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \ldots + a_1\partial + a_0, \text{ with } a_i \in \mathbb{K}, \ a_n \neq 0.$$

P 的阶为 n，记作 $\mathrm{ord}(P)$，约定 $\mathrm{ord}(0) = -\infty$。 P 的最高阶项的系数是 P 的首项系数，记作 $\mathrm{lc}(P) = a_n$。若阶为 n 的算子 $P \in \mathbb{K}[\partial]$ 满足 $\mathrm{lc}(P) = 1$，且阶为 $n-1$ 的项的系数为零，则称其为标准形。在 [25, 35] 中，这类算子称为椭圆型。通过变量替换以及对函数作共轭，总能将微分算子化为标准形。

3 中心化子

考虑一个阶为 n 且具有标准形的微分算子 $L \in \mathbb{K}[\partial]$

$$L = \partial^n + u_{n-2}\partial^{n-2} + \ldots + u_1\partial + u_0.$$

L 在 $\Sigma[\partial]$ 中的中心化子是

$$\mathcal{Z}(L) = \{A \in \Sigma[\partial] \mid [L, A] = 0\}.$$

众所周知， [34] 当 L 具有非平凡中心化子，即 $\mathcal{Z}(L) \neq \mathbf{C}[L]$时，系数 u_2, ……， u_n 满足 Gelfand-Dickey 层级某个系统的方程；对于 $n=2$ ，该系统为科尔特韦格–德弗里斯层级；对于 $n=3$ ，则为布oussinesq层级。在 [13, 第 5], 节中，作者设计了一种算法，用于显式计算这些层级的方程，并将结果保存到代码库中，涵盖 n的广泛取值。在 [15, 第 8],节中，作者设计了一种方法，用于计算所选强正规扩张 u_0、 u_1，……， u_{n-2} 中的 GD 层级的特定解$\mathbf{C}\langle\eta\rangle$，将非线性微分方程组转化为多项式方程组。本文中使用的具有非平凡中心化子的常微分算子示例，均采用这些技术计算得出。

本文中，我们假设给定了一个具有非平凡中心化子的算子 L 。此外，我们假设已知 $\mathcal{Z}(L)$ 的一组生成元。在 [15], 中，作者提出了一种计算 $\mathcal{Z}(L)$ 的算法。该算法的起点是确定存在一个非平凡中心化子；换言之，给定微分算子在$\mathcal{Z}(L)\setminus\mathbf{C}[L]$中的阶。在这种情况下，总能计算出 $\mathcal{Z}(L)$ 的层级，即 $\mathcal{Z}(L)\setminus\mathbf{C}[L]$ 中元素的最小阶。给定一个处于标准形的算子 L of$\mathbb{K}[\partial]$ 以及层级 M，该算法将 $\mathcal{Z}(L)$ 的一组基计算为 $\mathbf{C}[L]$-模。 [15] 中的算法基于 [12, 定理 1.2], ，我们接下来将对其进行回顾。进一步详情另见 [15, 定理 3.7] 。我们用 $\mathbb{Z}_n$ 表示模 n 的类所成的循环群，并用 $[m]_n$ 表示 $m\in\mathbb{Z}$ 模 n 的类。

定理 3.1 (Goodearl)。 设 $L\in\mathbb{K}[\partial]$ 是一个阶为 n的微分算子。那么， $\mathcal{Z}(L)$ 作为 $\mathbf{C}[L]$-模的一组基由满足以下条件的 t 算子组成

$$\mathcal{G}=\{G_0=1,G_1,\ldots,G_{t-1}\},$$

满足以下条件：

1. 每个 G_k 在集合 $\{Q\in\mathcal{Z}(L)\mid \operatorname{ord}(Q)\equiv \operatorname{ord}(G_k)$（模 $n)\}$中具有最小阶，我们称 G_k 是阶最小的。
2. 所有元素的阶(模 n) $\mathcal{Z}(L)$构成 $\mathbb{Z}_n$ 的一个基数为 t的加法子群

$$\mathcal{O}=\{[\operatorname{ord}(G_k)]_n \ : \ k=0,\ldots,t-1\}. \tag{5}$$

因此， $t=|\mathcal{O}|$ 整除 n。

可交换常微分算子集的秩 是所有阶的最大公约数。前一定理的以下推论已在[15]中证明。

推论 3.1.1. 设 $L\in\mathbb{K}[\partial]$ 是一个阶为 n 、阶群为 $\mathcal{O}$ 且其基数为 t 的微分算子。那么， $\mathcal{Z}(L)$ 的秩等于 n/t。

若 $\mathcal{Z}(L)$ 的秩为 1，则称 L 为代数几何的。此时，存在一个属于 $\mathcal{Z}(L)\setminus\mathbf{C}[L]$ 、其阶与 n 互素的算子。此外，在秩为 1 的情形下， $t=n$。

$\mathbb{K}[\partial]$的中心化子是极大交换子环。对于每个循环子群 $\mathcal{O}'$ of $\mathcal{O}$ ，我们可以关联到$\mathcal{A}_{\mathcal{O}'}$，它是 $\mathcal{Z}(L)$的一个$\mathbf{C}[L]$-子模，其基为

满足 $[\mathrm{ord}(G_k)]_n \in \mathcal{O}'$ 的那些 G_k 的子集 $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$。注意， $\mathcal{A}_{\mathcal{O}'}$ 是 $\mathcal{Z}(L)$的一个极大交换子代数，秩为 n/t'，且 $t' = |\mathcal{O}'|$。

算法 [15] 的输出是极大交换子代数 $\mathbf{C}[L]$-模的一组基 $\mathcal{A}_{\mathcal{O}'}$，它属于 $\mathcal{Z}(L)$，其秩整除（n， M）。当 n和M 不互素时，该算法无法保证计算出整个中心化子的基。我们不讨论这一局限，并假设已经计算出 $\mathcal{G} = \{G_0, \ldots, G_{t-1}\}$ 的一组基 $\mathcal{Z}(L)$，它是一个 $\mathbf{C}[L]$-模基。不过，我们指出，本文的结果（见第 5节）仍可应用于未获得完整中心化子的情形，只需将陈述调整为相应的极大交换子代数 $\mathcal{A}_{\mathcal{O}'}$ ，它属于 $\mathcal{Z}(L)$。此外，下一个定理可用与定理 3.1相同的论证证明。

定理 3.2。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{K}[\partial]$ 的一个交换子环，满足 $L \in \mathcal{A}$ ，其中$\mathrm{ord}(L) = n$。考虑阶的集合 $\mathcal{O}_{\mathcal{A}} = \{[\mathrm{ord}(B)]_n : \ B \in \mathcal{A}\}$。那么，$\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathbb{Z}_n$ 的一个子群，并且任意集合 $\{G_i : \ i \in \mathcal{O}_{\mathcal{A}}\}$，其中 G_i 在 $\mathcal{A}$ 中的阶最小，都是 $\mathcal{A}$ 的一个 $\mathbf{C}[L]$-模基。

例 3.3（指数型）。设 $L = \partial^3 +$ [6] 双曲余弦~~$(x)_2\,\partial$。~~利用 [15],中的算法，我们得到 L 的中心化子秩为 1，且可写成由 $C[L]$-模生成的 $\mathcal{Z}(L)$
$= C[L] \oplus G_1 C[L] \oplus G_2 C[L]$，其中算子 G_1 和G_2 的阶分别为 4 和 5，其公式如下：

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \partial^4 + \left(\frac{8}{\cosh(x)^2} - \frac{4}{3}\right)\partial^2 - \frac{8\sinh(x)}{\cosh(x)^3}\partial, \\
G_2 &= \partial^5 + \frac{10}{\cosh(x)^2}\partial^3 \\
&\quad - \frac{20\sinh(x)}{\cosh(x)^3}\partial^2 + \left(\frac{16}{9} + \frac{80}{3\cosh(x)^2} - \frac{20}{\cosh(x)^4}\right)\partial.
\end{aligned}
$$

例 3.4（椭圆型）。设 $L = \partial^4 - 12\wp\partial^2 + 1$。利用 [15],中的算法，我们得到 L 的中心化子秩为 1，且可写为

$$\mathcal{Z}(L) = C[L] \oplus G_1 C[L] \oplus G_2 C[L] \oplus G_3 C[L],$$

其中，算子 G_1、G_2和 G_3的阶分别为 5、6 和 7，其形式如下：

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \partial^5 - 15\wp\partial^3 - \frac{15}{2}\wp'\partial^2 - 3g_2\partial, \\
G_2 &= \partial^6 - 18\wp\partial^4 - 18\wp'\partial^3 - \left(36\wp^2 + 9g_2\right)\partial^2, \\
G_3 &= \partial^7 - 21\wp\partial^5 - \frac{63}{2}\wp'\partial^4 - \left(126\wp^2 + 21g_2\right)\partial^3 - 63\wp\wp'\partial^2 - 27g_3\partial.
\end{aligned}
$$

秩为 2 的极大子代数为 $\mathcal{A}_2 = C[L, G_2] = C[L] \oplus C[L]G_2$。该子代数

$$\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}[L, G_1] = \mathbf{C}[L] \oplus \mathbf{C}[L]G_1 \oplus \mathbf{C}[L]G_1^2 \oplus \mathbf{C}[L]G_1^3$$

秩为 1，但不是极大的。它使用其 Good- earl 基表示为 $\mathbf{C}[L]$-模 $\mathcal{G}_1$，说明了定理 3.2。

4 Burchnall-Chaundy 理想

在介绍本文的主要结果之前，我们先回顾 Burchnall-Chaundy 理想的定义。在 1923年及 1931 [8, 9], 年的著名成果中，Burchnall 和 Chaundy 证明了可交换微分算子对与平面代数曲线之间存在对应关系。

就我们的目的而言，我们将着重讨论 [29] 中的思想。根据 Burchnall-Chaundy 多项式的存在性可知，所有在一对可交换微分算子 L, P 处取值为零的多项式构成一个理想。此外，我们还可以考虑一组有限个可交换微分算子 A_0，.....， A_{t-1}，在 $\mathbb{K}[\partial]$ 中定义有限生成交换$\mathbf{C}$-代数的 Burchnall-Chaundy 理想

$$\mathcal{A} = \mathbf{C}[A_0, A_1, \ldots, A_{t-1}].$$

给定代数变量 $Y = \{y_0, \ldots, y_{t-1}\}$, $\partial(y_i) = 0$，我们建立从多项式环 $\mathbf{C}[Y]$ 到 $\mathcal{A}$ 的环同态 $\phi_{\mathcal{A}}$，其定义为 $\phi_{\mathcal{A}}(y_i) = A_i$ 和 $\phi_{\mathcal{A}}(c) = c$。因此，我们得到$\mathbf{C}$-代数的一个同构

$$\mathcal{A} \simeq \frac{\mathbf{C}[Y]}{\ker(\phi_{\mathcal{A}})}. \tag{6}$$

定义 4.1 ([29])。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{K}[\partial]$ 中的有限生成交换$\mathbf{C}$-代数。 $\mathcal{A}$ 的 *Burchnall-Chaundy*（*BC*）理想为

$$\mathrm{BC}(\mathcal{A}) := \ker(\phi_{\mathcal{A}}),$$

使 $\phi_{\mathcal{A}}(p) = 0$ 成立的 $\mathbf{C}[Y]$ 中的多项式 $p(Y)$ 所构成的理想，我们也将其记为 $p(A_0, A_1, \ldots, A_{t-1}) = 0$。我们将 $\mathrm{BC}(\mathcal{A})$ 的元素称为 *BC* 多项式。

回到本文的设定，设微分算子 L 属于 $\mathbb{K}[\partial]$，我们可以考虑整个中心化子 $\mathcal{Z}(L)$ 的 BC 理想。固定 $\mathcal{Z}(L)$ 作为 $C[L]$-模的一组 Goodearl 基 $\mathcal{G} = \{1, G_1, \ldots, G_{t-1}\}$。我们可以写成:

$$\mathcal{Z}(L) = \mathbf{C}[L, G_1, \ldots, G_{t-1}] = \mathbf{C}[L] \oplus \mathbf{C}[L]G_1 \ldots \oplus \mathbf{C}[L]G_{t-1}. \tag{7}$$

对于 $\mathcal{A} = \mathcal{Z}(L)$，考虑代数变量 λ 和 $\mu_1, \ldots, \mu_{t-1}$，以建立环同态 ϕ_L，它是从 $\mathbf{C}[\lambda, \mu]$ 出发的求值态射，我们将其记为

$$\phi_L : \mathbf{C}[\lambda, \overline{\mu}] \to \mathcal{Z}(L), \ \phi_L(\lambda) = L, \phi_L(G_i) = \mu_i. \tag{8}$$

定义 4.2。 L 的 *Burchnall-Chaundy*（*BC*）理想是其中心化子 $\mathcal{Z}(L)$ 的 BC 理想，即 ϕ_L 的核，我们将其记为 $\mathrm{BC}(L)$。

Burchnall-Chaundy 理想是给定环中的素理想 $\mathbf{C}[\lambda, \mu]$ 常系数多项式的环，因为 $\mathcal{A}$ 是整环，这是（6）的直接推论。

最早由 Burchnall 和 Chaundy 证明 [8, 9] BC 多项式定义代数曲线。 $\mathcal{Z}(L)$ 的商域是一个单变量函数域，其超越次数为一。此外， $\mathcal{A}$的$\mathcal{Z}(L)$ 的任何子代数都具有 Krull 维数一，它是代数曲线 $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ 的仿射环。

此结果后来由 Krichever 推广 [18], , 随后 Mumford [26],Verdier [33], Mulase [24] 和 [7, 定理 1。8] , 其系数取自 $\mathbf{C}((x))$。域 $\mathbf{C}[\Gamma] = \mathbf{C}[\lambda, \mu]/\operatorname{BC}(L)$ 是代数曲线的坐标环

$$\Gamma := \{\eta \in \mathbf{C}^n \mid g(\eta) = 0, \forall g \in \operatorname{BC}(L)\}, \tag{9}$$

L的谱曲线。对于二阶的 L , 已知该曲线是平面的。对于更高阶的情形, 该曲线可能不再是平面的 [30]。

需要特别指出的是, BC 理想的定义不依赖于 Goodearl 基的选择。$\operatorname{BC}(\mathcal{A})$ 及其对应的代数曲线始终是等价的。本质上, $\operatorname{BC}(L)$ 编码了 L与中心化子 $\mathcal{Z}(L)$ 中所有元素之间的代数关系。给定 $P \in \mathcal{Z}(L)$, 由定理 3.1 可知, 存在唯一的多项式$p_i \in \mathbf{C}[\lambda]$ 使得

$$P = p_0(L) + p_1(L)G_1 + \ldots + p_{t-1}(L)G_{t-1}.$$

定义 4.3。 给定 $P \in \mathcal{Z}(L)$。我们称$(p_0, \ldots, p_{t-1}) \in \mathbf{C}[\lambda]^t$ 为在 $\mathbf{C}[L]$-基 $\mathcal{G}$中的坐标。

我们可以将 P 视为由 ϕ_L 代入一个关于$\mathbf{C}[\lambda, \mu]$ 的多项式所得, 该多项式关于 $\mu_1, \ldots, \mu_{t-1}$是线性的。

引理 4.4. 设 $q(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}[\lambda, \mu]$ 是 $\overline{\mu}$ 中的一个线性多项式。当且仅当 $q \in \operatorname{BC}(L)$ $q = 0$。

证明。 回忆 $\operatorname{BC}(L) = \ker(\phi_L)$。假设 $q \neq 0$ 和

$$q(\lambda, \overline{\mu}) = q_0(\lambda) + q_1(\lambda)\mu_1 + \ldots + q_{t-1}(\lambda)\mu_{t-1},\ q_i \in \mathbf{C}[\lambda].$$

若 $q_i(\lambda) \neq 0$, 则求和项 $q_i(\lambda)\mu_i$ 经 ϕ_L 代入后得到一个阶与 $\operatorname{ord}(G_i)$ 模 n 同余的算子。由定理 3.1, 对所有 $j \neq i$, $\operatorname{ord}(\phi_L(q_i(\lambda)\mu_i)) \neq \operatorname{ord}(\phi_L(q_j(\lambda)\mu_j))$。因此,

$$\operatorname{ord}(\phi_L(q)) = \max\{\deg_\lambda(q_i)n + \operatorname{ord}(G_i) \ :\ i \in \{0, \ldots, t-1\}\} \geq 0,$$

或者等价地, $\phi_L(q) \neq 0$。 □

5 Burchnall-Chaundy 理想的 Gr¨obner 基

本节将给出本文的主要结果, 即计算常微分算子 $L \in \mathbb{K}[\partial]$ 的 Burchnall-Chaundy 理想的 Gr¨obner 基。假设我们已经计算出 $\mathcal{Z}(L)$ 作为 $\mathbf{C}[L]$-模的 Goodearl 基 $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots, G_{t-1}\}$。

我们的目标是给出理想 $\operatorname{BC}(L)$ 的一个 Gr¨obner 基, 并使其具有这样的特殊性质: 多项式在 $\mathbf{C}[\lambda, \mu]$ 中关于该 Gr¨obner 基的标准形是关于 $\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_{t-1}\}$ 的线性形式。为此, 我们在 $\mathbf{C}[\mu]$ 上定义加权单项式序 $<_w$, 赋予权重 $w(\mu_i) := \operatorname{ord}(G_i)$。若将 $\mathbf{C}[\mu]$ 中的单项式记为 μ^α , 其中 $\alpha \in \mathbb{N}^{t-1}$, 则其权重为 $w(\mu^\alpha) := \sum_{i=1}^{t-1} w(\mu_i)\alpha_i$。固定字典序 $<_{ord}$ 后, 定义加权单项式序 $<_w$: 若 $\operatorname{ord}(G_i) < \operatorname{ord}(G_j)$, 则设 $\mu_i <_{ord} \mu_j$ 。更准确地说, 比较 μ 中的单项式时, 先比较其权重; 权重相同时则按字典序比较。乘积序、加权单项式序和字典序单项式序的定义见 [10] 。

定义 5.1. 我们在 $\mathbf{C}[\lambda,\mu]$ 上定义乘积序 $<$，其由变量 $\{\overline{\mu}_1,\ldots,\mu_{t-1}\}$ 上的加权序 $<_w$ 构成，并假设对所有$k\in\mathbb{N}$，$\mu_i>\lambda^k$成立。将 $\mathbf{C}[\lambda,\mu]$ 中的单项式记为 $\lambda^k\mu^\alpha$，其中 $\alpha\in\mathbb{N}^{t-1}$, $k\in\mathbb{N}$，则可得

$$\lambda^k\mu^\alpha\preceq\lambda^\ell\mu^\beta\Leftrightarrow\mu^\alpha<_w\mu^\beta\text{ or }\mu^\alpha=\mu^\beta\text{ and }k<\ell. \tag{10}$$

考虑 G_i 和 G_j，它们属于 $\mathcal{G}$，且可能相同。由于二者均为 $G_i,\ G_j\in\mathcal{Z}(L)$，显然有 $G_iG_j=G_jG_i\in\mathcal{Z}(L)$。我们可以唯一地写成:

$$G_iG_j=G_jG_i=p_{i,j,0}(L)+p_{i,j,1}(L)G_1+\ldots+p_{i,j,t-1}(L)G_{t-1},$$

对于唯一的多项式 $p_{i,\ j,\ k}(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]$。因此，$\mathcal{Z}(L)$ 的一个 $\mathbf{C}[L]$-基 $\mathcal{G}$ 确定了以下多项式集合

$$R_{i,j}(\lambda,\overline{\mu}):=\mu_i\mu_j-p_{i,j,0}(\lambda)-\sum_{k=1}^{t-1}p_{i,j,k}(\lambda)\mu_k, \tag{11}$$

对每个 $i,\ j\in\{1,\ldots,t-1\}$ 都成立。显然，$R_{i,\ j}(\lambda,\ \mu)\in\mathrm{BC}(L)$，因为

$$\phi_L(R_{i,j})=R_{i,j}(L,G_1,\ldots,G_{t-1})=0.$$

这些多项式 $R_{i,\ j}$ 构成一组非常强的关系，可以将 $\mathbf{C}[\lambda,\mu]$ 中关于变量 $\overline{\mu}$ 的多项式的总次数降至一。这是以下结果背后的主要思想。

命题 5.2。 设 L 是 $\mathbb{K}[\partial]$ 中一个阶为 n 的微分算子。$\mathcal{Z}(L)$ 的每个$\mathbf{C}[L]$-基 $\mathcal{G}$ 都确定一个格罗布纳基

$$\mathcal{B}_\mathcal{G}:=\{R_{i,j}(\lambda,\overline{\mu})\ :\ i\le j\in\{1,\ldots,t-1\}\} \tag{12}$$

关于单项式序 $<$ 的 $(\mathcal{B}_\mathcal{G})$ 。

证明。考虑由 $\mathcal{B}_\mathcal{G}$ 在 $\mathbf{C}[\lambda,\mu]$中生成的理想 $I=(\mathcal{B}_\mathcal{G}$。根据定义 2.1，$\mathcal{B}_\mathcal{G}$ 是 I 的 Gr¨obner 基，当且仅当 $\ell(I)=\ell(\mathcal{B}_\mathcal{G})$。由于 $\mathcal{B}_\mathcal{G}\subset I$，我们有 $\ell(B_\mathcal{G})\subseteq\ell(I)$。给定一个非零 $p\in I$，有两种情况:

1. 若 $\deg_\mu(\ell(p))>1$，则存在 $r\in\mathcal{B}_\mathcal{G}$ 使得 $\ell(r)$ 整除 $\ell(p)$，因为$\ell(\mathcal{B}_\mathcal{G})$ 包含 μ 中所有可能的二次单项式。因此 $\ell(p)\in\ell(\mathcal{B}_\mathcal{G})$。2. 若 $\deg_\mu(\ell(p))\le 1$，则 p 是关于 μ_1、.....、μ_{t-1} 的一次式，并且根据引理 4.4，$p\notin\mathrm{BC}(L)\supset I$。

因此，$\ell(I)\subseteq\ell(\mathcal{B}_\mathcal{G})$，所以相对于给定的单项式序 $<$，$\mathcal{B}_\mathcal{G}$ 是理想 I 的 Gr¨obner 基。 □

命题5.2 表明，多项式集合 $\mathcal{B}_\mathcal{G}$ 具有强大的计算结构。除其他性质外，现在我们可以将任意多项式$p\in\mathbf{C}[\lambda,\mu]$ 化为多项式 $\tilde{p}$，使得对于每个 $i\le j\in\{0,\ldots,n-1\}$，都有 $\ell(\tilde{p})<\ell(R_{i,j})$。特别地，任意多项式$p\in\mathbf{C}[\lambda,\mu]$ 相对于 $\mathcal{B}_\mathcal{G}$的标准形是变量 μ的线性多项式。

定理 5.3。 设 L 是 $\mathbb{K}[\partial]$ 中一个阶为 n 的微分算子，且 $\mathcal{G}$ 是其中心化子 $\mathcal{Z}(L)$ 的$\mathbf{C}[L]$-基。那么，$\mathcal{B}_\mathcal{G}$ 是 *BC* 理想$\mathrm{BC}(L)$ 关于单项式序 $<$ 的 *Gr¨obner* 基。

证明。令 $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ 如（12）所述，并令 $p \in \mathrm{BC}(L)$。现在我们对 p 关于 $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$进行约化，得到

$$p = q + \tilde{p},$$

其中 $q \in (\mathcal{B}_{\mathcal{G}})$ 且 $\tilde{p}$是 p的标准形。特别地，由于 $(\mathcal{B}_{\mathcal{G}}) \subset \mathrm{BC}(L)$，我们得到 $\tilde{p} \in \mathrm{BC}(L)$。但我们知道 $\tilde{p}$ 关于 μ是线性的。利用引理 4.4，我们得出 $\tilde{p} = 0$,¯因此 $p \in (\mathcal{B}_{\mathcal{G}})$。 □

现在我们介绍计算 BC(L) 的算法 2 的主要思想：通过计算 Gröbner 基 $R_{i,j}$, 对于 $i, j \in \{1, \ldots, t-1\}$, 中的多项式 ¨， $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$。该算法在 $\mathbf{C}[\lambda, \mu]$ 中使用多_元除法，采用定义 <5.1中的单项式序 μ ，该单项式序根据 $\mathbf{C}[L]$-基 $\mathcal{G}$中算子的阶对变量加权。

对于多项式 $p \in \mathbf{C}[\lambda, \mu]$，可以用这种除法检查$p \in$ BC(L) 是否成立。我们将计算商 $q \in$ BC(L) 及其标准形 $\tilde{p}$，使得 $p = q + \tilde{p}$。令 $P = \phi_L(p)$。若 ord(P) $\equiv$ ord(G_i) (mod n) 且 ord(P) $\geq$ord(G_i)，其中某个 $i \in \{1, \ldots, t-1\}$，则可写为 ord(P) $= kn +$ ord(G_i)。考虑 $r = p -$ lc(p)$\lambda^k \mu_i$。显然， $R = \phi_L(r) = P -$ lc(P) $L^k G_i$ ，且满足 ord(R) $<$ ord(P)。更确切地说，我们可以迭代这一过程。令 $q = 0$ 且 $\tilde{p} = 0$:

- 如果 $P = 0$: 那么 $p \in$ BC(L)，因此令 $q \leftarrow q + p$，并终止。
- 如果对所有 $i \in \{1, \ldots, t-1\}$，ord(P) $\not\equiv$ ord(G_i)（模 n）：那么 $p \notin$ BC(L)，令 $\tilde{p} \leftarrow p$ 并终止。
- 假设对某个 $i \in \{1, \ldots, t-1\}$，ord(P) $\equiv$ ord(G_i)（模 n）。有两种可能：– ord(P) $\geq$ ord(G_i): 按上述方法计算 r 和 R ，并令 $q \leftarrow q +$lc(p)$\lambda^k \mu_i$, $p \leftarrow r$, $P \leftarrow R$ ，重新开始。– ord(P) $<$ ord(G_i): 那么 $p \notin$ BC(L)，因此令 $\tilde{p} \leftarrow p$ 并终止。

下一个算法，即算法 1，进一步检查算子$P \in \mathbb{K}[\partial]$ 是否属于中心化子 $\mathcal{Z}(L)$, 同时计算中心化子中一个算子的坐标，如定义 4.3所述。算法 1也可用于任何包含 L 的交换 $\mathbf{C}$-代数，前提是已按照定理 L 计算出一个$\mathbf{C}[L]$-模基，如定理 3.2所述。

在算法1的第 2 步中，我们定义映射 $\mathcal{G}$: $\mathcal{O} \to \mathcal{Z}(L)$，它将一个同余类（模 n）映射为 Goodearl 基中对应的元素，该元素的阶与此元素同余。

例 5.4（例 3.3的续篇）。考虑算子 G_1 和 G_2，如例 3.3 中所述，以及它们的乘积 $G_1 G_2$。这是一个阶为 $9 = 3 \cdot 3$,

算法 1： 作为模约化 _ _

输入： P 属于 $\mathbb{K}[\partial]$； L属于 $\mathbb{K}[\partial]$ ，且为标准形；Goodearl 基 $\mathcal{G} = \{G_0, \ldots, G_{t-1}\}$ 作为 $\mathcal{Z}(L)$ 的 $\mathbf{C}[L]$-模。

输出： P在 $\mathcal{G}$ 中的坐标（$p_0, \ldots, p_{t-1}$），若 $P \in \mathcal{Z}(L)$，则返回 错误 否则。

$n \leftarrow$ord(L);
$\mathcal{O} \leftarrow \{ord(G_i)$（模 n）： $i = 0, \ldots, t-1\}$;
$\mathcal{G} \leftarrow \{ord(G_i)$（模 n）$\mapsto G_i$： $i = 0, \ldots, t-1\}$;
$p_i \leftarrow 0$ 对于 $i = 0, \ldots, t-1$;
当 $\mathrm{ord}(P) \geq n$ **时**
    $m_0 \leftarrow$ ord(P)（模 n）；
    如果 $m_0 \notin \mathcal{O}$ **则**
        return 错误;
    $G \leftarrow \mathcal{G}(m_0)$;
    如果 ord(P) $<$ ord(G) **则**
        return 错误;
    $k \leftarrow$ （阶(P) $-$ 阶(G)） $/n$; // 精确除法
    $p_{m_0} \leftarrow p_{m_0} +$ lc$(P)\lambda^k$;
    $P \leftarrow P -$ lc$(P)L^k G$; // 降低 P 的阶
如果 $P \neq 0$ **那么**
    返回 错误;
返回 $(p_0, \ldots, p_{t-1})$;

因此，算子 $G_1G_2 - L^3$ 的阶严格更小：

$$\begin{aligned} G_1G_2 - L^3 = &-\frac{4}{3}\partial^7 + \left(\frac{16}{9} - \frac{56}{3\cosh(x)^2}\right)\partial^5 + \frac{224\sinh(x)}{3\cosh(x)^3}\partial^4 \\ &+ \left(\frac{224}{\cosh(x)^4} - \frac{544}{3\cosh(x)^2} - \frac{64}{27}\right)\partial^3 \\ &+ \left(\frac{640}{3\cosh(x)^3} - \frac{448}{\cosh(x)^5}\right)\sinh(x)\partial^2 \\ &+ \left(\frac{512}{\cosh(x)^4} - \frac{896}{9\cosh(x)^2} - \frac{448}{\cosh(x)^6}\right)\partial \end{aligned}$$

为约化这个 7 阶算子，我们利用 $7 = 3 + 4$，因此可以用 $\frac{4}{3}LG_1$ 对其进行约化。这得到算子

$$G_1G_2 - L^3 + \frac{4}{3}LG_1 = \frac{-64}{27}\partial^3 - \frac{128}{9\cosh(x)^2}\partial = -\frac{64}{27}L.$$

因此，我们得出结论：

$$G_1G_2 = L^3 - \frac{4}{3}LG_1 - \frac{64}{27}L.$$

计算多项式$R_{i,\ j}(\lambda,\ \mu)$，其中 $i \leq j \in \{1, \ldots, t-1\}$ 现在很直接。我们可以通过计算乘积 G_iG_j ，然后将它们约化为算子 G_0、.....、G_{t-1}和 L的线性组合来实现。该算法在算法2中描述。

算法 2： BC 理想

输入： L in $\mathbb{K}[\partial]$ 的标准形；Goodearl 基 $\mathcal{G} = \{1, G_1, \ldots, G_{t-1}\}$ 对于 $\mathcal{Z}(L)$，作为一个 $\mathbf{C}[L]$-模。

输出： 关于 Burchnall-Chaundy 理想 BC(L) 的 Gröbner 基，关于单项式序 $<_{\circ}$

对于 $i = 1, \ldots, t-1$ **执行**
  对于 $j = i, \ldots, t-1$ **执行**
    $(p_0, \ldots, p_{t-1}) \leftarrow$ 作为模约化$(G_i \cdot G_j, L, \mathcal{G})$;
    $R_{i,j} \leftarrow \mu_i \mu_j - \sum_{l=0}^{t-1} p_l(\lambda)\mu_l$;
返回 $\{R_{i,j}(\lambda, \mu) : i \le j \in \{1, \ldots, t-1\}\}$;

例5.5（例5.4的续）。我们使用BC 理想算法来计算 BC(L) 的格罗布纳基，其中算子 L 如例3.4所示。我们需要使用算法$\mathbf{C}[L]$-基 $\mathcal{G} = \{1, G_1, G_2\}$ 计算每个算子G_1^2、G_1G_2 和 G_2^2 在其中的坐标作为模约化。然后使用变量 λ、μ_1 和 μ_2 将这些计算转化为多项式。

G_1^2 是一个 $8 = 3 + 5$ 阶算子，因此我们首先用 LG_2 进行约化，得到一个与 $\frac{8}{3}L^2$ 一致的 6 阶算子。由此我们得到多项式 $R_{1,1} = \mu_1^2 - \lambda\mu_2 + \frac{8}{3}\lambda^2$。

对于 G_1G_2，我们已在例 5.4 中展示了细节，从而得到多项式 $R_{1,2} = \mu_1\mu_2 + \frac{4}{3}\lambda\mu_1 + \left(\frac{64}{27}\lambda - \lambda^3\right)$。

最后，我们计算算子G_2^2，它依次被算子 L^2G_1（10 阶）、LG_2（8 阶）、L^2（6 阶）和 G_1（4 阶）约化，得到多项式 $R_{2,2} = \mu_2^2 + \left(\frac{64}{27}\lambda - \lambda^2\right)\mu_1 - \frac{4}{3}\lambda\mu_2 - \frac{32}{9}\lambda^2$。综合以上结果，我们得到

$$\mathrm{BC}(L) = (R_{1,1}, R_{1,2}, R_{2,2})\,.$$

由于 L 的阶为 3，BC 理想也可以用微分结式计算，如 [30] 中所述。更精确地说，BC(L) $= (f_1, f_2, f_3)$，其中 $f_i = \partial\mathrm{Res}(L - \lambda, G_i - \mu_i)$，$i = 1,2$ 以及 $f_3 = \partial\mathrm{Res}(G_1 - \mu_1, G_2 - \mu_2)$。

例 5.6（续例 3.4）。我们使用算法BC 理想 来计算 Gröbner 基 BC(L)，针对算子 L，如例 3.4 中所述。我们需要计算在 $\mathbf{C}[L]$-基 $\mathcal{G} = \{1, G_1, G_2, G_3\}$ 中的坐标，使用算法 1，针对每个算子

$$G_1^2, \quad G_1G_2, \quad G_1G_3, \quad G_2^2, \quad G_2G_3, \quad G_3^2.$$

我们得到由 $\mathcal{G}$ 确定的 BC(L) 的 Gröbner 基，其形式为 BC(L) $=$

$(R_{1,\,1},\ R_{1,\,2},\ R_{1,\,3},\ R_{2,\,2},\ R_{2,\,3},\ R_{3,\,3})$，其中

$$
\begin{aligned}
R_{1,1} =& \mu_1^2 + \left(\frac{3g_2}{4} + 1 - \lambda\right)\mu_2 + \frac{27g_3}{4}(\lambda - 1),\\
R_{1,2} =& \mu_1\mu_2 + (1-\lambda)\mu_3,\\
R_{1,3} =& \mu_1\mu_3 + \frac{27g_3}{4}\mu_2 + \left(\frac{9g_2^2 + 15g_2 + 4}{4}\right.\\
& \left. - \frac{9g_2^2 + 30g_2 + 12}{4}\lambda + \frac{15g_2 + 12}{4}\lambda^2 - \lambda^3\right),\\
R_{2,2} =& \mu_2^2 + (1 + 3g_2) - (6g_2 + 3)\,\lambda + (3g_2 + 3)\,\lambda^2 - \lambda^3,\\
R_{2,3} =& \mu_2\mu_3 - \left(\lambda^2 - (3g_2 + 2)\,\lambda + (3g_2 + 1)\right)\mu_1,\\
R_{3,3} =& \mu_3^2 - \left(\lambda^2 - \frac{15g_2 + 8}{4}\lambda + \frac{9g_2^2 + 15g_2 + 4}{4}\right)\mu_2\\
& + \left(\frac{27g_3}{4}\lambda^2 - \frac{(81g_2 + 54)g_3}{4}\lambda + \frac{(81g_2 + 27)g_3}{4}\right).
\end{aligned}
$$

注意，在这种情况下，$\mathcal{Z}(L)$ 有一个秩为 2 的$\mathbf{C}[L]$-子模，即 $\mathcal{A}_2 = \mathbf{C}[L, G_2] = \mathbf{C}[L] \oplus \mathbf{C}[L]G_2$，因为 $\operatorname{ord}(G_2) \equiv 2$ (模 4)，其$\mathbf{C}[L]$-基为 $\mathcal{G}_2 = \{1, G_2\}$。在这种情况下，$\mathrm{BC}(\mathcal{A}_2) = (R_{2,\,2})$，Gr¨obner 基就是 $\{R_{2,2}\}$，而 $R_{2,\,2}$恰好是 $L - \lambda$ 和 $G_2 - \mu_2$ 的微分结式。

要将该算法应用于其他交换子代数，例如 $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}[L, G_1]$（或 $\mathbf{C}[L, G_3]$），我们使用 Goodearl 基 $\mathcal{G}_1$ 来定义同态 $\phi_{\mathcal{A}_1}$，将 $\lambda \mapsto L$、$\mu_1 \mapsto G_1$、$\mu_2 \mapsto G_1^2$ 和 $\mu_3 \mapsto G_1^3$ 映射到相应对象。然后应用 BC 理想算法，求得 BC 理想 $\mathrm{BC}(\mathcal{A}_1)$ 的 Gr¨obner 基。在这种情况下，直接赋值 $\mu \mapsto G_1$ 会简洁得多，并可得到$\mathbf{C}[L, G_1]$，它与$\mathbf{C}[\lambda, \mu]/(f)$ 同构，其中 f 是 $L - \lambda$ 和 $G_1 - \mu$ 的微分结式。

BC 理想 $\mathrm{BC}(L)$ 包含由 $\{L - \lambda, G_i - \mu_i$ 中所有成对元素的微分结式的根式生成的理想：$i = 1$、……、$t - 1\}$。对于 $\operatorname{ord}(L) > 3$，这些理想通常并不相同。

6 Burchnall-Chaundy 理想的素性

为了研究谱问题（$L - \lambda$）（y）$= 0$，在假设 $\mathcal{Z}$（L）非平凡的情况下，$\mathcal{Z}$（L）$\neq \mathbf{C}[L]$，我们必须考虑一个包含 $\mathbb{K}$和谱参数 λ的系数域，但同时要反映出 λ 并非自由参数这一事实。相反，它受谱曲线 Γ的支配，见 [3, 22, 30, 29]。

在第4节中，我们指出，对于任意具有 $L \in \mathbb{K}[\partial]$ 且中心化子非平凡的微分算子，Burchnall-Chaundy 理想 $\mathrm{BC}(L) \subset \mathbf{C}[\lambda, \mu]$ 始终是素理想，因为商环

$$
\mathbf{C}[\Gamma] := \frac{\mathbf{C}[\lambda, \overline{\mu}]}{\mathrm{BC}(L)} \tag{13}
$$

是一个与 $\mathcal{Z}(L)$ 同构的整环。

考虑由 $\mathrm{BC}(L)$ 在多项式环 $\mathbb{K}[\lambda, \mu]$ 中生成的微分理想 $[\mathrm{BC}(L)]$。回顾一下，$\mathrm{BC}(L)$ 由常系数

多项式 BC(L) $=(\mathcal{B}_\mathcal{G})$ 生成，而这些多项式又由由给定的 $\mathcal{Z}(L)$ 的 $\mathbf{C}[L]$-基确定的 Gr¨obner 基 $\mathcal{B}_\mathcal{G}=\{R_{i,j}\}$ 生成。注意，$\overline{[\mathrm{BC}(L)]}$ 实际上是由 $\{R_{i,j}\}$ 在 $\mathbb{K}[\lambda,\mu]$ 中生成的理想

$$[\mathrm{BC}(L)]=(R_{i,j}\ :\ i,j\in\{1,\dots,t-1\})\,. \tag{14}$$

因此我们可以考虑商环

$$\mathbb{K}[\Gamma]:=\frac{\mathbb{K}[\lambda,\overline{\mu}]}{[\mathrm{BC}(L)]}, \tag{15}$$

其中包含 $L-\lambda$，这里我们仍将 λ 记为类 $\lambda+[\mathrm{BC}(L)]$。~此外，$\mathbb{K}[\Gamma]$ 是一个微分环，其扩展导子 ∂ 定义如下：

$$\tilde{\partial}(f+[\mathrm{BC}(L)])=\partial(f)+[\mathrm{BC}(L)]. \tag{16}$$

在本节中，我们利用以下事实：$\mathcal{B}_\mathcal{G}$ 是¨关于变量 L 上单项式序 $<$ 的 Gr λ *ö* μ_1*bner* 基；该单项式序定义于 μ_{t-1}，见定义 5.1，从而证明扩展理想 $[\mathrm{BC}(L)]$ 也是一个素微分理想。尽管这一结果直观上成立，却无法像证明 BC(L) 那样证明：同态 ϕ_L 无法扩展到微分环 $\mathbb{K}[\lambda,\mu]$，因为 $\mathbb{K}$ 的非恒定元素与 ∂不交换。

命题 6.1。给定 $L\in\mathbb{K}[\partial]$ 和 $\mathcal{Z}(L)$ 的一个 $\mathbf{C}[L]$-基 $\mathcal{G}$。集合 $\mathcal{B}_\mathcal{G}=\overline{\{R_{i,j}\}}$ 是 $\overline{[\mathrm{BC}(L)]}$ 关于 $\mathbb{K}[\lambda,\mu]$ 中单项式序 $<$ 的 *Gr¨obner* 基。

证明。首先注意到，由于 $\mathcal{B}_\mathcal{G}$ 是 BC(¨) 关于 L 的 Gröbner 基，$<$在 $\mathbf{C}[\lambda,\mu]$中，所有 S-多项式都可约化为零 [10]。当我们将 $\mathcal{B}_\mathcal{G}$ 视为扩张理想的生成元集合时[$\mathrm{BC}(L)$]，这一事实并未改变。因此，$\mathcal{B}_\mathcal{G}$ 也是扩张理想 ¨BC( ]L 的 Gröbner 基]。 □

接下来我们将证明，微分环 $\mathbb{K}[\Gamma]$ 是一个整环，或者等价地，微分理想 [BC(L)]是素理想。为此，我们将把定义 5.1 之前给出的权函数 w扩展到变量集合 $\{\lambda\}\cup\mu$中的单项式 $\mathcal{M}$，定义 $w(M):=\mathrm{ord}(\phi_L(M))$，对每个 $M\in\mathcal{M}$均成立。因此 $w(\lambda)=\mathrm{ord}(L)$ 且 $w(\mu_i)=\mathrm{ord}(G_i)$，$i=1$，.....，$t-1$。

引理 6.2. 对于每个正权 $W\in\mathbb{N}$，至多存在一个在 $\mathcal{M}$ 中关于 μ 线性的单项式 T_W，其权为 W。 $\overline{\ }$

证明。假设 $\mathrm{ord}(L)=n$。若 $W\equiv 0\pmod n$，那么只有单项式 $\lambda^{W/n}$的权为 W。否则，给定 $\mathbf{C}[L]$-基 $\mathcal{G}=\{G_0,G_1,\dots,G_{t-1}\}$，由定理 3.1可知，$\mathrm{ord}(G_i)\not\equiv\mathrm{ord}(G_j)\pmod n$ 对于 $i\neq j$。因此，至多存在一个指标 $i\in\{1,\dots,t-1\}$ 满足 $\mathrm{ord}(G_i)\equiv W\pmod n$。我们可以写成

$$W=a\,\mathrm{ord}(L)+\mathrm{ord}(G_i).$$

若 $a\geq 0$，则 $\lambda^a\mu_i$ 的权为 W。若 $a<0$，则不存在权为 W 的单项式。 □

回想一下，$\mathcal{B}_\mathcal{G}$ 的多项式具有非常特定的形式

$$R_{i,j}=\mu_i\mu_j+L_{i,j} \tag{17}$$

其中 $L_{i,\ j}$ 关于 μ 是线性的。由于单项式序 $<$，用 $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ 对任意多项式进行约简，等价于（按任意顺序）将乘积 $\mu_i\mu_j$ 替换为相应的多项式 $L_{i,\ j}$。根据构造，多项式 $L_{i,\ j}$ 与 $\mu_i\mu_j$ 的权重完全相同，因此进行代换时，我们只能影响权重小于或等于 $\mu_i\mu_j$ 的项。

给定多项式 f 属于 $\mathbb{K}[\mathcal{B}_{\mathcal{G}}]$，其标准形 f 是变量 μ 中的线性多项式。因此，每个商环 $f+[\ \ L\ ]$ BC( ) 的等价类 $\mathbb{K}[\Gamma]$ 都有一个代表元 f，它是 μ 中的线性多项式。引理 6.2 特别有用，因为它表明最高权项 f 是唯一的。因此，当我们将这两个代表元相乘时，乘积中存在唯一的最高权项。

定理 6.3。 商环 $\mathbb{K}[\Gamma]$ 是一个微分整环。

证明。 考虑商环 $\mathbb{K}[\Gamma]$ 中的两个非零元素

$$F_1 = f_1 + [\mathrm{BC}(L)],\ \ F_2 = f_2 + [\mathrm{BC}(L)], \tag{18}$$

其代表元为 f_1，$f_2 \in \mathbb{K}[\lambda,\mu]$ 且相对于 $[\mathrm{BC}(L)]$ 已经约化。我们知道，f_1，f_2 是 μ 中的线性多项式，因此它们的最高权项具有 $\lambda^{a_1}\mu_{i_1}$ 和 $\lambda^{a_2}\mu_{i_2}$ 的形式。我们允许 $i_1 = 0$ 或 $i_2 = 0$，并在该项是 λ 中的单项式时考虑 $\mu_0 = 1$。

乘积 F_1F_2 有代表元 f_1f_2，其最高项具有 $\lambda^{a_1+a_2}\mu_{i_1}\mu_{i_2}$ 的形式。若 $i_1 = 0$ 或 $i_2 = 0$，则不存在能够消去该项的约化，这意味着 $F_1F_2 \neq 0$。若 i_1 和 i_2 都不为零，则我们将 $\mu_{i_1}\mu_{i_2}$ 替换为 $L_{i_1,\ i_2}$，从而生成一个最高权重项，其权重与 $\lambda^{a_1+a_2}\mu_{i_1}\mu_{i_2}$ 相同，但关于 μ 是线性的。这个新项无法通过任何先前或后续的代换消去，因此 f_1f_2 不会约化为零多项式，且 $F_1F_2 \neq 0$。

这表明，商环中两个非零元素的乘积始终非零，因此 $\mathbb{K}[\Gamma]$ 是一个整环。 □

推论 6.3.1. 微分理想 $[\mathrm{BC}(L)]$ 是 $\mathbb{K}[\lambda,\mu]$ 中的一个素理想。

现在，我们可以考虑域 $\mathbb{K}(\Gamma)$ 的分式域 $\mathbb{K}[\Gamma]$，并赋予它自然的扩展导子 ∂。这是用于研究谱问题（$L-\lambda$）（y）$=0$ 的新系数微分域（$\mathbb{K}$（Γ）∂）。

对于薛丁格算子，即处于正规形式的二阶常微分算子，谱皮卡-维西奥扩张域在 [22] 中得到了定义。它们是通过（$\mathbb{K}(\Gamma)$）的基本解系得到的微分扩张，其中（$L-\lambda(y)$）$=0$，且不扩张常数域。对于薛丁格算子，已证明 $\mathbb{K}(\Gamma)$ 的常数域为 $\mathbf{C}(\Gamma)$。现在，我们可以着手研究任意阶代数几何常微分算子的皮卡-维西奥扩张。

7 结论与后续工作

本文研究了 Burchnall-Chaundy 理想的结构。这些理想定义了任意微分域 $\mathbb{K}$ 上系数的常微分算子 L 的中心化子 $\mathcal{Z}(L)$ 中各元素之间的关系。我们的结果基于中心化子的 $\mathbf{C}[L]$-模结构；K. Goodearl [12] 及许多其他作者此前研究过这种结构，而近期开发的符号算法则可用于计算中心化子 [15]。

我们设计了一种算法，用于计算常系数$\mathbf{C}[\lambda, \mu]$多项式环中 BC 理想的一组生成元。此外，我们证明，给所选变量 μ赋予权重后，这组生成元构成关于变量 λ，μ中单项式乘积序 $<$的 Gr¨obner 基。由此，我们能够有效计算常微分算子交换环的谱曲线 Spec($\mathcal{A}$)，尤其是中心化子 $\mathcal{Z}(L)$的谱曲线 Γ 。

此外，借助这些 Gr¨obner 基，关于 BC 理想的多项式的标准形是变量集 μ 中的一个线性多项式。这使我们能够直接证明一些重要结果，从而为谱问题 $(L-\lambda)(y) = 0$发展 Picard-Vessiot 理论。本文证明了素理想 BC（L）生成了素微分理想 [BC（L）]，它位于 $\mathbb{K}[\lambda, \mu]$中，因此可以考虑包含 $L-\lambda$ 的微分整环 $\mathbb{K}[\Gamma]$ 及其分式域 $\mathbb{K}$（Γ）。在这个新的系数域 $\mathbb{K}$（Γ）上，我们将能够计算 $L-\lambda$ 的右因子，并开发有效算法，以计算 $(L-\lambda)(y) = 0$ 的解，从而计算著名的 Baker-Akheizer 函数 [18, 31]。

这些结果不仅具有理论意义，相关算法还已在 SageMath 的开源软件包 dalgebra 中实现。该软件包仍在积极开发中，可从以下地址免费获取

https://github.com/Antonio-JP/dalgebr [a]

在 0.0.8 版本中，我们在代码库中添加了一个 Jupyter 笔记本，其中包含本文的所有示例以及扩展计算，可作为展示如何使用该软件的范例。可通过以下链接访问该笔记本：

https://github.com/Antonio-JP/dalgebra/blob/ISSAC-2026/notebooks/ ISSAC26_ PaperExamples.ipynb

致谢

所有作者均部分获得项目资助 PID2021-124473NB-I00“算法微分代数与可积性”（ADAI）的支持，该项目由西班牙 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 和 FEDER、欧盟资助。

作者谨向 Carlos D’Andrea 和 Carlos Arreche 致谢，感谢他们在访问马德里期间就这些主题进行的极具启发性的讨论。

参考文献

[1] M. Atiyah 和 I. G. Macdonald。《交换代数导论》。Addison-Wesley 数学系列。Longman Higher Education，英国英格兰哈洛，1969年6月。

[2] N. Bourbaki。《代数 I》。Springer，德国柏林，第1版，1998年8月。

[3] A. Braverman、P. Etingof 和 D. Gaitsgory。量子可积系统与微分伽罗瓦理论。《Transformation Groups》，2(1)：31–56，1997年3月。

[4] M. Bronstein。《符号积分 I》。Springer Berlin Heidelberg，柏林，1997。

[5] B. Buchberger 和 F. Winkler。序言。载于 B. Buchberger 和 F. Winkler（编），《Gr》¨*obner* 基与应用，第 vii–vii 页。剑桥大学出版社，剑桥，1998年2月。[6] J. Bueso、J. G´omez-Torrecillas 和 A. Verschoren。《非交换代数的算法方法》。Klumer Academic Publishers，Springer Dordrecht，2003年。[7] I. Burban 和 A. Zheglov。魏尔斯特拉斯三次曲线上的傅里叶–穆凯变换与可交换微分算子。《国际数学杂志》，29(10):1850064，2018年9月。[8] J. L. Burchnall 和 T. W. Chaundy。可交换常微分算子。《伦敦数学会会刊》，s2-21(1):420–440，1923年。[9] J. L. Burchnall 和 T. W. Chaundy。可交换常微分算子 II——恒等式 pn =qm。《伦敦皇家学会会刊。A辑，数学与物理类论文集》，134(824):471–485，1931年12月。[10] D. A. Cox、J. Little 和 D. O'Shea。《理想、簇与算法》。数学本科生教材。Springer，纽约州纽约市，第2版，1996年11月。[11] I. M. Gel'fand 和 L. A. Dikey。Sturm-Liouville 方程预解式的渐近行为与 Korteweg-de Vries 方程代数。《俄罗斯数学综述》，30(5):77–113，1975年。[12] K. R. Goodearl。微分、伪微分和分数阶微分算子环中的中心化子。《落基山数学杂志》，13(4):573–618，1983年。[13] A. Jimenez-Pastor、S. L. Rueda、M.-A. Zurro、R. Hernandez Heredero 和 R. Delgado。计算常微分算子的近似可交换基与 Gelfand-Dickey 层级。《计算机科学中的数学》，19(1)，2025年5月。[14] A. Jim´enez-Pastor 和 S. L. Rueda。用于 SageMath 的 D-Algebra 软件包，2025年。[15] A. Jim´enez-Pastor 和 S. L. Rueda。常微分算子中心化子的有效计算，2025年。[16] E. R. Kolchin。《微分代数与代数群》。纯数学与应用数学第54卷。学术出版社，马萨诸塞州波士顿，1973年。[17] I. M. Krichever。代数几何方法在非线性方程理论中的应用。《俄罗斯数学综述》，32(6):185–213，1977年12月。[18] I. M. Krichever。常线性微分算子的交换环。《泛函分析及其应用》，12(3):175–185，1978年7月。[19] P. Kumbhakar、U. Roy 和 V. R. Srinivasan。一阶微分方程的分类。《代数杂志》，644:580–608，2024年4月。

[20] P. Kumbhakar 和 V. R. Srinivasan。强正规扩张与代数微分方程，2025年。[21] S. Lang。《代数》。Springer New York，纽约，2002年。[22] J. J. Morales、S. L. Rueda 和 M.-A. Zurro。代数几何的 Schr¨odinger 算子的谱皮卡-维西奥扩域。傅里叶研究所年刊，71(3):1287–1324，2022年3月。[23] J. J. Morales-Ruiz、S. L. Rueda 和 M.-A. Zurro。利用微分次结式对 KdV Schr¨odinger 算子进行因式分解。应用数学进展，120:102065，2020年9月。[24] M. Mulase。代数曲线上的向量丛范畴与无限维 Grassmann 流形。《国际数学杂志》，01(03):293–342，1990年9月。[25] M. Mulase。常微分算子的交换代数的几何分类。微分几何杂志，19:13–27，1990年。[26] D. B. Mumford。对可交换算子的代数几何构造，以及 Toda晶格方程、科特韦格–德弗里斯方程和相关非线性方程的解。载于《国际代数几何研讨会论文集》（京都大学，京都，1977年），第115–153页，东京，1978年。纪伊国屋书店。[27] E. Previato 和 G. Wilson。微分算子与秩2向量丛。组合数学，81(1):107–119，1992年。[28] J. F. Ritt。《微分代数》。美国数学会，美国，英国版，1950年。[29] S. L. Rueda。论常微分算子中心化子的分类：一种有效微分代数方法，2025年。[30] S. L. Rueda 和 M.-A. Zurro。三阶常微分算子的谱曲线。《公理》，13(4):274，2024年4月。[31] R. J. Schilling。诺伊曼系统的推广——曲线理论方法，第三部分：n阶系统。纯粹与应用数学通讯，45(7):775–820，1992年8月。[32] G. Segal 和 G. Wilson。环群与 KdV 型方程。IH ´ES 数学出版物，61(1):5–65，1985年12月。[33] J.-L. Verdier。´代数微分方程。载于《布尔巴基研讨班：1977/78年，第507–524讲》，第20卷，《布尔巴基研讨班：1980/81年，第561–578讲》，第101–122页。施普林格出版社，柏林/海德堡，1979年。[34] G. Wilson。代数曲线与孤子方程。载于 E. A. 等编《今日几何》，第303–329页，波士顿，1985年。Birkh¨auser。[35] A. Zheglov。可交换常微分算子的代数、几何与分析，2020年4月。