arXiv:2602.11432v1 [math.LO] 11 Feb 2026

范畴性与非算术福克斯群

JOHN T. BALDWIN 和 Joel Nagloo

摘要。设 $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{R})$ 是一个有限余体积的第一类非算术福克斯群，并设 j_Γ 是相应的一致化函数。本文引入一种自然的$L_{\omega_1,\ \omega}$- 公理化T^{∞}_{SF}，用于研究将 j_Γ 视为覆盖映射的理论。我们证明，T^{∞}_{SF} 在所有无限基数上都具有范畴性，这将 Daw 和 Harris 在算术情形下得到的早期结果推广到了非算术情形。我们还证明，相关的一阶理论 T_{j_Γ} 是完备的，允许量词消去，并且是 ω-稳定的。

1. 引言

设 $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{R})$ 是一个第一类、有限余体积的福克斯群，并设 $j_\Gamma : \mathbb{H}_\Gamma \to S_\Gamma(\mathbb{C})$ 是一致化函数，其中 $\mathbb{H}_\Gamma := \mathbb{H} \cup C_\Gamma$，而 C_Γ 是 Γ 的尖点集合。因此，j_Γ 是一个 Γ-自守函数：一个将光滑射影曲线 $S_\Gamma(\mathbb{C})$ 实现为商空间 $\Gamma \setminus \mathbb{H}_\Gamma$ 的覆盖映射。这一经典情形源自庞加莱和克莱因在二十世纪之交的研究，处于复分析、双曲几何和自守函数理论的交汇处。

本文借鉴了两方面从模型论视角研究函数 j_Γ 的工作。一方面，Bl´azquez-Sanz、Casale、Freitag 和 Nagloo 的研究（参见[CFN21], [BCFN21]）完整刻画了由 j_Γ所满足的施瓦茨导数微分方程在 $\mathcal{X}_\Gamma$ 中定义的结构，其中 $\mathcal{X}_\Gamma$ 是一个微分闭域。他们的工作表明，几何群论中的一条关键分界线——群 Γ的算术性——完全决定了解集 $\mathcal{X}_\Gamma$中解之间代数关系的复杂程度。粗略地说，他们证明，福克斯群 Γ 是算术的，当且仅当 $\mathcal{X}_\Gamma$ 不是 ω-范畴的；换言之，当且仅当该解集具有无穷多个“代数对称性”。Margulis 的一项基本结果表明，无穷多个“Hecke”对应（等价地，大的可公度化子 Comm(Γ)）的存在，刻画了该群的算术性。特别是，Bl´azquez-Sanz、Casale、Freitag 和 Nagloo 的工作的一项主要成果，是证明这些“Hecke”对应涵盖了 $\mathcal{X}_\Gamma$中的所有代数关系。

模型论中研究 j_Γ 的第二条工作路线同样关注范畴性问题，但考察的是不可数基数，而非 $\aleph_0$。具体来说，可以将 j_Γ： $\mathbb{H}_\Gamma \to S_\Gamma$（$\mathbb{C}$）视为自然语言中的双类型结构（$\mathbb{H}_\Gamma$； S_Γ（$\mathbb{C}$））， 并为该结构的理论 T_{j_Γ} 找到一种 $L_{\omega_1,\omega}$-公理化。这一视角植根于齐尔伯计划，旨在为典范结构寻找公理化，使其在所有不可数幂下都具有范畴性。由此便能以一种“代数”的方式刻画具有内在解析性质的结构。一个自然的问题是， T_{j_Γ}是否体现了这一计划——尤其是，基数为连续统的唯一模型是否必定

日期：2026年2月13日。J. Nagloo 部分得到美国国家科学基金会资助项目 DMS-2348885 的支持。本文的部分工作是在 J. Nagloo 获得美国数学学会百年奖学金支持期间完成的。

与经典解析结构重合。Daw 和 Harris [DH17]证明，若 Γ 是算术的，那么 T_{j_Γ} 确实在所有不可数幂下都具有范畴性。后来，Eterovi´c [Ete22]将这一结果推广到更高维数中的算术统一化情形。他们的工作运用了算术几何中的深刻结果，尤其是关于伽罗瓦表示的开像定理；这些表示决定了志村簇上的海克轨道。与此同时，他们还通过 Keisler 的一个定理表明，范畴性本身能够迫使与志村簇上点相关的伽罗瓦表示满足算术性质。在更高维数的情形中，这依赖于目前仍属猜想、且与 Mumford–Tate 猜想密切相关的开像条件。

自然会问，群 Γ 的算术性是否再次为这种新意义下的范畴性划定了一条分界线。本文表明，与微分闭域的情形不同，T_{j_Γ} 的范畴性并不由 Γ 的算术性质决定。更准确地说，我们证明，当 Γ 为非算术时，理论 T_{j_Γ} 在所有不可数基数上都是范畴的。此外，非算术情形下的证明比算术情形简单得多，其结构也阐明了模型论考量与几何考量在先前结果中各自发挥的作用。

我们的论证沿用了 [DH17] 的相同模式：i) 公理化 $L_{\omega_1,\,\omega}$ 中模型的类（我们将其命名为 T^{∞}_{SF}），并通过往返法证明，除 $\aleph_0$-模型上的齐性外，该类满足拟极小优良类的所有条件（见定义 3.7.2.c、定义 5.1.1 和 5.1.2.a）；ii) 运用进一步的深层几何结果以获得所需的齐性。我们的第一个主要定理是

定理 A. *T^{∞}_{SF}的所有模型都$(\infty,\ \omega)$等价，并满足相同的 Scott 句。相应的一阶理论 T_{j_Γ} 是完备的，允许量词消去，并且是 ω-稳定的。*

与算术情形相比，证明中有两个重要的变体。第一个变体是，非算术性不仅大大简化了定理 A 的论证，还使我们能够在此处得出 ω-稳定性的结论。这一改进使得第二个变体成为可能，即用一种完全不同的论证来证明我们的下一个主要结果：

定理 B. *该类在 $\aleph_0$上对模型是齐性的，因此几乎具有准极小优良性，进而在所有无限基数上都具有范畴性。*

我们不依赖 Serre 等人的开像定理（[DH17，§5.1]），而是采用 [BHH+14] 对完全优良性的刻画（关于模型的$\aleph_0$-齐性），该刻画以不分裂为基础，因此我们通过 ω-稳定性得到这一结果。

本文的结构如下。在简要介绍福克斯群的背景知识（§ 2）之后，我们在第 3 节阐述本研究所用的形式体系。在第 4 节中，我们证明定理 A（定理 4.11），并引入确定类型这一概念，以阐明算术情形和非算术情形下的论证。在第 5 节中，我们利用 ω-稳定性和确定性这一概念，得出定理 B（定理 5.2 和定理 5.8）。

致谢。 我们感谢 James Freitag、Anatoly Libgober、Andres Villaveces，以及芝加哥—波哥大线上研讨会“Conexi´on de GALoiS”的其他参与者所给予的有益讨论。

2. 福克斯群与覆盖映射的背景

我们先回顾一些福克斯群的基本事实，这些事实将在我们的分析中发挥作用。本节的标准参考文献为 [Kat92]和 [Shi71]。

全文中， $\mathbb{H}$ 表示上半复平面，而 $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbb{R})$。对于 F（ $\mathbb{C}$的一个子域），我们将考虑 $SL_2(F)$和 $PSL_2(F)$通过线性分式变换在 $\mathbb{H}$ （以及 $\mathbb{H}^*$）上的作用：对于 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(F)$和 $\tau \in \mathbb{H}$，记作 $g \cdot \tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau := \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$。当 $F = \mathbb{R}$时，这一作用给出了 $\mathbb{H}$的所有保向等距变换。

——

设 $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{R})$为福克斯群，即 $PSL_2(\mathbb{R})$的一个离散子群。全文假设 Γ 为第一类且具有有限余体积。这分别意味着其极限集为$\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$，并且它有一个有限面积的基本域。事实上，本文中的“福克斯群”一词始终指满足这两个条件的群。对于 Γ的尖点，我们指满足如下条件的点 $\tau \in \mathbb{H}^*$： 其稳定子群 $\Gamma_\tau = \{g \in \Gamma\colon\ g\cdot\tau = \tau\}$包含一个抛物元素$\gamma \in \Gamma$，即一个迹为 $\mathrm{tr}(\gamma) := a + d = \pm 2$的元素 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$。事实上（参见 [Shi71, §1.3]）， Γ 作用于其尖点集合 C_Γ，且 Γ 在 $\mathbb{H}_\Gamma := \mathbb{H} \cup C_\Gamma$上的作用给出一个紧致黎曼曲面 $\Gamma \setminus \mathbb{H}_\Gamma$，或等价地，一个射影非奇异不可约曲线 S_Γ。注意，若 $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ 非紧致，则其非紧致性恰好发生在有限多个尖点处。对于 Γ 的自守函数（或称 Γ-自守函数），我们指定义在 $\mathbb{H}$ 上的亚纯函数 f，它在 Γ 的每个尖点处均为亚纯函数，且在 Γ的作用下保持不变：

$$f(g \cdot \tau) = f(\tau) \quad \text{for all } \ g \in \Gamma \text{ and } \tau \in \mathbb{H}.$$

通常将 Γ-自守函数构成的域记为 $\mathcal{A}_0(\Gamma)$，后者同构于曲线 S_Γ的函数域。特别地，对于Γ，有一个特殊的自守函数，记为 j_Γ： $\mathbb{H}_\Gamma \twoheadrightarrow S_\Gamma(\mathbb{C})$，称为一致化函数，它是 $\mathcal{A}_0(\Gamma)$的一个生成元。函数 j_Γ 并不唯一，因为曲线 S_Γ存在非平凡的自同构。此外，一旦指定 j_Γ 在三个点处的取值，唯一性便随之成立。以下概念是研究福克斯群的核心。

定义 2.1. 设 Γ 和 Γ' 是两个福克斯群。

(1) 若 Γ 和 Γ' 作为 $PSL_2(\mathbb{R})$的子群可交换，即 $\Gamma \cap \Gamma'$ 在 Γ 和 Γ'中均为有限指数子群，则称 Γ 和 Γ' 可交换，记作 $\Gamma \sim \Gamma'$。*(2)* Γ 的可公度化子是 $PSL_2(\mathbb{R})$ 中定义如下的子群：

$$\mathit{Comm}(\Gamma) = \{g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})\colon\ g^{-1}\Gamma g \ \textit{ is commensurable with } \Gamma\}.$$

本文主要关注非算术福克斯群。算术性的定义虽然不难，但相当复杂，因此这里不予给出。请读者参阅上述参考文献。对于我们的研究，只需考虑由 Margulis 给出的算术性的等价刻画，而且这确实至关重要。

事实 2.2 (Margulis)。 设 Γ 是一个福克斯群。那么，当且仅当 Γ 在 $\mathit{Comm}(\Gamma)$ 中的指数为无限时， Γ 是算术的。

特别是，算术福克斯群的一个特征是，在 $S_\Gamma(\mathbb{C}) \times S_\Gamma(\mathbb{C})$ 中存在无穷多个“海克”对应。下面更准确地阐述对应这一概念；请注意，非算术福克斯群只有有限多个这样的对应。如果

$g \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$ 给定后，按定义可知有三个两两可交换的福克斯群：$\Gamma, \Gamma^g := g^{-1}\Gamma g$ 以及 $\Gamma_g := \Gamma \cap \Gamma^g$。不难证明这些群具有相同的尖点集合（参见 [Shi71，命题 1.30]）。因此，Γ 和 $g^{-1}\Gamma g$ 的分别为一致化函数 j_Γ 和 $j_\Gamma \circ g$，也都是它们的公共子群 Γ_g的自守函数。庞加莱的一项经典结果表明，福克斯群的任意两个自守函数都由一个复多项式联系起来：

事实 2.3。对于每个 $g \in \mathit{Comm}(\Gamma) \setminus \Gamma$，存在一个非零多项式 $\Phi_g \in \mathbb{C}[X, Y]$，使得对于所有 $z \in \mathbb{H}$，$\Phi_g(j_\Gamma(z)\ j_\Gamma(g \cdot z)) = 0$ 和 $\Phi_g(j_\Gamma(z)\ y) = 0$，当且仅当存在某个$h \in \Gamma g \Gamma$时，$y = j_\Gamma(h \cdot z)$。

多项式 Φ_g 称为 Γ-特殊多项式，它不取决于 g 的选择，而取决于双陪集 $\Gamma g \Gamma$ [Shi71，第 51–52、76-77] 页。其存在性的证明见 [Leh64，第 185] 页。此外，事实 2.3 的完整表述也可以作为关于黎曼曲面有限分歧覆盖的命题来获得。在给出这一方法的细节之前，我们先为本文中将要使用的非算术群固定一些记号。不过请注意，由于我们只会用到 Γ的可公度化子的性质，这一论证对算术群同样成立。

记号 2.4. 设 $G = \mathit{Comm}(\Gamma)$.

(1) $[G : \Gamma] = k$ 且 $G = \cup_{i<k} \Gamma \cdot \check{}g_i$，其中 $\check{}g_i$（满足 $\check{}g_1 = e$）是一组固定的陪集代表元。*(2)* $m := m_g = [\Gamma : \Gamma_g]$ 且 $\Gamma = \cup_{i=1}^{m} \Gamma_g \cdot \epsilon_i$，其中 ϵ_i 是 Γ_g 在 Γ中的陪集代表元。

根据上述记号，对每个 $g \in G$，双陪集 $\Gamma g \Gamma$具有分解$\Gamma g \Gamma = \cup_{i=1}^{m} \Gamma \cdot g\epsilon_i$（参见 [Shi71，第 3]章）。利用事实 $m = [\Gamma : \Gamma_g]$，我们有黎曼曲面 $\Gamma_g \setminus \mathbb{H}_{\Gamma_g}$ 是 $\Gamma \setminus \mathbb{H}_\Gamma$ 的 m 叶分歧覆盖。特别地，Γ_g-自守函数的域 $\mathcal{A}_0(\Gamma_g)$ 是 $\mathcal{A}_0(\Gamma)$ 的次数为 m 的有限扩张，并且由于 $j_\Gamma \in \mathcal{A}_0(\Gamma_g)$ 与$j_\Gamma \circ g \in \mathcal{A}_0(\Gamma_g)$，我们得到 $\Phi_g \in \mathbb{C}[X, Y]$ 的存在性。此外，利用双陪集分解 $\Gamma g \Gamma = \cup_{i=1}^{m} \Gamma \cdot g\epsilon_i$，我们看到 $\Phi_g(j_\Gamma(z)\ Y) = 0$的根恰好是 $j_\Gamma(g\epsilon_i z)$，其中 $i : 1, \ldots, m$。

记号 2.5。在本文中，我们固定一个非算术福克斯群 Γ，并将其可公度化子记为 $G = \mathrm{Comm}(\Gamma)$。我们将曲线 S_Γ 所定义于其上的 $\mathbb{C}$的有限生成（在 $\mathbb{Q}$ 上）子域记为 E_0。我们将由那些 Γ-特殊多项式[1]的系数生成的 $\mathbb{C}$的有限生成（在 E_0 上）子域记为 E。

在本文中，E 将发挥与域 E^{ab} 相同的作用；在论文 [DH17] 和 [Ete22]中，E^{ab}作为 E_0的最大阿贝尔扩张发挥了这一作用。类比于算术情形，我们区分上半平面中的两类点：

事实 2.6。固定 $G = \mathrm{Comm}(\Gamma)$。每个 $a \in \mathbb{H}_\Gamma$ 对于 Γ而言要么是特殊点，要么是霍奇一般的。

(1) 霍奇一般：没有 $g \in G$ 固定 a。*(2)* 特殊：存在一个 $g \in G$，它在 $\mathbb{H}_\Gamma$ 中恰有一个或两个不动点。（由 $gz = z$ 关于 $g \in G$ 推导出的二次方程可以很容易地验证这一点。）由于 Γ 在 G 中具有有限指数且是离散的，因此特殊点至多可数，并且它们各自属于 $\mathbb{Q}$ 的二次扩张。注意，对于每个 $g \in G$，$\forall x f_g(x) \neq x$ 或 $\exists x f_g(x) = x$ 都属于 $\langle H, f_g : g \in G \rangle$ 的理论。

[1]技术　实际上，我们应写作 $E_0(\Gamma)$ 和 $E(\Gamma)$，但不会产生歧义，因为福克斯群 Γ 是固定的　d.

记号 2.7。 以下我们用 Σ 表示 Γ 的特殊点集合，并用 $Im(\Sigma)$表示集合 $\{j_\Gamma(\sigma):\ \sigma\in\Sigma\}$。

注释 2.8（特殊点的剖析）。 假设 $x\in\mathbb{H}_\Gamma$ 是特殊点。设 x 是由 $g\in G=\mathrm{Comm}(\gamma)$ 固定的点之一（至多有两个这样的点）。那么对任意 $h\in G$，hgh^{-1} 固定 hx，因此 hx 也是特殊点（且当且仅当 x 有伴点时，它也有伴点）。若 $j_\Gamma(x)=z$，那么对任意 $\gamma\in\Gamma$，$j_\Gamma(\gamma x)=z$。若 $h\in G-\Gamma$，则由事实 *2.3*，$j_\Gamma(hx)$ 在 $E(z)$ 上是代数的。

在定义 3.1 中，对于形式词汇表，我们将为每个特殊点 x 及其像 $j_\Gamma(x)$ 添加常元。这样在第 4.1 节构造往返法时，就能避免处理特殊点所产生的一些小麻烦。

注释 2.9。 显然，给定任意群 G，任意一对子群 H、$H_1\subseteq G$ 的可公度性都有明确定义。下面我们还将考虑 H 在 G 中的交换子的更一般定义，即

$$Comm_G(H):=\{g\in G:\ g^{-1}Hg\ \textit{is commensurable with}\ H\}.$$

首先，我们回顾一些无疑广为人知的基本引理。我们将给出关于一列子群 $H\subseteq\Gamma\subseteq G\subseteq G$ 的简单纯群论论证~。本文中，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$扮演 G 的角色，而 Γ 是一个非算术福克斯群。

~**引理 2.10**。 考虑一列子群 $H\subseteq\Gamma\subseteq G\subseteq G$。
(1) 若 $[\Gamma:\ H]<\omega$，则$\mathrm{Comm}_\Gamma(H)=\Gamma$。*(2)* 若 $G=\mathrm{Comm}_{\tilde G}(\Gamma)$，$[G:\ \Gamma]<\omega$，且 $[\Gamma:\ H]<\omega$，则$\mathrm{Comm}_{\tilde G}(H)=\mathrm{Comm}_G(H)=G$。~于是，$\Gamma$ 与 H 在 G中可交换，记作 $\Gamma\sim H$。

证明。 记 H_δ 为 $H^\delta\cap H$。
(1) 对任意 $\delta\in\Gamma$，$[\Gamma:\ H^\delta\cap H]<\infty$，因为 $H^\delta\cap H$ 是 Γ中两个有限指数子群的交。更容易看出，$[H:\ H^\delta\cap H]<\infty$。因此，每个 $H_\delta\sim\Gamma$ 都满足要求。(2) 对于 2，有两种情况：a) $\mathrm{Comm}_{\tilde G}(H)\subseteq\mathrm{Comm}_G(H)$：取 $\delta\in\tilde G$。若 $\delta\in\mathrm{Comm}_{\tilde G}(H)$，则 $H^\delta\sim H$。特别地，$[H:\ H_\delta]<\infty$。由共轭性，$[\Gamma^\delta:\ H^\delta]<\omega$，因此 H_δ 证明了 $\Gamma^\delta\sim H$。由于 $\Gamma\sim H$，$\Gamma^\delta\sim\Gamma$ 且 $\delta\in\mathrm{Comm}_{\tilde G}(\Gamma)=G$。也就是说，$\delta\in\mathrm{Comm}_G(H)$。
~b) $\mathrm{Comm}_G(H)\subseteq\mathrm{Comm}_{\tilde G}(H)$显然成立，因为 $G\subseteq G$。

□

以下是由 $[G$ 引出的关键区别：$\Gamma]<\omega$。引理 2.11 建立了群 H^δ 与群 H_δ 之间的一一对应关系。在算术情形下，这种对应关系同样成立。但此时存在无穷多个有限指数子群。

引理 2.11. 若 $[G:\ \Gamma]<\omega$，则 Γ 中形如 $\Gamma_\delta=\delta\Gamma\delta^{-1}\cap\Gamma$ 且满足 $\delta\in\tilde G$ 的有限指数子群只有有限多个。

~证明。 我们对 $\delta\in G$ 进行论证；根据引理 2.10，结论可推广到 $\delta\in G$。
若对于 $i=1,2$, $\delta_i\in G-\Gamma$, $\Gamma_i=\delta_i\Gamma\delta_i^{-1}\cap\Gamma$ 和 $\delta_1\Gamma=\delta_2\Gamma$，则 $\Gamma_1=\Gamma_2$。由于 $[G:\ \Gamma]<\omega$，故证毕。□

˘**记号 2.12.** 用 Γ 表示所有形如$\Gamma_\delta = \delta_\Gamma \delta^{-1} \cap \Gamma$ 且满足 $\delta \in \tilde{G}$的有限指数子群的交。

关键在于， [DH17 中 Ete22] 的论证只依赖于 Γ 的有限指数子群，且这些子群具有 $\delta\Gamma\delta^{-1} \cap \Gamma$ 的形式，其中 $\delta \in G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}^+)$。在这里，只有 $\delta \in G$ 重要，因此只会出现有限多个子群。

Anatoly Libgober 向我们指出了下面这个例子。

例 2.13（具有无限多个有限指数子群的非算术群）。 下面构造 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的无限多个非算术子群。 $SL_2(\mathbb{Z})$ 含有一个由 2 个生成元生成的自由子群（指数为 12）。后者的换位子，记作 Γ （即阿贝尔化$F_2 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^2$的核），在 F_2 中指数无限，因此在 $SL_2(Z)$ 中指数也无限，故不是算术群。因此，Γ 在 $\mathrm{Comm}_{\tilde{G}}(\Gamma)$ 中的指数有限。显然，它有无限多个子群（它们都是自由且非算术的）。 Γ 显然是自由群（并且可以论证它有无限多个生成元）。特别地，任意有限生成有限群都是 Γ 的商群。这些满射的核（即使满射到有限的二生成群）在 Γ 中给出无限多个有限指数正规子群。然而，根据引理 2.11， Γ 只有有限多个迹： Γ_δ。

3. 形式化与公理化

我们为形式系统指定词汇表。

记号 3.1（形式词汇 τ）。 双种类词汇 τ 由以下种类（一元谓词符号）组成： D 覆盖种类、 S 目标种类，以及一个 q 将 D 映射S 到该种类上的函数，还有定义在每个种类上的关系/函数。

固定一个福克斯群 Γ ，使得 $G = Comm$（Γ）。根据一致化函数 j_Γ的选择，我们得到一个标准模型（定义 *3.2*）。

（*1*）定义域种类：我们将 τ_G 记作第一种类的词汇表，其中对于每个 $g \in G = Comm(\Gamma)$都有一个一元函数符号。我们使用 f_g 来命名作用于 D 上的函数，以强调这些是词汇表中的符号，而不是模型中的元素，但通常使用较短的 $g(x)$或 gx 来代替 $f_g(x)$。

（*2*）代数簇/域种类：第二种类 τ_S的词汇表包含：对于 $S(\mathbb{C})^n$ 中定义在 L 上的每个扎里斯基闭集，有一组 $\mathcal{R}$ 关系；以及用于表示 Σ的常元和用于表示 $S(L)$中元素的常元，其中 $L = E(Im(\Sigma))$通过加入特殊点 Σ 的像扩展了 E （记号 *2.5*），这些特殊点在事实 *2.6* 中有所描述。（*3*） τ 是 $\tau_S \cup \tau_G \cup \{J\}$。（*4*）覆盖映射 J： $D \twoheadrightarrow S$。

因此，任意 τ-结构都具有如下形式：

$$M = (D_M, J, S_M) := ((D_M, \{f_g : g \in G\}), J, (S(F_M), \mathcal{R}))$$

对于某个扩张[2] L的域 F_M 。记号 3.1 是我们用于研究福克斯群的覆盖的全局词汇表。然而，在记号 3.2 中，我们使用更具描述性的词汇来描述标准模型。定义 3.7 中的公理是相对于任意福克斯群 Γ而言的；本文的新结果要求假设 $[G : \Gamma] < \omega$ 其中 $G = \mathrm{Comm}(\Gamma)$;

[2]我们写作 D_M, S_M，而不采用模型论中更标准的 $D(M)$, $S(M)$，以免与代数记号 $S(F_M)$ 混淆。

依靠事实 2.3 之后引入的记号，我们通过用形式理论描述一个原型模型，更正式地描述域排序的性质。我们写作一个 原型簇，因为先验地，其结构取决于覆盖映射**j**。

记号 3.2 （一个典型结构）。 形如（D, J, S）的标准模型为

$$\mathbb{M}_{\mathbf{j}} = ((\mathbb{H}_\Gamma, \{f_g : g \in G\}), \mathbf{j}, (S_\Gamma(\mathbb{C}), \mathcal{R}))$$

其中

(1) 覆盖（定义域）排序：（$\mathbb{H}_\Gamma, \{f_g : g \in G\}$）扩展上半平面 $\mathbb{H}_\Gamma$，群 $G = \mathrm{Comm}(\Gamma)$通过分式线性变换作用于其上。*(2)* 簇排序为 $(S_\Gamma(\mathbb{C}) \mathcal{R})$，其中 $\mathcal{R}$ 如记号 *3.1* 所述。*(3)* 映射**j** 是 Γ的 一致化函数 j_Γ 。

有时我们将 H 记作 D，或将 S 记作 S_Γ。

我们用 Th(j) 表示 $\mathbb{M}_{\mathbf{j}}$ 的一阶理论。我们将 Th(j) 与定义 3.7.1 中给出的 first order axiomatization T(j) 区分开来。我们在定理 4.11 中证明， T(j) 蕴含 Th(j)。请注意，如果选取另一个一致化函数 j'_Γ，就会得到一个不同的理论 Th(j′)，它与 Th(j) 双可解释。

3.1. **定义** $Z_{\mathbf{g}}$。 依照记号 2.4，我们描述 S^n 的一个关键子集 $Z_{\mathbf{g}}$ 。显然，该子集是 τ-可定义的，并证明它是 τ_S-可定义的（即由 S^n 的一个代数子簇切出的）。

定义 3.3。 令 $G = \mathrm{Comm}(\Gamma)$ 和 $J : H \to S$ 为覆盖映射。考虑如下形式的有限序列：$\mathbf{g} = \langle e, g_2, \ldots, g_n \rangle$，其中各项取自 G （按约定， $g_1 = e$）。我们将集合 $Z_{\mathbf{g}}$ 定义为映射 $J_{\mathbf{g}}$: $H \to S^k$ 的值域，该映射将 x映至 $\langle J(x)\ J(g_2x) \ldots, J(g_kx) \rangle$。

记号 3.4。 令 G 和 J 如上一定义所述。

(1) 对于有限序列 $\mathbf{g} = \langle e, g_2, \ldots, g_n \rangle$，我们有时将 $\langle J(x)\ J(g_2x) \ldots, J(g_nx) \rangle$ 简记为 $J(\mathbf{g}x)$。*(2)* 在有限指数的情形下，回顾（见记号 *2.4*），$\check{}\mathbf{g}$ 表示 G 中 Γ 的一组 k 个陪集代表元的固定枚举。如上所述，如果该序列按此枚举给出，我们记作 $J(\check{}\mathbf{g}x)$ 和 $Z_{\check{\mathbf{g}}}$ 。

现在，我们通过考察原型模型上 Γ-特殊多项式的消失，证明 τ_S 的可定义性。定义 3.7 中的一阶公理将这些结果转移到形式理论中。

定义 3.5. 给定 $G = Comm(\Gamma)$ 以及 $\mathbf{g} = \langle g_1 = e, g_2, \ldots, g_n \rangle$，它们来自 G。定义

$$\Psi_{\mathbf{g}} := \left\{ \Phi_{g_j g_i^{-1}}(x_i, x_j) : 1 \leq i < j \leq n \right\},$$

其中，每个 $\Phi_{g_i g_j^{-1}}$ 都是事实 *2.3* 中给出的多项式。显然， $\Psi_{\mathbf{g}}$ 是 $E[x_1 \ldots, x_n]$ 中的有限多个多项式组成的集合。

下一个引理（关于标准模型）的陈述及其证明中的论证是众所周知的，尤其是在模群的情形下，但我们未能找到具体的参考文献。

引理 3.6. 对任意来自 $G = Comm(\Gamma)$ 的 $\mathbf{g} = \langle e, g_2, \dots, g_n \rangle$，设 $V(\Psi_{\mathbf{g}})$ 为由 $\Psi_{\mathbf{g}}$ 中的多项式所定义的 $S_\Gamma^n(\mathbb{C})$ 的代数子簇。则 $Z_{\mathbf{g}}$ 是 $V(\Psi_{\mathbf{g}})$ 的一个不可约分支 $Y_{\mathbf{g}}$ 的复点。特别地，我们有 $Y_{\mathbf{g}}$ 是定义在 E 上的代数簇。

证明。设 $\mathbf{g} = \langle e, g_2, \dots, g_n \rangle$ 由 G给出。考虑群 $\Gamma_{\mathbf{g}} = \Gamma \cap (g_2^{-1}\Gamma g_2) \cap \cdots \cap (g_n^{-1}\Gamma g_n)$。由 $\mathbf{g}$ 的选取可知，$\Gamma_{\mathbf{g}}$ 是 Γ的有限指数子群。因此，$\Gamma_{\mathbf{g}}$ 是第一类福克斯群，且与 Γ具有相同的尖点集。我们将 $\Gamma \setminus \mathbb{H}_\Gamma$ 和$\Gamma_{\mathbf{g}} \setminus \mathbb{H}_\Gamma$（对应的紧黎曼曲面）以及对应的射影非奇异曲线 S_Γ 和 $S_{\mathbf{g}} := S_{\Gamma_{\mathbf{g}}}$一并考虑。我们有一个全纯映射 $f\colon \Gamma_{\mathbf{g}} \setminus \mathbb{H}_\Gamma \to (\Gamma \setminus \mathbb{H}_\Gamma)^n$，定义为 $f([z]_{\mathbf{g}}) = (\mathrm{j}(z), \mathrm{j}(g_2 z) \dots, \mathrm{j}(g_n z))$。要证明 f定义良好，也就是说不依赖于代表元的选取，只需注意映射 $\mathrm{j}_{\mathbf{g}}\colon \mathbb{H}_\Gamma \to \mathbb{C}^n$ 是 $\Gamma_{\mathbf{g}}$-不变的（见定义 3.3）。

利用紧黎曼曲面与光滑射影曲线之间的范畴等价 [GG12，命题 1.95], ，我们得到一个代数态射 $F\colon S_{\mathbf{g}} \to S_\Gamma^n$，其解析化为 f。由于 $S_{\mathbf{g}}$ 是射影的，我们有 $Y_{\mathbf{g}} := F(S_{\mathbf{g}})$ 是闭的 [Sha13，§5.2，定理 2],；又由于它是不可约的，可知 $Y_{\mathbf{g}}$ 是 S_Γ^n 的一维不可约闭子集。此外，$Z_{\mathbf{g}} = f(S_{\mathbf{g}}(\mathbb{C})) = F(S_{\mathbf{g}})(\mathbb{C}) = Y(\mathbb{C})$，因此 $Y_{\mathbf{g}} \subseteq V(\Psi_{\mathbf{g}})$。令 X 为包含 $Y_{\mathbf{g}}$ 的 $V(\Psi_{\mathbf{g}})$ 的一个不可约分支。那么 $Y_{\mathbf{g}} \subseteq X$，且二者都是 S_Γ^n 的不可约闭子集。由不可约分支的极大性，必有 $Y_{\mathbf{g}} = X$。因此，$Y_{\mathbf{g}}$ 是 V 的一个不可约分支，且 $Z_{\mathbf{g}} = Y_{\mathbf{g}}(\mathbb{C})$。□

注意到 Daw-Harris 和 Eterovi´c 在 [DH17，引理 2.6] 以及[Ete22，引理 3.22] 中，利用 Mumford–Tate 模证明了 $Z_{\mathbf{g}}$ 的可定义性，并引用了 [Mil17]。在 [Ete22] 中，$Y_{\mathbf{g}}$ 的域上的可定义性的证明似乎很困难，因为该证明被表述为以下证明的一个平凡推论：$[\phi_{\mathbf{g}}]\colon \Gamma_{\mathbf{g}} \setminus \mathbb{H} \mapsto Z_{\mathbf{g}}$ 是志村簇的态射，因而是一个特殊簇。在验证定义 3.7 中的模公理时，只需证明像的可定义性即可。

3.2. **公理**。现在我们给出无穷理论的公理：T_{SF}^{∞}（$\mathbf{j}$）。对于任意词汇表σ，我们将由 σ 中的关系/函数内的常元或变量替换所得到的原子公式，通过可数个布尔联结词以及对变量的有限序列进行量化，归纳闭包得到的公式集合记为$L_{\omega_1,\,\omega}(\sigma)$。

定义 3.7（公理）。***(1)*** $T(\mathbf{j})$ 表示以下一阶公理集（它们在原型模型 $\mathbb{M}_{\mathbf{j}}$中均成立）：***(a)*** $\mathrm{Th}(\langle \mathbb{H}, \{f_g\colon\ g \in G\rangle)$中的每个句子。这些包括“特殊点公理” SP_g：对于每个在 D中固定唯一一点的 $g \in \Gamma$。

$$\forall x, y \in D[(g(x) = x \wedge g(y) = y) \Rightarrow x = y]$$

(b) $\mathrm{Th}(S(\mathbb{C})\ \mathcal{R})$（其中 $\mathcal{R}$ 如定义 *3.1* 中所述）。
(c) 连接公理 ***(i)*** 等变公理 ***(A)*** 对于 $\gamma \in \Gamma$，
$x = \gamma y \to J(x) = J(y)$。***(B)*** 对于 $\gamma \in \Gamma$ 和 ˇg_i，
使得 $g = \gamma g_i x = gy \to J(x) = J(y)$

(ii) 模公理[3]：令 $\mathbf{g} = \langle e, g_2, \ldots, g_k \rangle$ 取自 G 和 $Y_{\mathbf{g}}$，如引理 *3.6* 所述。

$$(A) \quad Mod^1_{\mathbf{g}}: \forall x \in D \{J(x)\ J(g_2 x)\ \ldots J(g_k x)\} \in Y_{\mathbf{g}}。\quad Mod^2_{\mathbf{g}}:$$
$$\forall z \in Y_{\mathbf{g}} \subseteq S^k\ \exists x \in D(J(x)\ J(g_2 x)\ \ldots J(g_k x)) = z) \ (C)$$

$$\mathbf{MOD} = \{Mod^1_{\mathbf{g}} \wedge Mod^2_{\mathbf{g}} : \mathbf{g} \in G^m, m < \omega\}$$

(2) 我们加入无穷公理

(a) Φ_∞ 是 $L_{\omega_1,\omega}$ 句，断言对于 (D, S, J)，$S(F)$ 相对于 $\mathbb{Q}$ 的超越次数，以及强极小结构 $\langle D, \{f_g : g \in \Gamma\}\rangle$，两者都是无限的。*(b)* SF（标准纤维）表示$L_{\omega_1,\omega}$-公理：

$$(\forall x \forall y \in D(J(x) = J(y) \to \bigvee_{g \in \Gamma} x = f_g(y)).$$

(c) 我们以两种方式扩展 $T(\mathbf{j})$。*(i)* $T^\infty(\mathbf{j})$ 表示 $T(\mathbf{j}) \cup \{\Phi_\infty\}$，而 *(ii)* $T^\infty_{SF}(\mathbf{j})$ 表示 $T(\mathbf{j}) \cup \{SF\} \cup \{\Phi_\infty\}$。

当 $[G : \Gamma] < \omega$ 时，标准纤维公理可以改述为：对于每个 $e \in D$，存在$i < k$ 和 $\gamma_e \in \Gamma$，使得对于某个 $\gamma_e \in \Gamma$，有 $e = \check{}g_i \gamma_e d$。这种表述使后续的一些论证更加清晰。

注 3.8. 注意

(1) 根据引理 *3.6*，在理论 $T(\mathbf{j})$中，公理 *1(c)ii.* 在 $\mathbb{M}_j$ 中成立，因而与其他公理相容。因此，我们可以并且将会把 $Z_{\mathbf{g}}$ 与 $Y_{\mathbf{g}}$视为相同。*(2)* 由于 Gd 是任意单个元素的可定义闭包，因此任意元素的一型决定了它的轨道。特别地，对于任意 n，其轨道内只有可数多个 n-类型。

4. $L_{\infty,\ \omega}$-完备性

本节将证明，无穷理论 $T^\infty_{SF}(\mathbf{j})$ 对于 $L_{\omega_1,\ \omega}$（定义 4.1）是完备的，而由此导出的完备一阶理论 $T(\mathbf{j})$ 是 ω-稳定的，且具有量词消去性质。

定义 4。 **1.** 若对每个 $L_{\omega_1,\omega}$-句子 $\psi, \phi \Rightarrow \psi$ 或 $\phi \Rightarrow \neg\psi$，一个 $L_{\omega_1,\omega}$-句子 ϕ 完备，则

事实 4.2 (卡普定理)。 ϕ 是 $L_{\omega_1,\omega}$-完备，当且仅当 ϕ 的所有模型都彼此 (∞, ω)-等价；也就是说，它们在无量词来回论证下通过往返法等价。

本节的主要目标之一是证明，$T^\infty_{SF}(\mathbf{j})$ 的任意两个模型都是 (∞, ω)-等价的。

[3]引理 3.6 表明，模公理在 $\mathbb{M}_{\mathbf{j}}$ 中成立。因此可以一致地将它们加入这里。此外，当 $[G : \Gamma] < \omega$ 该公理仅对 $\check{}\mathbf{g}$ 是必要的。

4.1. 归约到域类型及其推论。 这里的论证大多在 τ-结构与幂后存在但明确可见的域结构之间展开。因此，我们提出

警告 *4.3*。对于模型 M 的子结构 U（其中 M 是 *T(j)* 的模型），我们将 $S = U_S$ 视为定义在子域 F_U[4] 上的一条曲线。先验地，代数簇 $V \subset S^n$ 由参数 $\boldsymbol{a}$ 定义，而这些参数不一定属于 $S(F_U)$。然而，鉴于 ACF 的稳定性，以及稳定理论中的一个基本事实：对于 M 中由 $\phi(x, b)$ 定义的任意 $A \subseteq M \models T$（其中 $b \in M$），存在 $\phi'(x, b')$，其中 $b' \in A$，使得 $\phi(x, b) \leftrightarrow \phi'(x, b')$ 在 A 上成立。由于 $\phi'(x, u)$ 是 L 上 $\mathcal{R}$ 中的一个关系，我们可以应用这一事实。因此，我们将 $S(F_U)$ 写作……，而不明确提及这一变换（参见脚注 *3* 和定理 *4.11*）。

本节我们采用以下假设。我们将得出结论：任意 $d \in D_M - D_A$ 在 A 上的 τ 类型，都由 $\mathbf{qftp}_{\tau_S}(J(\check{\mathbf{g}}(d))/A)$ 确定（定义 4.7）。

假设 4.4. 假设 $k = [G : \Gamma] < \omega$。将 $\langle x, \check{g}_1 x, \ldots \check{g}_k x\rangle$ 简记为 $\check{\mathbf{g}}(x)$。令 $M = \langle D, J, S\rangle$ 为 T(j)的一个模型。假设 A 是 M 的子结构，其排序为 $D_A := A \cap D$ 和 $S_A := A \cap S$，且 J 将 D_A 映 onto S_A。此外，F_A 在域 L 上有限生成，域 L 在记号 2.5 中定义。

Γ的非算术性在此处的关键作用是

注 4.5. 由于 J 在 Γ的每个陪集上为常数，且 $[G : \Gamma] = k$，因此对于任意 $d \in D$ 和任意 $g \in G$，$J(gd)$ 属于由 $J(\check{\mathbf{g}}(d))$ 枚举的有限集合。

注意，对于任意来自 G 的 $\mathbf{g}$，我们有 $\mathbf{g}(d) \in \mathrm{dcl}(d) = Gd \cup \{J(\check{\mathbf{g}}(d))\}$，因此，$\mathbf{g}(d)$ 在集合 X 上的无量词τ类型由 $\mathbf{qftp}_\tau(d/X)$ 蕴含。关键的是，我们现在将证明一个更强的逆命题——引理 4.8——成立。这需要稍多一些工具。

记号4.6. 使用假设 4.4 中的记号，我们在此比较词汇 τ 和 τ_S 中的类型。在下一个引理的证明中，我们将考察以下特殊形式的 τ-公式：令 $\sigma(v_1, \ldots, v_n)$ 为一个参数取自 A 的 τ_S-公式；对于任意来自 G 的元组 $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$，令 $\sigma_{\mathbf{g}}(x)$ 为 τ-公式 $\sigma(J(g_1(x)) \ldots J(g_n(x)))$。那么显然，对于任意 $d \in D_M - D_A$，

$$M \models \sigma_{\mathbf{g}}(d) \leftrightarrow M \models \sigma(J(\mathbf{g}(d))). \tag{1}$$

此外，如上所述，由于对于任意 $g \in G$，点 $J(gd)$ 都属于由 $J(\check{\mathbf{g}}(d))$ 枚举的集合，因此存在一个 τ_S-公式 $\theta(v_1, \ldots, v_k)$，使得 τ-公式 $\theta_{\check{\mathbf{g}}}(x)$ 与 $\sigma_{\mathbf{g}}(x)$ 一致。为求简便，我们将写作 θ，而不写 $\theta_{\check{\mathbf{g}}}$。

下面的例子或许会有所帮助。设 $A \subseteq M$ 如定义 4.7 中所述，且 $d \in D_M - D_A$。由于 A 对 q 封闭，$J(\check{\mathbf{g}}(d)) \cap A = \emptyset$。因此，在 $\mathrm{qftp}_{\tau_S}(d/A)$ 或 $r = \mathrm{qftp}_{\tau_S}(J(\check{\mathbf{g}}d)/A)$ 中，公式 $J(\check{g}_i d) = y$ 没有真例。r 中的公式都是域公式，其自由变量属于 $v_1, \ldots v_k$，其中 $k = [G : \Gamma]$。公式 $\Phi_{\check{g}_j}(J(x)\ J(\check{g}_j x)) = 0$（事实 2.3）属于 $\mathrm{qftp}_\tau(d/A)$。因此，公式 $\Phi_{\check{g}_j}(v_1, v_j) = 0$ 属于 $\mathrm{qftp}_{\tau_S}(\check{\mathbf{g}}(d)/A)) = r$，反之亦然。

定义 *4.7*。分别令 $\tau_S \subset \tau$ 为 *S(F)* 和 *(D, J, S)* 的词汇，并令 $A \subseteq M \models T$*(j)*。对于 $d \in D_M - D_A$ 和 $b \in S_M - S_A$，我们称 $r = qftp_{\tau_S}(J(\check{g}(d))b)/A)$ 决定 $qftp_\tau(db/A)$，如果对于任意 $e \in D_M - D_A$，若 $J(\check{g}e)$ 实现了 r，则 $qftp_\tau(db/A) = qftp_\tau(eb/A)$。

[4] F_U 扩展了域 L。该域在记号 2.5 中定义，是通过向 E S的定义域添加 Im(Σ) 中元素的名称得到的。

由于 Γ 不是算术的，$\mathbf{qftp}_\tau(d\mathbf{b}/A)$ 是 k-类型，因为 $J(Gd)$ 是有限的。在算术情形下，需要一个无穷序列 $g_i d$, $g_i \in G$。下一个引理的一个关键假设（假设 4.4）是 J 将 D_A 映射到 S_A 上。在定理 4.11 中，满足该结构为有限生成这一要求的同时，很容易得到这一点。在定理 5.8 的证明中，这将由 $A = M$ 在几何中是闭的这一假设推出。

对序列 $\mathbf{b}$ 进行集合论运算时，实际上指的是对由 $\mathbf{b}$ 枚举出的集合进行运算。

引理 4.8. 使用假设 *4.4* 中的记号，对于任意满足 $\mathbf{b}\cap J(\check{\mathbf{g}}(d)) = \emptyset$ 且满足 $\mathbf{b}\cap Gd = \emptyset$ 的 $\mathbf{b}$，有 $r = \mathbf{qftp}_{\tau_S}(\check{\mathbf{g}}(d)\mathbf{b}/A)$ 决定 $\mathbf{qftp}_\tau(d\mathbf{b}/A)$。

证明。这里我们处理单元素 d；在注记 5.7 和定理 5.8 的证明中，我们将推广到有限序列$\mathbf{d}$。因此，设 $d \in D_M - D_A$。我们先假设 $\mathbf{b}$ 为空。设 $e \in D_M$，且 $\check{\mathbf{g}}d$ 和 $\check{\mathbf{g}}e$ 实现了在 A 上相同的无量词 τ_S-类型 r。

注意，在一个变量中可能出现在 $\mathbf{qftp}_\tau(d/A)$ 中且不涉及域公式的原子公式有两类。i) $J(x) = a$ 对某个 $a \in A$ 成立；它们全都为假，因为 A 在 J 下封闭。ii) $g(x) = x$；它们全都为假，因为所有 $d \in D_M - D(L)$ 都是霍奇一般的。这也说明，没有这类原子公式能够区分 $D_M - D_A$ 中的元素。事实上，它们都满足这些公式的否定。

如记号4.6所述，仍需考虑形如$\check{}\theta(x)$的公式，它们出现在 $r_1 = \mathbf{qftp}_\tau(d/A)$与 $r_2 = \mathbf{qftp}_\tau(e/A)$中。若$\check{}\theta(x) \in r_1$，利用等价（1），我们得到$\theta(\mathbf{v}) \in r = \mathbf{qftp}_{\tau_S}(J(\check{\mathbf{g}}d)/A)$。我们关于 $J(\check{\mathbf{g}}e)$也实现 r的假设，再次利用等价（1），可得 $\theta(x) \in r_2$。交换 $J(\check{\mathbf{g}}d)$与 $J(\check{\mathbf{g}}e)$的角色，可得 $r_1 = r_2$

现假设$\mathbf{b} \neq \emptyset$。回想我们假设 $J(\check{\mathbf{g}}(d)) \cap \mathbf{b} = \emptyset$。因此，在$\mathbf{qftp}_\tau(J(\check{\mathbf{g}}d)\mathbf{b}/A)$–$\mathbf{qftp}_{\tau_S}(J(\check{\mathbf{g}}d)\mathbf{b}/A)$中不存在来自 $\tau - \tau_S$的正公式。由于$\mathrm{qtp}_{\tau_S}(\check{\mathbf{g}}(d))\mathbf{b}/A)$蕴含$\mathrm{qtp}_{\tau_S}(\check{\mathbf{g}}(d))/A)$，而后者又蕴含$\mathrm{qtp}_{\tau_S}(\check{\mathbf{g}}(d))/A)$，证明完成。□

4.2. **来回法**。在这里的证明以及 [DH17 中，我们实际上是在一个扩张中进行论证：该扩张通过取子结构 U，U'使其由（在 L 上）有限生成的域 L_U, $L_{U'}$ 给出。尽管论证中有限生成的步骤只能通过警告 4.3 专门化到 $S(F)$，但最后的来回法是直接成立的：两个结构之间的来回法会立即确定任意相对化约化上的来回法。

定义 4.9（来回方案）。固定 $M = (D, J, S(F))$ 和 $M' = (D', J', S(F'))$ 这两个 T(j) 的模型。注意，$F := F_U$且 $F' : F_{U'}$。考虑 M 和 M'的有限生成子结构集合（其中一些生成元可能代数独立），以及部分同构 I 的集合，满足：对每个 $f \in I$，$\mathrm{dom}\, f$ 和 $\mathrm{rg}\ f$ 都是如假设 4.4 中所述在 L 上有限生成的。该系统 I 的一个典型成员 f 的 dom 为 $f = U = D_U \cup S_U$。由于 U有限生成，D_U由有限个 $x \in D$的 G-轨道组成；S_U是 $S(L_U)$，其中 L_U是由 L 生成的域[5]（因为 L 中的元素都已命名），但现在又加入了 $x \in D_U$所对应的 $J(x)$ 的坐标。为 M'定义一个类似的子系统，并在对应对象上加撇号以作标记。

[5]注意，纳入轨道所得到的额外点只确定有限多个新的域元素，因为 J 在每个轨道上都是常数，因此该域仍是有限生成的。

我们的任务是证明这个方案具有往返性质。注意，根据定义， D 中的每个点要么是霍奇一般点，要么是特殊点（因此已在词汇表中命名）。因此，在构建来回系统时，我们可以且将忽略特殊点。

记号 4.10。对于集合 A 上的类型 $r(v)$ 以及从 A 到 B的同构 f， $f(r)$ 是所有B-公式 $\phi(v, f(\mathbf{a}))$ 的集合，其中 $\phi(v, \mathbf{a}) \in r$。

由于我们的主要目标涉及不可数模型，因此必须处理具有无限超越次数的模型，而这一性质在$L_{\infty,\omega}$ 等价下保持不变。因此，我们将范围限制在这种情形。

定理 4.11。假设 M和 M'满足T^{∞}_{SF}(j)。那么，上文定义的 qf-系统是它们之间的无量词 来回 系统。因此，存在唯一的可数模型 M，它是$T^{\infty}_{SF}(p)$ 的模型，从而 $T^{\infty}_{SF}(p)$ 由$L_{\omega_1,\omega}$中的完备句公理化，该句是M的*Scott*句[6]。此外，一阶理论 T（j） 是完备的，并且允许量词消去。

证明。我们的来回方案给出了一个同构 f，介于 $U \subseteq M$和 $U' \subseteq M'$之间。注意， f限制为从 D_U到 D'_U 的 G-等变单射，并且是 $S(L_U) \subseteq S(F)$ 与 $S(L_{U'}) \subseteq S(F')$ 之间的双射，且固定 $L = E(\Sigma)$。这里我们分别将 F, F'和 $F_U, F_{U'}$记作.....

对于 $x \in M - U$，我们必须找到 $x' \in M'$，使得 $f \cup \{\langle x, x'\rangle\}$生成由 $U \cup \{x\}$和 $U' \cup \{x'\}$生成的结构之间的同构。若对于某个 $d \in D = D_F$，有 $x \in S(F)$、 $x = J(d)$，那么找到 d'，使其生成由 $U \cup \{d\}$和$U' \cup \{d'\}$生成且包含 $x' = J(d')$ 的结构之间的同构，即已足够。因此，我们将问题归结为情形 $x \in D - D_U$。不过请注意，由于 J映射到 $S(F)$ 上，我们最终会考察来自 $S(F)$ 的每个有限序列。

因此令 $x \in D - D_U$（从而是霍奇一般的）。如引理 4.8 所示，令 $r = \mathrm{qftp}^{\tau_S}(J(\check{\mathbf{g}}(x))/U)$。由于 r 中的公式都定义在 L_U 上，且 f 是 L_U 与 $L_{U'}$之间的同构，因此 $f(r)$ 是关于 $L_{U'}$的有限生成元集的相容类型。令 W_r 为 $S(F)^n$ 的包含 $J'(\check{\mathbf{g}}(x))$ 且定义在 L_U上的极小子簇。根据 $Mod^1_{\mathbf{g}}$及极小性，由于 $J(\check{\mathbf{g}}(x))$ 包含于 $Z_{\check{\mathbf{g}}}(F)$，可知 W_r包含于 $Z_{\check{\mathbf{g}}}(F)$。我们需要找到 $x' \in D'$，使得 $J(\check{\mathbf{g}}(x'))$ 满足 $f(r)$。由于 $Z_{\check{\mathbf{g}}}(F)$ 定义在 L上， $f(Z_{\check{\mathbf{g}}}(F)) = Z_{\check{\mathbf{g}}}(F')$ 且

$$f(W_{U,d}) \subseteq f(Z_{\check{\mathbf{g}}}(F)) = Z_{\check{\mathbf{g}}}(F').$$

现在在 $L_{U'}$上，类型 $f(r)$ 确定了一个极小簇 $W'_{f(r)}$，它满足 $W'_{f(r)} \subseteq f(W_{U,d})$。根据我们对 F' 的超越次数的假设（回想一下 $F' \models T^{\infty}_{SF}$(j)），我们可以在 $Z_{\check{\mathbf{g}}}(F')$ 中找到 $W'_{f(r)}$的一个 $L_{U'}$-一般点 h。现在由 $Mod^2_{\mathbf{g}}$ 可知，在 D'_U 中存在一个 x'，使得 $J'(\mathbf{g}(x')) = h$。现在利用引理 4.8，我们有 $r = \mathrm{qftp}^{\tau_S}(\check{\mathbf{g}}(x)/L_U)$ 确定了 $\mathrm{qftp}^{\tau}(x/L_U)$，类似地， $f(r)$ 确定了 $\mathrm{qftp}^{\tau}(x'/L_{U'})$。由此可得， $f \cup \{\langle x, x'\rangle\}$ 在由 $U \cup \{x\}$ 和 $U' \cup \{x'\}$ 生成的结构之间生成一个同构，这正是我们要证明的。

因此， T^{∞}_{SF}(j) 的所有模型都是 (∞,ω)-等价的。特别是，标准模型 $M_{\mathbb{Q}^*}$（定义于可数的~~ω~~-饱和代数闭域之上） $\mathbb{Q}^*$ 是理论 T^{∞}_{SF}(j) 的唯一可数模型；该理论（必然）是完备的$L_{\omega_1,\omega}$ 理论 [Bal09, §6]。

此外，根据紧致性，每个满足 T(j) 的模型 $M \models^{\infty}_{SF}$ 都有一个满足 T^{∞}(j) 的 ω-饱和一阶初等扩张 M_1。这个模型不满足 SF，因为对于任意 $d \in D$， $p^{-1}(p(d))$ 都会包含无穷多个不属于 d 的 Γ-轨道的元素。但是，每个 M_2 的限制

[6]每个可数结构都可以由一个 $L_{\omega_1,\omega}$ 句子刻画，即它的 Scott句。

$p^{-1}(p(d))$ 到 d 的 Γ-轨道上，是满足 $T_{SF}^{\infty}(\mathbf{j})$ 的 M 的一个初等扩张。对于 ω-饱和模型这一类，往返论证同样适用。因此， $T(\mathbf{j})$ 可以消去量词，且是完备的 [Pil02，命题 29]。□

由 $T(\mathbf{j})$ 的完备性，我们可以将其等同于 $\mathrm{Th}(\mathbf{j})$。

推论 4.12. 一阶理论 $T(\mathbf{j})$ 是 ω-稳定的。

证明 由引理 4.8，对 $T(\mathbf{j})$ 的任一模型，元素 d 在 D_M 上的每个无量词型 τ-类型由其到 $\mathrm{qtp}_{\tau_S}(\tilde{\mathbf{g}}(d)/S_M)$ 的限制所决定。由于 S_M 的理论是 ω-稳定的，这样的类型只有 $|M|$ 个。□

注意，在此阶段不能用算术情形中的同一论证推出 ω-稳定性，因为在该情形中， D 中元素 d 的每个无量词型由代数簇 $S(F_M)$ 中一个无穷序列的类型所决定。

5. 几乎拟极小优良性

正如 [BV24], 所指出的，在维数大于一时，要证明覆盖的范畴性，需要使用 otop 方法。不过，对于曲线，采用 [BZ11, $\mathrm{BHH}^{+}14$] 中的方法稍作变体即可。

定义 5.1 (拟极小优良几何)。 设 K 是一类 L-结构，且 $M \in K$ 上存在一个闭包关系 cl_M，将 $X \subseteq M$ 映射到 $\mathrm{cl}_M(X) \subseteq M$，并满足以下性质。若 $\mathrm{cl}_M(X) = X$，我们记作 $X \leq M$。

(1) 基本条件
(a) 每个 cl_M 都在 M 上定义一个预几何。*(b)* 对每个 $X \subseteq M$，$\mathrm{cl}_M(X) \in K$。*(c)* 可数闭包性质（*ccp*）：若 $|X| \leq \aleph_0$，则 $|\mathrm{cl}(X)| \leq \aleph_0$。

(2) 齐性
(a) 若一类模型 K 满足 $\aleph_0$-**齐性于** $\emptyset$，则 K 中的模型两两量词消去意义下回合等价（定义 *4.9*）。*(b)* 若一类模型 K 满足 $\aleph_0$-模型间齐性 $G \in$，其中 G 为空集或 K 中的一个可数成员，则对任意 H, H'，若 $G \leq H, G \leq H', H$，则它们在 G 上量词消去意义下回合等价，其中 H'。

(3) 如果任意模型 $H \in K$ 的论域都包含在任意极大cl-独立集 $X \subseteq H$ 的almost quasiminimal $\mathrm{cl}(X)$ 中，则称 K 为almost quasiminimal 。*(4)* 我们将满足条件 *1)* 至 *3)* 的类称为几何的几乎准极小优良类 [$\mathrm{BHH}^{+}14$]。

之所以加上“几乎”，是因为在我们的情形中有两个相互代数相关的“泛型”类型。关键结果[Zil05b, $\mathrm{BHH}^{+}14$, BV24]是：

定理 5.2。 如果 K 是几乎拟优良几何的一个类，那么 K 在所有不可数基数上都具有范畴性。

定义 5.3。 对于 $(D, J, S(F)) \models T_{SF}^{\infty}(\mathbf{j})$ 以及 X 一个子结构（回想一下 $D_X = X \cap D$ 和 $S_X = X \cap S(F)$），我们定义，

$$\mathrm{cl}(X) = \mathrm{acl}(q^{-1}(\mathrm{acl}(q(D_X)))) \cup \mathrm{acl}(S_X)$$

其中 acl 表示通常的模型论意义下的代数闭包。

我们还需要一个步骤，即定理 5.8，才能证明 T_{SF}^{∞}(j) 的模型几乎是拟极小优良的。关键在于应用事实 5.4；这需要先做一些准备。回顾一下，根据定义，若存在实现相同类型的 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in M$，且存在一个公式 $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，使得 $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{b}_1) \wedge \neg\phi(\mathbf{x}, \mathbf{b}_2) \in p$，那么 $p = \mathrm{tp}(\mathbf{a}/M)$ 就在 $A \subset M$ 上分裂。

事实 5.4。 [BHH+14，推论 5。5] 若 K 满足"优良性"的所有条件，除了模型上的 $\aleph_0$-齐性之外，则以下命题等价。

(1) 若 $M \leq_{\mathrm{cl}} N \in K$，$M$ 可数，且 $\mathbf{a} \in N - M$，则存在 M 的有限子集 X，使得 $\mathrm{tp}(\mathbf{a}/M)$ 不在 X 上分裂。*(2) K* 满足模型上的 $\aleph_0$-齐性。

我们需要一个观察结果来应用这一方法。由于不可约曲线是强极小的，因此有：

事实 5.5。 任意不可约曲线上的诱导一阶理论都是强极小的，因此在所有无限基数下都是范畴性的。

注记 5.6。 *[单个轨道的自同构]* 注意，对于任意 $d \in D(\mathbb{M})$，其轨道 Gd 属于 d 的可定义闭包（由一元函数可知）。但是，Γ 的自同构群对 $\check{}g_i\Gamma$ 有自然作用，对每个 $i \leq k$ 都如此。因此，对于任意 $M \leq \mathbb{M}$，$\mathrm{aut(Gd/M)} \cong \mathrm{Aut}(\Gamma) \bigoplus \mathrm{G}/\Gamma$。

回顾一下，在 [BHH+14] 中，类型是无量词类型，并且我们已在定理 4.11 中证明了 T(j) 的量词消去。下面的注记将在下一个定理的证明中用到。

注记 *5.7*。设 M 和 N 是 T_{SF}^{∞}*(j)* 的模型，且满足 $M \leq_{\mathrm{cl}} N$。两个元素 d、$e \in N$ 之间可能存在以下关系。若 e 不在 d 的 G 轨道中，则 $r =$ *qtp*$_\tau$*(da/M)* 决定了 *qtp*$_\tau$*(da/M)*，因为 G 的作用无法引入任何新信息。若 $g \in G$ 满足 $e = gd$，则有几种可能。显然，若 $g \in \Gamma$，则 *j(d) = j(e)*。若 $g \in \Gamma f \Gamma$，则Φ_f *(j(d), j(e)) =* 0；更进一步，若 g 和 e 属于 G 中 Γ_k 的同一个陪集，则 *j(d) = j(e)*。

范畴性结果可由定理 5.2 和下述内容立即得到。

定理 5.8。 T_{SF}^{∞}(j)的模型，其中 cl 按 *5.3* 中的定义，构成一个几乎拟极小的优良类。

证明。 根据 4.8 和 5.4：1) $\rightarrow$ 2)，我们只需证明：对于 T_{SF}^{∞}(j) 的模型 $M \leq_{\mathrm{cl}} N$，以及任意有限元组$\mathbf{e} \in N - M$，存在 M 的有限子集 X，使得 $\mathrm{tp}_\tau(\mathbf{e}/M)$ 不在 X 上分裂。我们依据第 4.1 节中将类型约化到域排序的方法。对于任意 $d \in D_N$，记 $\check{}\mathbf{g}(d)$ 为 $\langle \check{}g_1(d) \ldots \check{}g_k(d) \rangle$。

我们如下将$\mathbf{e}$改为 $\mathbf{a} \in (N - M)$，记作$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$。令$\mathbf{a}_1' \in D_N - D_M$对于 $D_N - D_M$ 中与$\mathbf{e}$相交的每一个轨道（设共有 r' 个）都包含一个d_i。

为此，我们从$\mathbf{e}$ 中选择一个分量，使其对每个与$\mathbf{e}$ 相交的 G-轨道 $[e_i]$ 都属于 D_N，从而构成$\mathbf{a}_1$。我们可以作此限制，因为 $[e_i]$ 中的任何其他元素都可描述为某个$g \in G$的 ge_i。选择$\mathbf{a}_2 \in S_N - S_M$ 作为元组 $\langle J(\check{}\mathbf{g}(d_i)) : i < r \rangle$，必要时通过向$\mathbf{a}_1$添加某些点的像来扩充$\mathbf{e}$。最后，令$\mathbf{a}_3$ 为$((S_N - S_M) \cap \mathbf{e}) - \mathbf{a}_2$（长度为 m）。

注意，对于 $N - M$中的任意序列$\mathbf{f}$和$\mathbf{h}$，以及任意理论，若$\mathbf{qftp(f}\,/M)$在有限 $X \subset M$ 上分裂，则$\mathbf{qftp(fh}/M)$也在 X上分裂，且见证相同。注意，根据事实 2.3，$\mathbf{a}_2$ 的各分量之间不存在特殊多项式可定义关系，尽管每个 $J(\check{}\mathbf{g}(d_i))$内部都存在此类关系。

证明其余部分的关键在于：根据引理 4.8 中$\mathbf{a}_2$ 的扩张下的单调性，并且由于 $\check{}\mathbf{g}(d_i) \subseteq \mathbf{a}_2$,，我们知道 $\mathbf{qftp}_{\tau S}$ $(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3/M)$ 决定了每个 i 的 $\mathbf{qftp}_\tau(d_i/M)$。我们将证明，若 $\mathbf{qftp}_\tau(\mathbf{a}/M)$ 在某个有限 $X \subset M$ 上分裂，就会与此矛盾。

首先注意，$\mathbf{qftp}_\tau(\mathbf{a}_1/M)$ 不可能在 D_M 的任何有限子集上分裂，因为 $\mathbf{a}_1$ 的每个元素都与 D_M 的任何元素没有关系（因为 M 是轨道的并），而且 D_N 上只有一元运算。同样，由于 M 在 J 下封闭，$\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$ 的每个元素都与 D_M 的任何元素之间不存在无量词关系。因此，分裂的任何见证都必须出现在 S_M。

根据 S_M 的 ω-稳定性，取有限的 X，使得 $\mathbf{qftp}_{\tau S}(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3/M)$ 不在 X 上分裂。我们断言，这种不分裂性延伸到 $p = \mathbf{qftp}_\tau(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3/M)$，即它在同一个 X 上不分裂。

由引理 4.8，$\mathrm{qftp}_{\tau S}(\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3/M)$ 决定 $\mathrm{qftp}_\tau(d_i\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3/M)$，其中 $1 \le i \le r$。此外，由于 d_i 位于不同轨道中，对于所有 $g \in G$ 以及任意 $i, j, gd_i \neq d_j$，还有，$J(gd_i) = J(\check{}g_i(d_i))$ 当且仅当 $g \in \check{}g_i\Gamma$。因此，$\mathrm{qftp}_{\tau S}(\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3/M)$ 决定 $\mathrm{qftp}_\tau(\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3/M)$；现在我们推得 $p = \mathrm{qftp}_\tau(\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3/M)$ 不在 X上分裂。将 p的变量记作 uvw，其中 u 的长度为 r，v 的长度为 $r \times k$，分别以 $v_{i,j}$ 为索引，对应于 $1 \le i \le r$ 和 $1 \le j \le k$，而 w 的长度为 m。回想 $k = [G : \Gamma]$。

如果 $p = \mathrm{qftp}_\tau(\mathrm{a}/M)$ 在 X上分裂，那么必定存在 b_1 和 b_2，它们在 X上实现相同的类型，并且存在一个公式 $\theta(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{z})$，使得 $\theta(\mathrm{a}, \mathrm{b}_1)$ 和 $\neg\theta(\mathrm{a}, \mathrm{b}_2)$ 都满足 p。由于 $\mathrm{qftp}_{\tau S}(\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3/M)$ 不在 X上分裂，u_i 必定出现在 θ中。更确切地说，公式 $J(\check{}g_i u_\ell) = v_{\ell,i}$ 必定以正向出现于 θ 中，至少对一个 $i \le k$ 和 $\ell \le r$而言。

根据引理 5.5，S_M 是强极小的，因此 [BL71]有限齐次。于是，存在 α 的一个自同构 S_M，它逐点固定 X，并将 b_1 映到 b_2；而且（由不分裂性）固定 $\mathrm{qftp}_{\tau S}(\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3/M)$，因此也固定 $\mathrm{qftp}_\tau(\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3/M)$。由于 $\tau - \tau_S$中参数同时取自 a_1和 $\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3$的唯一（否定）原子公式，是对每个 $f \in D_M$，$J(f) \neq a_{2,j}$以及 $J(f) \neq a_{3,\ell}$作出断言，这是因为 M在 q下封闭。

如果 θ 会因$\mathbf{b}_i$的选择而取相反的真值，那么 p 和 $\alpha(p)$就是M 上两个不同的类型，它们在 $M\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$上相同。这与我们在本证明前面观察到的结论矛盾：引理 4.8意味着$\mathbf{qftp}_{\tau S}(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3/M)$决定$\mathbf{qftp}_\tau(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3/M)$。至此，定理 5.8 的论证完成。□

参考文献

[Bal09] J.T. Baldwin，《范畴性》。大学讲义第 51 卷。美国数学学会，普罗维登斯，美国，2009 年。[BL71] J.T. Baldwin 和 A.H. Lachlan，《论强极小集》。符号逻辑杂志，36:79–96，1971 年。[BV24] J.T. Bald win 和 A. Villaveces，《Zilber 的逻辑完美结构概念：泛覆盖》。模型论，第 3 卷第 2 期，647–683，2024 年。[BHH+14] M. Bays、B. Hart、T. Hyttinen、M. Kesala 和 J. Kirby，《准极小结构与优良性》。伦敦数学会通报，46:155–163，2014 年。[BZ11] M. Bays 和 B. Zilber，《任意特征代数闭域的乘法群的覆盖》。伦敦数学会通报，43:689–702，2011 年。[BCFN21] D. Bl´azquez-Sanz、G. Casale、J. Freitag 和 J. Nagloo，《Ax-Schanuel 的微分方法 I》。arXiv:2102.03384，2021 年。[CFN21] G. Casale、J. Freitag 和 J. Nagloo，《带导数的 Ax-Lindemann-Weierstrass 与亏格 }0 福克斯群。《数学年刊》，192(3)，721-765（2020）。

[CK17] V. Climenhaga 和 A. Katok，《从群到几何再返回》。美国数学学会，普罗维登斯，2017 年。[DH17] D. Christopher 和 A. Harris，《模曲线与志村曲线的范畴性》。Jussieu 数学研究所杂志，66:1075–1101，2017 年。[Ete22] S. Eterovi´c，《志村簇的范畴性》。https://arxiv.org/pdf/1803.06700.pdf。[GG12] E. Girondo 和 G. Gonz´alez-Diez，《紧黎曼曲面与儿童画导论》。LMS 研究文本第 79 卷。剑桥大学出版社，2012 年。[Kat92] S. Katok，《福克斯群》。芝加哥数学讲义，芝加哥大学出版社，1992 年，第 175 页。[Leh64] J. Lehner，《不连续群与自守函数》，《数学调查》第 VIII 卷。美国数学学会，1964 年。[Mar02] D. Marker，《模型论：导论》。施普林格出版社，2002 年。[Mil17] J.S. Milne，《志村簇导论》。https://www.jmilne.org/math/xnotes/svi.pdf，2017 年。[Pil02] A. Pillay，《模型论讲义》。https://www3.nd.edu/~apillay/pdf/lecturenotes_ modeltheory.pdf，2002 年。[Rib75] K.A. Ribet，《与模形式相关的 -进表示》。数学发明，：–。[Ser72] J.P. Serre，《椭圆曲线有限阶尖点的伽罗瓦性质》。数学发明，15:259–331，1972 年。[Sha13] I. Shafarevich，《基础代数几何》施普林格学习版，施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1977 年。[Shi71] G. Shimura，《自守函数算术理论导论》。岩波书店和普林斯顿大学出版社，1971 年。[Zil05b] B.I. Zilber，《拟最小优良类的范畴性定理》。载于 A. Blass 和 Y. Zhang（编），《逻辑及其应用》，《当代数学》第 380 卷，第 297–306 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005 年。

JOHN T. BALDWIN，数学、统计学与计算机科学系，伊利诺伊大学芝加哥分校，科学与工程办公楼322室（M/C 249），南摩根街851号，芝加哥，伊利诺伊州60607-7045电子邮箱：jbaldwin@uic.edu

JOELNAGLOO，数学、统计学与计算机科学系，伊利诺伊大学芝加哥分校，科学与工程办公楼322室（M/C 249），南摩根街851号，芝加哥，伊利诺伊州60607-7045电子邮箱：jnagloo@uic.edu