arXiv:2602.11479v1 [math.RT] 12 Feb 2026

零点处的 Temperley-Lieb 代数的模

EDDY LI 和 KENTA SUZUKI

摘要。我们明确描述了在特化 $\beta = 0$ 时、偶数 n 的 Temperley-Lieb 代数 $\mathsf{TL}_n(\beta)$ 的模范畴，并用箭图代数来刻画，这与 Berest-Etingof-Ginzburg 的一项结果相类似。特别地，我们明确构造了 $\mathsf{TL}_n(0)$ 的标准模的一个正合列，从而将关于 Jones 多项式在 $t = -1$ 处取值的一种数值巧合范畴化。此外，我们还推导出一项关于特征二域上对称群表示论的推论。

1. 引言

Temperley 和 Lieb 于1971年在研究平面格点模型时定义了 Temperley-Lieb 代数 [1, 2, 12], ，该代数与 Hecke代数、辫群以及密切相关的变体（如其仿射或幂零变形）均有联系 [9, 13, 3]。

Temperley-Lieb 代数 $\mathsf{TL}_n(\beta)$ 定义于 $\beta \in \mathbb{C}$，其参数为 $\beta \in \mathbb{C}$，具有标准模 W_ℓ^n，由与 n 奇偶性相同的整数 $\ell \leq n$ 标记。对于满足 $\beta = q^{1/2} + q^{-1/2}$ 的 $q \in \mathbb{C}$，代数 $\mathsf{TL}_n(\beta)$ 是 Hecke代数 $\mathcal{H}_n(q)$ 的一个商，而 W_ℓ^n 映射回 Specht 模 $S^{((n+\ell)/2,(n-\ell)/2)}$。当 q 不是单位根时，Westbury 通过计算 Gram 行列式证明了 $\mathsf{TL}_n(\beta)$ 的标准模不可约，因此 $\mathsf{TL}_n(\beta)$ 是半单的 [14]。当 q_是单位根时（例如 $\beta \in \{0, 1, \sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{3}, 2\}$），Temperley-Lieb 代数可能不再是半单的。Goodman 和 Wenzl 运用在临界参数值处求值的代数方法以及针对幂等元的谱分析，得到了块分解，并计算了 $\mathsf{TL}_n(\beta)$ 的不可约模维数 [8]。

1.1. **主要结果**。 本文着重研究对应于$q = -1$的特化 $\beta = 0$ 。对于这一 β取值，Ridout 和 Saint-Aubin [10] 计算了 Gram 行列式，并证明当 n为奇数时，标准模是不可约的；而当 n为偶数时，其长度为二。

我们的第一个主要结果类似于 [4, 定理1.3]，通过 Ridout 和 Saint-Aubin 对 $\mathsf{TL}_n(0)$ 的射影模P_ℓ^n的分析，给出了 $\mathsf{TL}_n(0)$ 的模范畴的明确描述。

定理1.1。 存在一个理想 J，它属于路径代数 $\mathbb{C}Q_{n/2}$ （定义见*3.1*），使得函子 $\mathbf{\Phi}$: $\mathbf{Rep}(\mathsf{TL}_n(0)) \to \mathbf{Rep}(\mathbb{C}Q_{n/2}/J)$ 由下式给出

$$\mathbf{\Phi}(X) = \mathrm{Hom}(P_2^n, X) \rightleftarrows \mathrm{Hom}(P_4^n, X) \rightleftarrows \mathrm{Hom}(P_6^n, X) \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows \mathrm{Hom}(P_n^n, X)$$

是一个 最高权范畴 $\mathbf{Rep}(\mathsf{TL}_n(0)) \simeq \mathbf{Rep}(\mathbb{C}Q_{n/2}/J)$。

日期：2026年1月29日。

范畴等价意味着TL$_n$(0) 的标准模构成一个正合列，这一点在 [6, 定理 A] 中也有提及。

定理 1.2。 设 n 为偶数。对于非负偶数 ℓ，存在同态 ϕ_ℓ^n： $W_{\ell+2}^n \to W_\ell^n$（定义见定义 4.1），使得该序列

$$0 \longrightarrow W_n^n \xrightarrow{\phi_{n-2}^n} W_{n-2}^n \xrightarrow{\phi_{n-4}^n} \cdots \xrightarrow{\phi_2^n} W_2^n \xrightarrow{\phi_0^n} W_0^n \longrightarrow 0 \tag{1}$$

是正合的。此外，集合 {像 $\phi_\ell^n \mid 0 \le \ell \le n-2, \ell \equiv 0$（模 2）} 构成TL$_n(0)$的不可约模的完全集。

映射 ϕ_ℓ^n 具有明确的图示描述，从而给出了 TL$_n$(0) 的所有不可约模的明确描述。

由于 TL$_n$(0) 是 $\mathcal{H}_n(-1)$ 的商，定理 1.2 中的正合列也是（-1）-Specht 模的正合列。在 $\mathbb{F}_2$ 上，它们导出了对称群 $\mathfrak{S}_n$的 Specht 模正合列，这一点也类似地见于 [6, 定理 B],

$$0 \longrightarrow S^{(n)} \longrightarrow S^{(n-1,1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S^{(n/2+1,n/2-1)} \longrightarrow S^{(n/2,n/2)} \longrightarrow 0. \tag{2}$$

在推论 5.11 中，我们明确描述了这些同态。

1.2. 与Jones多项式的关系。 设 π: $B_n \to \mathcal{H}_n(q)$ 为自然同态，并设 χ_λ 为以分拆 $\lambda \vdash n$ 为指标的 q-Specht 模的特征标。则任意辫 $\alpha \in B_n$ 的闭包的Jones多项式由下式给出

$$V_{\hat{\alpha}}(t) = \frac{(-\sqrt{t})^{e(\alpha)-n+1}}{1+t} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\sum_{i=k}^{n-k} t^i \right) \chi_{(n-k,k)}(\pi(\alpha)).$$

由于 $V_{\hat{\alpha}}(t)$ 没有极点，分子在 $t=-1$ 处必定为零。若 n 为奇数，则因 $\sum_{i=k}^{n-k}(-1)^i = 0$, 分子总为零；但若 n 为偶数，和式 $\sum_{i=k}^{n-k}(-1)^i$ 并不为零，于是我们预期该恒等映射

$$\sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \chi_{(n-k,k)}(\pi(\alpha)) = 0.$$

正合列（1）范畴化了这一恒等映射。

1.3. **本文概述**。 在第2节，我们回顾预备知识，例如Temperley-Lieb代数、Hecke代数以及箭图表示。在第3节，我们计算同态空间以证明定理1.1。在第4节，我们构造标准模之间的显式图示同态，借此证明定理1.2 ，并阐明TL$_n$(0)的不可约模。在第5节，我们研究 $\mathbb{F}_2$ 上的Specht模，以证明正合列（2）。

致谢。 作者衷心感谢 MIT PRIMES 项目促成了这次研究机会。作者感谢 Pavel Etingof 向我们讲解他与 Berest 和 Ginzburg 的工作。第二位作者感谢 Ivan Losev 耐心讲解最高权范畴理论，并指出参考文献 [6]。我们感谢 Jos´e Simental 向我们讲解了 [6] 中的构造。

2. 预备知识

2.1. Definition of the Temperley-Lieb 代数。设 n 为正整数。

定义 2.1。 参数为 $\beta \in \mathbb{C}$ 的 Temperley-Lieb 代数 $\mathrm{TL}_n(\beta)$ 是由 $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ 生成、满足以下关系的代数

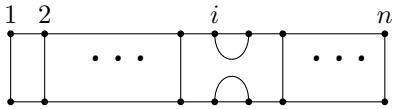
$$e_i^2 = \beta e_i,\ e_i e_{i\pm1} e_i = e_i,\ \text{and}\ \ e_i e_j = e_j e_i \text{ if } |i-j| \geq 2.$$

其维数为第 n 个卡特兰数 $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。——

$\mathrm{TL}_n(\beta)$ 可以用弦图来描述，这些弦图由以下部分组成：：

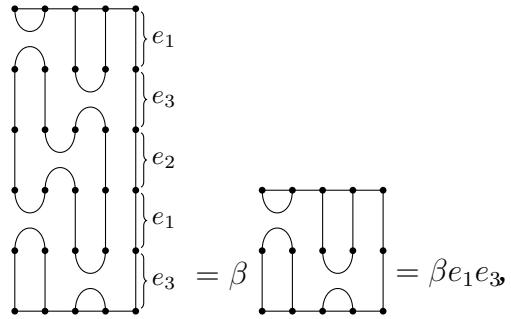
- 一对水平线，
- 水平线上的一组标记点，以及，
- 一组以标记点为端点的曲线，任意两条曲线都不相交，并且每个标记点恰好位于一条曲线上。

那么，每个生成元为

$e_i =$ 

基元素的乘法相当于将各自的图拼接起来，其中第一个图的底部与第二个图的顶部重合，并将闭环作为标量 β 提取出来。

例 2.2. 乘积 $e_1e_3e_2e_1e_3 \in \mathrm{TL}_5(\beta)$ 可以通过图示计算为

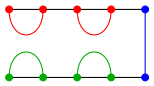
$e_1e_3e_2e_1e_3 =$ 

$= \beta$ $= \beta e_1e_3$,

因为我们将 $e_1e_3e_2e_1e_3$ 的弦图中的闭环提取出来。

定义 2.3. 在弦图中，我们将连接顶行两点的曲线称为杯，将连接底行两点的曲线称为帽。连接顶行与底行的曲线称为贯穿线。

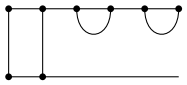
例 2.4. 该元素

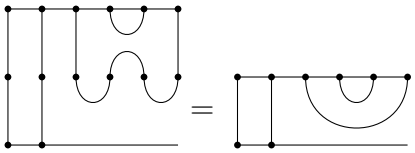
$e_1e_3 =$  $\in \mathrm{TL}_5(\beta).$

有两个杯、两个帽以及一条贯穿线。

现在令 $\ell \leq n$ 为一个非负整数，使得 $\ell \equiv n$ （模 2）。

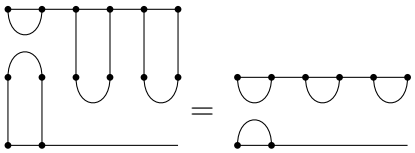
定义 2.5. 从上方的 n 个点到下方的 ℓ 个点的弦图，如果没有帽，则称为无帽 图。所有无帽图的基所张成的 $\mathbb{C}$-向量空间构成标准模 W_ℓ^n，其维数为 $\binom{n}{\frac{n-\ell}{2}} - \binom{n}{\frac{n-\ell}{2}-1}$。标准模自然地受 $\mathsf{TL}_n(\beta)$ 的作用，作用方式为图的拼接;一任何由于形成帽而产生的非无帽图都定义为 0。

例 2.6. 如果 $x =$  $\in W_2^6$ 那么

$e_3x =$ 

是首一的，因此是 W_2^6 的另一个基元素。

另一方面，

$e_1x =$ 

不是首一的，所以 $e_1x = 0$。

如前所述 在第1节中，对于一般的 β，标准模是不可约的 .

定义 2.7。辫群 B_n 由 σ_1、σ_2、.....、σ_{n-1} 生成，其关系为

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ and } \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ if } |i-j| \geq 2.$$

每个辫都可以看作 n 条相交的弦，其中每个 σ_i 都会在第 i 和第（$i+1$）个位置的弦上引入一个扭结。

定义 2.8。*Hecke*代数 $\mathcal{H}_n(q)$ 在参数 $q \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 下是由 g_1、g_2、.....、g_{n-1} 生成的代数，其关系为

$$(g_i - q)(g_i + 1) = 0,\ g_ig_{i+1}g_i = g_{i+1}g_ig_{i+1},\ \text{and}\ \ g_ig_j = g_jg_i \text{ if } |i-j| \geq 2.$$

When $\beta = q^{1/2} + q^{-1/2}$，Temperley-Lieb 代数 $\mathsf{TL}_n(\beta)$ 是$\mathcal{H}_n(q$的一个商).

命题 2.9. 设 $\beta, q \in \mathbb{C}$ 满足 $\beta = q^{1/2} + q^{-1/2}$ 和 $q \neq 0$。则同态 $\theta\colon H_n(q) \to \mathsf{TL}_n(\beta)$ 其中 $\theta(g_i) = q^{1/2}e_i - 1$ 是满射。

2.2. **箭图**。 我们简要回顾箭图及其表示。

定义 2.10. 有向图 Q 称为箭图 ，其中允许有环和重边。在Q 中的路径 按常见的图论方式定义，顶点和边可以多次出现。也允许长度为零的平凡路径。对于Q的每条路径 p ，令 $s(p)$ 和 $t(p)$ 分别表示 p 的起点和终点。

给定两条路径 p 和 q，使得 $s(p) = t(q)$，定义 $p \circ q$ 为如下路径：它从$s(q)$出发，沿着 q 经过，到达 $s(p) = t(q)$，然后沿着 p 经过，最终到达 $t(p)$。

定义 2.11。 设$\mathcal{Q}$ 为一个箭图。Q 的路径代数 $\mathbb{C}\mathcal{Q}$是$\mathcal{Q}$ 上的所有路径所张成的 $\mathbb{C}$-向量空间，使得对于$\mathcal{Q}$的路径 p 和 q，有

$$pq = \begin{cases} p \circ q & \text{if } s(p) = t(q) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

一个表示$\mathcal{Q}$ 是由一族向量空间和映射构成的，并带有一个双射，将$\mathcal{Q}$ 的每个顶点对应到一个向量空间，并将$\mathcal{Q}$ 的每条有向边 e 对应到一个映射，该映射作用于与 $s(e)$和 $t(e)$相关联的向量空间之间。因此，$\mathcal{Q}$ 的表示等价于 $\mathbb{C}\mathcal{Q}$-模。令$\mathbf{Rep}(\mathbb{C}\mathcal{Q})$表示 $\mathbb{C}\mathcal{Q}$-模的范畴。

2.3. **最高权范畴**。 回顾 [7] 最高权范畴的概念。

定义 2.12。 设$\mathcal{O}$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性阿廷阿贝尔范畴，且 $(\Lambda, \preceq)$ 是一个标记简单对象 $L(\lambda)$ 的偏序集，其中对象属于$\mathcal{O}$。令 $P(\lambda)$ 为 $L(\lambda)$ 的射影覆盖。$\mathcal{O}$ 上的最高权结构是一组标准对象$\{\Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$，满足

- 若 $\mathrm{Hom}(\Delta(\lambda)\ \Delta(\mu)) \neq 0$ 则 $\lambda \preceq \mu$,
- $\mathrm{End}(\Delta(\lambda)) = \mathbb{C}$，以及
- 存在一个满同态 $P(\lambda) \twoheadrightarrow \Delta(\lambda)$，其核具有滤过，且各个商的形式为 $\Delta(\mu)$，其中 $\mu \succ \lambda$。

3. Temperley-Lieb 代数表示范畴的描述

3.1. **箭图表示上的最高权结构**。我们首先介绍直线箭图。

定义 3.1. 直线箭图 $\mathcal{Q}_m$ 是一个以 m 个顶点为顶点集、具有如下结构的箭图

$$\bullet \underset{b_1}{\overset{a_1}{\rightleftarrows}} \bullet \underset{b_2}{\overset{a_2}{\rightleftarrows}} \bullet \underset{b_3}{\overset{a_3}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{b_{m-1}}{\overset{a_{m-1}}{\rightleftarrows}} \bullet.$$

我们用 e_i 表示最左侧第 i个顶点上的平凡路径。定义理想

$$J = (a_{i+1}a_i, b_ib_{i+1}, a_ib_i - b_{i+1}a_{i+1} \mid 1 \leq i \leq m) \subset \mathbb{C}\mathcal{Q}_m. \tag{3}$$

命题3.2。 范畴 $\mathbf{Rep}(\mathbb{C}\mathcal{Q}_m/J)$ 具有一个偏序集为 $\{1, 2, \ldots, m\}^{\mathrm{op}}$ 的最高权结构。它具有简单对象

$$L(i) := \cdots \rightleftarrows 0 \rightleftarrows \mathbb{C} \rightleftarrows 0 \rightleftarrows \cdots,$$

标准对象

$$\Delta(i) := \cdots \rightleftarrows 0 \rightleftarrows \mathbb{C} \underset{0}{\overset{\mathrm{id}}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \rightleftarrows 0 \rightleftarrows \cdots,$$

和投射对象

$$P(i) := \cdots \rightleftarrows 0 \rightleftarrows \mathbb{C} \underset{\pi_1}{\overset{\iota_2}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}^2 \underset{\iota_2}{\overset{\pi_1}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \rightleftarrows 0 \rightleftarrows \cdots,$$

其中 id 是恒等映射， π_1 是到第一分量的投影， ι_2 是到第二分量的包含映射。索引按如下方式确定：对于每个 $L(i)$ （分别对于 $P(i)$），

将空间 $\mathbb{C}$ （分别将空间 $\mathbb{C}^2$）附加到 Q_m 最左侧第 i 个顶点上。对于 $\Delta(i)$，将 $\mathbb{C}$ 的最左侧副本附加到 Q_m 最左侧第 i 个顶点上。

证明。由于 $P(i) \cong (\mathbb{C}Q_m/J)e_i$，其中 e_i 是幂等元，因此模 $P(i)$ 是射影的，其基为 $\{e_i, b_i a_i e_i, a_i e_i, b_{i-1}e_i\}$。现在，$L(i)$ 是一维的，由 v_i 张成，而$\mathbb{C}Q_m/J$的作用由 $e_i v_i = v_i$ 和 $a_i v_i = b_{i-1}v_i = 0$ 给出。设 $\xi\colon P(i) \to L(i)$ 是满足 $\xi(e_i) = v_i$ 的满同态，其核由 $\{b_i a_i e_i, a_i e_i, b_{i-1}e_i\}$ 张成。

我们验证 ξ 是一个射影覆盖。取任意子模 $N \subset P(i)$，其在ξ下的像等于 $L(i)$，于是存在 $p' \in \ker \xi$ 使得 $e_i + p' \in N$。那么，由于 $\ker \xi$ 被 a_i 和 b_{i-1}湮灭

$$a_i(e_i + p') = a_i e_i,\ b_i(e_i + p') = b_i e_i,\ b_i a_i e_i \in N,$$

因此 $\ker \xi \subset N$ 和 $e_i = (e_i + p') - p' \in N$。故 $N = P(i)$，且 ξ 是本质满射。

容易验证，$L(i)$、$\Delta(i)$ 和 $P(i)$ 满足定义2.12中的前两个公理。第三个公理由正合列 $\Delta(i-1) \to P(i) \to \Delta(i)$ 展开后得到：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \rightleftarrows & 0 & \rightleftarrows & \mathbb{C} & \rightleftarrows & \mathbb{C} & \rightleftarrows & 0 & \rightleftarrows & 0 & \rightleftarrows & \cdots \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_2} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & & & \\
\cdots & \rightleftarrows & 0 & \rightleftarrows & \mathbb{C} & \rightleftarrows & \mathbb{C}^2 & \rightleftarrows & \mathbb{C} & \rightleftarrows & 0 & \rightleftarrows & \cdots \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & & & \\
\cdots & \rightleftarrows & 0 & \rightleftarrows & 0 & \rightleftarrows & \mathbb{C} & \rightleftarrows & \mathbb{C} & \rightleftarrows & 0 & \rightleftarrows & \cdots.
\end{array}$$

□

注记。令$\mathbf{Perv}(\mathbb{P}^m)$ 表示定义在 $\mathbb{P}^m$ 上、具有分层 $\mathbb{P}^m = \bigcup_{i=0}^m \mathbb{A}^i$ 的反常层范畴。将（3）与 $\mathbf{Perv}(\mathbb{P}^m)$ 在 [5], 中的描述相比较，可知 $\mathbf{Rep}(\mathbb{C}\mathcal{Q}_m/J)$ 等价于 $\mathbf{Perv}(\mathbb{P}^{m+1})$ 对由常值层生成的子范畴取商。

3.2. **Temperley-Lieb 代数表示的最高权结构**。现在我们将 Temperley-Lieb 代数特化到 $\beta = 0$。

命题 3.3 ([10, 命题 3.3])。设 $\ell > 0$。对于任意基元素 $x, y \in W_\ell^n$，令$\alpha(x)$ 为将 x 水平反射所得的弦图。令 $\alpha(x, y) \in \mathsf{TL}_\ell(0)$ 为通过将 $\alpha(x)$ 置于 y 上方并按图示拼接所得的元素；再令 $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon W_\ell^n \otimes W_\ell^n \to \mathbb{C}$ 为满足下述条件的配对：对于基元素 $x, y \in W_\ell^n$，

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha(x,y) \in \mathsf{TL}_\ell(0) \text{ contains } \ell \text{ throughlines} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么，商模 $L_\ell^n = W_\ell^n / \{x \in W_\ell^n \mid \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in W_\ell^n\}$ 是不可约的。

现在，固定一个正的偶数整数 n。

命题 3.4 ([10, 命题 8.2])。由 $\{W_{\ell-1}^{n-1} \mid 2 \le \ell \le n, \ell \equiv 0 \text{ (模 } 2)\}$ 构成的标准模集合，是$\mathsf{TL}_{n-1}(0)$的一组两两不同的不可约模完全集。此外，标准模 $W_{\ell-1}^{n-1}$ 也是射影的。

推论 3.5。 代数$\mathsf{TL}_{n-1}(0)$是半单的。

证明。 由命题 3.4 得出，因为所有不可约模都是射影的。 □

当 $\beta = 0$ 这些 W_ℓ^n 不再必然是不可约模，但它们是标准模，因此 $\mathbf{Rep}(\mathsf{TL}_n\mathbf{(0)})$ 构成一个最高权范畴。这是一个一般事实，但我们利用 Ridout 和 Saint-Aubin 的结果 [10]对此进行直接验证。

命题 3.6 ([10, 推论 7。4])。 商模的集合 $\{L_\ell^n \mid 2 \le \ell \le n, \ell \equiv 0 \text{ (模 2)}\}$ 构成 $\mathsf{TL}_n(0)$ 的一组完备且互不相同的不可约模。此外，以下序列

$$0 \longrightarrow L_{\ell+2}^n \longrightarrow W_\ell^n \longrightarrow L_\ell^n \longrightarrow 0$$

对每个 ℓ 都是正合且不分裂的。

这些不可约对象都有射影覆盖。

命题 3.7 ([10, 命题 8.2])。 对于每个 $\ell > 0$ ，这些模

$$P_\ell^n := \mathrm{Ind}_{\mathsf{TL}_{n-1}(0)}^{\mathsf{TL}_n(0)} W_{\ell-1}^{n-1}$$

构成 L_ℓ^n 的一个射影覆盖。它们属于一个短正合列

$$0 \longrightarrow W_{\ell-2}^n \longrightarrow P_\ell^n \longrightarrow W_\ell^n \longrightarrow 0. \tag{4}$$

注。 商模和射影模都有图示描述。根据命题 3.7， $P_\ell^n = \mathrm{Ind}^{\mathsf{TL}_n(0)\,\mathsf{TL}_{n-1}(0)} W_{\ell-1}^{n-1}$ 的基可解释为由弦图组成：弦从上方的 n 个点连接到下方的 ℓ 个点，其中唯一允许的帽连接底部最右侧的两个点。

关于 L_ℓ^n 的图示描述更为微妙，我们将在第 4 节给出。

命题 3.8 ([10,推论 4.2])。 存在一个 $\mathsf{TL}_n(0)$-模同构

$$W_\ell^n|_{\mathsf{TL}_{n-1}(0)} \cong W_{\ell-1}^{n-1} \oplus W_{\ell+1}^{n-1}.$$

利用上述结果，我们可推出一些新的结论。

命题 3.9. 设 ℓ和 m 是小于或等于 n的正偶整数。那么

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathsf{TL}_n(0)}(P_\ell^n, W_m^n) = \begin{cases} 1 & \text{if } \ell \in \{m, m+2\} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 根据命题 3.7和弗罗贝尼乌斯互反律

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{TL}_n(0)}(P_\ell^n, W_m^n) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{TL}_{n-1}(0)}(W_{\ell-1}^{n-1}, W_m^n|_{\mathsf{TL}_{n-1}(0)}).$$

因此，根据命题3.8，我们得到

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{TL}_n(0)}(P_\ell^n, W_m^n) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{TL}_n(0)}(W_{\ell-1}^{n-1}, W_{m-1}^{n-1} \oplus W_{m+1}^{n-1}).$$

由于 $W_{\ell-1}^{n-1}$， W_{m-1}^{n-1}，且 W_{m+1}^{n-1}根据命题 3.4不可约，因此结论得证 . □

The定理 3.10。 设 ℓ 和 m 为不大于 n的正偶整数。 n

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathsf{TL}_n(0)}(P_\ell^n, P_m^n) = \begin{cases} 2 & \text{if } \ell = m \\ 1 & \text{if } |\ell - m| = 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 根据弗罗贝尼乌斯互反律,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{TL}_n(0)}(P_\ell^n, P_m^n) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{TL}_n(0)}(\mathrm{Ind}_{\mathsf{TL}_{n-1}(0)}^{\mathsf{TL}_n(0)} W_{\ell-1}^{n-1}, P_m^n) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{TL}_{n-1}(0)}(W_{\ell-1}^{n-1}, P_m^n|_{\mathsf{TL}_{n-1}(0)}).$$

将命题3.7中的正合列限制到$\mathsf{TL}_{n-1}(0) \subset \mathsf{TL}_n(0)$，并应用命题3.8 可得

$$0 \longrightarrow W_{m-3}^{n-1} \oplus W_{m-1}^{n-1} \longrightarrow P_m^n|_{\mathsf{TL}_{n-1}(0)} \longrightarrow W_{m-1}^{n-1} \oplus W_{m+1}^{n-1} \longrightarrow 0$$

是正合的。根据推论 3.5 该列分裂，因此

$$P_m^n|_{\mathsf{TL}_{n-1}(0)} \cong W_{m-3}^{n-1} \oplus W_{m-1}^{n-1} \oplus W_{m-1}^{n-1} \oplus W_{m+1}^{n-1}, \tag{5}$$

结论得证。 □

范畴 **Rep(TL$_n$(0))** 具有最高权结构。

推论 3.11。 范畴 $\mathbf{Rep}(\mathsf{TL}_n(0))$具有简单对象 L_ℓ^n和标准对象W_ℓ^n，关于 $\{2, \ldots, n\}^{\mathrm{op}}$构成一个最高权范畴。

证明。 我们直接检验定义 2.12中的每条公理。由（4）可知 $\mathbf{Hom}(W_\ell^n, W_m^n) \subset \mathrm{Hom}(P_\ell^n, W_m^n)$，因此由命题 3.9可得，若 $\mathbf{Hom}(W_\ell^n, W_m^n) \neq 0$，则 $\ell \geq m$。此外，当 $\ell = m$时，我们看到 $\mathbf{Hom}(W_\ell^n, W_\ell^n)$ 必须是一维的。最后，（4）在 P_ℓ^n上给出了一个标准滤过。 □

3.3. **一个范畴等价**。 令 ω_ℓ^n: $P_\ell^n \to P_{\ell+2}^n$以及 γ_ℓ^n: $P_{\ell+2}^n \to P_\ell^n$是定理 3.10中相邻投射对象之间的非零映射。我们将它们整理成如下图:

$$P_2^n \underset{\gamma_2^n}{\overset{\omega_2^n}{\rightleftarrows}} P_4^n \underset{\gamma_4^n}{\overset{\omega_4^n}{\rightleftarrows}} P_6^n \underset{\gamma_6^n}{\overset{\omega_6^n}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\gamma_{n-2}^n}{\overset{\omega_{n-2}^n}{\rightleftarrows}} P_n^n.$$

我们检验态射 ω_ℓ^n 和 γ_ℓ^n 满足关系（3）。

引理 3.12。 对于所有 ℓ，复合 $\omega_\ell^n \circ \gamma_\ell^n$ 和 $\gamma_{\ell+2}^n \circ \omega_{\ell+2}^n$ 均非零且相等。

证明。 比较命题 3.9和 3.10，注意到 ω_ℓ^n: $P_\ell^n \to P_{\ell+2}^n$可通过$W_\ell^n$进行因式分解，因此复合 $\omega_\ell^n \circ \gamma_\ell^n$ 可分解为 $P_{\ell+2}^n \to W_\ell^n \subset P_{\ell+2}^n$，根据弗罗贝尼乌斯互反律，这对应于一个同态

$$W_{\ell+1}^{n-1} \longrightarrow P_\ell^n|_{\mathsf{TL}_{n-1}(0)} \longrightarrow W_\ell^n|_{\mathsf{TL}_{n-1}(0)}.$$

根据命题 3.8 和（5），可将其改写为

$$W_{\ell+1}^{n-1} \longrightarrow W_{\ell-3}^{n-1} \oplus W_{\ell-1}^{n-1} \oplus W_{\ell-1}^{n-1} \oplus W_{\ell+1}^{n-1} \longrightarrow W_{\ell-1}^{n-1} \oplus W_{\ell+1}^{n-1},$$

并且上述复合是将 $W_{\ell+1}^{n-1}$ 包含映射到第二个因子中的映射 r.

类似地，复合 $\gamma^n_{\ell+2}\circ\omega^n_{\ell+2}$可分解为 $P^n_{\ell+2}\longrightarrow W^n_{\ell+2}\longrightarrow P^n_{\ell+2}$，根据弗罗贝尼乌斯互反律，这对应于

$$W^{n-1}_{\ell+1}\longrightarrow W^{n-1}_{\ell+1}\oplus W^{n-1}_{\ell+3}\longrightarrow W^{n-1}_{\ell-1}\oplus W^{n-1}_{\ell+1}\oplus W^{n-1}_{\ell+1}\oplus W^{n-1}_{\ell+3}$$

这又是到第二个因子的 $W^{n-1}_{\ell+1}$ 包含映射。 □

现在我们已经具备证明定理 1.1 所需的全部条件。

定理 *1.1* 的证明。由于 $P^{\circ n}:=\bigoplus_{i=1}^{n/2}P^n_{2i}$ 是 $\mathbf{Rep}(\mathsf{TL}_n(0))$ 的一个射影生成元，因此我们有一个等价

$$\mathrm{Hom}(P^{\circ n},-)\colon \mathbf{Rep}(\mathsf{TL}_n(0))\simeq\mathbf{Rep}(\mathrm{End}(P^{\circ n})).$$

为简便起见，我们用 ω^n_ℓ 和 γ^n_ℓ 表示 $P^{\circ n}$ 的相应自同态。考虑同态 $\Psi\colon \mathbb{C}\mathsf{Q}_{n/2}/J\to\mathrm{End}(P^{\circ n})$，其中 $\Psi(a_i)=\omega^n_{2i}$ 且 $\Psi(b_i)=\gamma^n_{2i}$。由定理 3.10 和引理 3.12，$\Psi(a_{i+1}a_i)=\omega^n_{2i+2}\circ\omega^n_{2i}=0$，$\Psi(b_ib_{i+1})=\gamma^n_{2i}\circ\gamma^n_{2i+2}=0$，且 $\Psi(a_ib_i-b_{i+1}a_{i+1})=\omega^n_{2i}\circ\gamma^n_{2i}-\gamma^n_{2i+2}\circ\omega^n_{2i+2}=0$。由此可得 $J\subset\ker\Psi$，这意味着 Ψ 是一个良定义同态。

的满射性 Ψ 显然。因此，仍需验证 $\mathbb{C}\mathcal{Q}_{n/2}/J$ 和 $\mathrm{End}(P^{\circ n})$具有相同的维数。$\mathsf{Q}_{n/2}/J$ 和 $\mathrm{End}(P^{\circ n})$都是双分次向量空间，因此只需验证各分次部分具有相同的维数，这一点通过简单计数即可看出。比较推论 3.11 和命题 3.2 可知，构造出 Φ。 □

备注。等价地，我们可以直接将 Barr–Beck 应用于限制函子$\mathbf{Rep}(\mathsf{TL}_n(0))\to\mathbf{Rep}(\mathsf{TL}_{n-1}(0))$，并利用$\mathsf{TL}_{n-1}(0)$ 是半单的（推论 3.5）。

C推论 3.13。 标准模上存在一个长正合列 s

$$0\longrightarrow W^n_n\longrightarrow W^n_{n-2}\longrightarrow\cdots\longrightarrow W^n_2\longrightarrow W^n_0\longrightarrow 0. \tag{6}$$

证明。 沿用定理 1.1中的相同记号。根据命题 $\mathbf{\Phi}(W^n_\ell)$，当 ℓ 为偶数时，可以计算3.9，因为

$$\mathbf{\Phi}(W^n_\ell)=\begin{cases}\mathbb{C}\rightleftarrows 0\rightleftarrows 0\rightleftarrows\cdots\rightleftarrows 0, & \text{if } \ell=0\\ 0\rightleftarrows 0\rightleftarrows\cdots\rightleftarrows\mathbb{C}\rightleftarrows\mathbb{C}\rightleftarrows\cdots\rightleftarrows 0, & \text{if } \ell\notin\{0,n\}\\ 0\rightleftarrows 0\rightleftarrows 0\rightleftarrows\cdots\rightleftarrows\mathbb{C}, & \text{if } \ell=n.\end{cases}$$

现在，正合列可由显然的正合列得出

$$0\longrightarrow\mathbf{\Phi}(W^n_n)\longrightarrow\mathbf{\Phi}(W^n_{n-2})\longrightarrow\cdots\longrightarrow\mathbf{\Phi}(W^n_2)\longrightarrow\mathbf{\Phi}(W^n_0)\longrightarrow 0.$$ □

注。 正合列（6）也有一个与有理 Cherednik 代数相对应的版本$H_n(\mathsf{1}_2)$. 特别是，[6,定理 A] 证明了一个正合列

$$0\to\Delta(1^n)\to\Delta(2,1^{n-2})\to\cdots\to\Delta(2^{n/2},2^{n/2})\to L(2^{n/2},2^{n/2})\to 0.$$

Kniz hnik-Zamolodchikov 函子消去对象 $L(2^{n/2},2^{n/2})$ 并恢复 (6) .

4. 一个 标准模上的同态正合列

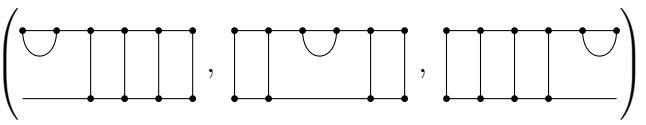
在本节中，我们将明确构造（6）中的同态。

定义 4.1. 对于任意单基元素 $x \in W_{\ell+2}^n$，令图 $x\delta_i^\ell \in W_\ell^n$用一个杯连接 x 最左下方的第（$i+1$）个点和第（$i+2$）个点。令 $\phi_\ell^n\colon W_{\ell+2}^n \to W_\ell^n$为交错和

$$\phi_\ell^n(x) = \sum_{i=0}^{\ell/2} (-1)^i x\delta_{2i}^n.$$

例 4.2. 在 W_4^6，

$$(\delta_0^4, \delta_2^4, \delta_4^4) = \left(\quad , \quad , \quad \right).$$



考虑元素

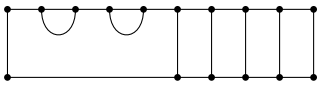
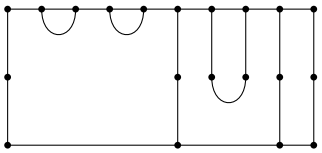
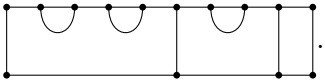
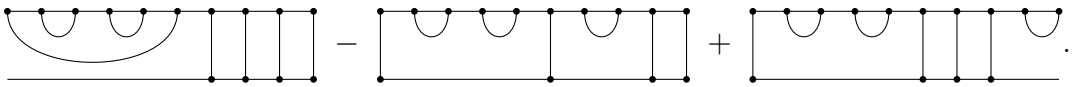
$x =$  $\in W_6^{10}$。

图 x δ_2^4 意味着连接 x最左侧下方的第三个点和第四个点，从而得到

$x\delta_2^4 =$  $=$ .

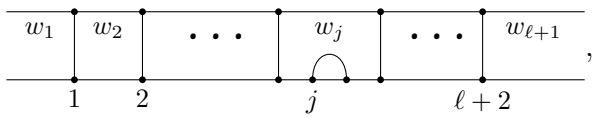
特别地，我们有 $\phi_4^{10}(x) = x(\delta_0^4 - \delta_2^4 + \delta_4^4)$，因此

$\phi_4^{10}(x) =$ .

命题 4.3。 映射 ϕ_ℓ^n 是标准模之间的良定义同态。

证明。 我们首先证明，当 x 是非单射弦图时，$\phi_\ell^n(x) = 0$。设 k 为 x 中帽的数量。注意，如果 $x\delta_i^\ell$ 将 x 的两条贯穿线连接起来，就会形成一个杯；否则，如果 $x\delta_i^\ell$ 将一个帽与一条贯穿线或另一个帽连接起来，则帽的数量恰好减少一个。因此，图 $x\delta_i^\ell$ 至多有 $k-1$ 个帽。由此可得，如果 $k \geq 2$，那么 $\phi_\ell^n(x) = 0$。

现在假设 $k = 1$。那么 x 具有如下形式

$x =$ 

其中，唯一的帽连接底部从左数第 j 个点和第 $(j+1)$ 个点，而 w_i 是仅由嵌套杯构成的子图。现在我们来考察 j 的奇偶性。

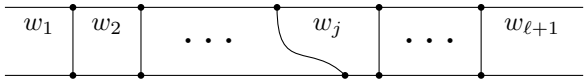
如果 j 是奇数，那么为了使 $x\delta_i^\ell$ 不含帽而 i 为偶数，必须有 $i = j-1$。因此，对所有满足 $i \neq j-1$ 的偶数 i，都有 $x\delta_i^\ell = 0$。不过请注意，$x\delta_{j-1}^\ell$ 是通过连接底部从左数第 j 个点和第 $(j+1)$ 个点形成的，从而构成一个闭环

并因特化 $\beta = 0$ 而消失。由于 $\phi_\ell^n(x)$ 是将 $x\delta_i^\ell$ 限制在 i 的偶数值范围内所得的线性组合，因此可得 $\phi_\ell^n(x) = 0$。

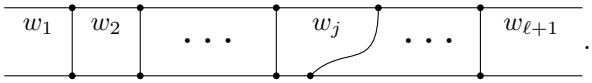
否则，若 j 为偶数，则当 i 为偶数时，为使 $x\delta_i^\ell$ 没有帽，我们必须有 $i \in \{j-2,\ j\}$。因此，对于所有偶数 $i \notin \{j-2,\ j\}$，都有 $x\delta_i^\ell = 0$，由此可得

$$\phi_\ell^n(x) = (-1)^{j/2-1} x(\delta_{j-2}^\ell - \delta_j^\ell).$$

然而，请注意

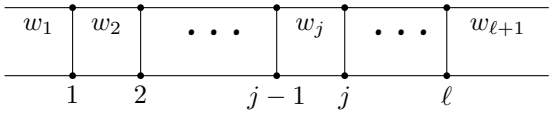
$x\delta_{j-2}^\ell =$ 

and

$x\delta_j^\ell =$ 

.

因此

$x\delta_{j-2}^\ell = x\delta_j^\ell =$ 

因此 $\phi_\ell^n(x) = 0$。因此，在这两种情况下，我们都有 $\phi_\ell^n(x) = 0$，所以 ϕ_ℓ^n确实是良定义的。

现在只需验证 ϕ_ℓ^n 是交织的。但这是显然的，因为 $\mathsf{TL}_n(0)$ 对 W_ℓ^n的左作用是通过上方的拼接实现的，而 ϕ_ℓ^n 则通过下方的拼接实现作用。□

注记。 在 [6, 定理 3。3], 作者构造了 Webster图解代数的胞模之间的显式同态。这些同态类似于我们针对 ϕ_ℓ^n的构造。然而，他们的定理不能直接应用，因为他们还要求一个额外的假设（使用他们的记号；特别是，ℓ 含义不同），即 $e > h\ell$；由于此处 $e = 1$, $h = 2$，且 $\ell = 1$，所以该假设对我们并不成立。

命题 4.4。 复合 $\phi_{\ell-2}^n \circ \phi_\ell^n = 0$ 成立。

证明。 对于基元素 $x \in W_{\ell+2}^n$,

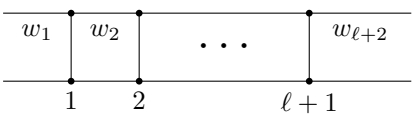
$$\phi_{\ell-2}^n(\phi_\ell^n(x)) = \phi_{\ell-2}^n\left(\sum_{i=0}^{\ell/2}(-1)^i x\delta_{2i}^\ell\right) = \sum_{i=0}^{\ell/2}\sum_{j=0}^{\ell/2-1}(-1)^{i+j} x\delta_{2i}^\ell\delta_{2j}^{\ell-2}.$$

对于 $i > j$，我们有 $x\delta_{2i}^\ell\delta_{2j}^{\ell-2} = x\delta_{2j}^\ell\delta_{2i-2}^{\ell-2}$；而对于 $i \le j$，我们有 $x\delta_{2i}^\ell\delta_{2j}^{\ell-2} = x\delta_{2j+2}^\ell\delta_{2i}^{\ell-2}$。在这两种情况下，我们都将图底边上的相同点对连接起来。通过对符号因子 $(-1)^{i+j}$ 进行配对，以上双重求和为零。□

现在我们可以开始证明定理 1.2。首先需要以下引理。

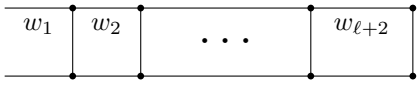
引理 4.5。 复合 $W_{\ell+1}^n \xrightarrow{g_{\ell+2}^n} W_{\ell+2}^n \xrightarrow{\phi_\ell^n} W_\ell^n \twoheadrightarrow W_\ell^n/\operatorname{im} g_\ell^n$ 是向量空间的同构。

证明。 对于一个基元素

$x =$ 

$\in W_{\ell+1}^{n-1}$,

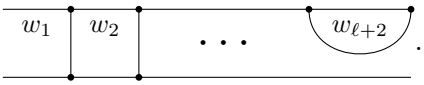
其中 w_i 是仅由杯组成的子图，我们有

(7) $$g^n_{\ell+2}(x) =$$ 

我们有

(8) $$\phi^n_\ell(g^n_{\ell+2}(x)) = \sum_{i=0}^{\ell/2}(-1)^i g^n_{\ell+2}(x)\delta^\ell_{2i}.$$

由（7），我们可知 $g^n_{\ell+2}(x)\,\delta^\ell_{2i}$ 总会有一条最右侧的贯穿线，除非 $i = \frac{\ell}{2}$，此时我们将 $g^n_{\ell+2}(x)$ 底部最右侧的两个点连接起来。因此，（8）的所有求和项都属于 g^n_ℓ 的像，除了 $g^n_{\ell+2}(x)\,\delta^\ell_\ell$，故

$$\tilde{f}(x) = \eta(\phi^n_\ell(g^n_{\ell+2}(x))) = (-1)^{\ell/2} g^n_{\ell+2}(x)\delta^\ell_\ell = (-1)^{\ell/2}$$ 

换言之，映射 $\tilde{f}$ 只需将某个 $x \in W^{n-1}_{\ell+1}$最右侧的贯穿线弯成˜ x最右侧的极大弧，同时保持其他部分不变。因此，f 是双射。□

定理 *1.2* 的证明。沿用引理 4.5中的记号。映射 $f = \phi^n_\ell \circ g^n_{\ell+2}$满足 $\mathsf{im}\, f \subset \mathrm{im}\, \phi^n_\ell$。由引理 4.5 可知 f是单射。因此

$$\dim \mathrm{im}\, \phi^n_\ell \geq \dim \mathrm{im}\, f \geq \dim W^{n-1}_{\ell+1},$$

这意味着

(9) $$\dim \mathrm{im}\, \phi^n_\ell \geq \dim W^{n-1}_{\ell+1} \text{ and } \dim \mathrm{im}\, \phi^n_{\ell-2} \geq \dim W^{n-1}_{\ell-1}.$$

另一方面，根据命题4.4 我们知道 $\phi^n_{\ell-2} \circ \phi^n_\ell = 0$ 对所有 ℓ，因此 $\mathsf{im}\ \phi^n_\ell \subset \ker \phi^n_{\ell-2}$。特别地，由秩-零化度定理可得

(10) $$\dim \mathrm{im}\, \phi^n_{\ell-2} + \dim \mathrm{im}\, \phi^n_\ell \leq \dim \mathrm{im}\, \phi^n_{\ell-2} + \dim \ker \phi^n_{\ell-2} = \dim W^n_\ell.$$

根据命题3.8我们知道 $\dim\ W^n_\ell = \dim\ W^{n-1}_{\ell-1} + \dim\ W^{n-1}_{\ell+1}$，因此与（9）比较后，我们得出（10）中的不等式必为等式，并且

$$\dim \mathrm{im}\, \phi^n_{\ell-2} = \dim W^{n-1}_{\ell-1}, \quad \dim \mathrm{im}\, \phi^n_\ell = \dim W^{n-1}_{\ell+1}.$$

由于我们在上文已看到 $\mathsf{im}\ \phi^n_\ell \subset \mathsf{ker}\, \phi^n_{\ell-2}$，结论随即得出。

分类　　不可约模的分类可由命题3.6 及（1）立即得出　　. □

5. 特征二上的对称群代数

令 n 为正整数。环 $\Bbbk[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ 通过置换变量 z_i 承载 $\mathfrak{S}_n$ 的作用，并且我们将 Specht 模实现为该环的子模。

定义 5.1。对于任意形状为 λ 的 Young表 t，令 $F_t \in \Bbbk[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ 为 $z_i - z_j$ 的乘积，其中 i 和 j 分别是 λ 同一列中单元格 b_i 和 b_j 的标签，且 b_i 位于 b_j 上方。

Specht 模 S^λ 是由所有形状为 λ 的 Young表 t 的 F_t 张成的 $\Bbbk[\mathfrak{S}_n]$-模。

例 5.2。设

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \text{and} \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1} 2 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

那么 $F_{t_1} = z_1 - z_4$ 当 $F_{t_2} = (z_4 - z_1)(z_4 - z_2)(z_1 - z_2)$。

注。 Specht 模通常使用 Young对称化子来定义。定义 5.1 中的多项式理想表述是 Specht 给出的最初构造 [11]。

当 λ 是两行分拆时，Specht 模 S^λ 可实现为有限维向量空间 $\Bbbk[z_1, z_2, \ldots, z_n]/(z_1^2, z_2^2, \ldots..., z_n^2)$的子模，而不是无限维的 $\Bbbk[z_1, z_2, \ldots, z_n]$。

定义 5.3。 令 T^λ 为 S^λ 在商映射下的像

$$\Bbbk[z_1, z_2, \ldots, z_n] \longrightarrow \Bbbk[z_1, z_2, \ldots, z_n]/(z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2).$$

引理 5.4。 对于两行分拆 $\lambda \vdash n$，$\Bbbk[\mathfrak{S}_n]$-模 S^λ 和 T^λ 同构。

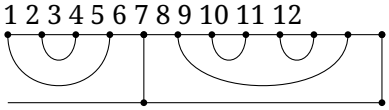
证明。 根据定义， S^λ 由多项式 F_t 张成，其中 t 是形状为$\lambda = (n-k, k)$的 Young表。如果 u_i（分别是 v_i）是顶行（分别是底行）从左数第 i个方格的标签，那么

$$F_t = \prod_{i=1}^{k} (z_{u_i} - z_{v_i}), \tag{11}$$

因此， F_t属于所有无平方单项式张成的空间。于是 $S^\lambda \cap (z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2) = \{0\}$ 并且$S^\lambda \cong T^\lambda$。□

定义 5.5。 对于 $k \leq \frac{n}{2}$，令 G^n_{n-2k}：$W^n_{n-2k} \to T_{(n-k,k)}$ 将基元素 $x \in W^n_{n-2k}$映射为所有形如 $z_i - z_j$的项的乘积，其中 $i < j$ 满足顶行从左数第 i个和第 j个点由一个杯相连。

例 5.6。令

$x =$ 

$\in W_2^{12}$。

由于节点 1 和 4、2 和 3、6 和 11、7 和 8，以及 9 和 10 由杯连接，

$$G_2^{12}(x) = (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)(z_6 - z_{11})(z_7 - z_8)(z_9 - z_{10}).$$

命题 5。 7. 映射 $G^n_{n-2k}: W^n_{n-2k} \to T^{(n-k,k)}$ 是 $\Bbbk$-向量空间的一个同构 .

证明。 令 $\lambda = (n-k, k)$。根据钩长公式和引理 5.4

$$\dim T^\lambda = \dim S^\lambda = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} = \dim W^n_{n-2k},$$

因此，只需证明 G^n_{n-2k} 是一个满射。

向量空间 T^λ 由以下多项式张成： F_t 对应形状为 t 的 Young表 λ ，如式（11）所示。我们可以用以下步骤，通过弦图表示 F_t：

- 画两条平行水平线，每条线上有 n 个等距点。
- 对于所有满足 $z_i - z_j$ 整除 F_t 的情形，用一个杯连接左侧从左数第 i 个和第 j 个上方点。
- 对于上方直线上任何不是杯端点的点，均穿过该点连接一条垂直贯穿线。

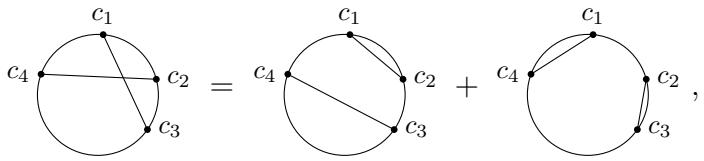
将所得的图记为 x_t。如果 x_t 不包含两个杯之间的交点，或杯与贯穿线之间的交点，那么根据构造，$F_t = G^n_{n-2k}(x_t)$。因此，我们依次处理这些棘手情形。

步骤 *1*。首先，我们处理杯之间的交点。鉴于此，我们可以忽略 x_t中的下方水平线和所有贯穿线，将所有部分绕成一个圆。因此，我们得到图 w，其中包含 n 个沿圆周均匀分布、标记为 1 到 n 的点，并且当且仅当 $z_i - z_j$ 整除 F_t 时，i 与 j 之间存在一条弦。

对于任意满足以下条件的 c_1、c_2、c_3 和 c_4

$$(z_{c_1} - z_{c_3})(z_{c_2} - z_{c_4}) = (z_{c_1} - z_{c_2})(z_{c_3} - z_{c_4}) + (z_{c_1} - z_{c_4})(z_{c_2} - z_{c_3})$$

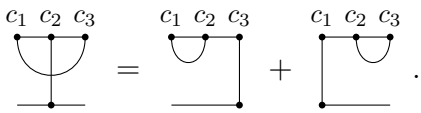
在 $\Bbbk[z_1, z_2, \ldots, z_n]/(z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2)$，因此可以消解任意弦交点，得到 b y



其中，各图相加的方式是将其对应的多项式相加。每次应用上述消解后，上方每个分量上的交叉数都会严格减少。因此，经过有限次消解，我们可以写成 $w = \sum_{i=1}^{a} w_i$ 其中 w_i 均为圆图，且其中任意两条弦都不相交。将每个 w_i 重新展开为弦图后，可得 $F_t = \sum_{i=1}^{a} F_{t_i}$ 对某个 a 成立，其中每个 F_{t_i} 均具有（11）中给出的形式，且其对应的弦图 x_{t_i} 中杯之间没有交点。

因此，我们可以假设 x_t 中杯之间没有交点。

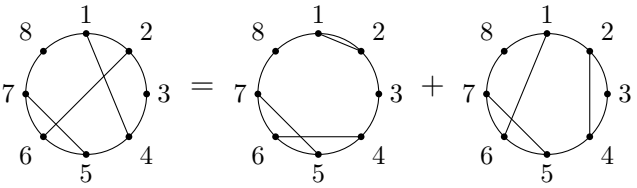
步骤 *2*。现在我们来处理杯与贯穿线之间的交点。在图中，x_t若对应因子 $z_{c_1} - z_{c_3}$ 的杯与对应于z_{c_2}的贯穿线相交，则 $z_{c_1} - z_{c_3} = (z_{c_1} - z_{c_2}) + (z_{c_2} - z_{c_3})$，从而得到如下消解



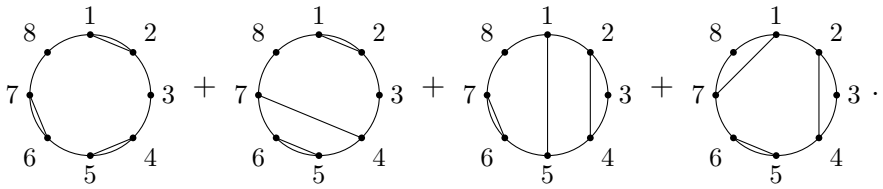
同样，每次使用上述消解时，每个分量上的交叉数都会严格减少。因此，最终我们可以将 F_t 写成和式 $\sum_{i=1}^{a'} F_{t_i}$，其中每个图x_{t_i}中任意曲线之间都没有交点。于是 F_{t_i}，$F_t \in \operatorname{im} G^n_{n-2k}$如所需。□

例 5.8。我们按照命题 5.7 中的步骤，处理 $n = 8$ 多项式 $F_t = (z_1 - z_4)(z_2 - z_6)(z_5 - z_7)$ $\in T^{(5,3)}$。对于引理 5.7的步骤 1，我们画出圆

图，以求得 F_t，并反复应用消解，得到

$w =$  $=$ $+$

so

$w =$ 

将上面的四个圆图分别转化为多项式，我们得到

$$\begin{aligned} F_t =&(z_1-z_2)(z_4-z_5)(z_6-z_7)+(z_1-z_2)(z_4-z_7)(z_6-z_6)\\ &+(z_1-z_5)(z_2-z_4)(z_6-z_7)+(z_1-z_7)(z_2-z_4)(z_5-z_6). \end{aligned}$$

我们继续进行引理 5.7 的第 2 步。上面的四个求和项中，前两个对应有效的弦图。第三个求和项需要进行消解，因为贯穿线在 z_3 处与由 z_2-z_4 产生的弧相交；第四个求和项则显示，贯穿线在 z_8 处与由 z_1-z_7 和 z_2-z_4 产生的弧相交。应用这些消解并将所有项合并后，我们得到的和为

$$\begin{aligned} F_t = &(z_1-z_2)(z_4-z_5)(z_6-z_7) && \text{（第一个求和项）}\\ &+(z_1-z_2)(z_4-z_7)(z_6-z_6) && \text{（第二个求和项）}\\ &+((z_1-z_5)(z_2-z_3)(z_6-z_7) && \text{（第三个求和项）}\\ &\quad+(z_1-z_5)(z_3-z_4)(z_6-z_7))\\ &+((z_1-z_4)(z_2-z_3)(z_5-z_6) && \text{(fourth summand)}\\ &\quad+(z_2-z_3)(z_4-z_7)(z_5-z_6)\\ &\quad+(z_1-z_2)(z_3-z_4)(z_5-z_6)\\ &\quad+(z_2-z_7)(z_3-z_4)(z_5-z_6)). \end{aligned}$$

现在，每个单独的加项确实都对应于 W_2^8 中一个有效的弦图。

定义 5.9。令 $\psi^n_{n-2k}\colon T_{(n-k+1,k-1)}\to T^{(n-k,k)}$ 为乘以 $\sum_{i=1}^n z_n$ 的映射。

从现在起，我们将专门考虑 $\Bbbk=\mathbb{F}_2$ 并证明正合列（2）。

命题 5.10. 下图交换。

$$\begin{array}{ccc} W^n_{n-2k+2} & \xrightarrow{\phi^n_{n-2k}} & W^n_{n-2k}\\ {\scriptstyle G^n_{n-2k+2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G^n_{n-2k}}\\ T^{(n-k+1,k-1)} & \xrightarrow{\psi^n_{n-2k}} & T^{(n-k,k)} \end{array}$$

证明。 设 $\ell = n - 2k$，并取一个基元素 $x \in W^n_{\ell+2}$。 在 x 的图示表示的顶行上，从左到右用整数 1 到 n为各点编号。对于每个 $j \leq \ell + 2$，假设最左边第 j 条贯穿线位于编号为 c_j的点上。那么， $G^n_\ell \circ \phi^n_\ell$对将第 $(2i-1)$ 条和第$2i$条贯穿线用一个杯连接的所有方式取交错和，这会使多项式 $G^n_{\ell+2}(x)$乘以二项式$z_{c_{2i-1}} - z_{c_{2i}}$。 在特征 2 下，交错和变为

$$G^n_\ell(\phi^n_\ell(x)) = \sum_{i=1}^{\ell/2+1} (z_{c_{2i-1}} - z_{c_{2i}}) G^n_{\ell+2}(x) = \sum_{i=1}^{\ell+2} z_{c_i} G^n_{\ell+2}(x).$$

注意， $G^n_{\ell+2}(x) = \prod_{i=1}^{(n-\ell)/2-1} b_i)$，其中二项式 b_i 满足 $\sum_{i=1}^{(n-\ell)/2-1} b_i + \sum_{i=1}^{\ell+2} z_{c_i} = \sum_{i=1}^{n} z_n$。 由于 $b_i^2 = 0$ 属于 $\mathbb{F}_2[z_1, z_2, \ldots, z_n]/(z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2)$，因此

$$\left(\sum_{i=1}^{n} z_n - \sum_{i=1}^{\ell+2} z_{c_i} \right) G^n_{\ell+2}(x) = \sum_{i=1}^{(n-\ell)/2-1} b_i G^n_{\ell+2}(x) = 0.$$

结合上述方程可得

$$\psi^n_\ell(G^n_{\ell+2}(x)) = \sum_{i=1}^{n} z_n G^n_{\ell+2}(x) = \sum_{i=1}^{\ell+2} z_{c_i} G^n_{\ell+2}(x) = G^n_\ell(\phi^n_\ell(x)). \qquad \square$$

推论 5.11. 存在一个 $\mathbb{F}_2[\mathfrak{S}_n]$-模正合列

$$0 \longrightarrow T^{(n)} \xrightarrow{\psi^n_{n-2}} T^{(n-1,1)} \xrightarrow{\psi^n_{n-4}} \cdots \xrightarrow{\psi^n_2} T^{(n/2+1,n/2-1)} \xrightarrow{\psi^n_0} T^{(n/2,n/2)} \longrightarrow 0.$$

证明. 由定理 1.2 以及命题5.7 和 5.10得出。 $\square$

参考文献

1. Samson Abramsky，*Temperley-Lieb* 代数：通过量子力学，从结理论到逻辑与计算，量子计算与量子技术，Chapman & Hall/CRC 应用数学与非线性科学丛书，Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2008年，第515–558页。MR 2422231 2. R. J. Baxter、S. B. Kelland 和 F. Y. Wu，*Potts* 模型或 *Whitney* 多项式与冰型模型的等价性，《物理学杂志 A：数学与一般》 **9** （ 1976 ），第 3 期，397。3. Georgia Benkart 和 Joanna Meinel，仿射 *nilTemperley-Lieb* 代数的中心，《数学杂志》**284**（2016），第1–2期，413–439。MR 3545499 4. Yuri Berest、Pavel Etingof 和 Victor Ginzburg，有理 *Cherednik* 代数的有限维表示，《国际数学研究通知》（2003），第19期，1053–1088。MR 1961261 5. Lukas Bonfert 和 Alessio Cipriani，反常层的 *Serre* 函子与 $\mathbb{P}$对象 $\mathbb{P}^n$，2025年。6. C. Bowman、E. Norton 和 J. Simental，箭图 *Hecke* 代数与 *Cherednik* 代数酉模的 *BGG* 预解，《精选数学》（新系列）**28** （2022），第2期，论文编号29，71页。MR 4359564 7. E. Cline、B. Parshall 和 L. Scott，有限维代数与最高权范畴，《莱茵与应用数学杂志》**391**（1988），85–99。MR 961165 8. Frederick M. Goodman 和 Hans Wenzl，单位根处的 *Temperley-Lieb* 代数，《太平洋数学杂志》**161** （1993），第2期，307–334。MR 1242201 9. V. F. R. Jones，辫群的 *Hecke* 代数表示与链环多项式，《数学年刊》（第二辑）**126** （1987），第2期，335–388。MR 908150 10. David Ridout 和 Yvan Saint-Aubin，标准模、诱导与 *Temperley-Lieb* 代数的结构，《高级理论数学物理》**18** （2014），第5期，957–1041。MR 3281274

11. Wilhelm Specht，对称群的不可约表示，《数学杂志》**39**（1935），第1期，696–711。MR 1545531 12. H. N. V. Temperley 和 E. H. Lieb，“渗流”问题与“着色”问题之间的关系，以及与规则平面格相关的其他图论问题：“渗流”问题的一些精确结果，《伦敦皇家学会学报 A 辑》**322**（1971年），第1549期，251–280。MR 498284 13. Hans Wenzl，类型 A_n 的 *Hecke* 代数与子因子，《数学发明》**92**（1988），第2期，349–383。MR 936086 14. B. W. Westbury，*Temperley-Lieb* 代数的表示论，《数学杂志》**219**（1995），第4期，539–565。MR 1343661麻省理工学院 MIT PRIMES，马萨诸塞大道，剑桥，马萨诸塞州 02139-4301，美国电子邮箱： eddylihere@gmail.com普林斯顿大学数学系，Fine Hall，华盛顿路，普林斯顿，新泽西州 08544-1000，美国电子邮箱： kjsuzuki@princeton.edu