arXiv:2602.11538v1 [math.SG] 12 Feb 2026

结族所产生的勒让德环面的不可缩环

Yukihiro Okamoto Mari´anPoppr

摘要

在 $\mathbb{R}^3$ 的单位余切丛中，我们考察由 $\mathbb{R}^3$ 中光滑纽结的单位余法丛族所产生的勒让德环面环路。本文利用纽结的弦代数，给出一种拓扑方法，用于计算这些环路在 0 次 Legendrian 接触同调上诱导的单值化。作为应用，我们得到一个无限族勒让德环面的不可缩环，尽管它们在光滑嵌入环面的空间中是可缩的。

1 引言

背景。 考虑带有标准度量的 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 。其单位余切丛 $U^*\mathbb{R}^n$ 具有典范接触结构。给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一个紧致 C^∞ 子流形 K ，其单位余法丛定义为

$$\Lambda_K := \{(q,p) \in U^*\mathbb{R}^n \mid q \in K,\ p(v) = 0 \text{ for all } v \in T_qK\},$$

并且它是 $U^*\mathbb{R}^n$ 的 Legendrian 子流形。因此，若考虑这些空间

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n,k} &:= \{k\text{-dimensional compact } C^\infty \text{ submanifolds of } \mathbb{R}^n\}, \\ \mathcal{L}_n &:= \{\text{compact Legendrian submanifolds of } U^*\mathbb{R}^n\}, \end{aligned}$$

对于 $1 \le k \le n-1$，我们有一个映射 $\mathcal{K}_{n,\ k} \to \mathcal{L}_n$：$K \mapsto \Lambda_K$。

显然，对任意 K_0，$K_1 \in \mathcal{K}_{n,\ k}$，

$$K_0 \text{ 在 } \mathbb{R}^n \Rightarrow \Lambda_{K_0} \text{ 中与 } K_1 \text{ 同位的，是 } C^\infty \text{ 在 } U^*\mathbb{R}^n. \text{中与 } \Lambda_{K_1} \text{ Legendrian 同位}$$

作为区分 Legendrian 子流形的问题，人们研究了以下问题：反向蕴含（$\Leftarrow$）一般是否成立? 这等价于询问诱导映射 $\pi_0(\mathcal{K}_{n,\ k}) \to \pi_0(\mathcal{L}_n)$ 在第 0 个同伦群上是否为单射。当 $n = 3$ 和 $k = 1$ 时，这个问题基本上已经解决。Shende [She19]和 Ekholm-Ng-Shende [ENS18] 证明，对于任意纽结 K_0，$K_1 \in \mathcal{K}_{3,\ 1}$</style}，

Λ_{K^0} 与 Λ_{K_1} 勒让德同位， $U^*\mathbb{R}^n \Rightarrow K_0$ 与 K_1 同位，或与 K_1的镜像同位 .

此外，也有研究 [Asp21; Oka25a] 探讨如何区分非同位的勒让德单位余法丛，当 $n \ge 4$时。接下来，自然可以研究诱导映射

$$\pi_m(\mathcal{K}_{n,k}, K) \to \pi_m(\mathcal{L}_n, \Lambda_K)$$

在 $m \ge 1$的同伦群上的作用。

特别地，对于 $m = 1$，给定一个环路 $(K_t)_{t\in S^1}$ 在 $\mathcal{K}_{n,\ k}$ 中，我们要问 $(\Lambda_{K_t})_{t\in S^1}$ 在 $\mathcal{L}_{n,\ k}$ 中是否可缩。这一问题的动机来自此前关于标准接触结构下$\mathbb{R}^3$ 中勒让德结环路的研究。K´alm´an [Kal04] 发现了勒让德环面结的不可缩环路。Casals-Gao [CG22] 和 Casals-Ng [CN21] 给出了勒让德结的环路，这些环路在环路乘法下具有无限阶。他们计算了由 Legendrian 闭环诱导的某些代数对象上的单值化： [Kal04；CN21] 研究了

勒让德结的 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数上的单值化，而 [CG22] 研究了与勒让德环面链环相关的带框架的可构造层模空间上的单值化。与本文类似，Ng [Ng06] 研究了 $\mathbb{R}^2$ 中定向浸入曲线的余法丛及其环路。在高维情形下，Sabloff-Sullivan [SS16] 给出了 $\mathbb{R}^{2n-1}$ 中的勒让德球面环路，并利用生成函数不变量证明这些环路不可缩。此外，Golovko [Gol22] 基于 [CN21]的构造研究了球面旋结的环路。关于从 h 原理的角度研究勒让德结环路，请参见[FMP20]。

主要结果。 首先，我们先固定一些记号。

定义 1.1. 设 Λ_0 和 Λ_1 是 5 维接触流形 $U^*\mathbb{R}^3$ 中的紧Legendrian子流形。我们将 $\Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ 定义为由连接 Λ_0 和 Λ_1 的 $U^*\mathbb{R}^3$ 中 Legendrian 子流形的光滑族 $(\Lambda_t)_{t\in[0,1]}$ 构成的集合，并对光滑同伦等价$\sim$ 取商，使得

$(\Lambda_t^0)_{t\in[0,1]} \sim (\Lambda_t^1)_{t\in[0,1]}$⇔存在一个由 $U^*\mathbb{R}^3$ 中的 Legendrian 子流形构成的光滑族 $(\hat{}\,\Lambda_t^s)_{(s,t)\in[0,1]^2}$，满足 $\hat{}\,\Lambda_0^s = \Lambda_0$；对于任意 $s \in [0,1]$、，均有 $\hat{}\,\Lambda_1^s = \Lambda_1$；并且对于任意 $t \in [0,1]$.，均有 $\hat{}\,\Lambda_t^0 = \Lambda_t^0$ 和 $\hat{}\,\Lambda_t^1 = \Lambda_t^1$。

$\hat{}$ 此外，忘掉接触结构，并将上述定义中的 $(\Lambda_t)_{t\in[0,1]}$ 和 $(\Lambda_t^s)_{(s,t)\in[0,1]^2}$ 替换为嵌入曲面的光滑族，我们定义集合 $\Pi_{\mathrm{sm}}(\Lambda_0, \Lambda_1)$，以及自然映射 $\iota\colon \Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_0, \Lambda_1) \to \Pi_{\mathrm{sm}}(\Lambda_0, \Lambda_1)$。

通过拼接单参数族，我们可以自然地定义映射 $\Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_1, \Lambda_2) \times \Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_0, \Lambda_1) \to \Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_0, \Lambda_2)$。由此得到一个广群 Π_{Leg}，其对象是 $U^*\mathbb{R}^3$ 的紧Legendrian子流形，态射集合由定义 1.1 给出。当$\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda$时，我们用 $\pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda)$ 表示群 $\Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda, \Lambda)$。类似地， $\pi_{\mathrm{sm}}(\Lambda) := \Pi_{\mathrm{sm}}(\Lambda, \Lambda)$ 具有群结构。

类似于 $\Pi_{\mathrm{sm}}(\Lambda_0, \Lambda_1)$，对于 $\mathbb{R}^3$ 中任意光滑纽结 K_0 和 K_1 ，我们定义集合$\Pi_{\mathrm{sm}}(K_0, K_1)$，它由连接 K_0 和 K_1 的 $\mathbb{R}^3$ 中光滑纽结光滑族 $(K_t)_{t\in[0,1]}$ 的同伦类组成。接着，我们可以定义一个映射

$$\boldsymbol{\Lambda}\colon \Pi_{\mathrm{sm}}(K_0, K_1) \to \Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_{K_0}, \Lambda_{K_1})\colon [(K_t)_{t\in[0,1]}] \mapsto [(\Lambda_{K_t})_{t\in[0,1]}].$$

本文的目标是针对给定的 x, $y \in \Pi_{\mathrm{sm}}(K_0, K_1)$，给出一个以拓扑方式描述的充分条件，使其为 $\boldsymbol{\Lambda}(x) \neq \boldsymbol{\Lambda}(y)$。我们还将给出应用这一条件的例子。

为了陈述主要结果，我们使用纽结的弦代数 。Ng 在 [Ng08，定义 2.1] 中将其引入，作为带框架的定向结 K 的一个 $\mathbb{Z}[H_1(\Lambda_K)]$-代数。本文主要讨论其在 $\mathbb{Z}_2$-系数上的约化，并将其记为 $\mathbf{Cord}(K)$。相对于框架取 K 的一个平行副本 K' ，即可将 $\mathbf{Cord}(K)$ 定义为一个 $\mathbb{Z}_2$-代数，其生成元为 $\mathbb{R}^3 \setminus K$ 中端点位于 K' 的路径同伦类，并模去图 4.1 所示的某些“绞关系”。在自然同构意义下，该代数不依赖于框架的选择。

对于由 $(K_t)_{t\in[0,1]}$ 表示的任意 $x \in \Pi_{\mathrm{sm}}(K_0, K_1)$，我们取一个环境同痕 $(F_t)_{t\in[0,1]}$ ，使其作用于 $\mathbb{R}^3$ ，并满足 $F_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ 和 $F_{1-t}(K_t) = K_1$。特别地， $F_1(K_0) = K_1$。于是， F_1 诱导出从 $\mathbf{Cord}(K_0)$ 到 $\mathbf{Cord}(K_1)$ 的同构，我们将其记作 $\rho(x)$（见第 5.1.2 节）。由此，我们构造一个映射

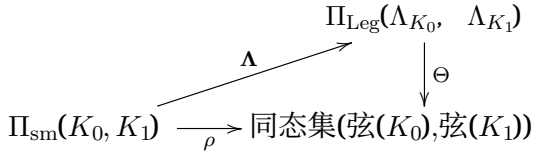
$$\rho\colon \Pi_{\mathrm{sm}}(K_0, K_1) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{Cord}(K_0), \mathbf{Cord}(K_1))\colon x \mapsto \rho(x),$$

而且，事实上，它是良定义的。与 Π_{Leg} 类似，对于所有纽结 K_0 和 K_1，我们可以定义一个由 $\Pi_{\mathrm{sm}}(K_0, K_1)$ 得到的广群 Π_{sm}。于是， ρ 可视为从 Π_{sm} 到 $\mathbb{Z}_2$-代数范畴的函子。

定理 1.2。 映射 ρ 通过 $\mathbf{\Lambda}$ 分解，也就是说，存在一个映射

$$\Theta\colon \Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_{K_0}, \Lambda_{K_1}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Cord}(K_0), \mathrm{Cord}(K_1))$$

使得下图交换：



我们来解释证明的思路。首先，映射 Θ按以下方式构造：对于 $U^*\mathbb{R}^3$ 中 Maslov 类消失的紧致 Legendrian 子流形 Λ，利用辛化 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$ 中的伪全纯曲线，可定义其 ***Legendrian*** 接触同调 $\mathrm{LCH}_*(\Lambda)$，其系数取自 $\mathbb{Z}_2$。此外，给定从 Λ_{K_0} 到 Λ_{K_1} 的 Legendrian 同伦 $(\Lambda_t)_{t\in[0,1]}$，我们可以构造一个从 $\mathrm{LCH}_*(\Lambda_{K_0})$ 到 $\mathrm{LCH}_*(\Lambda_{K_1})$ 的同构，且该同构仅取决于 $(\Lambda_t)_{t\in[0,1]}$ 在 $\Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_{K_0}, \Lambda_{K_1})$ [EHK16; Dim16a] 中的等价类。我们应注意，当 $\Lambda_{K_0} = \Lambda_{K_1}$ 时，$\mathrm{LCH}_*(\Lambda_{K_0})$ 上的自同构被视为环路 $(\Lambda_t)_{t\in[0,1]}$（其中 $\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda_{K_0}$）的单值化。

关键事实是存在一个同构

$$\mathrm{LCH}_0(\Lambda_K) \cong \mathrm{Cord}(K)$$

对任意纽结 K 都成立。关于该同构的构造，请参见 [CELN17]。于是，对于由 $(\Lambda_t)_{t\in[0,1]}$ 表示的 $x \in \Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_{K_0}, \Lambda_{K_1})$，$\Theta(x)$ 定义为一系列同构的复合

$$\mathrm{Cord}(K_0) \cong \mathrm{LCH}_0(\Lambda_{K_0}) \to \mathrm{LCH}_0(\Lambda_{K_1}) \cong \mathrm{Cord}(K_1).$$

接下来，为了证明等式 $\rho = \Theta \circ \mathbf{\Lambda}$，我们需要计算 $\Theta(x)$，其中 x 由 $[(K_t)_{t\in[0,1]}] \in \Pi_{\mathrm{sm}}(K_0, K_1)$ 的一个族 $(\Lambda_{K_t})_{t\in[0,1]}$ 表示。[CELN17] 中的同构 $\mathrm{LCH}_0(\Lambda_K) \to \mathrm{Cord}(K)$ 是利用$T^*\mathbb{R}^3$ 中边界位于 $L_K \cup \mathbb{R}^3$ 且穿孔渐近于 Λ_K的 Reeb 弦的伪全纯曲线的模空间来描述的。这里，L_K 是 K 的余法丛，$\mathbb{R}^3$ 则与 $T^*\mathbb{R}^3$的零截面相对应。更准确地说，在[CELN17 的定理 1.2], 中，利用该模空间构造了一个从 $\mathrm{LCH}_0(\Lambda_K)$ 到 K 的弦同调 0 次部分的同构（见第 4.1 节）。它由 $\mathbb{R}^3$ 中端点位于 K的路径组空间中的 0-链生成，并且自然同构于 $\mathrm{Cord}(K)$。

取一个对应于 Λ_{K_0} 的一条 Reeb 弦的生成元 $\xi \in$弦$(K_0) \cong \mathrm{LCH}_0(\Lambda_{K_0})$。我们要证明，$\xi$ 在两个映射 $\Theta(x)$ $\rho\left([(K_t)_{t\in[0,1]}]\right)$: 弦(K_0) $\to$弦(K_1) 下的像重合。它们由 K_1 的弦同调的 0-链表示，我们需要证明这些 0-链经由一条 1-链彼此同调。

在第 5.2.3 节中，我们利用参数化模空间及其紧化构造所需的 1-链。更具体地说，我们在 $T^*\mathbb{R}^3$ 中构造 Λ_{K_0} 的某一族精确拉格朗日填充 $(L_b)_{b\in[0,\infty)}$，它们沿纽结与 $\mathbb{R}^3$ 干净地相交：当 $b = 0$ 时为 K_0，且当 $b \gg 1$ 时为 K_1（见第 5.2.2 节）。然后，我们考虑边界位于 $L_b \cup \mathbb{R}^3$ 中（对某个 $b \in [0,\infty)$）且穿孔渐近于 Λ_{K_0} 的 Reeb 弦的伪全纯曲线的模空间。一维模空间利用 [EHK16; CELN17] 中的思想进行紧化。（实际上，我们处理的是在 $[0, b_*]$ 上针对 $b_* \gg 0$ 参数化的模空间。）

当 $K_0 = K_1 = K$ 时，上述论证相当于计算环路 $(\Lambda_{K_t})_{t\in[0,1]}$ 上 $\mathrm{LCH}_0(\Lambda_K) \cong$ 弦(K) 的单值化。参见定理 5.2。

注 1.3。 对于任意纽结 K，Λ_K 的 Legendrian 接触同调可定义为取系数于 $\mathbb{Z}_2[\pi_1(\Lambda_K)] \cong \mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm}, \mu^{\pm}]$（若固定了 Λ_K的自旋结构，也可取系数于 $\mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda_K)]$）。$\mathrm{LCH}_0(\Lambda_K) \cong \mathrm{Cord}(K)$ 在 $\mathbb{Z}_2$ 上的同构，是 [CELN17 定理 1.2] 在 $\mathbb{Z}_2[\pi_1(\Lambda_K)]$ 上的同构的一个约化（另见附录 A.4）。因此，我们预计可以利用 $\mathbb{Z}_2[\pi_1(\Lambda_K)]$，上的弦代数推广定理 1.2，但由于下文注 1.5 中的一些原因，这并非易事。

此外，定理 1.2 可用于在 $U^*\mathbb{R}^3$ 中构造勒让德环面的无穷多个不可缩环。考虑（2，3）环面纽结 $T_{2,\ 3}$ 及其镜像 $T_{2,\ -3}$。

定理 1.4. 设 K 为以下纽结之一：

(i) 方结 $T_{2,3}\#T_{2,-3}$,

(ii) $T_{2,3}\#(T_{2,-3}\#L)$ 任意纽结 L 的

(iii) $(2k+1,1)$-缆结，即方结 $T_{2,3}\#T_{2,-3}$ 的，其中 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。

那么，存在一个非平凡元素 $x\in\pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_K)$，使得 $\iota(x)$ 是 $\pi_{\mathrm{sm}}(\Lambda_K$ 的单位元 $)$.

这一结果可由定理 1.2 推出：只需找到纽结环路（K_t）$_{t\in[0,1]}$，使得 $K_0=K_1=K$ 满足 $\rho([(K_t)_{t\in[0,1]}])\in \mathrm{Aut}(\mathrm{Cord}(K))$ 不等于恒等映射，并且环路（Λ_{K_t}）$_{t\in[0,1]}$ 作为 $U^*\mathbb{R}^3$ 的光滑子流形之环路是可缩的。本文中这类环路的构造思路类似于 [CN21 第 2 节4]中引入的“紫色盒子 Legendrian 闭环”。参见第 6.1 节。

注 1.5。 将系数环从 $\mathbb{Z}_2[\pi_1(\Lambda_K)]$ 化简为 $\mathbb{Z}_2$，有三点得到简化：(1) 在 $\mathbb{Z}_2$ 上，$\mathrm{LCH}_0(\Lambda_K)\to \mathrm{Cord}(K)$ 的同构仅取决于 K；而 CELN17 定理 1.2] 中的同构则取决于 Λ_K 的基点选择，[CELN17 定理 1.2] 还包括 Legendrian 接触同调的定义，其系数环为 $\mathbb{Z}_2[\pi_1(\Lambda_K)]$, 。参见附录 A.4。(2) 在定理 1.2 的证明中，我们可以避免像 [CELN17 第 2.1、4 节3],那样讨论“尖峰”，因为那需要对伪全纯曲线进行一些局部分析。这使得第 5.2.3 节中的论证不那么复杂。(3) 在 $\mathbb{Z}_2$ 上，弦代数的组合描述明显比 $\mathbb{Z}_2[\pi_1(\Lambda_K)]$ 的情形简单（但仍非平凡）。参见例 6.7。

使用微局部层论的一种可能方法。固定一个域 k。对于拓扑空间X，令 $\mathrm{loc}(X)$ 表示 X 上 k-向量空间的局部常值层范畴。注意，有一个函子 $\mathrm{loc}(X)\to\mathrm{loc}(\{x\})$，它取 $x\in X$ 处的茎。设 K_0 和 K_1 是 $\mathbb{R}^3$中的纽结，并考虑 $U^*\mathbb{R}^3$上具有紧支撑的接触哈密顿各向同性 $\Phi=(\Phi_t)_{t\in[0,1]}$。固定 $x_0\in\mathbb{R}^3$，使其纤维 $U^*_{x_0}\mathbb{R}^3$远离 Φ的支撑。在 [She19，定理7], 中，Shende 证明，若 $\Phi_1(\Lambda_{K_0})=\Lambda_{K_1}$，则可利用 Φ 的 Guillermou-Kashiwara-Schapira 核给出范畴等价 $\mathrm{loc}(\mathbb{R}^3\setminus K_0)\to\mathrm{loc}(\mathbb{R}^3\setminus K_1)$，且该等价与取 x_0处茎的函子交换。此外，由这一等价以及群 $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K_0,x_0)$ 的左可序性，可推出一个同构 $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K_1,x_0)\to\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K_0,x_0)$[She19，定理 8]。将其记为 f_Φ。我们期望构造一个良定义映射

$$\Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_K)\to \mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K_1,x_0),\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K_0,x_0))\colon [(\Lambda_t)_{t\in[0,1]}]\mapsto f_\Phi,$$

其中 Φ 是勒让德同伦 $(\Lambda_t)_{t\in[0,1]}$ 的延拓。当 $K_0=K_1$ 时，利用此映射或许能够检测到勒让德环面的非平凡环路。

论文结构。 在第 2 节中，我们定义了 $U^*\mathbb{R}^3$ 中 Legendrian 子流形的 Legendrian 接触同调，其系数取自 $\mathbb{Z}_2$。我们还详细研究了 Legendrian 同痕所诱导的同构。在第 3 节中，参照 [CEL10；CELN17], ，我们引入 $T^*\mathbb{R}^3$ 中的伪全纯曲线模空间，使得边界条件由一个流形参数化。在第 4 节中，参照 [CELN17，第 2], 节，我们引入 $\mathbb{R}^3$ 中纽结的弦同调和弦代数，其系数取自 $\mathbb{Z}_2$。在第 4.3 节中，对于一个纽结 K，我们描述如何构造一个从 Λ_K 的 Legendrian 接触同调到 K的弦同调的同构。在第 5 节中，我们利用第 3 节中的模空间和第 4.3 节中的同构证明定理 1.2。在第 6 节中，我们将定理 1.2 应用于具体例子，并证明定理 1.4。参照 [CELN17，定理 1.2],，附录 A 表明，第 4.3 节中构造的映射是 $\mathbb{Z}_2$-代数的同构。

记号。 本文中，对于任意有限集合 S，令 $\#_{\mathbb{Z}_2}S \in \mathbb{Z}_2$ 表示 S模 2 的基数。此外，对于任意路径 γ_i: $[0,T_i] \to \mathbb{R}^3$ $(i = 0,\ 1)$，若 $\gamma_1(T_1) = \gamma_2(0)$，则令 $\gamma_1 \bullet \gamma_2$: $[0,T_1+T_2] \to \mathbb{R}^3$ 表示它们的拼接。

致谢。 本研究始于第一作者在奥格斯堡大学访问期间。我们感谢第二作者的前导师 Kai Cieliebak 拨冗与我们讨论并提出宝贵意见。我们还感谢 Tomohiro Asano、Kei Irie、Tamas K´alm´an、Javier Mart´ınez-Aguinaga 和 Lenhard Ng 与我们进行了富有启发性的交流。Y.O. 获得了日本学术振兴会科学研究费助成事业项目 JP25KJ0270 的资助。

2 Legendrian 接触同调与 Legendrian 同痕

2.1 预备知识

考虑带有坐标 (q_1,q_2,q_3) 的三维欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$。在余切丛 $T^*\mathbb{R}^3$ 上，我们有典范坐标 $(q,p) = ((q_1,q_2,q_3),(p_1,p_2,p_3))$，其中 $p = (p_1,p_2,p_3)$ 是纤维的坐标。 $T^*\mathbb{R}^3$ 上的典范 Liouville 1-形式定义为$\lambda_{\mathbb{R}^3} \coloneqq \sum_{i=1}^3 p_i dq_i$。

取 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle = \sum_{i=1}^3 dq_i \otimes dq_i$ 上的一个标准度量。单位余切丛 $U^*\mathbb{R}^3$ 是一个 5 维接触流形，其接触形式为 $\alpha \coloneqq \lambda_{\mathbb{R}^3}|_{U^*\mathbb{R}^3}$。令 R_α 表示与 α相关联的 Reeb 向量场。记作 $R_\alpha = \sum_{i=1}^3 p_i\partial_{q_i}$。

注 2.1. 令 S^2 为 $\mathbb{R}^3$中的单位球面。通常可以通过一个微分同胚，将 $U^*\mathbb{R}^3$ 与 1-喷射丛 J^1S^2 等同起来:

$$U^*\mathbb{R}^3 \to J^1S^2 = \mathbb{R}\times T^*S^2\colon (q,p) \mapsto (\langle q,p\rangle, (p, q-\langle q,p\rangle p)),$$

在此对应关系下， α 对应于 $dz - \lambda_{S^2}$。这里， z 是 $\mathbb{R}$ 的坐标， λ_{S^2} 是 T^*S^2上的典范 Liouville 形式。令 $\pi_{T^*S^2}\colon U^*\mathbb{R}^3 \cong J^1S^2 \to T^*S^2$表示该投影。

设 Λ 是 $U^*\mathbb{R}^3$ 中一个紧致连通的 Legendrian 子流形，且其 Maslov 类消失。其 Reeb 弦集合定义为

$$\mathcal{R}(\Lambda) \coloneqq \{a\colon [0,T] \to U^*\mathbb{R}^3 \mid T>0, \dot a(t) = (R_\alpha)_{a(t)} \text{ for every } t\in[0,T], \text{ and } a(0),a(T)\in\Lambda\}.$$

对于任意 $(a\colon [0,T] \to U^*\mathbb{R}^3) \in \mathcal{R}(\Lambda)$，记 $T_a \coloneqq T = \int a^*\alpha$。

设 $(\varphi_\alpha^t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是 R_α 的流。将接触分布记为 $\xi = \ker\alpha$。那么，若 Reeb 弦 $a \in \mathcal{R}(\Lambda)$ 满足 $(d\varphi_\alpha^{T_a})_{a(0)}(T_{a(0)}\Lambda)$ 与 $T_{a(T_a)}\Lambda$ 在 $\xi_{a(T_a)}$ 中横截，则称其为非退化的。对于每个非退化的 $a \in \mathcal{R}(\Lambda)$，我们选取一条封口路径 $\gamma_a\colon [0,1] \to \Lambda$，使得 $\gamma_a(0) = a(T_a)$ 且 $\gamma_a(1) = a(0)$。利用 $\gamma_a^*\xi$ 中的拉格朗日平面族 $(T_{\gamma_a(t)}\Lambda)_{t\in[0,1]}$，定义 Maslov 指数 $\mu(a) \in \mathbb{Z}$。详情参见 [EES05，第 2 节.2]。由 Λ 的 Maslov 类消失这一假设可知， $\mu(a)$ 与 γ_a 的选取无关。我们定义

$$|a| \coloneqq \mu(a) - 1 \in \mathbb{Z}.$$

令 $D \coloneqq \{z\in\mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$。对于任意 $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，我们固定边界点 p_0、p_1、……、$p_m \in \partial D$，并按逆时针方向排列。然后定义 $D_{m+1} \coloneqq D \setminus \{p_0,\dots,p_m\}$。令 $\mathcal{C}_{m+1}$ 为 D_{m+1} 上可光滑延拓至 D 的共形结构空间。对于每个 $\kappa \in \mathcal{C}_{m+1}$，我们将 j_κ 视为 D_{m+1} 上的复结构，它对应于 κ。在坐标为 $(s,\ t)$ 的 $\mathbb{R}\times[0,1]$ 上，复结构 j_0 由 $j_0(\partial_s) = \partial_t$ 确定。在黎曼曲面 $(D_{m+1},\ j_\kappa)$ 的每个边界穿孔附近，我们通过双全纯映射固定条带坐标

$$\psi_0\colon [0,\infty)\times[0,1] \to D_{m+1},$$
$$\psi_k\colon (-\infty,0]\times[0,1] \to D_{m+1} \text{ for } k=1,\dots,m,$$

关于 j_0 和 j_κ，使得 $\lim_{s\to\infty}\psi_0(s,\ t) = p_0$ 且 $\lim_{s\to-\infty}\psi_k(s,\ t) = p_k$ 在 $t\in[0,1]$上一致成立。

2.2 $\mathbb{Z}_2$系数的 Legendrian 接触同调

2.2.1 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$中的伪全纯曲线模空间

下文中，我们将 $\mathbb{R}^3$ 与 $T^*\mathbb{R}^3$的零截面等同。此外，我们将频繁使用一个微分同胚

$$E\colon \mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3 \to T^*\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{R}^3\colon (r,(q,p))\mapsto (q,e^r\cdot p), \tag{2.1}$$

使得 $E^*(\lambda_{\mathbb{R}^3}) = e^r\alpha$ 成立。

在 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$ 上的几乎复结构 J_0 由 E 定义，使得

$$(E_*J_0)_{(q,p)}\colon T_{(q,p)}(T^*\mathbb{R}^3)\to T_{(q,p)}(T^*\mathbb{R}^3)\colon \partial_{q_i}\mapsto -|p|\partial_{p_i},\ \partial_{p_i}\mapsto |p|^{-1}\partial_{q_i}\ (i=1,2,3)$$

对于每个 $(q,\ p)\in T^*\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{R}^3$。对于每个 $s\in\mathbb{R}$，我们定义一个映射

$$\tau_s\colon \mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3\colon (r,x)\mapsto (r+s,x).$$

那么，可以验证 $\tau_s^*J_0 = J_0$。

设 Λ_+ 和 Λ_- 是 $U^*\mathbb{R}^3$ 中紧致连通的 Legendrian 子流形。设 L 是 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$ 中的一个恰当拉格朗日余边，其正端为 Λ_+，负端为 Λ_-。在当前 Λ_- 连通的情形下，这意味着 $(e^r\alpha)|_L$ 是 L 上的一个正合 1-形式，并且存在 $r_-<r_+$ 使得

$$L\cap\big([r_+,\infty)\times U^*\mathbb{R}^3\big) = [r_+,\infty)\times\Lambda_+,\quad L\cap\big((-\infty,r_-]\times U^*\mathbb{R}^3\big) = (-\infty,r_-]\times\Lambda_-,$$

且 $L\cap([r_-,r_+]\times U^*\mathbb{R}^3)$ 是紧致的。对于这样的恰当拉格朗日余边 L，我们定义集合 $\mathcal{J}_L$，其中包含 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$ 上满足以下条件的几乎复结构 J：

- $d(e^r\alpha)(\cdot,J\cdot)$ 是 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$ 上的一个黎曼度量。
- $\tau_s^*J = J$ 在 $[r_+,\infty)\times U^*\mathbb{R}^3$ 对每个 $s\geq 0$ 都成立，并且 $\tau_s^*J = J$ 在 $(-\infty,r_-]\times U^*\mathbb{R}^3$ 对每个 $s\leq 0$ 都成立。
- 在 $[r_-,r_+]\times U^*\mathbb{R}^3$之外，$J(\xi)\subset\xi$和 $J(\partial_r) = R_\alpha$。
- 存在 $d>0$，使得对于 $U^*B_d := \{(q,\ p)\in U^*\mathbb{R}^3\mid |q|<d\}$，$L$包含于$\mathbb{R}\times U^*B_d$，且在 $\mathbb{R}\times U^*B_d$之外与 J_0重合。

$\mathcal{J}_L$ 赋予了 C^∞ 拓扑学。

设 $a\in\mathcal{R}(\Lambda_+)$ 和 a_1、……、$a_m\in\mathcal{R}(\Lambda_-)$。对于 $J\in\mathcal{J}_L$，我们将 $\mathcal{M}_{L,\ J}(a;\ a_1$、……、$a_m)$ 定义为模空间（对 D_{m+1} 上的保角自同构取商），它由以下成对的 $(u,\ \kappa)$ 构成：$\kappa\in\mathcal{C}_{m+1}$以及一个 C^∞映射 $u\colon D_{m+1}\to\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$，满足：

- $du + J\circ du\circ j_\kappa = 0$。
- $u\ (\partial D_{m+1})\subset L$。
- 存在 $s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_m\in\mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{s\to\infty}\tau_{-T_a s}\circ u\circ\psi_0(s,t) = (s_0,a(T_a t)),$$
$$\lim_{s\to-\infty}\tau_{-T_{a_k}s}\circ u\circ\psi_k(s,t) = (s_k,a_k(T_{a_k}t))\ \text{for}\ k=1,\ldots,m,$$

C^∞ 在 $t\in[0,1]$上一致收敛。

注意，$\mathbb{R}\times U^*B_d$ 的边界是 J_0-凸的，也就是说，对于任意的 $(u,\ \kappa)\in\mathcal{M}_{L,\ J}(a;\ a_1,\ \ldots,\ a_m)$，$u$ 的像包含于 $\mathbb{R}\times U^*B_d$ 的闭包中。当 $m=0$ 时，我们将这个模空间记为 $\mathcal{M}_{L,\ J}(a;\ \emptyset)$。

若 $\Lambda_+=\Lambda_-=\Lambda$ 和 $L=\mathbb{R}\times\Lambda$，我们考虑子集 $\mathcal{J}_{\mathrm{cyl}\,\mathbb{R}\times\Lambda}\subset\mathcal{J}_{\mathbb{R}\times\Lambda}$，它由满足以下条件的 $J\in\mathcal{J}_{\mathbb{R}\times\Lambda}$组成：对于每个 $s\in\mathbb{R}$，都有 $\tau_s^*J = J$。当 $J\in\mathcal{J}_{\mathrm{cyl}\,\mathbb{R}\times\Lambda}$时，群 $\mathbb{R}$ 通过对每个 $s\in\mathbb{R}$执行 $(u,\kappa)\cdot s = (\tau_s\circ u,\kappa)$，作用于模空间，因此我们定义商空间

$$\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda,J}(a;a_1,\ldots,a_m) := \mathcal{M}_{\mathbb{R}\times\Lambda,J}(a;a_1,\ldots,a_m)/\mathbb{R}.$$

2.2.2 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数及其同调的定义

设 Λ 是 $U^*\mathbb{R}^3$ 的紧致连通 Legendrian 子流形，其 Maslov 类消失，且 Λ 的每条 Reeb 弦均非退化。对于一般的 $J \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}\,\mathbb{R}\times\Lambda}$，我们可以如下构造一个系数取自 $\mathbb{Z}_2$ 的微分分次代数。关于构造方法，请参阅 [Dim16a; Dim16b]。另请参阅 [EES05; EES07]。

根据 [Dim16a，命题 3.13]，，对于一般的 $J \in \mathcal{J}\mathrm{cyl}_{\,\mathbb{R}\times\Lambda}$，每个满足 $(a_1, \ldots, a_m) \neq (a)$ 的 $a, a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{R}(\Lambda)$，模空间 $\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda,J}(a;\, a_1, \ldots, a_m)$ 都是横截切出的。它是一个维数为 $|a| - 1 - \sum_{k=1}^{m} |a_k|$ 的流形（参见 [Dim16b，第 4.2 节.4] 以及 [EES07，命题 2.3]）。此外，根据格罗莫夫-弗洛尔紧性 [Dim16a，第 3.3 节.2]，，它有一个紧化，由边界位于 $\mathbb{R} \times \Lambda$ 中的 J-全纯楼组成。特别地，当 $|a| - 1 - \sum_{k=1}^{m} |a_k| = 0$ 时，$\mathcal{M}_{\Lambda,J}(a;\, a_1, \ldots, a_m)$ 是一个紧致零维流形。

令 $\mathcal{A}_*(\Lambda)$ 为由 $\mathcal{R}(\Lambda)$ 自由生成的含单位非交换 $\mathbb{Z}_2$-代数，使得对于每个 $a \in \mathcal{R}(\Lambda)$ 都有 $a \in \mathcal{A}_{|a|}(\Lambda)$。作为一个向量空间，它由 Λ 的 Reeb 弦所成的字生成，其中包括空字 1。我们定义一个导子 $d_J\colon \mathcal{A}_*(\Lambda) \to \mathcal{A}_{*-1}(\Lambda)$，其次数为 -1，使得对于每个 $a \in \mathcal{R}(\Lambda)$

$$d_J(a) \coloneqq \sum_{|a_1|+\cdots+|a_m|=|a|-1} \left(\#_{\mathbb{Z}_2} \bar{\mathcal{M}}_{\Lambda,J}(a; a_1, \ldots, a_m)\right) a_1 \cdots a_m$$

并利用莱布尼茨法则将其延拓。于是，$d_J \circ d_J = 0$ 成立。证明见 [Dim16a，第 3.3 节。2]。微分分次代数（$\mathcal{A}_*(\Lambda)$ d_J）称为 Λ 的 ***Chekanov-Eliashberg*** 微分分次代数 。

我们定义 $\mathbb{Z}_2$-系数的 Λ的 ***Legendrian*** 接触同调为

$$\mathrm{LCH}_*(\Lambda) \coloneqq \operatorname{Ker} d_J / \operatorname{Im} d_J.$$

它作为含单位分次 $\mathbb{Z}_2$-代数的同构类与 J 无关，并且在 Λ 的 Legendrian 同痕下保持不变。证明参见 [Dim16a，定理 3.5]，其中使用了由 Legendrian 同痕构造的恰当拉格朗日余边。另见下文第 2.3 节。

与恰当拉格朗日余边相关的微分分次代数映射

设 L 是 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$ 中的一个恰当拉格朗日余边，其正端为 Λ_+，负端为 Λ_-。我们假设 L 的 Maslov 类为零，$\Lambda_\pm$ 是连通的，并且 $\Lambda_\pm$ 的每条 Reeb 弦都是非退化的。我们取 $J_+ \in \mathcal{J}^{\mathrm{cyl}}_{\mathbb{R}\times\Lambda_+}$ 和 $J_- \in \mathcal{J}^{\mathrm{cyl}}_{\mathbb{R}\times\Lambda_-}$ 为第 2.2.2 节中的几乎复结构，从而 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数（$\mathcal{A}_*$（Λ_+） d_{J_+}）和（$\mathcal{A}_*$（Λ_-） d_{J_-}）均有定义。

取一个几乎复结构 $J \in \mathcal{J}_L$，使得在 $[r_+, \infty$ 上 $J = J_+) \times U^*\mathbb{R}^3$，并且在 $(-\infty, r_-] \times U^*\mathbb{R}^3$ 上 $J = J_-$，其中 $r_- < r_+$。按照 [Dim16a 的命题 3.13]，，通过对 J_+ 进行一般扰动，$\mathcal{M}_{L,\,J}$（a；a_1，……，a_m）对于每个 $a \in \mathcal{R}$（Λ_+）和 a_1，……，$a_m \in \mathcal{R}$（Λ_-）都被横截地切出。此外，它是一个维数为 $|a| - \sum_{k=1}^{m} |a_k|$ 的流形。再次由格罗莫夫-弗洛尔紧性可知，当 $|a| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| = 0$ 时，$\mathcal{M}_{L,\,J}$（a；a_1，……，a_m）是一个紧致零维流形。

我们定义一个分次的 $\mathbb{Z}_2$-代数映射 $\Phi'_L\colon \mathcal{A}_*(\Lambda_+) \to \mathcal{A}_*(\Lambda_-)$，使得

$$\Phi'_L(a) = \sum_{|a_1|+\cdots+|a_m|=|a|} \left(\#_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{M}_{L,J}(a; a_1, \ldots, a_m)\right) a_1 \cdots a_m$$

对每个 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_+)$ 都成立。特别地，注意 $\#_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{M}_{L,J}(a, \emptyset)$ 是 $1 \in \mathcal{A}_0(\Lambda_-)$ 的系数。下一个定理 [Dim16a, 定理 3.3] 可由 [EHK16, 引理 3.13 和 3.14] 推出。

定理 2.2。 Φ'_L 是一个微分分次代数映射，即 $d_{J_-} \circ \Phi'_L = \Phi'_L \circ d_{J_+}$。此外，其同伦类在 L的紧支撑哈密顿同痕下保持不变。

由此可知，Φ'_L 诱导出一个分次 $\mathbb{Z}_2$-代数映射

$$\Phi_L\colon \mathrm{LCH}_*(\Lambda_+) \to \mathrm{LCH}_*(\Lambda_-),$$

它在 L的紧支撑哈密顿同痕下保持不变。

当 $\Lambda = \Lambda_+ = \Lambda_-$、 $L = \mathbb{R}\times\Lambda$和 $J \in \mathcal{J}\mathrm{cyl}_{\mathbb{R}\times\Lambda}$时，如果 $|a| = \sum_{k=1}^m |a_k|$ 且$(a_1,\dots,a_m) \neq (a)$，则模空间$\mathcal{M}_{\mathbb{R}\times\Lambda,J}(a,a_1,\dots,a_m)$为空集，因为$\dim \bar{\mathcal{M}}_{\Lambda,J}(a,a_1,\dots,a_m) < 0$。对于任意 $a \in \mathcal{R}(\Lambda)$，模空间 $\mathcal{M}_{\mathbb{R}\times\Lambda,J}(a,a)$仅含一个元素，即像为 $\mathbb{R}\times a([0,T_a])$的平凡条带。因此， $\Phi_{\mathbb{R}\times\Lambda}$ 是$\mathrm{LCH}_*(\Lambda)$上的恒等映射。

2.3 由Legendrian 子流形的同伦诱导的同构

接下来讨论映射 Φ_L，其中 L 来源于 $U^*\mathbb{R}^3$ 的 Legendrian 子流形同伦。关于几何论证，我们将参考 [Cha10，第 2] 节。（尽管 [Cha10] 侧重于三维接触流形的情形，但 [Cha10，第 2] 节中的论证可以推广到任意奇数维。）

在 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$ 上的任意时变 C^∞ 哈密顿量

$$H\colon (\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3)\times[0,1] \to \mathbb{R}\colon ((r,x),t) \mapsto H_t(r,x),$$

由 $d(e^r\alpha)(\cdot, X_H^t) = dH_t$ 定义一个时变向量场（X_H^t）$_{t\in[0,1]}$。若它是可积向量场，我们用（φ_H^t）$_{t\in[0,1]}$表示由（X_H^t）$_{t\in[0,1]}$生成的 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$上的流。

给定恰当拉格朗日余边 L 和 L'，其正端分别为 L （ L'）和Λ_1 （ Λ_2），负端分别为 L （ L'）和 Λ_2 （ Λ_3），我们将沿着 Λ_2 拼接 L 与 L' 所得的恰当拉格朗日余边记为 $L'\circ_{\Lambda_2} L$。它的正端为 Λ_1，负端为 Λ_3。

引理 2.3。 设 $(\Lambda_t)_{t\in[0,1]}$ 是 $U^*\mathbb{R}^3$中紧*Legendrian*子流形的一个同伦。则存在恰当拉格朗日子流形的光滑族 ($L_t\ _{t\in[0,1]}$ $L'_t\ _{t\in[0,1]}$ $\mathbb{R}\times$)和 ()，满足：$U^*\mathbb{R}^3$

(#) $L_0 = L'_0 = \mathbb{R}\times\Lambda_0$ 并且存在 $r_- < r_+$ 使得

$$\begin{aligned} L_t \cap \big([r_+,\infty)\times U^*\mathbb{R}^3\big) &= [r_+,\infty)\times\Lambda_0, \quad L_t \cap \big((-\infty,r_-]\times U^*\mathbb{R}^3\big) = (-\infty,r_-]\times\Lambda_t,\\ L'_t \cap \big([r_+,\infty)\times U^*\mathbb{R}^3\big) &= [r_+,\infty)\times\Lambda_t, \quad L'_t \cap \big((-\infty,r_-]\times U^*\mathbb{R}^3\big) = (-\infty,r_-]\times\Lambda_0. \end{aligned}$$

此外，对于满足 *(#)* 的任意一对 $(L_t)_{t\in[0,1]}$ 和 $(L'_t)_{t\in[0,1]}$，拼接 $L'_1\circ_{\Lambda_1} L_1$（分别为 $L_1\circ_{\Lambda_0} L'_1$）通过 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$上的紧支撑哈密顿同痕与 $\mathbb{R}\times\Lambda_0$ （分别为 $\mathbb{R}\times\Lambda_1$）同位。

证明。 根据 [Cha10，命题 2.2]及其证明，存在 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$上的时变哈密顿量$H$，使得对每个 $t\in[0,1]$， $\varphi_H^t(\mathbb{R}\times\Lambda_0) = \mathbb{R}\times\Lambda_t$。取一个 C^∞函数μ： $\mathbb{R}\to[0,1]$，并取 $r'_- < r'_+$ 使得当 $r \geq r'_+$ 时， $\mu(r) = 0$；当 $r \leq r'_-$ 时， $\mu(r) = 1$。定义

$$\begin{aligned} G&\colon (\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3)\times[0,1] \to \mathbb{R}\colon ((r,x),t) \mapsto \mu(r)\cdot H_t(r,x),\\ G'&\colon (\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3)\times[0,1] \to \mathbb{R}\colon ((r,x),t) \mapsto (1-\mu(r))\cdot H_t(r,x). \end{aligned}$$

那么，存在 $r_- < r'_-$ 和 $r_+ > r'_+$ 使得

$$\begin{cases} \varphi_G^t(r,x) = (r,x) \text{ and } \varphi_{G'}^t(r,x) = \varphi_H^t(r,x) & \text{if } r \geq r+,\\ \varphi_G^t(r,x) = \varphi_H^t(r,x) \text{ and } \varphi_{G'}^t(r,x) = (r,x) & \text{if } r \leq r_-. \end{cases}$$

因此，如果我们对每个 $t\in[0,1]$ 定义 $L_t := \varphi_G^t(\mathbb{R}\times\Lambda_0)$ 和 $L'_t := \varphi_{G'}^t(\mathbb{R}\times\Lambda_0)$，则 $(L_t)_{t\in[0,1]}$ 和 $(L'_t)_{t\in[0,1]}$ 满足条件 (#)。

接下来，假设我们有一对满足 (#) 的 $(L_t)_{t\in[0,1]}$ 和 $(L'_t)_{t\in[0,1]}$。对每个 $t \in [0,1]$ 考虑

$$S_t \coloneqq L'_t \circ_{\Lambda_t} L_t, \quad S'_t \coloneqq \psi^t(L_t \circ_{\Lambda_0} L'_t),$$

其中 $\psi^t \coloneqq \varphi_H^1 \circ (\varphi_H^t)^{-1}$。于是，

$$S_0 = \mathbb{R} \times \Lambda_0, \quad S_1 = L'_1 \circ_{\Lambda_1} L_1, \quad S'_0 = \mathbb{R} \times \Lambda_1, \quad S'_1 = L_1 \circ_{\Lambda_0} L'_1.$$

此外，$(S_t)_{t\in[0,1]}$（分别地，$(S'_t)_{t\in[0,1]}$）是恰当拉格朗日配边的光滑族，其正端和负端分别固定在 Λ_0（分别地，Λ_1）。对于这样的恰当拉格朗日子流形光滑族，存在定义在 $\mathbb{R} \times U^*\mathbb{R}^3$ 上且具有紧支撑的哈密顿量 K，K'，使得 $\varphi_K^t(\mathbb{R} \times \Lambda_0) = S_t$ 且 $\varphi_{K'}^t(\mathbb{R} \times \Lambda_1) = S'_t$。特别地，$\varphi_K^1(\mathbb{R} \times \Lambda_0) = L'_1 \circ_{\Lambda_1} L_1$ 且 $\varphi_{K'}^1(\mathbb{R} \times \Lambda_1) = L_1 \circ_{\Lambda_0} L'_1$。 □

此外，利用定义在 $\mathbb{R} \times U^*\mathbb{R}^3$ 上的哈密顿量单参数族，我们可以用与引理 2.3 类似的方法证明以下引理。

引理 *2.4.* 设 $(\Lambda_t^s)_{s,t\in[0,1]}$ 是 $U^*\mathbb{R}^3$ 中的 ***Legendrian*** 子流形族，且随 $(s,t) \in [0,1]^2$ 光滑变化，使得对每个 $s \in [0,1]$，$\Lambda_0^s = \Lambda_0$ 且 $\Lambda_1^s = \Lambda_1$。那么，存在 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$ 中的恰当拉格朗日子流形光滑族 $(L_t^s)_{s,t\in[0,1]}$ 和 $(L_t'^s)_{s,t\in[0,1]}$，使得对于任意固定的 $s \in [0,1]$，$(L_t^s)_{t\in[0,1]}$ 和 $(L_t'^s)_{t\in[0,1]}$ 都满足引理 *2.3* 中关于 $(\Lambda_t^s)_{t\in[0,1]}$ 的 ***(#)***。

由此引理可得一个族 $(L_1^s)_{s\in[0,1]}$，其正端固定为 Λ_0，负端固定为 Λ_1。因此，L_1^0 与 L_1^1 在 $\mathbb{R} \times U^*\mathbb{R}^3$ 上通过紧支撑哈密顿同痕同位。

现在，我们应用引理 2.3 和 2.4，推导出以下定理。设 Λ_0, Λ_1 和Λ_2为第 2.2.2 节中的 Legendrian 子流形。回顾定义 1.1 中针对 $i,j \in \{0,1,2\}$ 的集合 $\Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_i, \Lambda_j)$，以及拼接映射 $\Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_1,\Lambda_2) \times \Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_0,\Lambda_1) \to \Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_0,\Lambda_2)$: $(x', x) \mapsto x' \cdot x$。

定理 2.5. 对于任意由 $U^*\mathbb{R}^3$ 中的 ***Legendrian*** 同伦 $(\Lambda_t)_{t\in[0,1]}$ 表示的 $y \in \Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_0,\Lambda_1)$，我们取引理 *2.3* 中的恰当拉格朗日子流形族 $(L_t)_{t\in[0,1]}$ 和 $(L'_t)_{t\in[0,1]}$。那么，$\Phi_{L_1}\colon \mathrm{LCH}_*(\Lambda_0) \to \mathrm{LCH}_*(\Lambda_1)$ 是一个同构，其逆映射由$\Phi_{L'_1}$给出。若设

$$\Phi(y) \coloneqq \Phi_{L_1},$$

这给出一个良定义映射

$$\Phi\colon \Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_0,\Lambda_1) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{LCH}_*(\Lambda_0), \mathrm{LCH}_*(\Lambda_1)).$$

此外，对任意 $y \in \Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_0,\Lambda_1)$ 与 $y' \in \Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_1,\Lambda_2)$，等式 $\Phi(y' \cdot y) = \Phi(y') \circ \Phi(y)$在 同态集 $(\mathrm{LCH}_*(\Lambda_0),\mathrm{LCH}_*(\Lambda_2))$ 中成立。

证明。考虑 $U^*\mathbb{R}^3$ 中的一个 Legendrian 同伦 $(\Lambda_t)_{t\in[0,1]}$。对任意一对如引理 2.3 所述满足 (#) 的 $(L_t)_{t\in[0,1]}$ 与 $(L'_t)_{t\in[0,1]}$，我们有分次 $\mathbb{Z}_2$-代数的同态

$$\Phi_{L_1}\colon \mathrm{LCH}_*(\Lambda_0) \to \mathrm{LCH}_*(\Lambda_1), \quad \Phi_{L'_1}\colon \mathrm{LCH}_*(\Lambda_1) \to \mathrm{LCH}_*(\Lambda_0).$$

根据 [EHK16，引理 3.13] 关于配边的复合，以及 [EHK16，引理 3.14]关于紧支撑哈密顿同伦下的不变性，

$$\Phi_{L'_1} \circ \Phi_{L_1} = \Phi_{L'_1 \circ_{\Lambda_1} L_1} = \Phi_{\mathbb{R}\times\Lambda_0} = \mathrm{id}_{\mathrm{LCH}_*(\Lambda_0)},$$
$$\Phi_{L_1} \circ \Phi_{L'_1} = \Phi_{L_1 \circ_{\Lambda_0} L'_1} = \Phi_{\mathbb{R}\times\Lambda_1} = \mathrm{id}_{\mathrm{LCH}_*(\Lambda_1)}.$$

因此， Φ_{L_1} 是一个同构，其逆映射为 $\Phi_{L_1'}$。此外，此映射与 $(L_t)_{t\in[0,1]}$ 和 $(L_t')_{t\in[0,1]}$的选取无关。事实上，若我们另选一对满足 (#) 的 $(\hat{} L_t)_{t\in[0,1]}$ 和 $(\hat{} L_t')_{t\in[0,1]}$ ，那么

$$\Phi_{L_1'} \circ \Phi_{\hat{L}_1} = \Phi_{L_1' \circ_{\Lambda_1} \hat{L}_1} = \Phi_{\mathbb{R}\times\Lambda_0} = \mathrm{id}_{\mathrm{LCH}_*(\Lambda_0)}$$

因为 $L_1' \circ_{\Lambda_1} \hat{} L_1$ 与 $\mathbb{R}\times\Lambda_0$ 在紧支撑哈密顿同痕下同位。因此， $\Phi_{L_1} = (\Phi_{L_1'})^{-1} = \Phi_{\hat{L}_1}$。

我们来证明， Φ_{L_1} 仅取决于 $(\Lambda_t)_{t\in[0,1]}$的同伦类。对于任意满足 $\Lambda_0^s = \Lambda_0$ 且对每个 $s\in[0,1]$ 均有 $\Lambda_1^s = \Lambda_1$ 的 Legendrian 子流形光滑族 $(\Lambda_t^s)_{s,\ t\in[0,1]}$ ，我们取如引理 2.4 中的 $(L_t^s)_{s,\ t\in[0,1]}$ 和 $(L_t'^s)_{s,\ t\in[0,1]}$ 。利用 $(L_1^s)_{s\in[0,1]}$，由 [EHK16，引理 3.14] 可得 $\Phi_{L_1^0} = \Phi_{L_1^1}$。因此，对于 $y\in\Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$， $\Phi(y)$ 是良定义的。

最后，对于任意 $y\in\Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_0,\ \Lambda_1)$ 和 $y'\in\Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_1,\ \Lambda_2)$，方程 $\Phi(y')\circ\Phi(y) = \Phi(y'\cdot y)$ 可由 [EHK16，引理 3.13] 得出。 □

2.4 纽结单位余法丛的 Legendrian 接触同调

设 K 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个光滑嵌入的纽结。它的余法丛

$$L_K \coloneqq \{(q,p)\in T^*\mathbb{R}^3 \mid q\in K,\ p(v)=0 \text{ for all } v\in T_qK\}$$

是 $T^*\mathbb{R}^3$ 的一个恰当拉格朗日子流形，其 Maslov 类为零。于是，单位余法丛 $\Lambda_K = L_K\cap U^*\mathbb{R}^3$ 是 $U^*\mathbb{R}^3$ 的一个 Legendrian 子流形。注意， Λ_K 与二维环面 $S^1\times S^1$ 微分同胚。

我们回顾一下关于 Λ_K 的 Reeb 弦的若干事实。令 $\mathcal{C}(K)$ 表示 K 中单位速度的双法线弦集合，也就是说，

$$\mathcal{C}(K) \coloneqq \left\{ c\colon [0,T]\to\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} |\dot c(t)| = 1 \text{ for any } t\in[0,T] \text{ and} \\ c(t)\in K,\ \dot c(t)\in (T_{c(t)}K)^\perp \text{ for } t\in\{0,T\} \end{array} \right\}.$$

于是我们得到一个双射

$$\mathcal{R}(\Lambda_K)\to\mathcal{C}(K)\colon a\mapsto \pi_{\mathbb{R}^3}\circ a,$$

w这里 $\pi_{\mathbb{R}^3}\colon U^*\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是丛投影。此外，若我们定义一个 C^∞ 函数 n

$$f_K\colon (K\times K)\setminus\Delta_K\to\mathbb{R}\colon (q,q')\mapsto |q-q'|^2,$$

其中 Δ_K 是对角子集，那么我们也得到一个双射

$$\mathcal{C}(K)\to\{\text{critical points of } f_K\}\colon (c\colon[0,T]\to\mathbb{R}^3)\mapsto (c(0),c(T)).$$

因此，我们得到一个双射

$$\mathcal{R}(\Lambda_K)\to\{\text{critical points of } f_K\}$$

它将任意满足 $a(0)$ 的 $a\in\mathcal{R}(\Lambda_K) = (q_a,p_a)\in\Lambda_K$映射到 $x_a \coloneqq (q_a, q_a+T_a\cdot p_a)\in (K\times K)\setminus\Delta_K$。此外，以下关系成立。参见 [Oka25a，命题 2.7]，，该结果依赖于 [APS08，推论 4.2]。

命题 2.6。 **</style}Reeb 弦 (Λ_K) </style}**是非退化的，当且仅当 x_a 是 f_K的一个非退化临界点。此外，

$$\mu(a) = \mathrm{ind}(x_a) + 1,$$

其中，$\mathrm{ind}(x_a)$ 是 x_a 处 f_K 的 ***Morse*** 指数，因此 $|a| = \mathrm{ind}(x_a)$。特别地， $|a|\in\{0,1,2\}$。

对于一般的 K，f_K 是一个 Morse 函数，这意味着 Λ_K 的每条 Reeb 弦都是非退化的。然后，我们可以按照第 2.2.2 节中的方法定义微分分次代数 $(\mathcal{A}_*(\Lambda_K),\ d_J)$ 及其同调 $\mathrm{LCH}_*(\Lambda_K)$。我们注意到，由于 $\mathcal{A}_p(\Lambda_K) = 0$ 对于 $p<0$，

$$\mathrm{LCH}_0(\Lambda_K) = \mathcal{A}_0(\Lambda_K)/d_J(\mathcal{A}_1(\Lambda_K)).$$

3 Pa在 $T^*\mathbb{R}^3$ 中伪全纯曲线的参数化模空间

在本节中，参照 [CEL10; CELN17], ，我们介绍具有切换拉格朗日边界条件的 $T^*\mathbb{R}^3$ 中的伪全纯曲线模空间。更一般地，我们将考虑边界条件由一个流形参数化的情形。

3.1 模空间的定义 $\mathcal{M}_{\mathscr{L},\ l}(a)$

作为记号，对于每个 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $j \in \{1, \ldots, 2l+1\}$，令 $\partial_j D_{2l+1}$ 表示 ∂D_{2l+1} 的分量，其闭包以 p_{j-1}，$p_j \in \partial D$ 为边界点（当 $j = 2l+1$, $p_{2l+1} := p_0$ 时）。我们将其闭包记为 $\partial_j D_{2l+1}$，它同胚于一个闭区间。此外，令 $D^*_\varepsilon \mathbb{R}^3 := \{(q,\ p) \in T^*\mathbb{R}^3 \mid |p| \leq \varepsilon\}$，其中 $\varepsilon > 0$ 任意。

回顾第 2.2.1 节中由 (2.1) 定义的辛同胚 E，以及 $\mathbb{R} \times U^*\mathbb{R}^3$ 上的几乎复结构 J_0。选取一个 C^∞ 函数 $\rho\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}_{>0}$，使得当 $s \leq \frac{1}{2}$ 时，$\rho(s) = 1$；当 $s \geq 1$ 时，$\rho(s) = s$。然后，我们在 $T^*\mathbb{R}^3$ 上定义一个几乎复结构 J_ρ，使得对于每个 $(q,\ p) \in T^*\mathbb{R}^3$,

$$(J_\rho)_{(q,p)}\colon T_{(q,p)}(T^*\mathbb{R}^3) \to T_{(q,p)}(T^*\mathbb{R}^3)\colon \partial_{q_i} \mapsto -\rho(|p|)\partial_{p_i},\ \partial_{p_i} \mapsto \rho(|p|)^{-1}\partial_{q_i},$$

对于 $i = 1$，2，3。注意，$E^* J_\rho$ 在 $\mathbb{R}_{\geq 0} \times U^*\mathbb{R}^3$ 上与 J_0 一致。

固定一个紧致连通的 Legendrian 子流形 Λ，它属于 $U^*\mathbb{R}^3$。设 B 是一个紧致的 C^∞流形，且可以有边界。设 $\mathscr{L} = (L_b)_{b\in B}$ 是由 B 参数化的 $T^*\mathbb{R}^3$ 中的恰当拉格朗日子流形光滑族，满足：

(L1) L_b 的 Maslov 类消失。

(L2) 存在一个实数 $r_0 > 0$，使得

$$E^{-1}(L_b) \cap \big([r_0,\infty) \times U^*\mathbb{R}^3\big) = \Lambda \times [r_0,\infty)$$

对于每个 $b \in B$，$\big(\bigcup_{b\in B} L_b\big) \cap D^*_{e^{r_0}}\mathbb{R}^3$ 都是 $T^*\mathbb{R}^3$的紧致子集。

(L3) 存在 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ 以及一个光滑嵌入族 $(\gamma_b\colon S^1 \to \mathbb{R}^3)_{b\in B}$，使得对于每个 $b \in B$，γ_b 都是实解析映射，并且

$$L_b \cap D^*_\varepsilon \mathbb{R}^3 = L_{K_b} \cap D^*_\varepsilon \mathbb{R}^3$$

对于纽结 $K_b := \gamma_b(S^1) \subset \mathbb{R}^3$。

对于这样的族 $\mathscr{L}$，参见 [CELN17，第 8 节。1], 取 $T^*\mathbb{R}^3$ 上满足以下条件的几乎复结构 J'_ρ：

- $d\lambda_{\mathbb{R}^3}(\cdot, J'_\rho \cdot)$ 是 $T^*\mathbb{R}^3$ 上的黎曼度量。
- 存在 $d > 0$，使得 $\bigcup_{b\in B} L_b \subset \{(q,p) \in T^*\mathbb{R}^3 \mid |q| < d\}$，并且 J'_ρ 在 $\{(q,p) \in U^*\mathbb{R}^3 \mid |q| > d$ 或 $|p| \leq \frac{1}{2}\}$ 上与 J_ρ 重合。
- $E^* J'_\rho$保持 ξ，且 $(E^* J'_\rho)(\partial_r) = \frac{e^r}{\rho\, e^r()} R_{\alpha\circ}$
- 存在 $J \in \mathcal{J}_{\text{圆柱}\mathbb{R}\times\Lambda}$，使得在 $\mathbb{R}_{\geq 0} \times U^*\mathbb{R}^3$ 上 $E^* J'_\rho = J$,

注意，J_ρ 在 $J = J_0$的情况下满足这些条件。

对于 $a \in \mathcal{R}(\Lambda)$ 和 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们将 $\mathcal{M}_{\mathscr{L},\ l}(a)$ 定义为模空间（模去保角自同构），它由三元组 $(b,\ u,\ \kappa)$ 组成，其中包含 $b \in B$、$\kappa \in \mathcal{C}_{2l+1}$ 和一个 C^∞ 映射 $u\colon\ D_{2l+1} \to T^*\mathbb{R}^3$，满足：

- $du + J'_\rho \circ du \circ j_\kappa = 0.$

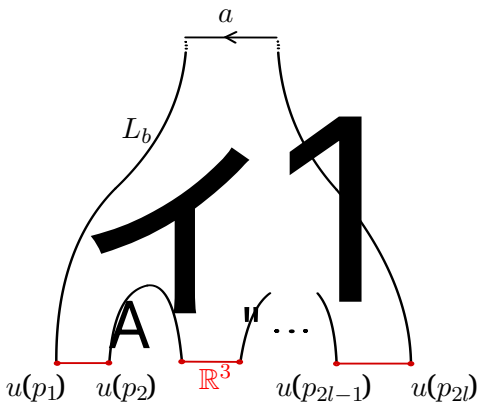


图 3.1： u 在 $T^*\mathbb{R}^3$中的像。 a 是 Λ的一条 Reeb 弦。黑色边界包含于L_b 中，红色边界包含于 $\mathbb{R}^3$中。切换点 p_1、……、 p_{2l} 被映射到$L_b \cap \mathbb{R}^3 = K_b$。

- $u(\partial_{2i} D_{2l+1}) \subset \mathbb{R}^3$ for $i \in \{1, \dots, l\}$ and $u(\partial_{2i+1} D_{2l+1}) \subset L_b$ for $i \in \{0, \dots, l\}$.

  当 $s \gg 0$ 且存在 $s_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $(u \circ \psi_0)(s, t)$ 包含于 $T^*\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^3$ 中时，

$$\lim_{s \to \infty} (\tau_{-T_a s} \circ E^{-1} \circ u \circ \psi_0)(s, t) = (s_0, a(T_a t))$$

  在 $\mathbb{R} \times U^*\mathbb{R}^3$ C^∞ 上于 $t \in [0, 1]$一致地

- 存在 $x_1, \dots, x_{2l} \in K_b = L_b \cap \mathbb{R}^3$ 使得

$$\lim_{s \to -\infty} (u \circ \psi_j)(s, t) = x_j$$

  对每个 $j \in \{1, \dots, 2l\}$，在 $T^*\mathbb{R}^3$ C^∞ 上于 $[0, 1]$ 一致地。

令 $u(p_i) = x_i$ 对于 $j \in \{1, \dots, 2l\}$，则 u 可连续延拓到 D_1 上。见图 3.1。

注记 3.1。 当 u 被延拓为从 $(D_1, \partial D_1)$ 到 $(T^*\mathbb{R}^3, L_b \cup \mathbb{R}^3)$ 的映射时，点 $p_1, \dots, p_{2l+1} \in \partial D_1$ 被视为边界条件发生切换的点（即从 L_b 跳变到 $\mathbb{R}^3$，或反之），而非穿孔。另见 [CELN17，第 6 节。3]。

此外，对于 $j \in \{1, \dots, 2l+1\}$，我们将 $\widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a)$ 定义为一个模空间（对 D_{2l+1} 上的保角自同构取商），它由满足以下条件的 $((b, u, \kappa), z)$ 构成：(b, u, κ) 满足上述相同条件，且 z 位于 $\partial_j D_{2l+1}$ 中。这是一个由 J'_ρ-全纯曲线构成的模空间，其在第 j 个边界分支上有一个标记点。

$B \times T^*\mathbb{R}^3$ 有两个子流形： $B \times \mathbb{R}^3$ 和

$$L_{\mathscr{L}} := \{(b, x) \in B \times T^*\mathbb{R}^3 \mid x \in L_b\}.$$

于是，我们可以定义求值映射

$$\mathrm{ev}_j \colon \widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a) \to \begin{cases} B \times \mathbb{R}^3 & \text{if } j \text{ is even}, \\ L_{\mathscr{L}} & \text{if } j \text{ is odd}, \end{cases} \tag{3.1}$$

它将 $((b, u, \kappa), z)$ 映射到 $(b, u(z))$ 。我们还有 $B \times \mathbb{R}^3$ 的一个子流形

$$K_{\mathscr{L}} := \{(b, q) \in B \times \mathbb{R}^3 \mid q \in K_b\}.$$

注意， $B \times \mathbb{R}^3$ 与 $L_{\mathscr{L}}$沿 $K_{\mathscr{L}}$干净相交。

3.2 切换点处的绕数

对于 $\delta > 0$，我们设

$$D_\delta := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < \delta\}.$$

对于 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$，我们在 $S^1 \times (-\delta, \delta)$ 上固定一个复结构，使得映射 $\{z \in \mathbb{C} \mid -\delta < \mathrm{Im}\ z < \delta\} \to S^1 \times (-\delta, \delta)$: $z \mapsto (e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Re}z}, \mathrm{Im}\ z)$ 是全纯的。

我们继续考虑第3.1节中的 $T^*\mathbb{R}^3$ 上恰当拉格朗日子流形的族 $\mathscr{L}$。由条件 (L3)，存在一族实解析嵌入 $(\gamma_b\colon S^1 \to \mathbb{R}^3)_{b\in B}$，使得 $K_b = \gamma_b(S^1)$。取沿着 K_b 的实解析向量场

$$v_{1,b}, v_{2,b}\colon K_b \to \mathbb{R}^3$$

它们随 $b \in B$ 平滑变化，使得对每个 $t \in S^1$，$\{\dot\gamma_b(t),\ (v_{1,\ b})_{\gamma_b(t)}, (v_{2,\ b})_{\gamma_b(t)}\}$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基。我们将 CELN17 引理 8.6] 关于单个实解析嵌入 $\gamma\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ 的证明加以推广。于是，当 $\delta > 0$ 充分小时，我们得到一族全纯嵌入

$$\iota_b\colon S^1 \times (-\delta, \delta) \times D_\delta \to D^*_{\frac{1}{2}}\mathbb{R}^3$$

它在 $b \in B$ 上光滑变化，使得:

- $\iota_b(S^1 \times \{0\} \times \{0\}) = K_b$。
- $\iota_b(S^1 \times \{0\} \times (\mathbb{R}^2 \cap D_\delta)) \subset \mathbb{R}^3$。
- $\iota_b(S^1 \times \{0\} \times (\sqrt{-1}\mathbb{R}^2 \cap D_\delta)) \subset L_{K_b}$。

令 $\pi_{D_\delta}\colon S^1 \times (-\delta, \delta) \times D_\delta \to D_\delta$ 表示该投影。对于任意 $(b, u, \kappa) \in \mathcal{M}_{\mathscr{L},\ l}(a)$ 和 $j \in \{1, \dots, 2l\}$，我们定义

$$u_j^{\mathrm{loc}} := \pi_{D_\delta} \circ \iota_b^{-1} \circ u \circ \psi_j.$$

这是一个从 $(-\infty, s'_j] \times [0, 1]$ 到 $D_\delta \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 的全纯函数，其中 $s'_j \ll 0$。取一个双全纯映射

$$\mu\colon (-\infty, 0] \times [0, 1] \to \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |z| \le 1,\ \mathrm{Re}(z) \ge 0,\ \mathrm{Im}(z) \ge 0\}\colon (s, t) \mapsto e^{\frac{\pi}{2}(s+\sqrt{-1}t)},$$

并考虑以 0 为中心的 $u_j^{\mathrm{loc}} \circ \mu^{-1}$ 的幂级数展开。根据 [CELN17 第 4.1 节案例 1 中的论证，以及 2]，它具有如下形式

$$u_j^{\mathrm{loc}} \circ \mu^{-1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k+1},\ \text{where } a_k \in \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{if } j \text{ is odd,} \\ \sqrt{-1}\mathbb{R}^2 & \text{if } j \text{ is even.} \end{cases}$$

u 在 p_j 处的绕数 定义为

$$w_{b,j}(u, \kappa) := \min\{\tfrac{2k+1}{2} \mid k \in \mathbb{Z}_{\ge 0},\ a_k \ne 0\}.$$

于是，对于满足 $n_j \in \{\frac{2k+1}{2} \mid k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\}$ 的任意元组 $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_{2l})$，定义了 $\mathcal{M}_{\mathscr{L},l}(a)$ 的一个子空间，其定义为

$$\mathcal{M}_{\mathscr{L},l}(a; \mathbf{n}) := \{(b, u, \kappa) \in \mathcal{M}_{\mathscr{L},l}(a) \mid w_{b,j}(u, \kappa) = n_j \text{ for each } j = 1, \dots, 2l\}.$$

注意，$\mathcal{M}_{\mathscr{L},\ l}(a;\ \mathbf{n})$ 对于$\mathbf{n} = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ 是$\mathcal{M}_{\mathscr{L},\ l}(a)$ 的开子集。

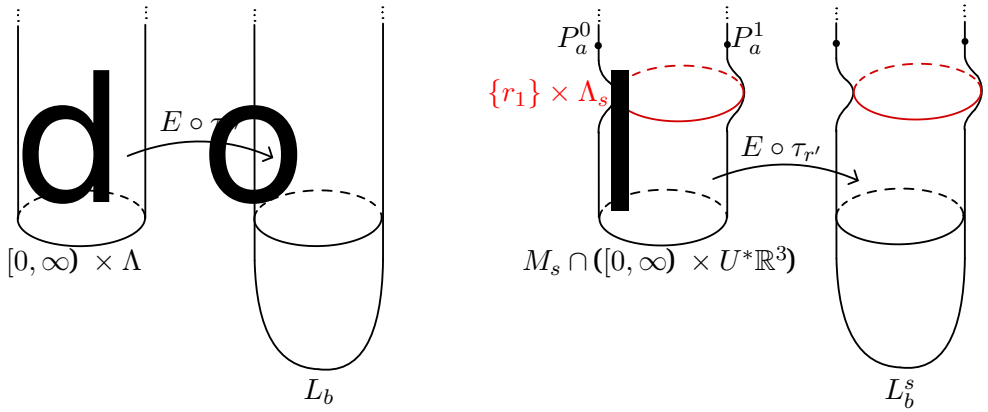


图 3.2： L_b 包含一个与 $[0,\infty) \times \Lambda$ 同胚的柱状区域，该同胚由 $E \circ \tau_{r'}$ 给出。 L_b^s 是 Λ 的一个精确拉格朗日填充，它通过用 $M_s \cap ([0,\infty) \times U^*\mathbb{R}^3)$ 替换柱状区域得到。在右图中， $P_a^0 := (2r_1,\ a(0))$，且 $P_a^1 := (2r_1,\ a(T_a))$。

3.3 拉格朗日子流形的扰动

在本节中，我们讨论 $(L_b)_{b\in B}$ 的一个扰动，该扰动用于实现第 3.4 节中的附加条件 (L4)。另见注释 3.3。

对于任意满足 $a(0) = (p_a,\ q_a) \in \Lambda$ 的 $a \in \mathcal{R}(\Lambda)$，考虑 $T^*\mathbb{R}^3$ 中的一个平面

$$H_a := \{(q_a + t \cdot p_a, r \cdot p_a) \in T^*\mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}\}.$$

注意， $H_a \cap U^*\mathbb{R}^3 = \{(q_a + t \cdot p_a,\ p_a) \in U^*\mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$，且它是包含 a 的 Reeb 轨道的像。

假设每条 Reeb 弦 $a \in \mathcal{R}(\Lambda)$ 都是非退化的，且

$$\Lambda \cap (H_a \cap U^*\mathbb{R}^3) = \{a(0), a(T_a)\}. \tag{3.2}$$

使用注记 2.1 中的记号，这等价于拉格朗日浸入 $\pi_{T^*S^2}|_\Lambda \colon \Lambda \to T^*S^2$ 的自交仅由横截双重点构成。

We 选择 Legendrian 子流形 $(\Lambda_s)_{s\in[0,1]}$ 的一个小同伦，使得 $\Lambda_0 = \Lambda$，并且

$$s \neq 0 \Rightarrow \Lambda_s \cap (H_a \cap U^*\mathbb{R}^3) = \emptyset \text{ for any } a \in \mathcal{R}(\Lambda). \tag{3.3}$$

这等价于：对于任意 $a \in \mathcal{R}(\Lambda)$，若 $s \neq 0$，则 $\pi_{T^*S^2}(a(0)) \notin \pi_{T^*S^2}(\Lambda_s)$。于是，如引理 2.3 中所示，$L'_s \circ_{\Lambda_s} L_s \subset \mathbb{R} \times U^*\mathbb{R}^3$ 及其沿 $\mathbb{R}$ 方向的平移给出一族恰当拉格朗日余边 $(M_s)_{s\in[0,1]}$，满足：

- $M_0 = \mathbb{R} \times \Lambda$ 并且存在 $r_1 > 0$ 使得

  $$M_s \cap \left((\mathbb{R} \setminus [0, 2r_1]) \times U^*\mathbb{R}^3\right) = (\mathbb{R} \setminus [0, 2r_1]) \times \Lambda$$

  对任意 $s \in [0,1]$。
- $M_s \cap \left(\{r_1\} \times U^*\mathbb{R}^3\right) = \{r_1\} \times \Lambda_s$。

取一个满足 (L1)、(L2) 和 (L3) 的恰当拉格朗日子流形族 $\mathscr{L} = (L_b)_{b\in B}$。令 $r_0 > 0$ 为 (L2) 中的实数。

命题 3.2。 任意固定 $b \in B$ 和 $r' > r_0$。定义一个 $T^*\mathbb{R}^3$ 的恰当拉格朗日子流形 L_b^s，使其满足

$$L_b^s := \left(L_b \setminus E([r', \infty) \times \Lambda)\right) \cup (E \circ \tau_{r'}) \left(M_s \cap ([0,\infty) \times U^*\mathbb{R}^3\ )\right).$$

见图 *3.2*。于是，存在一个与 b 和 r' 无关的 $s_0 > 0$，使得对于任意 $0 < s \leq s_0$，这两个点

$$E(2r_1 + r', a(0)), E(2r_1 + r', a(T_a)) \in L_b^s \cap H_a$$

无法通过路径连接于（$\mathbb{R}^3 \cup L_b^s$）$\cap H_a$中。（在图 *3.2* 中，这两点分别是 $E \circ \tau_{r'}$（P_a^0）和 $E \circ \tau_{r'}$（P_a^1）。）

证明。根据 M_s 的性质，存在 $s_0 > 0$，使得对于任意 $s \in [0, s_0]$ 和 $r \in \mathbb{R}$，M_s 与 $\{r\} \times U^*\mathbb{R}^3$ 横截相交，并且 $M_s^r := M_s \cap (\{r\} \times U^*\mathbb{R}^3)$ 是 $U^*\mathbb{R}^3 \cong \{r\} \times U^*\mathbb{R}^3$ 的二维子流形。于是，$M_0^r = \Lambda$ 对于任意 $r \in \mathbb{R}$，$M_s^r = \Lambda$ 若 $r \notin [0, 2r_1]$ 且 $M_s^{r_1} = \Lambda_s$。必要时取更小的 s_0，我们可以假设 M_s^r 包含在 Λ 的管状邻域内。特别地，由 (3.2) 可知，在 $U^*\mathbb{R}^3$ 中存在 $a(0)$ 的小邻域 U_0 和 $a(T_a)$ 的小邻域 U_1，使得 $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ 和

$$M_s^r \cap (H_a \cap U^*\mathbb{R}^3) \subset U_0 \sqcup U_1$$

对于任意 $s \in [0, s_0]$ 和 $r \in \mathbb{R}$。

我们用反证法论证。对于 $s \in (0, s_0]$，假设存在一条路径 $\gamma\colon [0,1] \to (\mathbb{R}^3 \cup L_b^s) \cap H_a$，使得 $\gamma(0) = E(2r_1 + r', a(0))$ 且 $\gamma(1) = E(2r_1 + r', a(T_a))$。那么，我们必有

$$\gamma([0,1]) \not\subset E([r_1 + r', \infty) \times U^*\mathbb{R}^3).$$

这是因为 $\gamma([0,1]) \cap E([r_1 + r', \infty) \times U^*\mathbb{R}^3) \subset (L_b^s \cap H_a) \cap E([r_1 + r', \infty) \times U^*\mathbb{R}^3)$，并且通过微分同胚 E，

$$E^{-1}(L_b^s \cap H_a) \cap \left([r_1 + r', \infty) \times U^*\mathbb{R}^3\right) \subset [r_1 + r', \infty) \times (U_0 \sqcup U_1).$$

这里，右侧是不连通的，并且 $E^{-1}(\gamma(i))$ 对于 $i \in \{0,1\}$ 位于 $[r_1 + r', \infty) \times U_i$ 中。因此，路径 γ 与 $E([r_1 + r', \infty) \times U^*\mathbb{R}^3)$ 的边界相交，从而存在$0 < u < 1$ 使得

$$\gamma(u) \in E(\{r_1 + r'\} \times U^*\mathbb{R}^3) \cap \left((\mathbb{R}^3 \cup L_b^s) \cap H_a\right).$$

然而，$E(\{r_1 + r'\} \times U^*\mathbb{R}^3) \cap (\mathbb{R}^3 \cup L_b^s) = E(\{r_1 + r'\} \times \Lambda_s)$，并且根据 $(\Lambda_s)_{s \in (0,1]}$ 上的条件 (3.3)，它与 H_a 不相交，因此产生矛盾。 □

3.4 低维模空间的性质

设 K 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个纽结，满足：

($) Λ_K 的每个 Reeb 弦都是非退化的，如第 2.4 节所述。此外，对于任意满足 $a(0) = (q_a, p_a) \in \Lambda_K$ 的 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_K)$，

$$\{q_a + t \cdot p_a \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} \cap K = \{\pi_{\mathbb{R}^3}(a(0)), \pi_{\mathbb{R}^3}(a(T_a))\},$$

也就是说，包含 K 的副法线弦 $\pi_{\mathbb{R}^3} \circ a\colon [0, T_a] \to \mathbb{R}^3$ 的 $\mathbb{R}^3$ 中的直线，只能在 $\pi_{\mathbb{R}^3} \circ a$ 的端点处与 K 相交。特别地，(3.2) 对 $\Lambda = \Lambda_K$ 成立。

注意，在带有 C^∞ 拓扑的空间 $\mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^3) = \{f\colon S^1 \to \mathbb{R}^3 \mid \text{嵌入}\}$ 中，子集 $\{f \in \mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^3) \mid f(S^1)$ 是一个满足 ($) 的纽结$\}$ 的纽结，该条件是开且稠密的。关于稠密性的证明，参见 [Oka25a，引理 3.6]。利用 $f \in \mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^3)$ 在 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 上的傅里叶展开，我们可以证明子集

$$\{f \in \mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^3) \mid f(S^1) \text{ is a real analytic knot satisfying } (\$)\}$$

关于 C^∞ 拓扑，在 $\mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^3)$ 中稠密。

让我们针对满足($)的实解析纽结 K 固定 $\Lambda = \Lambda_K$。我们再对某个 $b_* > 0$取 $B = \{0\}$ 或 $B = [0, b_*]$。考虑满足(L1)、(L2)、(L3)以及

(L4) $L_0 = L_K$的族()。当 $B = [0, b_*]$且 $b > 0$时，对任意 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_K)$，这两点

$$E(r_0, a(0)), E(r_0, a(T_a)) \in L_b \cap H_a$$

can不能通过路径在 $(\mathbb{R}^3 \cup L_b) \cap H_a$ 中相连。这里， $r_0 > 0$ 是 (L2 的实数).

注记 3.3。 假设我们有 $\mathscr{L} = (L_b)_{b\in[0,b_*]}$ 满足 (L1)、(L2)、(L3) 和 $L_0 = L_K$。由于 (3.2) 对每个 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_K)$ 都成立，我们可以取 $(L_b^s)_{b\in B,\ s\in[0,s_0]}$ 如命题 3.2 中所述。如果我们选择一个函数 $[0, b_*] \to [0, s_0]$: $b \mapsto s(b)$，使得 $s^{-1}(0) = \{0\}$，那么新的族 $\left(L_b^{s(b)}\right)_{b\in[0,b_*]}$满足 (L4)。

对于任意满足 $n_j \in \{\binom{2k+1}{2} \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ 的元组 $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_{2l})$，我们定义

$$|\mathbf{n}| := \sum_{j=1}^{2l}(2n_j - 1).$$

于是，对于模空间 $\mathcal{M}_{\mathscr{L},l}(a; \mathbf{n})$，下述结论成立。当 $B = \{0\}$ 时，该陈述与 [CELN17，定理 6.7] 一致。

引理 3.4. 对于一般的 J'_ρ，$\mathcal{M}_{\mathscr{L},l}(a;\mathbf{n})$，它对每个 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_K)$ 以及$\mathbf{n}\in \{\binom{2k+1}{2} \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}^{\times l}$ 都被横截地截出，并且它是维数为 $|a| - |\mathbf{n}| + \dim B$ 的 C^∞ 流形。

证明。我们概述如何修改 [CELN17，定理 6.7] 的证明。参照 [CELN17，第 9.2], 节，我们构造一个纤维化于 B 之上的巴拿赫流形 $\mathscr{W} = \mathscr{W}_{\mathscr{L},l}(a; \mathbf{n})$，使得 $b \in B$ 的每条纤维 $\mathscr{W}_b$ 都是如 [CELN17，引理 9.1] 中那样的巴拿赫流形，只是将余法丛 L_K 替换为拉格朗日子流形 L_b。（更精确地说，为了固定一个加权 Sobolev 范数，我们选取正穿刺处的指数权 $\delta_0 > 0$ 足够小，使得 [CELN17，引理 9.2] 中的参数 $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 等于 0。）此外，关于 J'_ρ 的柯西–黎曼算子定义了巴拿赫丛 $\mathscr{E} \to \mathscr{W}$ 的一个截面 $\partial_{J'_\rho}$: $\mathscr{W} \to \mathscr{E}$，其零点集为 $\mathcal{M}_{\mathscr{L},l}(a; \mathbf{n})$。当 $l = 0$ 时，我们如 [CELN17，第 9.4] 节那样，通过在定义域 D_1 上添加标记点来稳定 J'_ρ-全纯曲线。$\partial_{J'_\rho}$ 的线性化的 Fredholm 指数由 [CEL10，定理 A.1] 给出为 $|a| - |\mathbf{n}| + \dim B$。

截面 $\partial_{J'_\rho}$相对于 $\mathscr{E}$的零截面的横截性，是通过在 Reeb 弦 a [附近对 $J|_\xi$ 进行一般扰动实现的 CELN17，引理 9.5], ，但在 $(b,\ u,\ \kappa) \in \mathcal{M}_{\mathscr{L},\ l}(a; \mathbf{n})$ 处除外，此时映射

$$E^{-1} \circ u\colon \{z \in D_{2l+1} \mid u(z) \notin \mathbb{R}^3\} \to \mathbb{R} \times U^*\mathbb{R}^3$$

处处与平面 $\mathrm{Span}(\partial_r,\ R_\alpha)$ 相切。在这种情况下，$\mathrm{Im}\, u$ 包含于平面H_a中，且映射 $u|_{\partial D_{2l+1}}$: $\partial D_{2l+1} \to (\mathbb{R}^3 \cup L_b) \cap H_a$ 可连续延拓为曲线$\partial D_1 \to (\mathbb{R}^3 \cup L_b) \cap H_a$，该曲线经过 $E(r_0,\ a(0))$ 和 $E(r_0,\ a(T_a))$ 两点，其中 $r_0 > 0$ 是 (L2) 中的实数。根据条件 (L4)，当 $b > 0$时，这种情况不可能发生。当 $b = 0$时，我们有 $L_b = L_K$，且 $(u,\ \kappa)$ 是 a 上的平凡条带（见下文注 3.5）。在平凡条带 $(0,\ u,\ \kappa)$ 处，$\partial_{J'_\rho}$的横截性无需扰动即可成立。证明见 [Oka25a，附录 A.3]。 □

注 3.5. 位于 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_K)$ 上的平凡条带属于 $\mathcal{M}_{L_K,1}(a, \binom{1\,2}{1\,2})$. 当 $a(0) = (q_a, p_a) \in \Lambda_K$ 时，它可以明确描述为

$$u_a\colon [0,\infty) \times [0,1] \to T^*\mathbb{R}^3\colon (s,t) \mapsto (q_a + T_a t \cdot p_a, h(s) \cdot p_a),$$

其中 h: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个由 $h(0) = 0$ 和 $\frac{dh}{ds}(s) = T_a \cdot \rho(h(s))$ 表征的 C^∞ 函数。这里，我们通过双全纯映射 $D_3 \to ([0,\infty) \times [0,1]) \setminus \{(0,\ 0),\ (0,\ 1)\}$ 进行识别，并将其连续延拓至 $D_1 \to [0,\infty) \times [0,1]$: $p_1 \mapsto (0,\ 1)$ $p_2 \mapsto (0,\ 0)$。特别地，路径 $u_a|_{\partial_j D_3}$ 满足：

- $u_a|_{\partial_j D_3}$ 当 $j=1$，3 是到 L_K 的浸入，且 $u_a|_{\partial_2 D_3}$ 是到 $\mathbb{R}^3$ 的浸入 .
- $(u_a|_{\partial_j D_3})^{-1}(K) = \emptyset$ 对于 $K = L_K \cap \mathbb{R}^3$。当 $j=2$ 时，要看出这一点，请注意K上的条件 ($)。

当模空间的维数较小时，$\mathcal{M}_{\mathscr{L},\iota}(a;\mathbf{n})$ 具有以下性质。

引理 3.6。对于一般的 J'_ρ，当 $|a|+$维数 $B \le 1$ 时，以下结论成立：

(i) $\mathcal{M}_{\mathscr{L},\iota}(a) = \mathcal{M}_{\mathscr{L},\iota}(a;\mathbf{n})$ 对于$\mathbf{n} = (12, \ldots, 12)$。

(ii) 对于每个$(b,u,\kappa) \in \mathcal{M}_{\mathscr{L},\iota}(a)$，曲线

$$u|_{\partial_j D_{2l+1}} : \partial_j D_{2l+1} \to \begin{cases} L_b & \text{if } j \text{ is odd,} \\ \mathbb{R}^3 & \text{if } j \text{ is even,} \end{cases}$$

是一个浸入。

(iii) (3.1) 中的映射 ev_j 与 $K_{\mathscr{L}}$ 横截。此外，当 $B=[0,b_*]$ 时，

$$\left\{((b,u,\kappa),z) \in \mathrm{ev}_j^{-1}(K_{\mathscr{L}}) \mid b \in \{0,b_*\}\right\} = \emptyset.$$

(iv) 当 $B=[0,b_*]$ 时，

$$\left\{((b,u,\kappa),z) \in \mathrm{ev}_j^{-1}(K_{\mathscr{L}}) \mid \text{ there exists } z' \in \partial D_{2l+1} \setminus \{z\} \text{ such that } (b,u(z')) \in K_{\mathscr{L}}\right\} = \emptyset.$$

证明。(i) 若 $|a|+\dim B \le 1$，引理 3.4 表明 $\dim \mathcal{M}_{\mathscr{L},\iota}(a,\mathbf{n}) \le 1-|\mathbf{n}|$。由于 $|\mathbf{n}| = \sum_{j=1}^{2l}(2n_j-1) \le 1$ 当且仅当 $n_1=\cdots=n_{2l}=\frac{1}{2}$，这就证明了第一个断言。

(ii) 证明与 [ES19, 引理 A.4] 的证明类似。设 j 是偶数。考虑引理 3.4 证明中的巴拿赫丛 $\mathscr{E} \to \mathscr{W}$，但这里将 [CELN17 第 9 节2] 中的 L^2-范数替换为 L^p-范数，以定义加权索伯列夫空间。于是，对于任意属于索伯列夫空间 $W^{2,p}$ 的 $(w,\kappa) \in \mathscr{W}_b$，映射 $w\colon D_{2l+1} \to T^*\mathbb{R}^3$ 在任意紧集上均为 C^1 类，因此 w。我们定义

$$\sigma_j : \mathscr{W} \times \partial_j D_{2l+1} \to \mathscr{E} : (\mathbf{w},z) \mapsto \overline{\partial}_{J'_\rho}(\mathbf{w}), \tag{3.4}$$

其零点集为 $\widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},\iota}(a)$。利用 $\partial_j D_{2l+1}$ 上的非零向量场 V，我们定义一个映射

$$q_j : \mathscr{W} \times \partial_j D_{2l+1} \to \mathbb{R}^3 : ((b,w,\kappa),z) \mapsto (dw)_z(V_z),$$

它与 $0 \in \mathbb{R}^3$ 横截。于是，$(q_j)^{-1}(0)$ 是一个巴拿赫流形。设 $\sigma'_j : (q_j)^{-1}(0) \to \mathscr{E}$ 为 σ_j 的限制。$\mathscr{E}$ 的零截面的原像与

$$(\sigma'_j)^{-1}(0) = \left\{((b,u,\kappa),z) \in \widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a) \;\middle|\; du|_{T_z(\partial_j D_{2l+1})} : T_z(\partial_j D_{2l+1}) \to \mathbb{R}^3 \text{ is the zero map}\right\}.$$

注意，当 $((b,u,\kappa),z) \in (\sigma'_j)^{-1}(0)$ 时，u 不可能是平凡条带 u_a，因为由注 3.5，$u_a|_{\partial_2 D_3}$ 是一个浸入。然后，按照 [CELN17 中引理 9.5], 的方式，我们可以证明，在对 $J|_\xi$ 作一般扰动之后，σ'_j 与零截面横截。

当 $(\sigma'_j)^{-1}(0)$ 被横截地截出时，它是一个流形，其维数为

$$\dim(\sigma'_j)^{-1}(0) = \dim \widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a) - 3 = |a| + \dim B - 2.$$

如果 $|a|+$维数 $B \le 1$，那么维数$(\sigma'_j)^{-1}(0) < 0$ 和 $(\sigma'_j)^{-1}(0)$ 必须是空集。这意味着，对于任意的 $(b,\ u,\ \kappa) \in \mathcal{M}_{\mathscr{L},\iota}(a)$ 和 $z \in \partial_j D_{2l+1}$，$du|_{T_z(\partial_j D_{2l+1})}$ 都不为零。这证明了当 j 为偶数时的第二个断言。j 为奇数时的证明类似。

(iii) 假设 j 是偶数。映射 ev_j 在 $\widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a)$ 上延拓为

$$\widetilde{\mathrm{ev}}_j\colon \mathscr{W}\times\partial_j D_{2l+1}\to B\times\mathbb{R}^3\colon((b,w,\kappa),z)\mapsto(b,w(z)).$$

采用第 3.2 节中的记号，定义 $\mathscr{W}\times\partial_j D_{2l+1}$ 的一个开子集

$$\mathscr{U}:=\widetilde{\mathrm{ev}}_j^{-1}(\{(b,q)\in B\times\mathbb{R}^3\mid q\in\iota_b(S^1\times\{0\}\times(\mathbb{R}^2\cap D_\delta)\})$$

以及一个 C^∞ 映射

$$\tilde{p}\colon\mathscr{U}\to\mathbb{R}^2\cap D_\delta\colon((b,w,\kappa),z)\mapsto(\pi_{D_\delta}\circ\iota_b^{-1}\circ w)(z).$$

令 $p\colon\mathscr{U}\cap\widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a)\to\mathbb{R}^2\cap D_\delta$ 为 $\tilde{p}$ 的限制。断言 (iii) 等价于 p 与 $0\in\mathbb{R}^2\cap D_\delta$ 横截。

映射 $\tilde{p}$ 与 0 横截，且 $\tilde{p}^{-1}(0)$ 是一个巴拿赫流形，其在 $\mathbf{u}\in\tilde{p}^{-1}(0)$ 处的切空间为 $T_{\mathbf{u}}(\tilde{p}^{-1}(0))=\ker(d\tilde{p})_{\mathbf{u}}$。注意，对于任意 $((b,u,\kappa),z)\in p^{-1}(0)=\tilde{p}^{-1}(0)\cap\widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a)$，$u$ 不可能是平凡条带 u_a，因为根据注 3.5，任意 $z\in\partial_2D_3$ 都有 $u_a(z)\notin K$。于是，(3.4) 中 σ_j 的限制

$$\sigma_j|_{\tilde{p}^{-1}(0)}:\tilde{p}^{-1}(0)\to\mathscr{E}$$

在对 $J|_\xi$ 进行一般扰动后，与 $\mathscr{E}$ 的零截面横截。在这种情况下，对于任意 $\mathbf{u}\in(\sigma_j|_{\tilde{p}^{-1}(0)})^{-1}(0)$，线性化算子 $(d\sigma_j)_{\mathbf{u}}$ 限制在由 $\ker(d\tilde{p})_{\mathbf{u}}\subset T_{\mathbf{u}}(\mathscr{W}\times\partial_jD_{2l+1})$ 所定义的线性子空间上时是满射。我们声称微分

$$(dp)_{\mathbf{u}}=(d\tilde{p})_{\mathbf{u}}|_{\ker(d\sigma_j)_{\mathbf{u}}}:\ker(d\sigma_j)_{\mathbf{u}}=T_{\mathbf{u}}\widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a)\to\mathbb{R}^2=T_0(\mathbb{R}^2\cap D_\delta)$$

对每个 $\mathbf{u}\in p^{-1}(0)$ 都是满射，也就是说，p 与 $0\in\mathbb{R}^2\times D_\delta$ 横截。事实上，对于任意 $v\in\mathbb{R}^2$，存在 $\zeta\in T_{\mathbf{u}}(\mathscr{W}\times\partial_jD_{2l+1})$，使得 $(d\tilde{p})_{\mathbf{u}}(\zeta)=v$。我们可以取 $\eta\in\ker(d\tilde{p})_{\mathbf{u}}$，使得 $(d\sigma_j)_{\mathbf{u}}(\eta)=(d\sigma_j)_{\mathbf{u}}(\zeta)$。于是，我们有 $\zeta-\eta\in\ker(d\sigma_j)_{\mathbf{u}}$，且 $(d\tilde{p})_{\mathbf{u}}(\xi-\eta)=(d\tilde{p})_{\mathbf{u}}(\xi)=v$。这就证明了该结论。当 j 为奇数时，证明类似。

当 $B=[0,b_*]$ 时，我们还可以假设 ev_j 在限制于 $\mathcal{M}_{\mathscr{L}的l}(a)$ 边界时与 $K_{\mathscr{L}}$ 横截。在这种情况下，$\{((b,u,\kappa),z)\in\mathrm{ev}_j^{-1}(K_{\mathscr{L}})\mid b\in\{0,b_*\}\}$ 横截地切出，且维数为负数 $|a|+\dim B-2=-1$，因此它必为空集。

(iv) (iv) 的证明与 (iii) 类似，因此省略细节。我们证明

$$\{((b,u,\kappa),(z,z'))\in\mathcal{M}_{\mathscr{L},l}(a)\times(\partial D_{2l+1})^2\mid z\neq z'\text{ and }(b,u(z)),(b,u(z'))\in K_{\mathscr{L}}\}$$

对于一般的 J'_ρ，它横截地切出；当$|a|+\dim B\leq1$时，其维数 $|a|+\dim B-2$ 为负。

□

3.5 模空间的紧化

我们继续考虑满足 (L1)、.....、(L4) 的 $\mathscr{L}=(L_b)_{b\in B}$，其中 $B=\{0\}$ 或 $[0,b_*]$。

令 κ_0 表示由 $\mathcal{C}_3$ 组成的唯一元素。我们定义一个模空间 $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3}$（分别为 $\mathcal{N}_{\mathscr{L}}$），其元素由对 $(b,\ v)$ 构成，其中 $b\in B$ 是一个 C^∞ 映射 $v\colon D_3\to T^*\mathbb{R}^3$，满足：

- $dv+J'_\rho\circ dv\circ j_{\kappa_0}=0$。
- $v(\partial_1D_3\sqcup\partial_3D_3)\subset\mathbb{R}^3$（分别为 L_b）以及 $v(\partial_2D_3)\subset L_b$（分别为 $\mathbb{R}^3$）。
- 存在 $x_0\in\mathbb{R}^3$（分别为 L_b）和 $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}^3\cap L_b=K_b$，使得

$$\lim_{s\to\infty}(v\circ\psi_0)(s,t)=x_0,\quad\lim_{s\to-\infty}(v\circ\psi_i)(s,t)=x_i\text{ for }i=1,2$$

在 $t\in[0,1]$ 上一致地。

令 $x_i = v(p_i)$ 表示 $i \in \{0,1,2\}$，并定义在 p_0 处的求值映射

$$\mathrm{ev}_0 \colon \begin{cases} \mathcal{N}_{\mathbb{R}^3} \to B \times \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{N}_{\mathscr{L}} \to L_{\mathscr{L}}, \end{cases} \quad (b,v) \mapsto (b, v(p_0)). \tag{3.5}$$

由于 L_b 是 $T^*\mathbb{R}^3$的恰当拉格朗日子流形，因此存在一个 C^∞ 函数 $f\colon\ L_b \to \mathbb{R}$，使得 $df = \lambda_{\mathbb{R}^3}|_{L_b}$。注意，对于任意 $x \in \mathbb{R}^3$，$(\lambda_{\mathbb{R}^3})_x = 0$，因此 f 在$K_b = L_b \cap \mathbb{R}^3$上为常数。因此，对于任意元素 $(b,\ v) \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^3}$,

$$\int_{D_3} v^*(d\lambda_{\mathbb{R}^3}) = \int_{\partial D_3} v^*\lambda_{\mathbb{R}^3} = \int_{\partial_2 D_3} v^*(df) = f(v(p_2)) - f(v(p_1)) = 0,$$

这意味着 v 是位于 $v(p_0)$ 处的常值圆盘。同理，对于任意元素 $(b,\ v) \in \mathcal{N}_{\mathscr{L}}$，可证明 v 是位于 $v(p_0)$ 处的常值圆盘。这些常值圆盘的模空间被横截地切出，并且求值映射 (3.5) 是到 $K_{\mathscr{L}} = (B \times \mathbb{R}^3) \cap L_{\mathscr{L}}$ 上的微分同胚。

利用 (3.1) 中针对 $j = 1,\ \ldots,\ 2l$ 的求值映射 ev_j，我们定义

$$\delta\widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a) \coloneqq (\mathrm{ev}_j)^{-1}(K_{\mathscr{L}}).$$

如果我们取引理 3.6 中的 J'_ρ，那么它是一个维数为 $|a| + \dim\ B - 1$ 的 C^∞ 流形。我们还可以考虑关于 ev_j 和 ev_0 的纤维积

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a) \ {}_{\mathrm{ev}_j}\!\times_{\mathrm{ev}_0} \mathcal{N}_{\mathbb{R}^3} & \text{if } j \text{ is even}, \\ \widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a) \ {}_{\mathrm{ev}_j}\!\times_{\mathrm{ev}_0} \mathcal{N}_{\mathscr{L}} & \text{if } j \text{ is odd}. \end{cases} \tag{3.6}$$

由于 $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^3}$ 和 $\mathcal{N}_{\mathscr{L}}$ 由 $K_{\mathscr{L}}$ 中的常值圆盘组成，我们有一个自然双射

$$\delta\widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a) \to \begin{cases} \widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a) \ {}_{\mathrm{ev}_j}\!\times_{\mathrm{ev}_0} \mathcal{N}_{\mathbb{R}^3} & \text{if } j \text{ is even}, \\ \widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a) \ {}_{\mathrm{ev}_j}\!\times_{\mathrm{ev}_0} \mathcal{N}_{\mathscr{L}} & \text{if } j \text{ is odd}, \end{cases} \tag{3.7}$$

它将 $((b,u,\kappa)\ z)$ 映射到 $\big(((b,u,\kappa)\ z), (b, v_{u(z)})\big)$，其中 $v_{u(z)}$ 是位于 $u(z) \in K_b$ 处的常值圆盘。

注 3.7。对于 $((b,u,\kappa)\ z) \in \delta\widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l}(a)$，$u(z)$ 位于 K_b 中，并且 u 在 z 处的绕数可以按照第 3.2 节中的类似方式定义。在这种情况下，它是一个正整数。参见 CELN17，第 6 节。3] 当 $|a| + \dim\ B \le 1$ 时，对于一般的 J'_ρ，该整数必须等于 1（即最小值），因为根据引理 3.6 (ii)，u 在 z 处的微分不为零。

我们来讨论模空间 $\mathcal{M}_{\mathscr{L},\ l}(a)$ 的一种紧化。

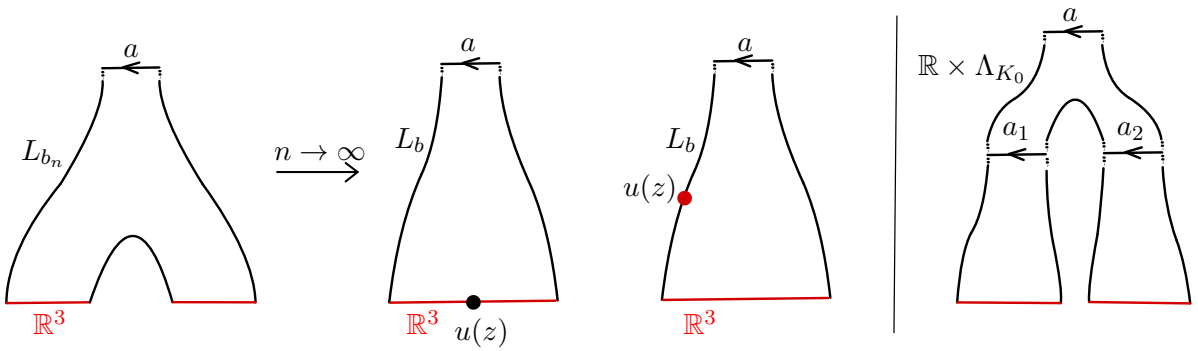
命题 3.8。设 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_{K_0})$ 满足 $|a| = 0$。

- 若 $B = \{0\}$, $\mathcal{M}_{L_K,\ l}(a)$ 是一个紧致的0维流形。
- 若 $B = [0, b_*]$, $\mathcal{M}_{\mathscr{L},\ l}(a)$ 紧化为一个紧致的1维流形，其边界为

$$\mathcal{M}_{L_{K_0},l}(a) \sqcup \mathcal{M}_{L_{b_*},l}(a) \sqcup \coprod_{j=1}^{2l-1} \delta\widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l-1}(a).$$

证明。对于 $B = \{0\}$ 和 $\mathscr{L} = L_K$ 的情形，$\mathcal{M}_{L_K,l}(a)$ 的紧致性已在 [CELN17, 第 6 节.4] 中证明。对于 $B = [0, b_*]$ 的情形，我们按照 [CELN17, 命题 6.8 和 6.9] 的方法，通过考察 1 维模空间 $\mathcal{M}_{\mathscr{L},l}(a)$ 中序列的所有可能极限来论证（另见图 3.3）。因此，$\mathcal{M}_{\mathscr{L},l}(a)$ 的紧化可表示为

$$\mathcal{M}_{\mathscr{L},l}(a) \sqcup \coprod_{j=1}^{2l-1} \delta\widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l-1}(a). \tag{3.8}$$



u_n (j：偶数) (j：奇数)

图 3.3：最左侧的图表示序列 $(b_n,\ u_n,\ \kappa_n)_{n=1,\ 2,\ \ldots\ldots}$ 在 $\mathcal{M}_{\mathscr{L},\ l}(a)$ 中，其中 $l = 2$。必要时取一个子列，这样的序列可以收敛到一条带有边界上标记点 z 的 J'_ρ-全纯曲线 u，使得当 $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ 时，$u(z) \in K_b$。（我们可以将其看作一条带有边界节点 z 的 J'_ρ-全纯曲线，其中一个常值圆盘在该节点处附着到 u 上，且该圆盘位于 $u(z)$。）事先看来，该序列可能收敛到如最右侧图所示的 J'_ρ-全纯建筑，但这不可能发生，因为当 $|a| = 0$ 时，$\mathcal{M}_{\Lambda_{K_0},\ J}(a;\ a_1,\ \ldots\ldots,\ a_m) = \emptyset$。

这与 [CELN17, 命题 6.8 和 6.9]，类似，不同之处在于，其中任意一个 J'_ρ-全纯建筑

$$\bar{\mathcal{M}}_{J,\Lambda_{K_0}}(a; a_1, \ldots, a_m) \times \prod_{k=1}^{m} \mathcal{M}_{\mathscr{L},l_k}(a_k),$$

如图 3.3 最右侧的图所示，它不会对紧化作出贡献。事实上，$|a'| \geq 0$ 对于任意 $a' \in \mathcal{R}(\Lambda_K)$，模空间 $\mathcal{M}_{J,\ \Lambda_{K_0}}(a;\ a_1,\ \ldots\ldots,\ a_m)$ 的维数为 $|a| - \sum_{k=1}^m |a_k| - 1$，当 $|a| = 0$ 时为负。（与 [CELN17 的命题 6.8]，比较时，请注意，对于任意 $((b,\ u,\ \kappa)\ z) \in \delta\widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},\ l-1}(a)$，根据注 3.7，$u$ 在 z 处的绕数为 1。）

通过修改 [CELN17 的定理 10.3] 的证明，我们可以证明 (3.8) 是一个紧致一维流形。对于 $\delta\widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L},l-1}(a)$ 的每个元素，集合 (3.6) 中的一个元素 $(((b,u,\kappa)\ z), (b,v))$ 由双射 (3.7) 确定。这里，v：$D_3 \to T^*\mathbb{R}^3$ 是位于 $u(z) \in L_b \cap \mathbb{R}^3 = K_b$ 的一个常值圆盘。与 [CELN17 第 10.3]，节中一样，我们构造一个预粘合 w_ρ：$D_{2l+1} \to T^*\mathbb{R}^3$，由 u 和 v 得到，其中 $\rho \gg 0$ 是一个粘合参数，使得 $w_\rho(\partial_{2i-1}D_{2l+1}) \subset L_b$ 且 $w_\rho(\partial_{2i}D_{2l+1}) \subset \mathbb{R}^3$。我们对 $\partial_{J'_\rho}$ 在 (b,w_ρ) 处的线性化有与 [CELN17 引理 10.12] 中相同的估计，并应用 Floer 的 Picard 引理 [CELN17 引理 10.10]。其余论证与 [CELN17 第 772] 页中的论证平行。 □

我们还有以下结果，它是对 [CELN17，定理 6.5] 的略微改写。

命题 3.9. 对于每个 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_K)$，仅有有限多个 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 满足 $\mathcal{M}_{\mathscr{L},l}(a) \neq \emptyset$。

证明. 假设存在一个序列 $(l_n)_{n=1,2,\ldots}$ 属于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$，且 $\mathbf{u}_n = (b_n, u_n, \kappa_n) \in \mathcal{M}_{\mathscr{L},l_n}(a)$ 对于 $n = 1,2,\ldots$ 均成立，使得 $\lim_{n\to\infty} l_n = \infty$。这里，将每个 u_n 的定义域扩展到 D_1。

如有必要，取一个子列，u_n 按照 [CEL10 定理 4.1] 的意义收敛到一条 J'_ρ-全纯曲线，其边界条件由 $L_b \cup \mathbb{R}^3$ 在 $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ 时给出。证明中，与 [CEL10 定理 4.1] 的区别在于，u_n 的边界条件随 n 变化。尽管如此，取一个子列后，在 D_1 中与 $(u_n|_{\partial D_1})^{-1}(K_{b_n})$ 不相交的区域上，我们可以应用通常的紧致性论证；而在满足 $S \subset D_1$ 且 $u_n(S) \subset \iota_{b_n}(S^1 \times (-\delta, \delta) \times D_\delta)$ 的区域上，我们可以对全纯映射 $\iota_{b_n}^{-1} \circ u_n$ 应用与 [CEL10 定理 4.1] 相同的论证，其边界条件 $S^1 \times \{0\} \times (\mathbb{R}^2 \cup \sqrt{-1}\mathbb{R}^2)$

与 n无关。注意，正如 [CELN17 注 6.6]中所述，本情形自动满足 [CEL10 定理 4.1] 中出现的能量必要界。

为了推出矛盾，利用 u_n 在 $(u_n|_{\partial D_1})^{-1}(K_{b_n})$ 中各点处的绕数，其余论证与 [CEL10 定理 5.1] 平行，因为问题归结为研究全纯映射 $\pi_{D_\delta}\circ\iota_{b_n}\circ u_n$，其边界条件 $\mathbb{R}^2\cup\sqrt{-1}\mathbb{R}^2$ 与 n 无关。□

4 弦同调、弦代数与 $\mathrm{LCH}_0(\Lambda_K)$

设 K 是 $\mathbb{R}^3$中的一个纽结。我们将介绍 0 次弦同调和 K 的弦代数。它们是以拓扑方式定义的 $\mathbb{Z}_2$-代数，并且同构于 $\mathrm{LCH}_0(\Lambda_K)$。

4.1 不含 N-弦的0 次弦同调

固定一个常数 $c>1$。我们选择 $\varepsilon>0$ 使得

$$N=\{q+v\in\mathbb{R}^3 \mid q\in K,\ v\in(T_qK)^\perp,\ |v|\le 2\varepsilon\} \tag{4.1}$$

是一个管状邻域，位于 $\mathbb{R}^3$中。对于每个 $l\in\mathbb{Z}_{\ge 1}$，我们定义一个由 l 元组的路径构成的空间 s

$$\Sigma_K^l:=\left\{(s_1,\dots,s_l)\;\middle|\;\begin{array}{l}\text{for each } i=1,\dots,l,\ s_i\colon[0,T_i]\to\mathbb{R}^3 \text{ is a } C^1 \text{ path such that}\\ T_i>0,\ s_i(\{0,T_i\})\subset K \text{ and } |\dot{s}_i(t)|<c \text{ for every } t\in[0,T_i]\end{array}\right\}. \tag{4.2}$$

注 4.1. 对于上述路径 s_i: $[0,T_i]\to\mathbb{R}^3$，我们可以关联一个实数 $T_i\in\mathbb{R}_{>0}$和一条 C^1 路径 $[0,1]\to\mathbb{R}^3$: $t\mapsto s_i(T_it)$。通过这种方式，Σ_K^l 被嵌入到一个巴拿赫流形的开子集中

$$\big(\mathbb{R}_{>0}\times\{s\colon[0,1]\to\mathbb{R}^3 \mid C^1 \text{ path such that } s(\{0,1\})\subset K\}\big)^{\times l}.$$

这里，C^1 路径空间赋予 C^1 拓扑。通过这个嵌入，Σ_K^l 具有巴拿赫流形结构。

我们定义 Σ_K^l 的一个开子集如下

$$\Sigma_{K,\varepsilon}^l:=\left\{(s_1,\dots,s_l)\in\Sigma_K^l\;\middle|\;\min_{1\le i\le l}\mathrm{length}(s_i)<\varepsilon\right\}. \tag{4.3}$$

对于 $l=0$，我们特别定义 Σ_K^0 为单点集 $\{\mathrm{pt}\}$，并令$\Sigma_{K,\,\varepsilon}^0:=\emptyset$。稍后我们将对$\Sigma_{K,\,\varepsilon}^l$中的0-链取商。也就是说，如果 $s_1,\ \dots,\ s_l$中至少有一个的长度小于 ε，我们就忽略0-链（$s_1,\ \dots,\ s_l$）。

利用 $\Sigma_K:=\coprod_{l=0}^\infty\Sigma_K^l$，我们将定义一个 $\mathbb{Z}_2$-代数 $\bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K)$，它是由 [CELN17，第 2 节定义的 K 0 次弦同调 $H_0^{\mathrm{string}}(K)$ 的一个约化。（另见附录 A.1。）该约化通过省略‘N-串’来实现；N-串是管状邻域 N 中的路径 K。下面对 $\bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K)$ 的构造与 [Oka25b，第 6 节中的 $\mathbb{R}$-代数非常接近。

定义 4.2。我们定义如下的 $\mathbb{Z}_2$-向量空间 $C_0(\Sigma_K^l)$、$C_1(\Sigma_K^l)$ 和 $\bar{C}_0(\Sigma_K^l)$，其中 $l\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$: 对于 $l=0$，令 $C_0(\Sigma_K^0)=\bar{C}_0(\Sigma_K^0)=\mathbb{Z}_2$且 $C_1(\Sigma_K^0)=0$。对于 $l\ge 1$:

- 我们将 $C_0(\Sigma_K^l)$ 定义为由满足以下条件的 $\mathbf{s}=(s_1,\ \dots\dots,\ s_l)\in\Sigma_K^l$ 张成的 $\mathbb{Z}_2$-向量空间：对于每个 $i\in\{1,\dots,l\}$:

  (0a) $s_i^{-1}(K)=\{0,T_i\}$。这里，$[0,T_i]$ 是 s_i的定义域。

  (0b) s_i 在端点 $\{0,T_i\}$处不与 K 相切。

- 我们将 $C_1(\Sigma_K^l)$定义为由连续的 1 参数族张成的 $\mathbb{Z}_2$-实数集向量空间 s

$$(\mathbf{s}^\lambda)_{\lambda\in[0,1]} = (s_1^\lambda, \dots, s_l^\lambda)_{\lambda\in[0,1]}$$

在 Σ_K^l 中，使得 $\mathbf{s}^0$ 和 $\mathbf{s}^1$ 满足条件 (0a) 和 (0b)，且对每个 $i \in \{1, \dots, l\}$:

(1a) 令 $U_i := \{(\lambda,\ t) \mid 0 < \lambda < 1,\quad 0 < t < T_i^\lambda\}$，其中 $[0, T_i^\lambda]$ 是 s_i^λ的定义域，并考虑一个映射

$$\Gamma_i \colon U_i \to \mathbb{R}^3 \colon (\lambda, t) \mapsto s_i^\lambda(t).$$

那么， Γ_i 是一个 C^1 映射，且与 K横截。

(1b) 对每个 $\lambda \in [0,1]$， s_i^λ在端点 $\{0, T_i^\lambda\}$处不与 K 相切。

(1c) 对任意两个不同的点 $(\lambda,\ t)$，$(\lambda',\ t') \in \coprod_{i=1,\ \dots\dots,\ l} \Gamma_i^{-1}(K)$，都有 $\lambda \neq \lambda'$。

- 令 $C_0(\Sigma_{K,\varepsilon}^l)$ 为由 $\mathbf{s} \in \Sigma_{K,\varepsilon}^l$ 生成的 $\mathbb{Z}_2$-线性子空间，其中这些元素满足 (0a) 和 (0b)。接着我们定义商空间

$$\bar{C}_0(\Sigma_K^l) := C_0(\Sigma_K^l)/C_0(\Sigma_{K,\varepsilon}^l).$$

接下来，我们定义 $\mathbb{Z}_2$-线性映射

$$\partial \colon C_1(\Sigma_K^l) \to \bar{C}_0(\Sigma_K^l),$$

$$\delta := \sum_{i=1}^{l} \delta_i \colon C_1(\Sigma_K^l) \to \bar{C}_0(\Sigma_K^{l+1}).$$

如下：在 $C_1(\Sigma_K^0) = 0$ 上，令 $\partial := 0$ 且 $\delta := 0$。令 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。对于每个 $x = (\mathbf{s}^\lambda)_{\lambda\in[0,1]} \in C_1(\Sigma_K^l)$，我们定义

$$\partial(x) := \mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^0 \in \bar{C}_0(\Sigma_K^l).$$

此外，对于每个 $i \in \{1, \dots, l\}$ 以及 $(\lambda, t) \in \Gamma_i^{-1}(K)$，其中 Γ_i 是 (1a) 中的映射，我们令

$$\mathbf{s}^{(\lambda,t),i} := \left(s_1^\lambda, \dots, s_{i-1}^\lambda, s_i^\lambda\big|_{[0,t]}, s_i^\lambda\big|_{[t,T_i^\lambda]}(\cdot - t), s_{i+1}^\lambda, \dots, s_l^\lambda\right) \in \Sigma_K^{l+1} \tag{4.4}$$

并定义

$$\delta_i(x) = \sum_{(\lambda,t)\in\Gamma_i^{-1}(K)} \mathbf{s}^{(\lambda,t),i} \in \bar{C}_0(\Sigma_K^{l+1}).$$

由 (1c) 可知，$\mathbf{s}^{(\lambda,t),i}$ 满足 (0a)；由 (1a) 和 (1b) 可知，它满足 (0b)。

根据 (1a)，$\Gamma_i^{-1}(K)$ 是一个 0 维流形。 $\delta_i(x)$ 的定义之所以有意义，原因如下。

引理 **4.3.** 满足 $(\lambda, t) \in \Gamma_i^{-1}(K)$ 且 $\mathbf{s}^{(\lambda,t),i} \neq 0$ 属于 $\bar{C}_0(\Sigma_K^{l+1})$ 的情况只有有限多个。

证明。 任取 $(\lambda, t) \in \Gamma_i^{-1}(K)$。若 $0 \leq t \leq \frac{\varepsilon}{2c}$ （分别地， $T_i^\lambda - \frac{\varepsilon}{2c} \leq t \leq T_i^\lambda$），则路径 $s_i^\lambda\big|_{[0,t]}$ （分别地， $s_i^\lambda\big|_{[t,T_i^\lambda]}$）的长度小于 ε，因为对每个 t， $|\dot{s}_i^\lambda(t)| < c$。令

$$I_i := \Gamma_i^{-1}(K) \cap \{(\lambda, t) \mid \tfrac{\varepsilon}{2c} \leq t \leq T_i^\lambda - \tfrac{\varepsilon}{2c}\},$$

它是 U_i 的一个离散子集。由于根据 $\mathbf{s}^0$ 和 $\mathbf{s}^1$ 上的条件 (0a)， $s_i^0([\frac{\varepsilon}{2c}, T_i^0 - \frac{\varepsilon}{2c}])$ 和 $s_i^1([\frac{\varepsilon}{2c}, T_i^1 - \frac{\varepsilon}{2c}])$ 与 K 不相交，因此存在 $\lambda' > 0$，使得对任意 $\lambda \in [0, \lambda') \cup (1 - \lambda', 1]$， $s_i^\lambda([\frac{\varepsilon}{2c}, T_i^\lambda - \frac{\varepsilon}{2c}])$ 与 K 不相交。这意味着 I_i 包含在一个紧集中

$$\{(\lambda, t) \mid \lambda' \leq \lambda \leq 1 - \lambda',\ \tfrac{\varepsilon}{2c} \leq t \leq T_i^\lambda - \tfrac{\varepsilon}{2c}\},$$

因此， I_i 是一个有限集。

对于任意 $(\lambda, t) \in \Gamma_i^{-1}(K) \setminus I_i$， $\mathbf{s}^{(\lambda,t),i}$ 都属于 $\Sigma_{K\,\varepsilon}^{l+1}$，因为 $s_i^\lambda\big|_{[0,t]}$ 或 $s_i^\lambda\big|_{[t,T_i^\lambda]}$ 的长度小于 ε。因此， $\mathbf{s}^{(\lambda,t),i} = 0$ 属于 $\bar{C}_0(\Sigma_K^{l+1})$，若 $(\lambda, t) \in \Gamma_i^{-1}(K) \setminus I_i$。 □

我们令 $\bar{C}_0(\Sigma_K) \coloneqq \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bar{C}_0(\Sigma_K^l)$ 和 $C_1(\Sigma_K) \coloneqq \bigoplus_{l=0}^{\infty} C_1(\Sigma_K^l)$，并定义

$$D_K \coloneqq \partial + \delta \colon C_1(\Sigma_K) \to \bar{C}_0(\Sigma_K).$$

然后，t he 弦同调 K 在 0 次中，其系数取自 $\mathbb{Z}_2$，由商 ent

$$\bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K) \coloneqq \bar{C}_0(\Sigma_K) / \operatorname{Im} D_K.$$

¯此外， $C_0(\Sigma_K)$ 具有乘积结构

$$\bar{C}_0(\Sigma_K^l) \otimes \bar{C}_0(\Sigma_K^{l'}) \to \bar{C}_0(\Sigma_K^{l+l'}) \colon x \otimes x' \mapsto x * x'$$

该结构由自然映射诱导

$$\Sigma_K^l \times \Sigma_K^{l'} \to \Sigma_K^{l+l'} \colon \big((s_1, \dots, s_l), (s'_1, \dots, s'_{l'})\big) \mapsto (s_1, \dots, s_l, s'_1, \dots, s'_{l'}). \tag{4.5}$$

当 $l =$ 若为 0 或 $l' = 0$，由于 $\Sigma_K^0 = \{\mathrm{pt}\}$，我们将其视为恒等映射。同样，我们定义

$$C_0(\Sigma_K^l) \otimes C_1(\Sigma_K^{l'}) \otimes C_0(\Sigma_K^{l''}) \to C_1(\Sigma_K^{l+l'+l''}) \colon x_1 \otimes y \otimes x_2 \mapsto x *_1 y *_1 x',$$

¯满足 $D_K(x *_1 y *_1 x') = x * (D_K y) * x'$ 在 $C_0(\Sigma_K)$ 中成立。因此，Im D_K 是 $\bar{C}_0(\Sigma_K)$ 的一个双边理想。因此，$*$ 在 $\bar{C}_0(\Sigma_K)$ 上的乘积可下降为 $\bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K)$ 上的乘积，并由此确定一个 $\mathbb{Z}_2$-代数结构。它具有一个单位元，该单位元来自 $1 \in \bar{C}_0(\Sigma_K^0) = \mathbb{Z}_2$。

下一个引理将在第 5.2.3 节中用到。

引理 4.4。 假设 $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_l) \in \Sigma_K^l$ 满足 *(0a)* 和 *(0b)*。那么，存在 $\mathbf{s}$ 在 Σ_K^l 中的一个邻域 $U_{\mathbf{s}}$，使得对任意 $\mathbf{s}' \in U_{\mathbf{s}}$，以下结论成立：

- $\mathbf{s}'$ 满足 *(0a)* 和 *(0b)*。
- 存在 $h \in C_1(\Sigma_K^l)$ 使得 $\partial(h) = \mathbf{s}' - \mathbf{s}$ 在 $\bar{C}_0(\Sigma_K^l)$ 和 $\delta(h) = 0$ 中，在 $\bar{C}_0(\Sigma_K^{l+1})$ 中。

证明。条件 (0a) 和 (0b) 是开条件。由于 Σ_K^l 是一个巴拿赫流形，我们可以取 $U_{\mathbf{s}}$ 为一个包含 s 的开球，使得其中每个 $\mathbf{s}' \in U_{\mathbf{s}}$ 都满足 (0a) 和 (0b)。此外，对于任意 $\mathbf{s}' \in U_{\mathbf{s}}$，我们选取一条 C^1 路径 $[0,1] \to U_{\mathbf{s}}$: $\lambda \mapsto \mathbf{s}^\lambda$，使得 $\mathbf{s}^0 = \mathbf{s}$ 且 $\mathbf{s}^1 = \mathbf{s}'$。考虑一个 1- 链 $h = (\mathbf{s}^\lambda)^{\lambda \in [0,1]}$。对于每个 $\lambda \in [0,1]$，$\mathbf{s}^\lambda$ 满足 (0a)。因此，若考虑一个如 (1a) 中的映射 Γ_i，则当 $i = 1, \dots, l$ 时，$\Gamma_i^{-1}(K)$ 为空集。于是，对于 h，(1a)、(1b) 和 (1c) 显然成立；并且作为 $C_1(\Sigma_K^l)$ 的一个元素，h satisfies $\partial(h) = \mathbf{s}' - \mathbf{s}$ 且 $\delta(h) = 0$。 □

$\mathbb{Z}_2$上的弦代数

固定 K 的一个定向和框架。令 $K' \subset N$ 为关于该框架的 K 的一个平行副本。

定义 4.5。 令 $\mathcal{P}_K$ 为路径 γ 的同伦类集合：$[0,1] \to \mathbb{R}^3 \setminus K$ 使得 $\gamma(0)$ $\gamma(1) \in K'$。于是，我们将 $\mathcal{A}$ 定义为由 $\mathcal{P}_K$ 自由生成的非交换 $\mathbb{Z}_2$-代数。K 的弦代数定义为

$$\operatorname{Cord}(K) \coloneqq \mathcal{A}/\mathcal{I},$$

其中，$\mathcal{I}$ 是由以下关系生成的 $\mathcal{A}$ 的双边理想（见图 4.1）：

(i) 如果 $x \in \mathcal{P}_K$ 由 K' 中的一个常值路径表示，则 $x = 0$。

(ii) 如果 x_1、$x_2 \in \mathcal{P}_K$ 分别由路径 γ_1、γ_2 表示，且 $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$，则

$$[\gamma_1 \bullet \gamma_2] - [\gamma_1 \bullet m \bullet \gamma_2] = x_1 \cdot x_2.$$

这里，m: $[0,1] \to \mathbb{R}^3 \setminus K$ 是一个以 $\gamma_1(1)$为基点的环路，并表示 K的子午线 .

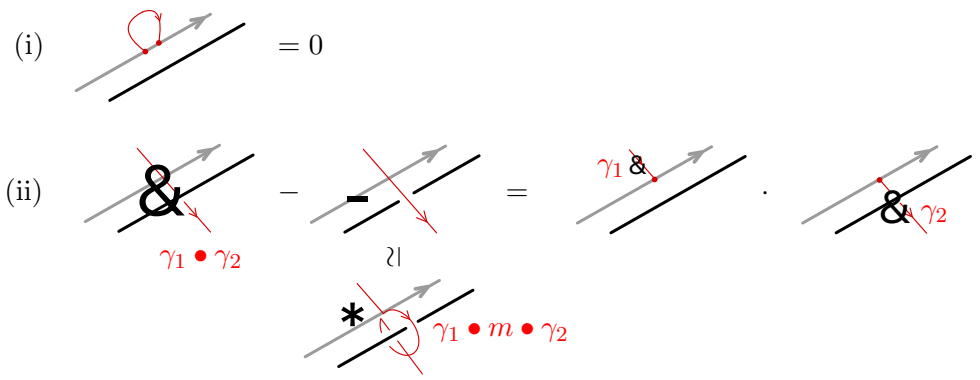


图 4.1：生成理想 $\mathcal{I}$的关系。“≃”表示同伦等价 e.

固定一点 $q_1 \in K$，并令 q_1' 为复制品 K'上的对应点。参照[CELN17，命题 2.9]，，选择路径γ_Q，$\tilde{\gamma}_Q$：$[0,1] \to \{q \in N \mid |q - q_1| < \varepsilon\}$，使得：

- $\gamma_Q(0) = q_1$ and $\gamma_Q(1) = q_1'$. $\tilde{\gamma}_Q(0) = q_1'$ and $\tilde{\gamma}_Q(1) = q_1$.
- $\gamma_Q^{-1}(K) = \{0\}$ and $\tilde{\gamma}_Q^{-1}(K) = \{1\}$. $\dot{\gamma}_Q(0) \notin T_{q_1}K$ and $\dot{\tilde{\gamma}}_Q(1) \notin T_{q_1}K$.

对于任意 $x \in \mathcal{P}_K$，取一个代表元 γ_x：$[0,1] \to \mathbb{R}^3 \setminus K$使得 $\gamma_x(0) = \gamma_x(1) = q_1'$。通过拼接，我们得到$\hat{}\gamma_x := \gamma_Q \bullet \gamma_x \bullet \tilde{\gamma}_Q$：$[0,3] \to \mathbb{R}^3$。我们注意到，$\hat{}\gamma_x$属于$\Sigma_K^1$，并满足条件 (0a) 和 (0b)。（更准确地说，我们需要在拼接点附近修改$\hat{}\gamma_x$，使其成为一条 C^1 路径。）

命题 4.6. 存在一个 $\mathbb{Z}_2$-代数同构

$$I_K : \mathrm{Cord}(K) \to \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K)$$

它将 $x_1 \cdots x_l \in$弦(K)（对应于 $x_1, \ldots, x_l \in \mathcal{P}_K$）映射到 $\bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K)$ 中的一个元素，该元素由 $(\hat{}\gamma_{x_1}, \ldots, \hat{}\gamma_{x_l}) \in \bar{C}_0(\Sigma_K^l)$表示。

证明与 [Oka25b, 命题 6.3], 完全平行，其中弦代数和弦同调定义在 $\mathbb{R}$上。我们还指出，[Oka25b, 命题 6.3] 的证明是对 [CELN17, 命题 2.9]的修改。

同构 I_K 与 γ_Q 和 $\tilde{\gamma}_Q$的选择无关。由于 $\bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K)$ 不依赖于 K的定向和框架，因此该命题意味着，在自然同构意义下，Cord(K) 与 K的定向和框架无关。

4.3 从$\mathrm{LCH}_0(\Lambda_K)$ 到 $\bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K)$的同构

设 K 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个实解析纽结，满足第 3.4 节中的条件 ($)。

设 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_K)$，其中 $|a| = 0$。取 $B = \{0\}$和 $\mathscr{L} = L_K$，考虑 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$的模空间$\mathcal{M}_{\mathscr{L},l}(a)$。此后，为了表示其元素，我们常省略共形结构的记号。取如引理 3.6 中的 J_ρ'。对于每个 $u \in \mathcal{M}_{L_K,l}(a)$ 和 $i \in \{1, \ldots, l\}$，我们有一条曲线

$$u|_{\overline{\partial_{2i}D_{2l+1}}} : \overline{\partial_{2i}D_{2l+1}} \to \mathbb{R}^3$$

在端点 $\{p_{2i-1}, p_{2i}\}$ 处属于 K。由于 $\dim \mathcal{M}_{L_K,l}(a) = |a| = 0$，引理 3.6 (iii) 推出，若 $z \in \partial_{2i}D_{2l+1}$，则 $u(z) \notin K$。此外，由于 $u \in \mathcal{M}_{L_K,l}(a; (1_2, \ldots, 1_2))$，根据引理 3.6 (i)，该曲线在端点处不与 K 相切。根据引理 3.6 (ii)，它也是一个浸入，因此存在唯一的微分同胚 $\varphi_i^u : [0, T_i^u] \to \partial_{2i}D_{2l+1}$，将 0 映射到 p_{2i}，使得

$$s_i^u := u|_{\overline{\partial_{2i}D_{2l+1}}} \circ \varphi_i^u : [0, T_i^u] \to \mathbb{R}^3 \tag{4.6}$$

是一条 C^∞ 路径，且速度 $|\dot{s}_i^u(t)|$ 在 $t \in [0, T_i^u]$ 上恒为 1。（特别地， T_i^u 是曲线 $u|_{\partial_{2i} D_{2l+1}}$ 的长度。）我们取

$$\mathbf{s}^u := (s_1^u, \dots, s_l^u) \in \Sigma_K^l,$$

那么，根据 $u|_{\partial_{2i} D_{2l+1}}$ 的性质，我们可以验证 $\mathbf{s}^u$ 满足 (0a) 和 (0b)。

我们定义一个含单位元的 $\mathbb{Z}_2$-代数映射

$$\Psi'_K \colon \mathcal{A}_0(\Lambda_K) \to \bar{C}_0(\Sigma_K) \tag{4.7}$$

该映射将 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_K)$ 映射为 $|a| = 0$ 到 $(\Psi'_{K,l}(a))_{l=0,1,\dots} \in \bigoplus_{l=0}^\infty \bar{C}_0(\Sigma_K^l)$ 确定的 by

$$\begin{aligned} \Psi'_{K,0}(a) &:= \#_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{M}_{L_K,0}(a) \in \bar{C}_0(\Sigma_K^0) = \mathbb{Z}_2, \\ \Psi'_{K,l}(a) &:= \sum_{u \in \mathcal{M}_{L_K,l}(a)} \mathbf{s}^u \in \bar{C}_0(\Sigma_K^l) \text{ if } l \geq 1, \end{aligned}$$

（这里注意，根据引理 3.8，$\mathcal{M}_{L_K,l}(a)$ 是有限集；并且由命题 3.9，$\mathcal{M}_{L_K,l}(a) = \emptyset$ 当 $l \gg 0$ 时）。注意，$\Psi'_K(1) = 1 \in \bar{C}_0(\Sigma_K^0) = \mathbb{Z}_2$ 并且

$$\Psi'_K(a_1 \cdots a_m) = \Psi'_K(a_1) * \cdots * \Psi'_K(a_m)$$

对于每个满足 $|a_1| = \cdots = |a_m| = 0$ 的 $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{R}(\Lambda_K)$。

定理 4.7。对于 $d_J(\mathcal{A}_1(\Lambda_K))$ 的子空间 $\mathcal{A}_0(\Lambda_K)$， $\Psi'_K(d_J(\mathcal{A}_1(\Lambda_K)))$ 包含于 $\operatorname{Im} D_K$。此外，诱导的 $\mathbb{Z}_2$-代数映射

$$\Psi_K \colon \mathrm{LCH}_0(\Lambda_K) \to \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K)$$

是一个同构。

证明留待附录 A。

注 4.8。在附录 A 中，我们将给出一个依赖于结果 [CELN17, 定理 1.2] 的证明，该结果通过 Λ_K 的完全非交换 Legendrian 接触同调得出。按照 [CELN17, 第 5]节中的做法，引入 $\mathbb{Z}_2$ 上 1 次的弦同调，并使用 [CELN17, 第 7.6], 节中的长度过滤，就可以直接证明 Ψ'_K 在 0 次诱导一个同构。

5 由纽结族诱导的同构的重合

5.1 三个 $\mathbb{Z}_2$-代数上的同构

设 (K_t $t \in [0,1]$ $\mathbb{R}^3$ F_t $\mathbb{R}^3 \to$) 是 中光滑结的一个同伦。于是我们取一个具有紧支撑的环境同痕 $(:)_{t \in [0,1]}$，使得：

- $F_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$。
- $F_{1-t}(K_t) = K_1$ 对每个 $t \in [0,1]$ 都成立。

特别地， $F_1(K_0) = K_1$。构造如下：我们取一个嵌入的光滑族 $(f_t \colon S^1 \to \mathbb{R}^3)_{t \in [0,1]}$，使得 $f_t(S^1) = K_{1-t}$。将其延拓为一个环境同痕 $(G_t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)_{t \in [0,1]}$，使得 $G_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ 且 $G_t \circ f_0 = f_t$，然后令 $F_t := G_t^{-1}$。

定义由 $(K_t)_{t \in [0,1]}$ 和 $(F_t)_{t \in [0,1]}$ 诱导的 $\mathbb{Z}_2$-代数同构。

5.1.1 关于弦同调

对于 $j \in \{0,1\}$，取 $c_j > 1$ 和 $\varepsilon_j > 0$，使得我们可以通过设定 $c = c_j$、$K = K_j$ 和 $\varepsilon = \varepsilon_j$，定义由 (4.2) 得到的空间 $\Sigma^l_{K_j}$ 和由 (4.3) 得到的空间 $\Sigma^l_{K_j,\,\varepsilon_j}$。然后，如同第 4.1 节，线性映射

$$D_{K_j}\colon C_1(\Sigma_{K_j}) \to \bar{C}_0(\Sigma_{K_j})$$

并定义了一个 $\mathbb{Z}_2$-代数 $\bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K_j) = \bar{C}_0(\Sigma_{K_j})/\operatorname{Im} D_{K_j}$。

我们取 $c_1 > 1$ 足够大、$\varepsilon_0 < 0$ 足够小，使得

$$|(dF_1)_q(v)| < \min\{\tfrac{c_1}{c_0}, \tfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\} \cdot |v|$$

对任意 $q \in \mathbb{R}^3$ 和 $v \in T_q\mathbb{R}^3$ 均成立。于是，我们可以定义一个映射

$$\Sigma^l_{K_0} \to \Sigma^l_{K_1}\colon (s_1, \ldots, s_l) \mapsto (F_1 \circ s_1, \ldots, F_1 \circ s_l)$$

对于 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。条件 (0a)、(0b)、(1a)、(1b) 和 (1c) 在此映射下保持不变，因为 F_1 是一个将 K_0 映到 K_1 上的微分同胚。定义 $\mathbb{Z}_2$-线性映射 $F_1^{(0)}$ 和 $F_{(1)\,1}$ 为

$$F_1^{(i)}\colon C_i(\Sigma^l_{K_0}) \to C_i(\Sigma^l_{K_1})\colon \begin{cases} (s_1, \ldots, s_l) \mapsto (F_1 \circ s_1, \ldots, F_1 \circ s_l) & \text{if } i = 0, \\ (s_1^\lambda, \ldots, s_l^\lambda)_{\lambda\in[0,1]} \mapsto (F_1 \circ s_1^\lambda, \ldots, F_1 \circ s_l^\lambda)_{\lambda\in[0,1]} & \text{if } i = 1, \end{cases} \tag{5.1}$$

对于 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。我们还令 $F_1^{(0)} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}\colon C_0(\Sigma^0_{K_0}) \to C_0(\Sigma^0_{K_1})$。注意到

$$F_1^{(0)}(C_0(\Sigma^l_{K_0,\varepsilon_0})) \subset C_0(\Sigma^l_{K_1,\varepsilon_1})$$

因为对于任意长度 $(\gamma) < \varepsilon_0$ 的 C^1 路径 $s\colon [0,T] \to \mathbb{R}^3$，

$$\operatorname{length}(F_1 \circ s) \leq \sup_{q\in\mathbb{R}^3, 0\neq v\in T_q\mathbb{R}^3} \tfrac{|dF_1(v)|}{|v|} \cdot \operatorname{length}(s) \leq \tfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \cdot \operatorname{length}(s) < \varepsilon_1.$$

因此，$F_{(0)\,1}$ 诱导出一个线性映射 $\bar{F}_1^{(0)}\colon \bar{C}_0(\Sigma_{K_0}) \to \bar{C}_0(\Sigma_{K_1})$。从 $D_K = \partial + \delta$ 关于 $K \in \{K_0, K_1\}$ 的构造可以清楚地看出

$$D_{K_1} \circ F_1^{(1)} = \bar{F}_1^{(0)} \circ D_{K_0}\colon C_1(\Sigma_{K_0}) \to \bar{C}_0(\Sigma_{K_1}).$$

因此，一个 $\mathbb{Z}_2$-线性映射

$$F_1^{\mathrm{string}}\colon \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K_0) \to \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K_1)$$

由 $\bar{F}_1^{(0)}$ 诱导。此外，它保留乘积结构和单位元。

5.1.2 关于弦代数

对于 $j \in \{0,1\}$，固定 K_j 的定向和框架，并令 K_j' 是相对于该框架的 K_j 的平行副本。我们可以将它们固定为使得 $F_1(K_0') = K_1'$。于是，F_1 诱导出一个双射

$$\mathcal{P}_{K_0} \to \mathcal{P}_{K_1}\colon [\gamma] \mapsto [F_1 \circ \gamma]$$

弦代数生成元集合之间的双射。此外，该双射保留定义 4.5 中的关系，因此诱导出同构

$$(F_1)_*\colon \operatorname{Cord}(K_0) \to \operatorname{Cord}(K_1).$$

由命题 4.6 中 $j \in \{0,1\}$ 的同构 $I_{K_j}\colon \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K_j) \to \mathsf{Cord}(K_j)$ 的构造可知，以下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K_0) & \xrightarrow{F_1^{\mathrm{string}}} & \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K_1) \\ {\scriptstyle I_{K_0}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle I_{K_1}} \\ \mathrm{Cord}(K_0) & \xrightarrow{(F_1)_*} & \mathrm{Cord}(K_1). \end{array} \tag{5.2}$$

映射 $(F_1)_*$ 仅取决于同伦 $(K_t)_{t\in[0,1]}$。事实上，若我们取另一个满足与 $(F_t)_{t\in[0,1]}$相同条件的环境同痕 $(F'_t)_{t\in[0,1]}$，则 F_1 可通过一个微分同胚族 $(F'_s \circ F_s^{-1} \circ F_1)_{s\in[0,1]}$ 与 F'_1 同伦，该族将 K_0 映射到 K_1。这意味着，对于任意 $[\gamma] \in \mathcal{P}_{K_0}$，都有$[F_1 \circ \gamma] = [F'_1 \circ \gamma]$。此外，给定一个纽结的光滑族 $(K_t^s)_{s,\ t\in[0,1]}$，满足 $K_0^s = K_0$，且对每个 $s \in [0,1]$都有 $K_1^s = K_1$，我们取一个如上所述、对应于 $(K_t^s)_{t\in[0,1]}$ 的环境同痕 $(F_t^s)_{t\in[0,1]}$，使其随 s光滑变化。于是，对每个 $[\gamma] \in \mathcal{P}_{K_0}$都有 $[F_1^0 \circ \gamma] = [F_1^1 \circ \gamma]$。因此，令 $\rho\left([(K_t)_{t\in[0,1]}]\right) \coloneqq (F_1)_*$，即可得到一个良定义映射

$$\rho\colon \Pi_{\mathrm{sm}}(K_0, K_1) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Cord}(K_0), \mathrm{Cord}(K_1)).$$

此外，给定另一个纽结 K_2，我们可以验证，对于任意 $x \in \Pi_{\mathrm{sm}}(K_0,\ K_1)$ 和 $x' \in \Pi_{\mathrm{sm}}(K_1,\ K_2)$，$\rho(x') \circ \rho(x) = \rho(x' \cdot x)$。

5.1.3 关于 Legendrian 接触同调的入度 0

对于 $j \in \{0,1\}$，假设 Λ_{K_j} 的每个 Reeb 弦都是非退化的。

由一个同伦 $(K_t)_{t\in[0,1]}$，我们得到实数集 $U^*\mathbb{R}^3$ 中的一个勒让德环面族 $(\Lambda_{K_t})_{t\in[0,1]}$。根据引理 2.3，我们得到一个恰当拉格朗日余边的光滑族 $(L_t)_{t\in[0,1]}$，使得

$$L_t \cap \left((-\infty, r_-] \times U^*\mathbb{R}^3\right) = (-\infty, r_-] \times \Lambda_{K_t}, \quad L_t \cap \left([r_+, \infty) \times U^*\mathbb{R}^3\right) = [r_+, \infty) \times \Lambda_{K_0},$$

以及 $L_0 = \mathbb{R} \times \Lambda_K$。对于元素 $\mathbf{\Lambda}\left([(K_t)_{t\in[0,1]}]\right) = [(\Lambda_{K_t})_{t\in[0,1]}] \in \Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_{K_0},\ \Lambda_{K_1})$，我们有一个同构

$$\Phi\left([(\Lambda_{K_t})_{t\in[0,1]}]\right) = \Phi_{L_1}\colon \mathrm{LCH}_0(\Lambda_{K_0}) \to \mathrm{LCH}_0(\Lambda_{K_1}).$$

根据定理 2.5。

如第 3.3 节所述，取满足 $\Lambda_0 = \Lambda_{K_0}$ 和（3.3）的同伦 $(\Lambda_s)_{s\in[0,1]}$，然后构造恰当拉格朗日配边的光滑族 $(M_s)_{s\in[0,1]}$。回顾 $M_0 = \mathbb{R} \times \Lambda_{K_0}$，并且 M_s 的正端和负端都是 Λ_{K_0}。对于族 $(L_t)_{t\in[0,1]}$，我们取命题 3.2 中的 $0 < s_0 \leq 1$。改变参数后，不妨设 $s_0 = 1$。~利用 $(M_s)_{s\in[0,1]}$，我们将恰当拉格朗日配边的光滑族 $(L_t)_{t\in[0,1]}$ 定义为

$$\widetilde{L}_t \coloneqq L_t \circ_{\Lambda_{K_0}} M_t. \tag{5.3}$$

注意，由于 $(L_1 \circ_{\Lambda_K} M_s)_{s\in[0,1]}$ 是从 L_1 到 $\widetilde{L}_1$ 的同伦，因此 $\Phi\left([(\Lambda_{K_t})_{t\in[0,1]}]\right) = \Phi_{L_1} = \Phi_{\widetilde{L}_1}$。~此外，注意 $L_0 = \mathbb{R} \times \Lambda_{K_0}$。

5.2 主要结果的证明

5.2.1 定理 1.2 的证明思路

我们将证明在第 5.2.3 节证明以下命题。回顾第 3 节中的条件 ($)。 4.

命题 5.1. 设$(K_t)^{t\in[0,1]}$和$(L_t)^{t\in[0,1]}$ 如第 *5.1.3* 节所述。此外，我们假设 K_0 和 K_1 满足条件 ***($)***，且$(K_t)^{t\in[0,1]}$ 是实解析纽结的光滑族。取$(F_t)^{t\in[0,1]}$，并按第 *5.1.1* 节的方式定义 F_1^{string}。那么，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LCH}_0(\Lambda_{K_0}) & \xrightarrow{\Phi_{\tilde{L}_1}} & \mathrm{LCH}_0(\Lambda_{K_1}) \\ \Psi_{K_0}\downarrow & & \Psi_{K_1}\downarrow \\ \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K_0) & \xrightarrow{F_1^{\mathrm{string}}} & \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K_1). \end{array} \tag{5.4}$$

假设该命题成立，我们得到如下结论。

定理 5.2. 设 K_0 和 K_1 是满足 ***($)*** 的实解析结。对于第 *5.1.2* 节中定义的映射 ρ，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_{K_0},\Lambda_{K_1}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathrm{Hom}(\mathrm{LCH}_0(\Lambda_{K_0}),\mathrm{LCH}_0(\Lambda_{K_1})) \\ \boldsymbol{\Lambda}\uparrow & & \cong\downarrow I_{K_1}^{-1}\circ\Psi_{K_1}\circ(\cdot)\circ\Psi_{K_0}^{-1}\circ I_{K_0} \\ \Pi_{\mathrm{sm}}(K_0,K_1) & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{Hom}(\mathrm{Cord}(K_0),\mathrm{Cord}(K_1)). \end{array}$$

假设命题 *5.1* 成立时定理 *5.2* 的证明。任取 $x\in\Pi_{\mathrm{sm}}(K_0,\ K_1)$ 及其代表元 $(K_t)^{t\in[0,1]}$。$(K_t)^{t\in[0,1]}$ 由光滑嵌入族 $(f_t\colon\ S^1\to\mathbb{R}^3)^{t\in[0,1]}$ 给出。利用 S^1 上 f_t 的傅里叶展开，可以证明 $(f_t\colon\ S^1\to\mathbb{R}^3)^{t\in[0,1]}$ 与一个实解析嵌入的光滑族同伦。因此，我们可以对 $(K_t)^{t\in[0,1]}$ 作出与命题 5.1 中相同的假设。

我们在第 5.1.3 节中已经看到，$\Phi(\boldsymbol{\Lambda}(x))=\Phi\left([(\Lambda_{K_t})_{t\in[0,1]}]\right)=\Phi_{\tilde{L}_1}$。由图 (5.2) 和 (5.4)，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LCH}_0(\Lambda_{K_0}) & \xrightarrow{\Phi(\boldsymbol{\Lambda}(x))} & \mathrm{LCH}_0(\Lambda_{K_1}) \\ \Psi_{K_0}\downarrow & & \Psi_{K_1}\downarrow \\ \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K_0) & \xrightarrow{F_1^{\mathrm{string}}} & \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K_1) \\ I_{K_0}\uparrow & & I_{K_1}\uparrow \\ \mathrm{Cord}(K_0) & \xrightarrow{(F_1)_*=\rho(x)} & \mathrm{Cord}(K_1). \end{array}$$

这证明了 $\rho(x)=I_{K_1}^{-1}\circ\Psi_{K_1}\circ\Phi(\boldsymbol{\Lambda}(x))\circ\Psi_{K_0}^{-1}\circ I_{K_0}$。 □

定理 1.2 可由定理 5.2 推出。

利用定理 *5.2* 证明定理 *1.2*。对于一般的光滑结 K_0，K_1 在 $\mathbb{R}^3$ 中，我们取满足 ($) 的实解析纽结 K_0' 和 K_1'，使得对于 $j\in\{0,1\}$，K_j 与 K_j' 同位。固定元素 $x_0\in\Pi_{\mathrm{sm}}(K_0',\ K_0)$ 和 $x_1\in\Pi_{\mathrm{sm}}(K_1,\ K_1')$，并对每个 $y\in\Pi_{\mathrm{Leg}}(\Lambda_{K_0},\ \Lambda_{K_1})$ 定义

$$\begin{aligned}\Theta(y)\coloneqq&\rho(x_1)^{-1}\circ I_{K_1'}^{-1}\circ\Psi_{K_1'}\circ\Phi(\boldsymbol{\Lambda}(x_1)\cdot y\cdot\boldsymbol{\Lambda}(x_0))\circ\Psi_{K_0'}^{-1}\circ I_{K_0'}\circ\rho(x_0)^{-1}\\ &\in\mathrm{Hom}(\mathrm{Cord}(K_0),\mathrm{Cord}(K_1)).\end{aligned}$$

那么，对于任意 $x\in\Pi_{\mathrm{sm}}(K_0,\ K_1)$，$\boldsymbol{\Lambda}(x_1)\cdot\boldsymbol{\Lambda}(x)\cdot\boldsymbol{\Lambda}(x_0)=\boldsymbol{\Lambda}(x_1\cdot x\cdot x_0)$，而关于 K_0'和 K_1' 的定理 5.2 表明

$$\Theta(\boldsymbol{\Lambda}(x))=\rho(x_1)^{-1}\circ\rho(x_1\cdot x\cdot x_0)\circ\rho(x_0)^{-1},$$

而这等于 $\rho(x)$。因此，$\rho=\Theta\circ\boldsymbol{\Lambda}$ 成立。 □

本节其余部分将用于证明命题 5.1。

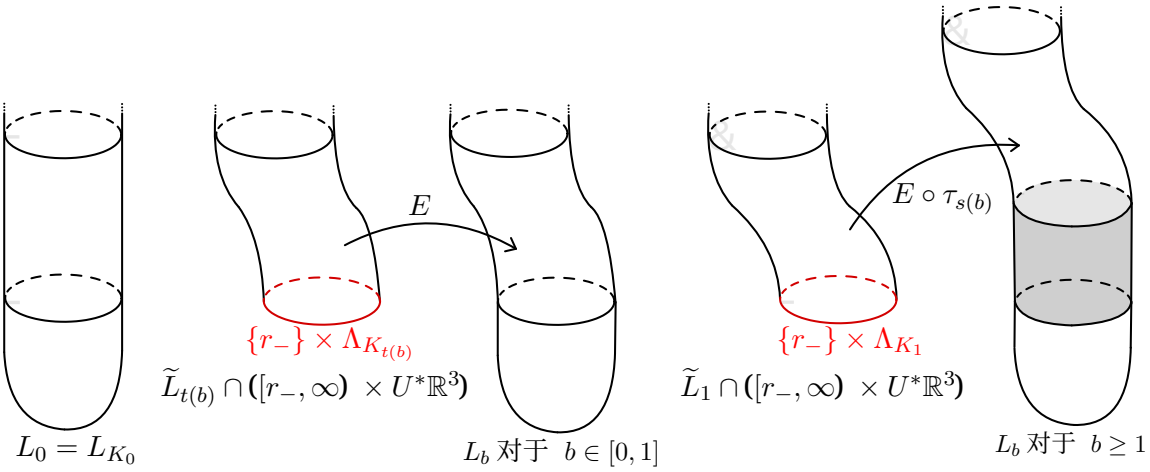


图5.1：当 $b = 0$、$L_0 = L_{K_0}$ 时（左图）。当 $b \in [0,1]$、L_b 是通过经由 E 将余法丛 $L_{K_{t(b)}}$ 与 $L_{t(b)}$ 拼接而得到的 Λ_{K_0} 的一个精确拉格朗日~填充时（中~图）。当 $b \geq 1$、L_b 由 L_{K_1} 和 L_1拼接而成，并将阴影柱状区域拉伸为 $b \to \infty$ 时（右图）。

5.2.2 Λ_{K_0}的一个精确拉格朗日填充族

我们如下构造一个由 $L_b{}^{b\in[0,\infty)}$ 组成的精确拉格朗日填充单参数族：取非递减函数 $t\colon [0,\infty) \to [0,1]$ 和 $s\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得：

- 当 $b \geq 1$时，$t(b) = b$ 在 $b = 0$ 附近，而 $t(b) = 1$。
- 当 $b \in [0,1]$ 时，$s(b) = 0$，且 $\lim_{b\to\infty} s(b) = \infty$。

利用第 5.1.3 节中的 $(L_t)^{t\in[0,1]}$，我们对每个 $b \in [0,\infty)$定义

$$L_b := \left(L_{K_{t(b)}} \setminus E([s(b) + r_-, \infty) \times \Lambda_{K_{t(b)}})\right) \cup (E \circ \tau_{s(b)}) \left(\widetilde{L}_{t(b)} \cap ([r_-, \infty) \times U^*\mathbb{R}^3)\right).$$

参见图5.1。

取一个序列 $(b_n)^{n=1,\ 2,\ \ldots\ldots}$，其中 $[1,\infty)$满足 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$。我们令

$$\mathscr{L}_n := (L_b)_{b\in[0,b_n]}.$$

于是，这满足纽结族 $(K_{t(b)})^{b\in[0,b_n]}$~ 的条件 (L1)、(L2) 和 (L3)。此外，由命题 3.2，借助 (5.3) 构造 $(L_t)^{t\in[0,1]}$ 时，也确保了条件 (L4)。

对于 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_{K_0})$、$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $n = 1, 2, \ldots$ 的每个三元组 (a, l, n)，我们都有一个在第3.1节中定义的模空间$\mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,l}(a)$。对于一般的 J'_ρ，每个模空间 $\mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,l}(a)$ 都具有引理 3.4 和 3.6 中的性质。令 $C\mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,l}(a)$ 表示命题 3.8 中的 $\mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,l}(a)$ 的紧化。它是一个带边的一维流形

$$\mathcal{M}_{L_{K_0},l}(a) \sqcup \mathcal{M}_{L_{b_n},l}(a) \sqcup \coprod_{j=1}^{2l-1} \delta\widetilde{\mathcal{M}}^j_{\mathscr{L}_n,l-1}(a).$$

我们来观察边界分支 $\mathcal{M}_{L_{b_n},\ l}(a)$，当 $n \to \infty$ 时。

引理 5.3。 当 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 足够大时，存在双射

$$\mathcal{G}_{n,0}\colon \mathcal{M}_{\widetilde{L}_1,J}(a,\emptyset) \sqcup \coprod_{|a_1|=\cdots=|a_m|=0} \left(\mathcal{M}_{\widetilde{L}_1,J}(a;a_1,\ldots,a_m) \times \prod_{k=1}^{m} \mathcal{M}_{L_{K_1},0}(a_k) \right) \to \mathcal{M}_{L_{b_n},0}(a),$$

$$\mathcal{G}_{n,l}\colon \coprod_{|a_1|=\cdots=|a_m|=0,\ l_1+\cdots+l_m=l} \left(\mathcal{M}_{\widetilde{L}_1,J}(a;a_1,\ldots,a_m) \times \prod_{k=1}^{m} \mathcal{M}_{L_{K_1},l_k}(a_k) \right) \to \mathcal{M}_{L_{b_n},l}(a),$$

对于 $l \geq 1$，使得对于定义域 $\mathcal{G}_n\mathbf{u}$ 中的任意伪全纯楼，当 l $(l \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$，$\mathcal{G}_{n,\,l}(\mathbf{u})$ 时，$n \to \infty$ 在 *BEHWZ03* 第 *8.2]* 节的意义下收敛于$\mathbf{u}$。此处，m、a_k 和l_k 分别遍历 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$、$\mathcal{R}(\Lambda_{K_1})$ 和 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$。

证明。 证明与 [EHK16 的推论 3.11] 相同，使用拉伸论证。注意，当 $n \gg 0$、$\mathcal{G}_{n,\,0}(\mathbf{u})$ 对于 $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{\widetilde{L}_1,\,J}(a,\,\emptyset)$ 是一条包含于 $T^*\mathbb{R}^3 \setminus D_1^*\mathbb{R}^3 \cong (0,\,\infty)$ 中的 J-全纯曲线，$\times U^*\mathbb{R}^3$ 并且随着 $n \to \infty$ 而逃向 $\{\infty\} \times U^*\mathbb{R}^3$。 □

5.2.3 命题 5.1 的证明

我们来考察紧化 $C\mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,\,l}(a)$。首先，在 $l = 0$ 的情形下，

$$\partial\left(C\mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,0}(a)\right) = \mathcal{M}_{L_{K_0},0}(a) \sqcup \mathcal{M}_{L_{b_n},0}(a).$$

我们使用引理 5.3 中的双射 $\mathcal{G}_{n,\,0}$。于是，得到一个等式

$$\begin{aligned} 0 &= \#_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{M}_{L_{K_0},0}(a) + \#_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{M}_{L_{b_n},0}(a) \\ &= \#_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{M}_{L_{K_0},0}(a) + \#_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{M}_{\widetilde{L}_1,J}(a,\emptyset) \\ &\quad + \sum_{m\geq 1,\ |a_1|=\cdots=|a_m|=0} \left(\#_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{M}_{\widetilde{L}_1,J}(a;a_1,\ldots,a_m)\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{m} \#_{Z_2}\mathcal{M}_{L_{K_1},0}(a_k)\right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

接下来，我们考察情形 $l \geq 1$。模空间的一种可能示意图如图 5.2 所示。下文中，我们将共形结构简称为结构。首先，考虑一个边界点

$$\lambda = ((b,u),z) \in \delta\widetilde{\mathcal{M}}^{2i-1}_{\mathscr{L}_n,l-1}(a)$$

对于 $i \in \{1,\ldots,l\}$。对于 $\mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,\,l}(a)$ 中任意一个收敛到 λ 的序列 $(b_\nu,\ u_\nu)_{\nu=1,\,2,\,\ldots\ldots}$，其 pat h

$$u_\nu|_{\partial_{2i}D_{2l+1}} : \partial_{2i}D_{2l+1} \to \mathbb{R}^3$$

当 $\nu \to \infty$ 时，在 C^∞ 拓扑下，收敛到 $u(z) \in K$ 处的常值路径。（当 $l = 2$ 时，参见 j 为奇数时图 3.3 中的示意图。）因此，存在 λ 的一个开邻域 $U'_\lambda \cong [0,1)$，使得

$$\operatorname{length}\left(F_{1-t(b)} \circ u|_{\overline{\partial_{2i}D_{2l+1}}}\right) < \varepsilon_1 \tag{5.6}$$

对于每个 $(b,\ u) \in U'_\lambda \setminus \{\lambda\} \subset \mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,\,l}(a)$。取一个子集 $U_\lambda \subset U'_\lambda$，使得 $U_\lambda \cong [0,\frac{1}{2})$ 通过同胚 $U'_\lambda \cong [0,1)$ 对应，并令 $\widehat{\lambda} \in U'_\lambda$ 为与 $\frac{1}{2} \in [0,1)$ 对应的点。（在图 5.2 中，它们分别显示为 U_{λ_4} 和 $\widehat{\lambda}_4$。）从 $C\mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,\,l}(a)$ 中去掉 U_λ，对所有 $\lambda \in \coprod_{i=1}^{l} \delta\widetilde{\mathcal{M}}^{2i-1}_{\mathscr{L}_n,\,l-1}(a)$，定义 $C'\mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,\,l}(a)$。它是一个紧致一维带边流形

$$\mathcal{M}_{L_{K_0},l}(a) \sqcup \mathcal{M}_{L_{b_n},l}(a) \sqcup \coprod_{i=1}^{l-1} \delta\widetilde{\mathcal{M}}^{2i}_{\mathscr{L}_n,l-1}(a) \sqcup \coprod_{i=1}^{l} \left\{ \widehat{\lambda} \in \mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,l}(a) \;\middle|\; \lambda \in \delta\widetilde{\mathcal{M}}^{2i-1}_{\mathscr{L}_n,l-1}(a) \right\}. \tag{5.7}$$

对于每个 $\lambda \in C'\mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,\,l}(a)$，我们定义 $\mathbf{s}^\lambda = (s_1^\lambda,\ \ldots\ldots,\ s_l^\lambda) \in \Sigma^l_{K_1}$ 如下：

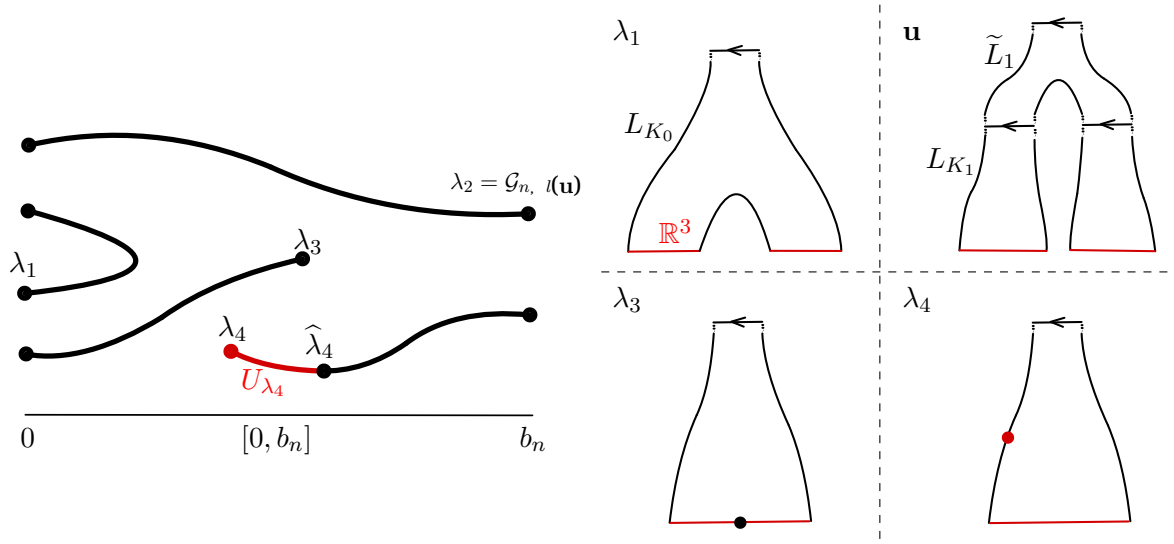


图 5.2：左侧是 $C\mathcal{M}_{\mathcal{G}_n,\ l}(a)$ 在 $[0, b_n]$ 上的一种（可能的）示意图。 λ_1，……，λ_4表示四种边界点。右侧的四幅图中，下面两幅（λ_3 和 λ_4）对应图 3.3 中间的那幅图。左上图展示了 λ_1，它表示用于按照第 4.3 节中的方式定义 Ψ_{K_0} 的 J'_ρ-全纯曲线。当 n 足够大时，对于上右图中的 J'_ρ-全纯建筑 $\mathbf{u}$， λ_2 等于 $\mathcal{G}_{n,\ l}(\mathbf{u})$。它由用于按照第 2.2.3 节定义 $\Phi_{\widetilde{L}_1}$ 的一条 J-全纯曲线，以及用于定义 Ψ_{K_1} 的 J'_ρ-全纯曲线组成。

(I-l) If $\lambda = (b, u) \in \mathcal{M}_{\mathcal{G}_n,l}(a)$, $s^\lambda_{i'} \colon [0, T^\lambda_{i'}] \to \mathbb{R}^3$ for $i' \in \{1, \dots, l\}$ is the curve

$$F_{1-t(b)} \circ u|_{\overline{\partial_{2i'} D_{2l+1}}}$$

与一个参数化 $\varphi^\lambda_{i'} \colon [0, T^\lambda_{i'}] \to \partial_{2i'} D_{2l+1}$ 复合，使得 $\varphi^\lambda_{i'}(0) = p_{2i'-1}$ 且 $|\dot{s}^\lambda_{i'}(t)| = 1$ 对每个 t 都成立。特别地， $T^\lambda_{i'}$ 是曲线 $u|_{\overline{\partial_{2i'} D_{2l+1}}}$ 的长度。由于根据引理 3.6， $u|_{\overline{\partial_{2i'} D_{2l+1}}}$ 是浸入，因此这样的 $\varphi^\lambda_{i'}$ 唯一存在。注意

$$s^\lambda_{i'}(\{0, T^\lambda_{i'}\}) = F_{1-t(b)}(\{u(p_{2i'-1}), u(p_{2i'})\}) \subset F_{1-t(b)}(K_{t(b)}) = K_1.$$

(II-l) 如果 $\lambda = ((b,\ u)\ z) \in \delta\widetilde{\mathcal{M}}^{2i}_{\mathcal{G}_n,\ l-1}(a)$，其中 z 位于 $\partial_{2i} D_{2l+1}$， $s^\lambda_{i'}$ 对于 $i' \in \{1, \dots, l\}$ 是曲率 e

$$\begin{cases} F_{1-t(b)} \circ u|_{\overline{\partial_{2i'} D_{2l-1}}} & \text{if } i' \le i-1, \\ F_{1-t(b)} \circ u|_{\overline{\partial_{2i} D_{2l-1}}^0} & \text{if } i' = i, \\ F_{1-t(b)} \circ u|_{\overline{\partial_{2i} D_{2l-1}}^1} & \text{if } i' = i+1, \\ F_{1-t(b)} \circ u|_{\overline{\partial_{2i'-2} D_{2l-1}}} & \text{if } i' \ge i+2, \end{cases}$$

预先复合一个参数化，使得 $s^\lambda_{i'}$ 具有单位速度。这里， $\partial_{2i} D_{2l-1}{}^0 \subset \partial_{2i} D_{2l-1}$ 是端点为 $\{p_{2i-1}, z\}$ 的弧，而 $\partial_{2i} D_{2l-1}{}^1 \subset \partial_{2i} D_{2l-1}$ 是端点为 $\{z, p_{2i}\}$ 的弧。注意， $u(z) \in K_{t(b)}$，因此 $F_{1-t(b)}(u(z)) \in K_1$。如果序列 $(\lambda_\nu)_{\nu=1,\ 2,\ \dots}$ 在 $\mathcal{M}_{\mathcal{G}_n,\ l}(a)$ 中收敛到 λ，且 λ 属于 $C'\mathcal{M}_{\mathcal{G}_n,\ l}(a)$，则按 (I-$l$) 定义的 $\mathbf{s}^{\lambda_\nu}$ 在 $\Sigma^l_{K_1}$ 中收敛到 $\mathbf{s}^\lambda$，当 $\nu \to \infty$ 时。对于 $l = 2$ 和 $i = 1$ 的情形，见图 3.3。

我们将紧致一维流形 $C'\mathcal{M}_{\mathcal{G}_n,l}(a)$ 细分为若干区间。令 $I_{n,l}(a)$ 表示这些区间的集合，并为每个 $\Delta \in I_{n,l}(a)$ 固定一个识别 $\Delta \cong [0, 1]$。定义 $H(a) = (H_l(a))_{l=0,1,\dots} \in \bigoplus_{l=0}^\infty C_1(\Sigma^l_{K_1})$ 如下：

$$H_l(a) = \sum_{\Delta \in I_{n,l}(a)} (\mathbf{s}^\lambda)_{\lambda \in \Delta}.$$

对于 $l \geq 1$ 和 $H_0(a) = 0$（回顾一下，$C_1(\Sigma^0_{K_1})$ 根据定义为 $= 0$）。这是有意义的，因为对于任意 $\Delta \in I_{n,l}(a)$，$(\mathbf{s}^\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ 由引理 3.6 的 (iii)、(i) 和 (iv) 分别满足条件 (1a)、(1b) 和 (1c)。

注 5.4. 更准确地说，我们需要进行细分，使得$\mathbf{s}^\lambda$ 对于 $\lambda \in \partial\Delta \cong \{0,1\}$ 满足 (0a) 和 (0b)。根据引理 3.6 (iii)，求值映射具有横截性，因此这是可能的。

下面的引理是证明命题 5.1 的关键。

引理 5.5. 对于每个 $i \in \{1,\dots,l\}$

$$\delta_i H_l(a) = \sum_{\lambda' \in \delta\widetilde{\mathcal{M}}^{2i}_{\mathscr{L}_n,l}(a)} \mathbf{s}^{\lambda'}$$

在 $\bar{C}_0\,\Sigma^{l+1}_{K_1}$ λ' $l+1$ $\lambda' \in \delta\widetilde{\mathcal{M}}^{2i}_{\mathscr{L}_n\,l}\,a\ \subset ()$ 中，其中右侧的s由,() ,()的 *(II-())*
$C'\mathcal{M}_{\mathscr{L}_n\,l+1}\,a$
定义。

证明。 $\delta_i H_l(a)$ 对于 se 中的所有配对 (λ,t)，均由 (4.4) 的求和项$\mathbf{s}^{(\lambda,t),i}$ 给出 t

$$\Gamma_i^{-1}(K_1) = \{(\lambda,t) \in \mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,l}(a) \times \mathbb{R} \mid 0 < t < T_i^\lambda,\ s_i^\lambda(t) \in K_1\}.$$

（这里请注意，若 $\lambda \in \mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,l}(a) \setminus C'\mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,l}(a)$，则我们可以忽略 $\mathbf{s}^{(\lambda,t),i}$，因为它根据 (5.6) 属于 $\Sigma^{l+1}_{K_1\ ,\varepsilon_1}\widetilde{\ }$。）该集合通过一个双射自然地等同于 $\delta\mathcal{M}^{2i}_{\mathscr{L}_n,l}(a)$

$$P_{l,i}\colon \Gamma_i^{-1}(K_1) \to \delta\widetilde{\mathcal{M}}^{2i}_{\mathscr{L}_n,l}(a)\colon (\lambda,t) \mapsto (\lambda, \varphi_i^\lambda(t)),$$

其中 $\varphi_i^\lambda\colon [0,T_i^\lambda] \to \partial_{2i}\overline{D_{2l+1}}$ 是 (I-l) 中所用的参数化。按照 (II-$(l+1)$) 的过程，对 $P_{l,i}(\lambda,t) \in \delta\widetilde{\mathcal{M}}^{2i}_{\mathscr{L}_n}$，$l(a)$ 定义了 $\mathbf{s}^{P_l,_i(\lambda,t)} \in \Sigma^{l+1}_{K_1}$。它由 $\mathbf{s}^\lambda$ 得到，方法是在 s_i^λ 与 K_1 相交的点 $t \in [0,T_i^\lambda]$ 处将第 i 条路径 s_i^λ 分裂。这正是如 (4.4) 中由 $\mathbf{s}^\lambda$ 构造 $\mathbf{s}^{(\lambda,t),i}$ 的过程。因此，$\mathbf{s}^{(\lambda,t),i} = \mathbf{s}^{P_l,_i(\lambda,t)}$。这表明

$$\delta_i H_l(a) = \sum_{(\lambda,t)\in\Gamma_i^{-1}(K_1)} \mathbf{s}^{P_{l,i}(\lambda,t)} = \sum_{\lambda'\in\delta\widetilde{\mathcal{M}}^{2i}_{\mathscr{L}_n,l}(a)} \mathbf{s}^{\lambda'}$$

在 $\bar{C}_0(\Sigma^{l+1}_{K_1})$ 中。 □

除了 $H(a)$ 之外，我们再构造另一条 1-链。对任意 $\lambda = \mathcal{G}_{n,\ l}(\mathbf{u}) \in \mathcal{M}_{L_{b_n},\ l}(a)$，考虑

$$\mathbf{u} = (u,(u_1,\dots,u_l)) \in \mathcal{M}_{\widetilde{L}_1,J}(a;a_1,\dots,a_m) \times \prod_{k=1}^m \mathcal{M}_{L_{K_1},l_k}(a_k),$$

其中 $a_1,\dots,a_m \in \mathcal{R}(\Lambda_{K_1})$ 以及 $l_1,\dots,l_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$满足 $|a_1| = \cdots = |a_m| = 0$和 $l_1+\cdots+l_m = l$。对于 $u_k \in \mathcal{M}_{L_{K_1},l_k}(a_k)$，当 $l_k \geq 1$时，由 (4.6) 定义 0-链 $\mathbf{s}^{u_k} \in \bar{C}_0(\Sigma^{l_k}_{K_1})$。当 $l_k = 0$时，令 $\mathbf{s}^{u_k}$: $= 1 \in \mathbb{Z}_2 = \bar{C}_0(\Sigma^{l_k}_{K_1})$。于是，根据引理 5.3，当 $n \to \infty$时，$\mathbf{s}^\lambda = \mathbf{s}^{\mathcal{G}_n,_l(u)}$ 在 $\Sigma^l_{K_1}$ 中收敛到一个表示 $\mathbf{s}^{u_1} * \cdots * \mathbf{s}^{u_m} \in \bar{C}_0(\Sigma^l_{K_1})$ 的路径元组。这里，$*$ 是由 (4.5) 诱导的 $\bar{C}_0(\Sigma^l_{K_1})$ 上的乘积。因此，当 n 足够大时，我们可以应用引理 4.4，得到一条 1-链 $h_\lambda \in C_1(\Sigma^l_{K_1})$，使得 $\delta(h_\lambda) = 0$ 并且

$$D_{K_1} h_\lambda = \partial h_\lambda = \mathbf{s}^\lambda - \mathbf{s}^{u_1} * \cdots * \mathbf{s}^{u_m}.$$

定义 $h(a) = (h_l(a))_{l=0,\ 1,\ \dots} \in \bigoplus_{l=0}^\infty C_1(\Sigma^l_K)$，使得 $h_0(a) = 0$ 且

$$h_l(a) = \sum_{\lambda\in\mathcal{M}_{L_{b_n},l}(a)} h_\lambda$$

对于 $l \geq 1$。我们注意到 $\delta h(a) = 0$ 属于 $\bar{C}_0(\Sigma^{l+1}_{K_1})$。

命题 *5.1* 的证明。考虑一个图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_0(\Lambda_{K_0}) & \xrightarrow{\Phi'_{\widetilde{L}_1}} & \mathcal{A}_0(\Lambda_{K_1}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi'_{K_0}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi'_{K_1}} \\ \bar{C}_0(\Sigma_{K_0}) & \xrightarrow{\bar{F}_1^{(0)}} & \bar{C}_0(\Sigma_{K_1}). \end{array}$$

图中的这些映射保持 $\mathbb{Z}_2$-代数结构，并且子空间 $\operatorname{Im} D_{K_1} \subset \bar{C}_0(\Sigma_{K_1})$ 关于乘积 $*$ 是一个双边理想。因此，只需证明对于每个满足 $|a| = 0$ 的 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_{K_0})$，

$$\Psi'_{K_1} \circ \Phi'_{\widetilde{L}_1}(a) - \bar{F}_1^{(0)} \circ \Psi'_{K_0}(a) = D_{K_1}\left(h(a) + H(a)\right) \tag{5.8}$$

在 $\mathbb{Z}_2$ 系数下，特别地，左端包含于 $\operatorname{Im} D_{K_1}$ 中。对于每个 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，令 $\left(\Psi'_{K_1} \circ \Phi'_{\widetilde{L}_1}(a)\right)_l \in \bar{C}_0(\Sigma^l_{K_1})$ 表示 $\Psi'_{K_1} \circ \Phi'_{\widetilde{L}_1}(a) \in \bar{C}_0(\Sigma_{K_1})$ 的 l 分量。于是，(5.8) 可改写为方程

$$\begin{aligned} \left(\Psi'_{K_1} \circ \Phi'_{\widetilde{L}_1}(a)\right)_0 - \Psi'_{K_0,0}(a) &= 0 \text{ in } \bar{C}_0(\Sigma^0_{K_1}) = \mathbb{Z}_2, \\ \left(\Psi'_{K_1} \circ \Phi'_{\widetilde{L}_1}(a)\right)_l - \bar{F}_1^{(0)}(\Psi'_{K_0,l}(a)) &= \partial h_l(a) + \partial H_l(a) + \delta H_{l-1}(a) \text{ in } \bar{C}_0(\Sigma^l_{K_1}), \end{aligned} \tag{5.9}$$

对于 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。

（5.9）的第一个等式由（5.5）可得，因为

$$\begin{aligned} &\left(\Psi'_{K_1} \circ \Phi'_{\widetilde{L}_1}(a)\right)_0 \\ &= \#_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{M}_{\widetilde{L}_1,0}(a) \cdot \Psi'_{K_1}(1) + \sum_{m\geq 1,\ |a_1|=\cdots=|a_m|=0} \left(\#_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{M}_{\widetilde{L}_1,J}(a;a_1,\ldots,a_m)\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^m \Psi'_{K_1,0}(a_k)\right) \\ &= \#_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{M}_{\widetilde{L}_1,0}(a) + \sum_{m\geq 1,\ |a_1|=\cdots=|a_m|=0} \left(\#_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{M}_{\widetilde{L}_1,J}(a;a_1,\ldots,a_m)\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^m \#_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{M}_{L_{K_1},0}(a_k)\right) \\ &= \#_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{M}_{L_{K_0},0}(a) = \Psi'_{K_0,0}(a) \end{aligned}$$

在 $\bar{C}_0(\Sigma^0_{K_1}) = \mathbb{Z}_2$ 中。

我们来证明 $l \geq 1$ 的（5.9）中的第二个等式。由于 $C'\mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,l}(a) = \bigcup_{\Delta\in I_{n,l}(a)}\Delta$ 具有边界（5.7），

$$\begin{aligned} \partial(H_l(a)) &= \sum_{\lambda\in\partial\left(C'\mathcal{M}_{\mathscr{L}_n,l}(a)\right)} \mathbf{s}^\lambda \\ &= \sum_{\lambda\in\mathcal{M}_{L_{K_0},l}(a)} \mathbf{s}^\lambda + \sum_{\lambda\in\mathcal{M}_{L_{b_n},l}(a)} \mathbf{s}^\lambda + \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{\lambda\in\delta\widetilde{\mathcal{M}}^{2i}_{\mathscr{L}_n,l-1}(a)} \mathbf{s}^\lambda. \end{aligned} \tag{5.10}$$

在 $\bar{C}_0(\Sigma^l_{K_1})$ 中。这里注意，对于任意 $\lambda \in \delta\widetilde{\mathcal{M}}^{2i-1}_{\mathscr{L}_n,l-1}(a)$，$\mathbf{s}^{\widehat{\lambda}}$ 在 $\bar{C}_0(\Sigma^l_{K_1})$ 中消失，因为$\mathbf{s}^\lambda$ 中的第 i 个路径由（5.6）可知长度小于 ε_1，这意味着$\mathbf{s}^\lambda$ 包含于$\Sigma^l_{K_1,\varepsilon_1}$。

根据 $\lambda = (0, u) \in \mathcal{M}_{L_{K_0},l}(a)$ 的 (I-*l*)，路径 $s^\lambda_{i'}$ agrees 与 $F_1 \circ u|_{\partial_{2i'}D_{2l+1}}$—除参数化方式外一致。因此，

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{M}_{L_{K_0},l}(a)} \mathbf{s}^\lambda = \sum_{u\in\mathcal{M}_{L_{K_0},l}(a)} \bar{F}_1^{(0)}(\mathbf{s}^u) = \bar{F}_1^{(0)} \circ \Psi'_{K_0,l}(a),$$

其中，对于 $u \in \mathcal{M}_{L_{K_0},\, l}(a)$，$\mathbf{s}^u \in \bar{C}_0(\Sigma^l_{K_0})$ 由 (4.6) 给出。此外，根据上述 $h_l(a) \in C_1(\Sigma^l_K)$ 的构造，

$$
\begin{aligned}
&\left(\Psi'_{K_1} \circ \Phi'_{\widetilde{L}_1}(a)\right)_l \\
&= \sum_{|a_1|=\cdots=|a_m|=0,\ l_1+\cdots+l_m=l} \#_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{M}_{\widetilde{L}'_1,J}(a;a_1,\ldots,a_m)\cdot \Psi'_{K_1,l_1}(a_1)*\cdots*\Psi'_{K_1,l_m}(a_m) \\
&= \sum_{|a_1|=\cdots=|a_m|=0,\ l_1+\cdots+l_m=l} \#_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{M}_{\widetilde{L}'_1,J}(a;a_1,\ldots,a_m)\cdot \sum_{(u_1,\ldots,u_m)\in\prod_{k=1}^m \mathcal{M}_{L_{K_1},l_k}(a_k)} (\mathbf{s}^{u_1}*\cdots*\mathbf{s}^{u_m}) \\
&= \sum_{\lambda\in\mathcal{M}_{L_{b_n},l}(a)} (\mathbf{s}^\lambda + \partial h_\lambda) = \left(\sum_{\lambda\in\mathcal{M}_{L_{b_n},l}(a)} \mathbf{s}^\lambda\right) + \partial h_l(a).
\end{aligned}
$$

最后，对于每个 $i \in \{1,\ldots,l-1\}$,

$$\sum_{\lambda\in\delta\widetilde{\mathcal{M}}^{2i}_{\mathscr{L},l-1}(a)} \mathbf{s}^\lambda = \delta_i(H_{l-1}(a))$$

根据引理 5.5。因此，由 (5.10) 可得

$$\partial(H_l(a)) = \bar{F}_1^{(0)} \circ \Psi'_{K_0,l}(a) + \left(\left(\Psi'_{K_1} \circ \Phi'_{\widetilde{L}_1}(a)\right)_l - \partial h_l(a)\right) + \delta_i(H_{l-1}(a)),$$

这与 (5.9) 的第二个等式一致。至此，(5.8) 的证明完成。 □

6 检测不可缩环的例子

6.1 纽结与勒让德环面的环路

受 [Kal04; CN21; Mar24],的工作启发，我们定义蓝盒回路。

定义 6.1。考虑一个纽结 $L_1\#L_2 \subset \mathbb{R}^3$，其中该纽结 L_1 是定向的，并配有固定框架，且 L_2 -缠结任意小。接下来，设蓝色方框 $B[L_2]$ 是N_{L_1} 的管状邻域 L_1 中包含一个 L_2-缠结的一小部分。于是，蓝盒环路 是一个光滑结族 $(K_t^{\mathrm{box}})_{t\in[0,1]}$，满足 $K_0^{\mathrm{box}} = K_1^{\mathrm{box}}$，并且可通过使蓝色方框 $B[L_1]$ 在N_{L_1} 内部刚性地绕 L_1一周来实现。这里的刚性运动是指蓝色方框的轨迹与 L_1的框架相一致。见图 6.1。

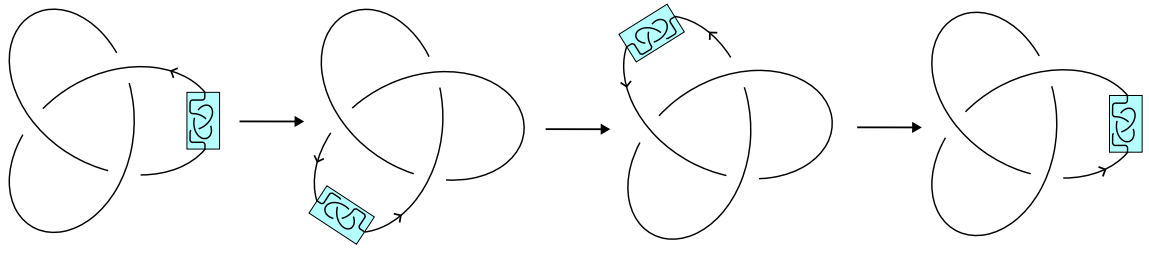


图 6.1：方结的一个蓝盒环路$T_{2,\,3}\#T_{2,\,-3}$。

单位余法向提升 $K \mapsto \Lambda_K$ 由纽结的蓝盒环路 $(K_t^{\mathrm{box}})_{t\in[0,1]}$ 诱导出勒让德环面的环路 $(\Lambda_{K_t^{\mathrm{box}}})_{t\in[0,1]}$。注意，环路 $(\Lambda_{K_t^{\mathrm{box}}})_{t\in[0,1]}$ 由区域 $U^*B[L_2]$ 在 $U^*\mathbb{R}^3$ 内的轨迹实现。

下一个命题表明，若我们忽略 $U^*\mathbb{R}^3$ 的接触结构，则 $(\Lambda_{K_t^{\mathrm{box}}})_{t\in[0,1]}$ 可通过 C^∞ 子流形的环路的同伦收缩为一点。

命题 6.2。 $[(\Lambda_{K_t^{\mathrm{box}}})_{t\in[0,1]}] = [e]$ 在 $\pi_{\mathrm{sm}}(\Lambda_{K_0})$ 中，其中 e 是一个常值环。

证明。 根据构造，对于每个 $t \in [0,1]$ ，蓝色方框的形式都相同。因此，只需证明存在一个在 $U^*B[L_2]$ 上、在边界附近固定的光滑同痕，将 L_2- 缠结的余法丛变形为平凡切结的余法丛。为此，我们考虑 L_2 的平面图，并逐一考察每个交叉。聚焦于一个交叉的邻域 B，问题便归结为构造一个从 $\Lambda_{L_2} \cap U^*B$ 到 $\Lambda_{L_2'} \cap U^*B$ 的光滑同痕，其中 L_2' 是通过将 B 中的上交叉改为下交叉得到的。

我们可以假设，在 $U^*\mathbb{R}^3 \subset T^*\mathbb{R}^3$ 上存在局部坐标 $(x;\, y)$，使得交叉具有如下形式。它由股 $c_1(\ell_1) = (\ell_1,\ 0,\ 0;\ 0,\ 0,\ 0)$ 和 $c_1(\ell_2) = (0,\ \ell_2,\ \varepsilon\phi(\ell_2);\ 0,\ 0,\ 0)$ 组成，其中 $\ell_1,\ \ell_2 \in [-1,1]$，$\varepsilon > 0$ 很小，且 ϕ 是一个支撑于 0 附近的隆起函数。随后，对纤维进行小的同伦后，缠结的单位余法丛是两个圆柱面 $\{C_i(\ell_i,\ \beta_i) \mid \ell_i \in [-1,1],\ \ \beta_i \in S^1\}$ 在 $i \in \{1,2\}$时的并，其中

$$C_1(\ell_1,\beta_1) = (\ell_1,0,0;\ 0,\cos\beta_1,\sin\beta_1),\quad C_2(\ell_2,\beta_2) = (0,\ell_2,\varepsilon\phi(\ell_2);\ \cos\beta_2,0,\sin\beta_2).$$

考虑实数集 $t \in [0,1]$ 中的一个同伦

$$C_1^t(\ell_1,\beta_1) = (\ell_1,0,0;c_t(\ell_1,\beta_1)),\quad C_2^t(\ell_2,\beta_2) = (0,\ell_2,(1-2t)\cdot\varepsilon\phi(\ell_2);\cos\beta_2,0,\sin\beta_2),$$

其中 $c_t(\ell_1,\cdot)\colon\ S^1 \to S^2$ 是一个嵌入；当 $\ell_1 \in \{1,-1\}$或 $t \in \{0,1\}$ 时，它与 $(0,\cos\beta_1,\sin\beta_1)$ 重合；当 $\ell_1 = 0$ 且 $t = \frac{1}{2}$ 时，它与 $\{(\cos\beta_2,0,\sin\beta_2)$ 不相交。（例如，$c_{\frac{1}{2}}^1(0,\beta) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta_1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta_1)$。）那么，对于每个 $t \in [0,1]$，两个圆柱面 $\{C_i^t(\ell_i,\beta_i) \mid \ell_i \in [-1,1],\ \beta_i \in S^1\}$（$i = 1,\ 2$）互不相交。由于 $C_1^1(\ell_1,\beta_1) = C_1(\ell_1,\beta_1)$，且 $C_2^1(\ell_2,\beta_2) = (0,\ell_2,-\varepsilon\phi(\ell_2);\cos\beta_2,0,\sin\beta_2)$，这就给出了所需的同伦。

□

注 6.3。 我们简要讨论嵌入空间背景下蓝盒环路的描述，并参考 Hatcher [Hat83; Hat02] 和 Budney [Bud08; Bud10]的工作。另见 Mart´ınez [Mar24]的综述。为简化讨论，我们考虑单位三维球面 S^3中的纽结。

令 $\mathrm{Emb}(S^1,S^3)$ 表示配备 C^∞ 拓扑的 S^3 中光滑（带参数）纽结所成的空间。类似地，我们引入长纽结空间 $\mathrm{LEmb}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$，即由满足以下条件的嵌入$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 所成的空间：若 $|t| > 1$，则 $f(t) = (t,0,0)$。固定北极 $p_0 = (0,0,0,1) \in S^3$和单位向量 $V_0 = (1,0,0,0) \in T_{p_0}S^3 \subset \mathbb{R}^4$，并通过立体投影固定一个识别 $S^3 \setminus \{p_0\} \cong \mathbb{R}^3$。那么，在同伦意义下，$\mathrm{LEmb}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ 可识别为 $\mathrm{Emb}(S^1,S^3)$ 的一个子空间，它由满足以下条件的嵌入 $f\colon\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^3$ 构成：$f(0) = p_0$ 且$\dot f(0)/|\dot f(0)| = V_0$。因此，映射 $e_0\colon \mathrm{Emb}(S^1,S^3) \to V_2(\mathbb{R}^4)\colon\ f \mapsto (f(0)\ \dot f(0)/|\dot f(0)|)$ 诱导出一个纤维化序列

$$\mathrm{LEmb}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3) \xrightarrow{i_0} \mathrm{Emb}(S^1,S^3) \xrightarrow{e_0} V_2(\mathbb{R}^4) = \mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(2). \tag{6.1}$$

我们指出，空间 $\mathrm{Emb}(S^1,\mathbb{R}^3)$ 的同伦型也可通过一个类似的纤维化来描述，其中涉及 $\mathrm{LEmb}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$。参见 [Bud08, 命题 2.2]。

$\mathrm{LEmb}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ 的拓扑类型已得到深入研究。值得注意的是，作为斯梅尔猜想的推论，Hatcher [Hat02] 证明了 $\mathrm{LEmb}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ 的连通分支是$K(\pi,1)$。对于任意纽结 $L \subset S^3$，令 $\mathcal{K}_L$ 表示包含 L- 缠结的 $\mathrm{LEmb}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ 的分量。作为 Budney公式 [Bud10], 的一个特例，我们有如下结论：设 L_1 和 L_2为互不相同位的素结。根据 [Bud07, 定理 11] 和 [Bud10, 定理 2.4], ，我们有一个同伦等价

$$\mathcal{K}_{L_1\#L_2} \simeq \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{K}_{L_1} \times \mathcal{K}_{L_2}, \tag{6.2}$$

其中，$\mathcal{C}_2(\mathbb{R}^2)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中两个不同点的构形空间。（$\pi_1(\mathcal{C}_2(\mathbb{R}^2))$ 的一个生成元给出一个环路：一个小的 L_1 缠结沿着 L_2 滑动，随后一个小的 L_2 缠结沿着 L_1 滑动。）对于任意纽结 L，$\mathcal{K}_L$ 中有两类环路，如 [Hat02 第 3] 页所述：

- 其中一个环路是通过将长纽结绕长轴扭转而得到的。
- 另一个环路具有如下形式：$f(S^1\setminus\{t\})\subset S^3\setminus\{f(t)\}$，其中 $f\colon\ S^1\to S^3$ 是一个带框架的嵌入，使得 $f(S^1)=L$。更确切地说，SO(4) 中的一个环路 $(A_t)_{t\in[0,1]}$，它将 $(f(t)\ \dot f(t)/|\dot f(t)|)$ 映射到 $(p_0,\ V_0)\in TS^3$，由 t 处 f 的框架决定（见 [Mar24，第 4.2] 节），由此我们得到一个长纽结 $(A_t\circ f)(S^1)\setminus\{p_0\}\subset S^3\setminus\{p_0\}\cong\mathbb{R}^3$。

按照 [Mar24，第 4]，节，我们分别称它们为 ***Gramain*** 环和 ***Hatcher-Fox*** 环。值得注意的是，对于环面纽结 $T_{p,\ q}$，$\mathcal{K}_{T_{p,\ q}}$ 与 S^1 [Hat02，第 3] 页所述具有相同的同伦型；特别地，Gramain 环与 Hatcher-Fox 环在同伦意义下重合。

设 $f\in\mathrm{Emb}(S^1,S^3)$ 是一个带有固定框架的嵌入，使得 $f(S^1)=L_1$。这会为上述的 $L=L_1$ 导出一个 Hatcher-Fox 环路 ℓ_{HF}，以及 SO(4) 中的一个环路 $(A_t)_{t\in[0,1]}$。（同伦类 $[(A_t)_{t\in[0,1]}]\in\pi_1(\mathrm{SO}(4))$ 在带标架浸入 $S^1\looparrowright S^3$ 的同伦下保持不变。）考虑 $0<\varepsilon\ll 1$ 的一个线段 $[-\varepsilon,0]\subset\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong S^1$。我们的蓝盒环路由嵌入 g_t 的一个族 $(g_t)_{t\in[0,1]}$ 给出：$S^1\to S^3$，满足若 $s\in S^1\setminus[-\varepsilon,0]$，则 $g_t(s)=f(t+s)$；而 $g_t|_{[-\varepsilon,0]}$ 是映到蓝色方框中的 L_2-缠结上的嵌入。注意，$g_t(0)=f(t)$ 是紧接在 L_2-缠结之后的一个点。于是，$e_0(A_t\circ g_t)=\Big(A_t(f(t))\ A_t(\dot f(t)/|\dot f(t)|)\Big)=(p_0,V_0)$，因此 $(A_t\circ g_t)_{t\in[0,1]}$ 可视为 $\mathrm{LEmb}(S^1,S^3)\simeq e_0^{-1}(p_0,V_0)$ 中的一个环路。在同伦意义下，该环路具有如下形式 $(g'_t)_{t\in[0,1]}$

$$g'_t\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\colon u\mapsto\begin{cases}g_t^1(u) & \text{if } u\le 0,\\ g^2(u) & \text{if } u\ge 0,\end{cases}$$

其中，$(g_t^1)_{t\in[0,1]}$ 是 $\mathcal{K}_{L_1}$ 中与 ℓ_{HF} 同伦的一个环路，而 $g^2\in\mathcal{K}_{L_2}$ 不依赖于 t。换言之，同伦类 $[(A_t\circ g_t)_{t\in[0,1]}]\in\pi_1(\mathrm{Emb}(S^1,\ S^3)\ A_0\circ g_0)$ 等于 $(1,\ [\ell_{\mathrm{HF}}],\ 1)$ 在该同态下的像

$$(i_0)_*\colon\pi_1(\mathcal{C}_2(\mathbb{R}^2))\times\pi_1(\mathcal{K}_{L_1},g_0^1)\times\pi_1(\mathcal{K}_{L_1},g^2)\to\pi_1(\mathrm{Emb}(S^1,S^3),A_0\circ g_0).$$

这里，我们使用同伦等价 (6.2) 和 (6.1) 中的映射 i_0。

6.2 描述蓝盒环路所诱导的自同构

根据定理 1.2，要找到勒让德环面的一个非可缩环路，只需找到一个能在弦代数上诱导非平凡自同构的纽结环路。对我们而言，自然的候选是第 6.1 节中的蓝盒环路。

首先，我们将明确描述蓝盒环路如何作用于弦代数。与定义 4.5 中的 $\mathrm{Cord}(K)$ 不同，考虑弦代数 $\mathrm{Cord}^{\mathrm{loop}}(K)$ 的环路解释会更方便，该解释如下所述。它由 [Ng08 的定义 2.1] 得到，方法是将系数环从 $\mathbb{Z}[H_1(\partial N)]$ 缩减为 $\mathbb{Z}_2$。

回忆一下，$K\subset\mathbb{R}^3$ 是一个带有框架的定向结，而 $K'\subset N$ 是相对于框架的 K 的平移。固定一个基点 $q_0\in K$，并令 $q'_0\in K'$ 为相应的点。令 m 和 ℓ 分别为 K 的子午线和经线。

定义 6.4。$\mathrm{Cord}^{\mathrm{loop}}(K)$ 是一个幺非交换 $\mathbb{Z}_2$-代数，由集合 $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K,\ q'_0)$ 生成，并模去以下关系

(i) $[e]=0$，其中 e 是 $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K,\ q'_0)$，中的平凡环路

(ii) 对任意 $\gamma\in\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K,\ q'_0)$，，$[\ell\bullet\gamma]=[\gamma\bullet\ell]=[\gamma]$

(iii) $[\gamma_1\bullet\gamma_2]+[\gamma_1\bullet m\bullet\gamma_2]=[\gamma_1]\cdot[\gamma_2]$ 对于任意 $\gamma_1,\gamma_2\in\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K,q'_0)$.

我们注意到

$$[m \bullet \gamma] = [\gamma \bullet m] = [\gamma] \tag{6.3}$$

由 (i) 和 (iii) 得出。

注 6.5. 考虑由 $[\ell \bullet \gamma] \sim [\gamma]$和 $[\gamma \bullet \ell] \sim [\gamma]$生成的 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K',\ q_0')$ 上的等价关系 $\sim$。那么，商集 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K,\ q_0')/\sim$与$\mathcal{P}_K$之间存在自然双射，并且它诱导出一个典范同构 $\mathsf{Cord}^{\mathrm{loop}}(K) \to \mathsf{Cord}(K)$，该同构将生成元$[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K,\ q_0')$映射到 $[\gamma] \in \mathcal{P}_K$。另请参见 [Ng08，命题 2.5]。为方便读者，我们总结一下第 6 节中出现的几种弦代数版本。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K) & \xrightarrow{\lambda=\mu=1} & \mathrm{Cord}(K) & \xrightarrow[\text{abelianization}]{[\gamma]=[\gamma^{-1}]} & \mathrm{Cord}^{\mathrm{ab}}(K) \\ & & \wr \| & & \\ & & \mathrm{Cord}^{\mathrm{loop}}(K). & & \end{array}$$

$\mathsf{Cord}^{\mathrm{nc}}(K)$ 只会在最后的注 6.10 中出现。$\mathsf{Cord}^{\mathrm{ab}}(K)$ 是一种适用于具体计算的交换代数。

设 $K = L_1 \# L_2$ 是一个定向带框结，且 L_2 位于蓝色方框 $B[L_2] \subset N_{L_1}$ 中。固定一个基点 $q_0' \in K' \cap \partial B[L_2]$。对于 $i \in \{0,1\}$，令 $m_i,\ \ell_i \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L_i,\ q_0')$ 分别表示 L_i的子午线和经线。（下文省略基点 q_0' 的记法。）注意，根据塞弗特–范坎彭定理

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \frac{\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L_1) * \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L_2)}{\langle [m_1] = [m_2] \rangle}, \tag{6.4}$$

而 K 的子午线和经线分别为 $m = m_1 = m_2$ 和 $\ell = \ell_1 \bullet \ell_2 = \ell_2 \bullet \ell_1$。

现在，按照第 5.1 节的思路，蓝盒环路确定了一个环境同痕 $(F_t)_{t \in [0,1]}$。令 $F_{\text{盒子}} := F_1$。于是，$F_{\text{盒子}}$ 在 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ 上诱导出一个群自同构 $(F^{\mathrm{box}})_*$。根据 (6.4)，它在生成元上的作用可描述为

$$\begin{aligned} (F^{\mathrm{box}})_*[a] &= [\ell_1^{-1} \bullet a \bullet \ell_1], \qquad \text{where } [a] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L_1), \\ (F^{\mathrm{box}})_*[b] &= [b], \qquad\qquad \text{where } [b] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L_2). \end{aligned} \tag{6.5}$$

群自同构 $(F^{\mathrm{box}})_*$ 作用于 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$，固定 m 和 ℓ，因此 $\mathsf{Cord}^{\mathrm{loop}}(K)$ 上的自同构即被确定。通过典范同构 $\mathsf{Cord}^{\mathrm{loop}}(K) \cong \mathsf{Cord}(K)$，这与第 5.1.2 节中定义在 $\mathsf{Cord}(K)$ 上的自同构 $(F^{\mathrm{box}})_*$ 一致。

在继续讨论有趣的例子之前，我们先讨论 $\mathsf{Cord}(K)$ 的可计算性。从现在起，我们假设 K 具有由纽结图诱导的黑板框架 K'。我们利用 [Ng05，第 4 节3] 中的组合方法，从纽结图计算弦代数。

注 6.6。为了理解组合描述，采用如 [Ng05，定义 1.2] 中的弦代数略作修改后的版本会更加方便。它由 K的同伦类集合生成，其中的弦 是满足 $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ such that$c^{-1}(K) = \{0,1\}$ 的路径。通过将任意路径 $\gamma\colon ([0,1],\ \{0,1\}) \to (\mathbb{R}^3 \setminus K,\ K')$ 与端点 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(1)$ 处沿着从 K 到 K' 的平移方向的短线段拼接，可得到从 $\mathsf{Cord}(K)$ 到该修改版本的典范同构。

我们通过进一步规定弦无定向且彼此交换，将 $\mathsf{Cord}(K)$ 化为阿贝尔弦代数 $\mathsf{Cord}^{\mathrm{ab}}(K)$。更确切地说，我们对以下关系取商

$$[\gamma] = [\gamma^{-1}],\quad [\gamma_1] \cdot [\gamma_2] = [\gamma_2] \cdot [\gamma_1],$$

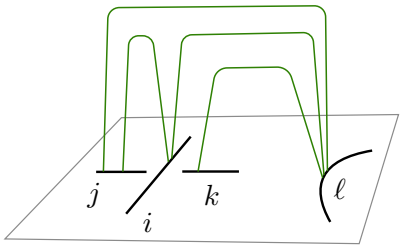


图6.2：进入由(6.6)给出的关系的弦。

对于任意 $[\gamma]$, $[\gamma_1]$, $[\gamma_2] \in \mathcal{P}_K$，其中 γ^{-1}是 γ的逆路径。注意， $F_{\text{盒子}}$ 在 $\mathrm{Cord}^{\mathrm{ab}}(K)$ 上诱导出一个自同构 $(F^{\mathrm{box}})_*$ ，并且该自同构与 $\mathrm{Cord}(K)$ 上的自同构通过投影 $\mathrm{Cord}(K) \to \mathrm{Cord}^{\mathrm{ab}}(K)$ 相互交织。

现在，参照 [Ng05，第 4 节。3], 让我们看看如何从纽结图计算弦$^{\mathrm{ab}}(K)$。交叉将图分成 n 弦。我们将它们标记为$1, \ldots, n$。然后，弦a_{ij} 被取为弦 i, j 之间的一条（无定向）路径，使得在其端点之外，a_{ij} 完全位于纽结图的平面之上。然后，

$$\mathrm{Cord}^{\mathrm{ab}}(K) = \mathcal{A}_n / \mathcal{I}^{\mathrm{diag}},$$

其中 $\mathcal{A}_n$ 是一个具有 $\mathbb{Z}_2$系数、由所有 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$的$a_{ij}$ 生成的多项式环。另外， $\mathcal{I}^{\mathrm{diag}}$ 是一个由 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$的 a_{ii} 和 $a_{ij} + a_{ji}$ 生成的理想，并且

$$a_{\ell j} + a_{\ell k} + a_{\ell i} \cdot a_{ij}, \tag{6.6}$$

其中 $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ 和$(i; j, k)$遍历纽结图的所有 n 交叉。更详细地说， i 表示上交叉，而 j, k 是如图6.2所示的下交叉。我们强调$a_{ij} = a_{ji}$，也就是说，在弦$^{\mathrm{ab}}(K)$中弦是无定向的。

根据定义，$\mathrm{Cord}^{\mathrm{ab}}(K)$ 由 $n(n-1)/2$ 个 $\{a_{ij} \mid 1 \le i < j \le n\}$中的元素生成。乍一看，生成 $\mathcal{I}^{\mathrm{diag}}$ 的关系数量似乎很多，因为 (6.6) 贡献了 $2n^2$ 个关系。然而，这一数量可以减少。将关系 (6.6) 应用于 $\ell = i$ 的情形和 $\ell = j$的情形，我们得到以下关系

$$a_{ik} = a_{ij} \text{ and } a_{kj} = a_{ij}^2. \tag{6.7}$$

此外，对于任意 ℓ，带有 $(i; j, k)$ 和 $(i; k, j)$ 的关系 (6.6) 是相同的。因此，一般而言，只需检查由 (6.6) 贡献的 $n(n-3)$ 个关系：对于每个$\ell \in \{1, \ldots, n\}$，都有 $n-3$ 个交叉，其中不出现股 ℓ。

6.3 示例

下面给出纽结环路 $(K_t)_{t\in[0,1]}$ 的示例，使得 $\rho([(K_t)_{t\in[0,1]}])$ 是弦代数上的一个非平凡自同构。

例 6.7。 我们考虑方结 $K := T_{2,\ 3} \# T_{2,\ -3}$，其中 $T_{2,\ -3}$ 位于蓝色方框中。参见图 6.3。

策略如下。首先，我们使用结图描述来描述 $\mathrm{Cord}^{\mathrm{ab}}(K)$ 中的关系。然后构造一个同态 $\varphi : \mathrm{Cord}^{\mathrm{ab}}(K) \to \mathbb{Z}_2[z]$。利用 (6.5)，我们证明存在一个元素 $x \in \mathrm{Cord}^{\mathrm{ab}}(K)$，使得 $\varphi(x) \neq \varphi((F^{\mathrm{box}})_* x)$。如果取一个投影到 x 的元素 $x' \in \mathrm{Cord}(K)$，则它满足 $x' \neq (F^{\mathrm{box}})_* x'$ 属于 $\mathrm{Cord}(K)$。

现在，我们考察 $\mathrm{Cord}^{\mathrm{ab}}(K)$ 中的关系。根据关系式 (6.7)，显然，除 a_{36} 外，$T_{2,\ 3}$-缠结中不同股之间的所有弦（即第 1、2、3、6 股）都

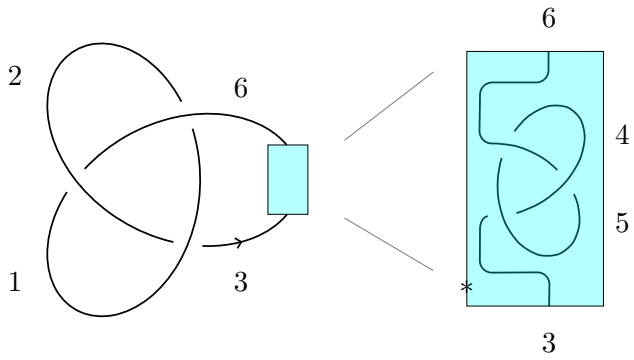


图 6.3：方结 K，其弦标记为 1，……，6。注意， K 是定向的，基点 $*$ 位于 $\partial B[T_{2,-3}]$ 中第 3 股上方。

相同且为幂等的。我们用 x表示它们。对于$T_{2,\ -3}$，情况类似。这里，我们用 y 表示相应的弦。剩下的是由 (6.6) 给出的 $3 \cdot 6 = 18$ 个关系。从交叉 (2; 1、6) 可得关系 $a_{36} + a_{31} + a_{21}^2 = 0$。由于 a_{21} 是幂等的且等于 a_{31}，因此可得 $a_{36} = 0$。于是，其余 5 个涉及弦a_{36} 的关系均无实质内容。因此，还剩下 12 个关系（每个交叉对应 2 个关系，而每个三叶结有 3 个交叉）：

$$y + a_{41} + a_{42}x = 0 \quad \text{and} \quad y + a_{51} + a_{52}x = 0, \tag{6.8}$$
$$a_{42} + a_{41} + xy = 0 \quad \text{and} \quad a_{52} + a_{51} + xy = 0, \tag{6.9}$$
$$y + a_{42} + a_{41}x = 0 \quad \text{and} \quad y + a_{52} + a_{51}x = 0, \tag{6.10}$$

$$x + a_{51} + a_{41}y = 0 \quad \text{and} \quad x + a_{52} + a_{42}y = 0, \tag{6.11}$$
$$a_{51} + a_{41} + xy = 0 \quad \text{and} \quad a_{52} + a_{42} + xy = 0, \tag{6.12}$$
$$x + a_{41} + a_{51}y = 0 \quad \text{and} \quad x + a_{42} + a_{52}y = 0. \tag{6.13}$$

从 (6.12) 中减去 (6.9) 后，我们得到 $a_{51} = a_{42}$ 和 $a_{52} = a_{41}$。

根据上述计算，我们可以构造一个良定义的 $\mathbb{Z}_2$-代数映射 $\varphi\colon \mathsf{Cord}^{\mathrm{ab}}(K) \to \mathbb{Z}_2[z]$，其定义如下：

$$\begin{gathered} x, y \mapsto 1, \\ a_{51} \mapsto z + 1 \quad \text{and} \quad a_{52} \mapsto z. \end{gathered} \tag{6.14}$$

为方便起见,我们来描述 φ 作用下 $\mathcal{A}_n$ 的生成元像的表格。参见表 6.1 .

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	z+1	z	1
2	1	0	1	z	z+1	1
3	1	1	0	1	1	0
4	z+1	z	1	0	1	1
5	z	z+1	1	1	0	1
6	1	1	0	1	1	0

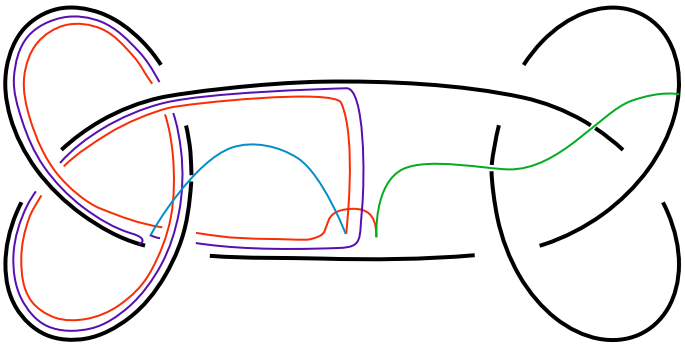
表 6.1： $\mathcal{A}_n$ 在 φ作用下生成元的像表，其中 $\varphi(a_{ij})$位于第 i行、第 j列。

接下来，我们研究 $(F^{\mathrm{box}})_*[a_{24}]$。首先，注意到 a_{24} 与在基点处拼接 a_{23} 和 a_{34} 相同。回想一下，基点位于 K的第 3 股上方。

根据我们的约定，$[a_{23}]$ 延伸为环路 $[\hat{a}_{23}] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L_1)$，而 $[a_{34}]$ 延伸为环路$[\hat{a}_{34}] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L_2)$。因此，$[a_{24}] \in$ 弦$^{\mathrm{ab}}(K)$通过投影 $\mathrm{Cord}^{\mathrm{loop}}(K) \cong \mathrm{Cord}(K) \to \mathrm{Cord}^{\mathrm{ab}}(K)$ 对应于 $[\hat{a}_{23} \bullet \hat{a}_{34}] \in$ 弦$^{\mathrm{loop}}(K)$。由 (6.5)，我们得到

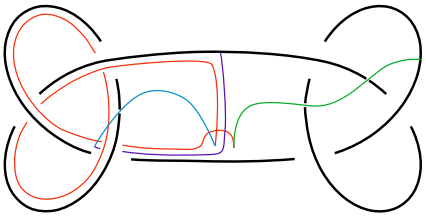
$$(F^{\mathrm{box}})_*[\hat{a}_{23} \bullet \hat{a}_{34}] = [\ell_1^{-1} \bullet \hat{a}_{23} \bullet \ell_1 \bullet \hat{a}_{34}].$$

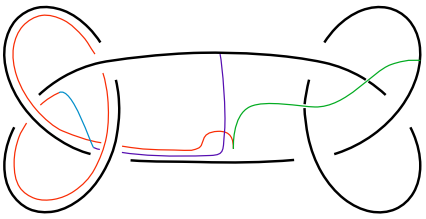
作为 $\mathcal{P}_K$（或 K 的一条弦），我们可以画出

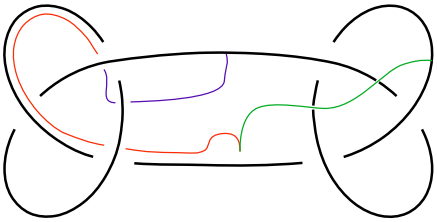
$[\ell_1^{-1} \bullet \hat{a}_{23} \bullet \ell_1 \bullet \hat{a}_{34}] =$ ,

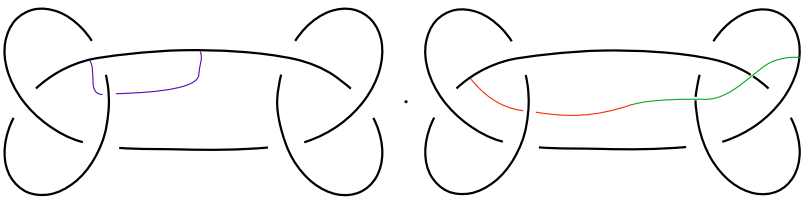
其中，T_2 周围的紫色和橙色路径，3 分别对应于 ℓ_1^{-1} 和 ℓ_1。蓝色和绿色路径依次是弦 a_{23} 和 a_{34}。（实际上，在当前情形下，不难直接看出，弦 a_{24} 经 F^{box} 映射后成为右侧的弦。）

回想一下图 4.1 所示的关系 (ii)。（关于弦，也可以参阅 Ng05 第 1 节中的“纽结多项式关系” [, (1)。1]）接下来，我们继续计算 $\mathrm{Cord}(K)$:

$[\ell_1^{-1} \bullet \hat{a}_{23} \bullet \ell_1 \bullet \hat{a}_{34}] \overset{(1)}{=}$ 

$\overset{(2)}{=}$ 

$\overset{(3)}{=} 0 +$ 

$\overset{(4)}{=} [a_{64}] +$ .

$\overset{(5)}{=} [a_{64}] + ([a_{61}] \cdot [a_{16}] + [a_{66}]) \cdot ([a_{64}] + [a_{61}] \cdot [a_{14}])$。

在等式 (1) 和 (2) 中，我们用到了弦的同伦不变性。在 (3) 中，我们在交叉点 (2 : 1，6) 的一个邻域内，将弦推过股 2，并应用关系$[a_{36}] = 0$。在 (4) 中，我们在 (6; 1，2) 的一个邻域内，将弦推过股 6；最后，在 (5) 中，我们将弦两次推过股 1。

参照表 6.1，我们可以计算得出

$$\varphi((F^{\mathrm{box}})_*[a_{24}]) = 1 + (1+0)(1+1\cdot(z+1)) = 1+1+z+1 = z+1.$$

另一方面，$\varphi([a_{24}]) = z$。因此，$(F^{\mathrm{box}})_*$ 对 Cord($T_{2,\ 3}\#T_{2,\ -3}$) 的作用是非平凡的。

最后我们指出，依照注 6.3 的思路，除了研究蓝盒环路的作用外，我们还可以研究 $B[T_{2,-3}]$ 上单个 Gramain 环对 Cord(K) 的作用。事实上，这样的计算会略短一些。不过，作者认为蓝盒环路更适合进一步推广到例 6.9 中缆结环路的情形。

由例 6.7 可以导出以下无穷多个纽结构成的族，其中 $(F^{\mathrm{box}})_*$ 对弦代数也有非平凡作用。

例 6.8。我们考虑纽结 $K := T_{2,\ 3}\#(T_{2,\ -3}\#L)$，其中 L 是一个任意的纽结，它与 $T_{2,\ -3}$ 相连。我们设 L 与图 6.3 中的第 4 股相连。

现在，考虑一个蓝色方框 $B[T_{2,-3}\#L] \subset N_{T_{2,\ 3}}$。尽管 $\mathrm{Cord}^{\mathrm{ab}}(K)$ 的结构可能比例 6.7 复杂得多，我们仍希望构造一个简化映射 $\widetilde{\varphi}:\mathrm{Cord}^{\mathrm{ab}}(K) \to \mathbb{Z}_2[z]$，类似于例 6.7 中的 φ。

我们按如下方式定义生成元 $\mathcal{A}_n$ 上的 $\widetilde{\varphi}$。对于位于 $T_{2,\ 3}$ 或 $T_{2,\ -3}$ 的弦之间的弦，映射 $\widetilde{\varphi}$ 与式 (6.14) 中的映射 φ 一致。接下来，每条端点位于 L 上的弦都映射为 0。剩下的情况是弦 $c \in \{a_{i,j} \mid 1 \le i,j \le n\}$：其一个端点位于 L 上，另一个端点位于 K 中 L 的补集上。对于后一个端点所在的股，令 $r \in \{1,\dots,6\}$ 表示该股在图 6.3 中的编号。于是，定义 $\widetilde{\varphi}(c) := \varphi(a_{r4})$。所有交叉处的关系 (6.6) 都映射为 0，因此得到一个良定义的环同态$\widetilde{\varphi}$: $\mathrm{Cord}^{\mathrm{ab}}(K) \to \mathbb{Z}_2[z]$。取如上所述的一条弦 c，使得 $a_{r4} = a_{24}$。注意，L 部分完全不影响 $\widetilde{\varphi}((F^{\mathrm{box}})_*[c])$ 的计算。因此，$\widetilde{\varphi}((F_{\text{盒子}})_*[c]) \neq \widetilde{\varphi}([c])$，从而 $(F^{\mathrm{box}})_*$ 在 $\mathrm{Cord}^{\mathrm{ab}}(K)$ 上的作用非平凡。

例 6.9。对于 $k \in \mathbb{Z}$，我们来考察方结 $T_{2,3}\#T_{2,-3}$ 的 $(2k+1,1)$-缆结。所谓缆结构造，指的是如下过程。令 V_1 为环面纽结 $T_{2k+1,1}$周围的标准无结实心环面。令 V_2 为$T_{2,3}\#T_{2,-3}$的管状邻域。我们固定一个同胚 $h\colon V_1 \to V_2$，并定义 $K := h(T_{2k+1,1})$。

在例 6.7 中，将蓝色方框 $B[T_{2,-3}]$ 改写为 $B_{2k+1}[T_{2,-3}]$，并设所有 $2k+1$ 个 $T_{2,-3}$ 副本都位于 $B_{2k+1}[T_{2,-3}]$ 中。此外，为简单起见，我们假设 $K \setminus B_{2k+1}[T_{2,-3}]$ 由 $2k+1$ 条平行股组成。特别地，嵌入环面纽结 $T_{2k+1,1}$ 的扭转部分完全位于盒子 $B_{2k+1}[T_{2,-3}]$ 内。接着，蓝色方框 $B_{2k+1}[T_{2,-3}]$ 绕 V_2 做一次经向旋转（与例 6.7 中相同），由此诱导出该缆结的一个环路。我们指出，对于这样的环路，命题 6.2 的类似结论同样成立。我们取环境同痕 $(F_t)^{t\in[0,1]}$，使其与例 6.7 中相同，并设$F_{\text{盒子}} := F_1$。我们的目标是将 $(F^{\mathrm{box}})_*$ 在弦$^{\mathrm{ab}}(K)$ 上的作用，与 $(F_{\text{盒子}})_*$ 在弦$^{\mathrm{ab}}(T_{2,3}\#T_{2,-3})$ 上的作用联系起来；后者已由例 6.7 给出。

根据塞弗特–范坎彭定理，我们有一个同构

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1\big(\mathbb{R}^3 \setminus T_{2,3}\#T_{2,-3}\big) *_{\pi_1(\partial V_2)} \pi_1\big(V_2 \setminus h(T_{2k+1,1})\big), \tag{6.15}$$

它来自以下图

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) & \longleftarrow & \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{int}V_2) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_{2,3}\#T_{2,-3}) \\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_*} & & \\
\pi_1(V_2 \setminus h(T_{2k+1,1})) & \xleftarrow{j_*} & \pi_1(\partial V_2). & &
\end{array}$$

这里，所有同态都由包含映射诱导。

在例 6.7 中固定的 $T_{2,3}\#T_{2,-3}$ 的子午线和经线确定了元素$m_2, \ell_2 \in \pi_1(\partial V_2)$。设 $m \in \pi_1(V_2 \setminus h(T_{2k+1,1}))$ 是 $h(T_{2k+1})$ 的经线。于是，第一同调群 $H_1(V_2 \setminus h(T_{2k+1,1}))$ 是由 ℓ_2 和 m 生成的自由阿贝尔群。由于$\pi_1(\partial V_2) \cong H_1(\partial V_2)$，存在唯一的群同态

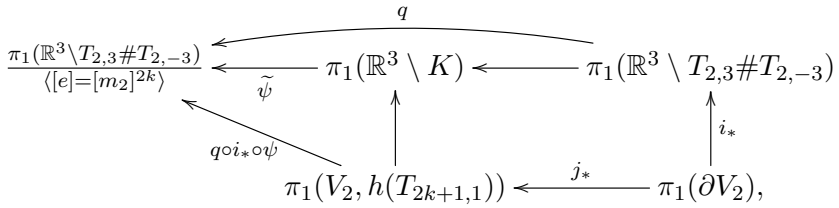
$$\psi\colon \pi_1(V_2 \setminus h(T_{2k+1,1})) \to \pi_1(\partial V_2)\colon [\ell_2] \to [\ell_2],\ [m] \mapsto [m_2],$$

该同态在第一同调群上化为一个同构。

$\psi \circ j_*$: $\pi_1(\partial V_2) \to \pi_1(\partial V_2)$ 将 $[\ell_2]$ 映射到 $[\ell_2]$，并将 $[m_2]$ 映射到 $[m_2]^{2k+1}$。因此，根据 (6.15)，映射 $i_* \circ \psi$: $\pi_1(V_2 \setminus h(T_{2k+1,1})) \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_{2,3}\#T_{2,-3})$ 诱导出一个群满同态

$$\widetilde{\psi} : \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \to \frac{\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_{2,3}\#T_{2,-3})}{\langle [e] = [m_2]^{2k} \rangle}. \tag{6.16}$$

这是使下图交换的唯一映射：



其中，q 是商映射。注意，在模 $[m_2]^{2k}$ 的意义下，$\widetilde{\psi}$ 将 K 的子午线（分别为经线）映射到$T_{2,3}\#T_{2,-3}$ 的子午线（分别为经线的（$2k+1$）次幂）。因此，利用 (6.16)，我们得到一个满射 $\mathbb{Z}_2$-代数映射

$$\mathrm{Cord}^{\mathrm{loop}}(K) \to \frac{\mathrm{Cord}^{\mathrm{loop}}(T_{2,3}\#T_{2,-3})}{\langle [\gamma_a \bullet \gamma_b] = [\gamma_a \bullet m_2^{2k} \bullet \gamma_b] \rangle}.$$

事实上，对于所有 $[\gamma_a], [\gamma_b] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_{2,3}\#T_{2,-3})$，关系 $[\gamma_a \bullet \gamma_b] = [\gamma_a \bullet m_2^{2k} \bullet \gamma_b]$ 在 $\mathbb{Z}_2$系数下是空洞的。事实上，我们有

$$\begin{aligned}
[\gamma_a \bullet m_2^{2k} \bullet \gamma_b] &= [\gamma_a \bullet m_2^{2k-1} \bullet \gamma_b] + [\gamma_a \bullet m_2^{2k-1}] \cdot [\gamma_b] \\
&= [\gamma_a \bullet m_2^{2k-2} \bullet \gamma_b] + [\gamma_a \bullet m_2^{2k-2}] \cdot [\gamma_b] + [\gamma_a \bullet m_2^{2k-1}] \cdot [\gamma_b] \\
&= [\gamma_a \bullet m_2^{2k-2} \bullet \gamma_b] + (1+1)[\gamma_a] \cdot [\gamma_b].
\end{aligned}$$

对于最　后一个等号，我们使用 (6.3)。因此，我们得到一个良定义的满射 $\mathbb{Z}_2$-代数映射

$$\Psi : \mathrm{Cord}(K) \to \mathrm{Cord}(T_{2,3}\#T_{2,-3}).$$

现在，我们利用融合积 (6.15) 来描述 $(F^{\mathrm{box}})_*$ 在 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ 上的作用。首先，对于来自 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_{2,3}\#T_{2,-3}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{int}V_2)$ 的生成元，$(F_{\mathrm{box}})_*$ 的作用已在 (6.5) 中描述。接下来，对于来自 $\pi_1\big(V_2 \setminus h(T_{2k+1,1})\big)$ 的生成元，显然 $(F^{\mathrm{box}})_*$ 的作用是恒等映射。因此，我们得到下列交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Cord}(K) & \xrightarrow{(F^{\mathrm{box}})_*} & \mathrm{Cord}(K) \\
\Psi \downarrow & & \Psi \downarrow \\
\mathrm{Cord}(T_{2,3}\#T_{2,-3}) & \xrightarrow{(F^{\mathrm{box}})_*} & \mathrm{Cord}(T_{2,3}\#T_{2,-3}).
\end{array}$$

最后，回顾一下，根据例 6.7，我们知道映射 F^{box} 在 $\mathrm{Cord}(T_{2,\ 3}\#T_{2,\ -3})$ 上诱导出一个非平凡自同构。由于 Ψ 是一个满射，F^{box} 在 $\mathrm{Cord}(K)$ 上同样诱导出一个非平凡自同构。

注 6.10。 尽管定理 1.2 目前仅在 $\mathbb{Z}_2$-系数下得到证明，但现在我们想简要讨论完全非交换弦代数 $\mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K)$ 在 $\mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm 1}, \mu^{\pm 1}]$-系数下对其自同构层面的潜在优势。关于 $\mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K)$ 的精确定义，可参阅 [CELN17、定义 2.6] 或下文的定义 A.3。

为此，我们考虑 Gramain 环（注 6.3）对纽结 $K \subset \mathbb{R}^3$ 的作用。这里，K 是一个 Seifert 标架纽结，其框架 K' 上有一个基点 $*$。我们如下构造 Gramain 环。令 $B[*]$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的一个小盒子，其中包含 K 的一小段及其基点
$*$ 位于 $\partial B[*]$ 上。于是，我们可以约定 Gramain 环沿负经线方向绕 $B[*]$ 扭转 K 一周。令 $(F_t)_{t\in[0,1]}$ 为 Gramain 环诱导的环境同痕，并设 $F_{\mathrm{Gram}} := F_1$。于是，我们得到

$$(F^{\mathrm{Gram}})_*[\gamma] = [m \bullet \gamma \bullet m^{-1}], \qquad \text{where } [\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *).$$

此外，与蓝盒环路类似，这个作用也自然地传递到 $\mathrm{Cord}(K)$ 和 $\mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K)$。由 (6.3) 可立即看出，作用 $(F^{\mathrm{Gram}})_*$ 在 $\mathrm{Cord}(K)$ 上是平凡的；然而，正如我们将看到的，对 $\mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K)$ 而言则并非如此。

令 $K := T_{2,3}$。于是，根据 [CELN17，例 2.24], 弦$^{\mathrm{nc}}(K)$ 是由 $\lambda^{\pm}$、$\mu^{\pm}$ 以及另一个生成元 s 生成的非交换环，模去由以下四个元素生成的双边理想

$$\lambda\mu + \mu\lambda,\ \lambda\mu^6 s + s\lambda\mu^6,\ 1 + \mu + s + \lambda\mu^5 s\mu^{-3}s\mu^{-1},\ 1 + \mu + \lambda\mu^4 s\mu^{-2} + \lambda\mu^5 s\mu^{-2}s\mu^{-1}.$$

此外，如同 [CELN17，例 2.24], 中那样，存在一个良定义的环同态 φ，从弦$^{\mathrm{nc}}(K)$映到非交换 $\mathbb{Z}_2$-代数 $\mathbb{Z}_2\langle\mu^{\pm}, a^{\pm}\rangle/(\mu a\mu + a\mu a) \cong \mathbb{Z}_2[\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_{2,3})]$，由下式给出

$$\mu \mapsto \mu, \quad \lambda \mapsto a\mu a^{-1}\mu a\mu^{-3}, \quad s \mapsto (1+\mu)a\mu^{-1}a^{-1}.$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(s) + \varphi \circ (F^{\mathrm{Gram}})_*(s) &= (1+\mu)a\mu^{-1}a^{-1} + \mu(1+\mu)a\mu^{-1}a^{-1}\mu^{-1} \\ &= (1+\mu)a\mu^{-1}a^{-1} + (1+\mu)\mu a(a^{-1}\mu^{-1}a^{-1}) \\ &= (1+\mu)(a+\mu)\mu^{-1}a^{-1}.\end{aligned}$$

事实上，$(1+\mu)(a+\mu) \neq 0$。为看出这一点，考虑一个到以 $\mathbb{Z}_2$ 中元素为元的 2×2 阶矩阵环的良定义同态

$$\mathbb{Z}_2\langle\mu^{\pm}, a^{\pm}\rangle/(\mu a\mu + a\mu a) \to M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)\colon a \mapsto \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \mu \mapsto \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

它将 $(1+\mu)(a+\mu)$ 映射到 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$。因此，$(F^{\mathrm{Gram}})_*$ 在弦$^{\mathrm{nc}}(K)$上的作用是非平凡的，尽管它在弦(K)上是平凡的。

定理 4.7 的证明

A.1 回顾 [CELN17] 中次数 0 的弦同调

对于任意 $q \in K$ 和 $v \in T_q\mathbb{R}^3 = T_qK \oplus (T_qK)^{\perp}$，令 v^{normal} 表示 v 的 $(T_qK)^{\perp}$ 分量。考虑由 (4.1) 给出的 K 的管状邻域 N。固定 $x_0 \in \partial N$ 和一个单位向量$v_0 \in T_{x_0}N$。

定义 A.1 （ [CELN17] 的定义 2.1）。令 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。带有 $2l$ 切换的 K 上的折断弦是一个由

$$s = (s_1, \ldots, s_{2l+1})$$

C^1 条路径组成

$$\begin{cases} s_{2i+1}\colon [a_{2i}, a_{2i+1}] \to N & \text{for } i = 0, \dots, l, \\ s_{2i}\colon [a_{2i-1}, a_{2i}] \to \mathbb{R}^3 & \text{for } i = 1, \dots, l, \end{cases} \text{where } 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{2l+1},$$

满足以下条件:

- $s_0(0) = s_{2l+1}(a_{2l+1}) = x_0$ 和 $\dot{s}_0(0) = \dot{s}_{2l+1}(a_{2l+1}) = v_0$.

对每个 $j \in \{1, \dots, 2l\}$, • $s_j(a_j) = s_{j+1}(a_j) \in K$。

对每个 $i \in \{1, \dots, l\}$, • $\dot{s}_{2i}(a_{2i})_{\text{正规}} = -\dot{s}_{2i+1}(a_{2i})_{\text{正规}}$ 和 $\dot{s}_{2i-1}(a_{2i-1})_{\text{正规}} = \dot{s}_{2i}(a_{2i-1})_{\text{正规}}$。

s_{2i} 和 s_{2i+1} 分别称为 Q-弦 和 N-弦。我们用 $\tilde{\Sigma}^l_K$ 表示 K上具有 $2l$ 个切换的折断弦空间。

定义 A.2. 对于 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们将 $C_0(\tilde{\Sigma}^l_K)$ 定义为由 $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{2l+1}) \in \tilde{\Sigma}^l_K$ 自由生成的 $\mathbb{Z}_2$-向量空间，使其满足:

(0a') 对每个 $j \in \{1, \dots, 2l+1\}$，都有 $(s_j)^{-1}(K) = \{a_{j-1}, a_j\}$。这里，$[a_{j-1}, a_j]$ 是 s_j 的定义域。

(0b') 对每个 $j \in \{2, \dots, 2l\}$，s_j 在端点 $\{a_{j-1}, a_j\}$ 处不与 K 相切。

为了定义 K 的弦同调，我们需要引入:

- 一个 $\mathbb{Z}_2$-向量空间 $C_1(\tilde{\Sigma}^l_K)$。
- $\mathbb{Z}_2$-linear maps $\partial\colon C_1(\tilde{\Sigma}^l_K) \to C_0(\tilde{\Sigma}^l_K)$ and $\delta_Q, \delta_N\colon C_1(\tilde{\Sigma}^l_K) \to C_0(\tilde{\Sigma}^{l+1}_K)$.

为了写出定理 4.7 的证明，我们不需要参考它们的精确定义，因此在此简要回顾。（精确定义见 [CELN17, 第 2 节。1]并将系数环从 $\mathbb{Z}$ 缩减为 $\mathbb{Z}_2$。） $C_1(\tilde{\Sigma}^l_K)$ 是定义 4.2 中 $C_1(\Sigma^l_K)$ 的对应对象，由满足某些横截性条件的 $\tilde{\Sigma}^l_K$ 一般的 1-链组成。∂ 是奇异 1-链的边界算子。最后，将一条 Q-弦（分别为 N-弦）在其与 K 相交处断开，并插入一条称为 尖峰 的短 N-弦（分别为 Q-弦），便可类似于 δ 来定义 δ_Q（分别为 δ_N）： $C_1(\Sigma^l_K) \to \bar{C}_0(\Sigma^{l+1}_K)$。

令 $C_0(\tilde{\Sigma}_K) \coloneqq \bigoplus_{l=0}^{\infty} C_0(\tilde{\Sigma}^l_K)$ 和 $C_1(\tilde{\Sigma}_K) \coloneqq \bigoplus_{l=0}^{\infty} C_1(\tilde{\Sigma}^l_K)$。于是，定义一个 $\mathbb{Z}_2$-线性映射

$$\partial + \delta_Q + \delta_N\colon C_1(\tilde{\Sigma}_K) \to C_0(\tilde{\Sigma}_K)$$

已定义。0 次的 弦同调 $H_0^{\text{string}}(K)$ 定义为

$$H_0^{\text{string}}(K) \coloneqq C_0(\tilde{\Sigma}_K) / \operatorname{Im}(\partial + \delta_Q + \delta_N).$$

˜此外， $C_0(\Sigma_K)$ 具有由该映射诱导的乘积结构

$$\tilde{\Sigma}^l_K \times \tilde{\Sigma}^{l'}_K \to \tilde{\Sigma}^{l+l'}_K\colon \big((s_1, \dots, s_{2l+1}), (s'_1, \dots, s'_{2l'+1})\big) \mapsto (s_1, \dots, s_{2l}, s_{2l+1} \bullet s'_1, s'_2, \dots, s'_{2l'+1}),$$

其中， $s_{2l+1} \bullet s'_1$ 是 s_{2l+1} 和 s'_1 在 x_0处的拼接。这在 H_0^{string} K ( )上确定了一个乘积结构。

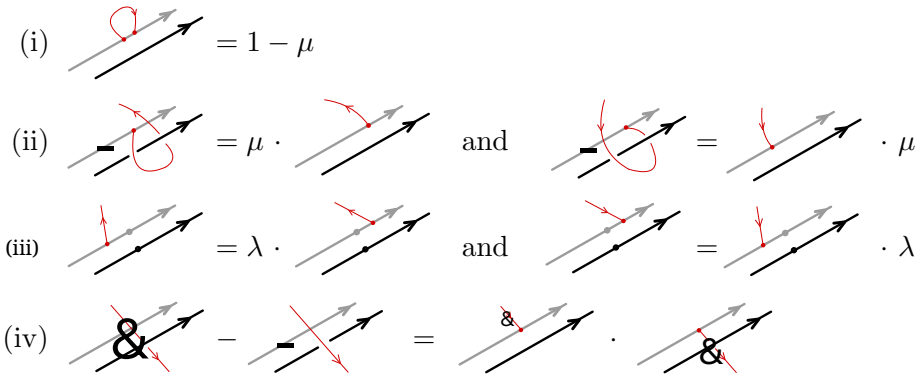


图 A.1：黑线是定向结 K，灰线是相对于框架平移后的曲线 K'。(iii) 中曲线上的圆点是基点。

A.2 完全非交换弦代数

我们固定 K的定向和框架。我们还固定一个基点 $q_0 \in K$，随后由平移确定点 $q_0' \in K'$。令$\mathcal{P}_{K,\, q_0}$为满足 $\gamma(0)\ \gamma(1) \in K' \setminus \{q_0'\}$的路径 γ的同伦类集合： $[0,1] \to \mathbb{R}^3 \setminus K$。

定义 A.3 （ [CELN17] 中的定义 2.6）。 令 $\mathcal{A}^{\mathrm{nc}}$ 为由 $\mathcal{P} \cup \{\lambda, \lambda^{-1}, \mu, \mu^{-1}\}$ 生成的非交换 $\mathbb{Z}_2$ 代数，模去以下关系

$$\lambda \cdot \lambda^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \lambda = \mu \cdot \mu^{-1} = \mu^{-1} \cdot \mu = 1, \quad \lambda \cdot \mu = \mu \cdot \lambda. \tag{A.1}$$

完全非交换弦代数的 K 定义如下

$$\mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K) \coloneqq \mathcal{A}^{\mathrm{nc}} / \mathcal{I}^{\mathrm{nc}},$$

其中 $\mathcal{I}^{\mathrm{nc}}$ 是由图 A.1 中的四类关系生成的 $\mathcal{A}^{\mathrm{nc}}$ 的双边理想 .

$\mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K)$ 是 $\mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm}, \mu^{\pm}]$-NC-代数，其定义见 [CELN17，定义 2.12]：它是一个配备环同态 $\mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm}, \mu^{\pm}] \to \mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K)$ 的环。值得注意的是， λ 和 μ 分别对应于 K 的经线和子午线，这是通过由 K 的定向和框架确定的同构得到的

$$\{\lambda^a \mu^b \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \cdot \lambda \oplus \mathbb{Z} \cdot \mu \cong \pi_1(\partial N, x_0). \tag{A.2}$$

固定 $q_1 \in K \setminus \{q_0\}$ 附近的一个点 q_0。取路径 γ_Q 和 $\tilde{\gamma}_Q$，其端点位于 $\{q_1, q_1'\}$，如第 4.2 节所示。我们假设 K' 位于 ∂N 中，并取 $q_1' \in K'$ 作为定义 A.1 中的基点 $x_0 \in \partial N$。根据 [CELN17，命题 2.9], ，存在一个代数同构

$$I_K^{\mathrm{nc}} \colon \mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K) \to H_0^{\mathrm{string}}(K). \tag{A.3}$$

下面说明如何构造这个同构。取 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、 x_1，…，$x_l \in \mathcal{P}_{K,\, q_0}$和$\alpha_1$，…，$\alpha_{l+1} \in \{\lambda^a \mu^b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$。那么， I_K^{nc}将 $\alpha_1 x_1 \alpha_2 \cdots x_l \alpha_{l+1} \in$弦$(K)$映射为$H_0^{\mathrm{string}}(K)$中的一个由下式表示的元素

$$(\bar{\alpha}_1, \bar{x}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{x}_l, \bar{\alpha}_{l+1}) \in C_0(\tilde{\Sigma}_K^l), \tag{A.4}$$

其中 $\bar{x}_1$，…，$\bar{x}_l$是 Q-字符串，而 $\bar{\alpha}_1$，…，$\bar{\alpha}_{l+1}$是 N-字符串，满足：

- 在参数化意义下，路径 $\bar{x}_i$ 与命题 4.6 中的 $\hat{}\gamma_{x_i}$ 一致。
- 通过 (A.2)， α_i 确定了 ∂N 中以 x_0为基点的环路的一个同伦类，而 $\bar{\alpha}_i$ 的定义方式与 $\bar{x}_i$ 类似。（在后续讨论中不需要其精确定义。更多细节请参见证明 [CELN17，命题 2.9]。）

A.3 弦$^{\mathrm{nc}}(K)$ 与弦(K)之间的关系

设 A 是一个 $\mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm},\mu^{\pm}]$-NC-代数。首先，我们将 $A^{\#}$ 定义为环 A 模去由以下元素生成的双边理想所得的商环：

$$k\cdot x - x\cdot k$$

对于所有 $x\in A$ 和 $k\in\mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm},\mu^{\pm}]$。于是， $\mathcal{A}^{\#}$ 成为一个 $\mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm},\mu^{\pm}]$-代数。接下来，对于 $\mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm},\mu^{\pm}]$-代数 $A^{\#}$，我们使用环同态 $\mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm},\mu^{\pm}]\to\mathbb{Z}_2$: $\lambda\mapsto 1,\mu\mapsto 1$ 来定义一个 $\mathbb{Z}_2$-代数

$$A|^{\#}_{\lambda=1,\mu=1} := A^{\#}\otimes_{\mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm},\mu^{\pm}]}\mathbb{Z}_2 \tag{A.5}$$

连同一个 $\mathbb{Z}_2$-代数映射 $j_A\colon A\to A|^{\#}_{\lambda=1,\mu=1}$： $x\mapsto x\otimes 1$.

在 A =弦$^{\mathrm{nc}}(K)$ 的情况下，从定义 4.5 和定义 A.

3 $\mathbb{Z}_2$ ^{nc} $K|^{\#}_{\lambda=1\,\mu=1}\to$ K $[\gamma]\otimes 1\mapsto$ 中的关系可以看出，存在一个 -代数同构 $[\gamma]$ $\mathbb{Z}_2$ 弦 ( ), 弦 ( ) : ，因此我们有一个 - 代数映射

$$j_K := j_{\mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K)}\colon \mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K)\to\mathrm{Cord}(K)$$

它将 λ 和 μ 映射到 1，并将 $[\gamma]\in\mathcal{P}_{K,\,q_0}$ 映射到 $[\gamma]\in\mathcal{P}_K$。

我们来考察复合映射

$$H_0^{\mathrm{string}}(K)\xrightarrow{(I_K^{\mathrm{nc}})^{-1}}\mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K)\xrightarrow{j_K}\mathrm{Cord}(K)\xrightarrow{I_K}\bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K). \tag{A.6}$$

通过复合映射，对于任意 $\alpha\in\{\lambda^a\mu^b\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$， $\bar{\alpha}$ 都会被映射到 $\bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K)$ 的单位元；而对于 $l\geq 1$，由 (A.4) 表示的任意元素都会被映射到 $\bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K)$ 中由 $(\hat{\gamma}_{x_1},\dots,\hat{\gamma}_{x_l})\in\bar{C}_0(\Sigma_K^l)$ 表示的一个元素。因此， $H_0^{\mathrm{string}}(K)$ 中由 $(s_1,\dots,s_{2l+1})\in\tilde{\Sigma}_K^l$ 表示且满足 (0a') 和 (0b') 的任意元素，都会被映射到 $\bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K)$ 中由以下元素表示的一个元素

$$\begin{cases}1\in\bar{C}_0(\Sigma_K^0)=\mathbb{Z}_2 & \text{if } l=0,\\ (s_1',\dots,s_l')\in\bar{C}_0(\Sigma_K^l) & \text{if } l\geq 1,\end{cases}$$

使得对于 $i\in\{1,\dots,l\}$， s_i' 与 s_{2i} 在参数化意义下相同，

A.4 同构的证明

单位余法丛 Λ_K 通过映射 $\Lambda_K\to\partial N$: $(q,p)\mapsto q+2\varepsilon\cdot p$ 与 ∂N 相识别。我们选取一个基点 $x_0\in\partial N\cong\Lambda_K$。此外，固定一个微分同胚 $L_k\to N\setminus\partial N$: $(q,p)\mapsto(q,\frac{2\varepsilon}{1+|p|^2}p)$。

对于任意两个点 $x,y\in\Lambda_K$，令 $P_{x,y}$ 表示连续路径 γ: $[0,T]\to\Lambda_K$ 的空间，其中满足 $T>0,\gamma(0)=x$ 且 $\gamma(T)=y$。$\gamma\in P_{x,y}$ 的逆路径记为 $\gamma^{-1}\in P_{y,x}$。$\gamma_1\in P_{x,y}$ 与 $\gamma_2\in P_{y,z}$ 的拼接得到 $\gamma_1\bullet\gamma_2\in P_{x,z}$。对于每个 $a\in\mathcal{R}(\Lambda_K)$，固定路径 $\gamma_a^0\in P_{x_0,a}(0)$ 和 $\gamma_a^1\in P_{x_0,a}(T_a)$。

首先，参见 [CELN17，第 6 节。2], 我们来介绍 Λ_K 的完全非交换 Legendrian 接触同调。

对于每个 $u\in\mathcal{M}_{\Lambda_K,\,J}(a;\ a_1,\ \dots\dots,\ a_m)$，令 $\bar{u}$: $\partial D_{m+1}\to\Lambda_K$ 表示映射 $u|_{\partial D_{m+1}}$: $\partial D_{m+1}\to\mathbb{R}\times\Lambda_K$ 的 Λ_K-分量。在第 k 个边界分支上，将 $\bar{u}|_{\partial_k D_{m+1}}$ 延拓为 $\partial_k D_{m+1}\cong[0,1]$ 上 Λ_k 中的一条路径。记作 γ_k^u。然后，我们定义一个由环路表示的同调类 $\partial_k\bar{u}\in H_0(P_{x_0,\,x_0};\ \mathbb{Z}_2)$如下：当 $m=0$ 时，取 $\gamma_a^1\bullet\gamma_k^u\bullet(\gamma_a^0)^{-1}\in P_{x_0,\,x_0}$。当 $m\geq 1$ 时，取

$$P_{x_0,x_0}\ni\begin{cases}\gamma_a^1\bullet\gamma_1^u\bullet(\gamma_{a_1}^1)^{-1} & \text{if } k=1,\\ \gamma_{a_k}^0\bullet\gamma_k^u\bullet(\gamma_{a_{k+1}}^1)^{-1} & \text{if } 2\leq k\leq m,\\ \gamma_{a_m}^0\bullet\gamma_{m+1}^u\bullet(\gamma_a^0)^{-1} & \text{if } k=m+1.\end{cases}$$

此外，通过同构

$$H_0(P_{x_0,x_0};\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[\pi_1(\Lambda_K,x_0)]\cong\mathbb{Z}_2[\pi_1(\partial N,x_0)]=\mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm},\mu^{\pm}].$$

我们将 $\partial_k\bar{u}$ 视为 $\mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm},\mu^{\pm}]$ 的一个元素。

令 $\mathcal{A}_*^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K)$ 为由 $\mathcal{R}(\Lambda_K)\cup\{\lambda,\lambda^{-1},\mu,\mu^{-1}\}$ 生成的含幺 $\mathbb{Z}_2$-分次代数，模去与 (A.1) 相同的关系。这里， λ 和 μ 的次数为 0。于是， $\mathcal{A}_*^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K)$ 是一个 $\mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm},\mu^{\pm}]$-NC-代数。我们定义一个导子 d_J^{nc}: $\mathcal{A}_*(\Lambda_K)\to\mathcal{A}_{*-1}(\Lambda_K)$，使得 $d_J(\lambda^{\pm})=d_J(\mu^{\pm})=0$，并且

$$d_J^{\mathrm{nc}}(a)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{|a_1|+\cdots+|a_m|=|a|-1}\left(\sum_{u\in\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda_K,J}(a;a_1,\ldots,a_m)}(\partial_1\bar{u})a_1(\partial_2\bar{u})\cdots a_m(\partial_{m+1}\bar{u})\right)$$

对每个 $a\in\mathcal{R}(\Lambda_K)$ 都成立，并用莱布尼茨法则将其延拓。数对 $(\mathcal{A}_*^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K),d_J^{\mathrm{nc}})$ 同构于 CELN17 第 [页中的一个微分分次代数（另见下文备注 A.4），且 $d_J^{\mathrm{nc}}\circ d_J^{\mathrm{nc}}=0$ 成立。我们将 $(\mathcal{A}_*^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K),d_J^{\mathrm{nc}})$ 的同调记作 $\mathrm{LCH}_*^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K)$。注意，在 0 次中，

$$\mathrm{LCH}_0^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K)=\mathcal{A}_0^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K)/d_J^{\mathrm{nc}}(\mathcal{A}_1^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K)).$$

备注 A.4. 在 [CELN17 第 706] 页中考虑的分次代数 $\mathscr{A}$ 由元素 $\alpha\in H_0(P_{x_0,x_0})$ 以及字 $\alpha_1a_1\alpha_2a_2\cdots\alpha_ma_m\alpha_{m+1}$（其中 $m\in\mathbb{Z}_{\geq1}$）生成，其中 $a_1,\ldots,a_m\in\mathcal{R}(\Lambda_K)$ 和 $\alpha_1\in H_0(P_{x_0,a_1(T_{a_1})})$，以及 $\alpha_k\in H_0(P_{a_{k-1}(0)\,a_k(T_{a_k})})$（其中 $2\leq k\leq m$），以及 $\alpha_{m+1}\in H_0(P_{a_m(0)\,x_0})$。（此处，我们将系数环从 CELN17 第 706] 页中的 $\mathbb{Z}$ 缩减为 $\mathbb{Z}_2$。）通过路径拼接，我们得到同构

$$\mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm},\mu^{\pm}]\cong H_0(P_{x_0,x_0})\to\begin{cases}H_0(P_{x_0,a_1(T_{a_1})})\colon\gamma\mapsto\gamma\bullet\gamma^1_{a_1},\\ H_0(P_{a_{k-1}(0),a_k(T_{a_k})})\colon\gamma\mapsto(\gamma^0_{a_{k-1}})^{-1}\bullet\gamma\bullet\gamma^1_{a_k},\\ H_0(P_{a_m(0),x_0})\colon\gamma\mapsto(\gamma^0_{a_m})^{-1}\bullet\gamma.\end{cases}$$

（系数环为 Z_2。）通过这些同构，CELN17 第 706] 页中的微分分次代数 $(\mathscr{A},\partial^{\mathrm{sy}})$ 与 $(\mathcal{A}_*^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K)$ $d_J^{\mathrm{nc}})$ 一致。

备注 A.5. 在 [CELN17 第 6 节.2], 中，考虑了 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数的一种版本，这里记作 $(\widetilde{\mathscr{A}},\partial^{\mathrm{sing}}+\partial^{\mathrm{sy}})$。其定义如下（另见 [EL23 第 3]节中，系数取自基点环路空间的奇异链的微分分次代数构造）： $\mathscr{A}$ 由以下空间中的奇异链生成

$$P_{x_0,a_1(T_{a_1})}\times P_{a_1(0),a_2(T_{a_2})}\times\cdots\times P_{a_{m-1}(0),a_m(T_{a_m})}\times P_{a_m(0),x_0}$$

对所有 $a_1,\ldots,a_m\in\mathcal{R}(\Lambda_K)$。（当 $m=0$ 时，我们考虑 P_{x_0,x_0}。）微分定义为 $\partial^{\mathrm{sing}}+\partial^{\mathrm{sy}}$，其中 ∂^{sing} 是奇异链的边界算子，而 ∂^{sy} 则利用模空间 $\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda_K,J}(a;a_1,\ldots,a_m)$ 定义。链复形 $(\widetilde{\mathscr{A}},\partial^{\mathrm{sing}}+\partial^{\mathrm{sy}})$ 按奇异链的次数和 Reeb 弦的次数进行双重分次。将 ∂^{sing} 视为水平微分后，可得到一个谱序列，其第一页集中在第 0 列，并且与

$$(\mathscr{A}=H_0(\widetilde{\mathscr{A}},\partial^{\mathrm{sing}}),\partial^{\mathrm{sy}})$$

参见备注 A.4。这里，我们使用了这样一个事实：对于任意 $x,y\in\Lambda_K$， $\Lambda_K\cong S^1\times S^1=K(\mathbb{Z}^2,1)$ 和 $H_*(P_{x,y})=H_0(P_{x,y})$。因此，我们得到一个 0 次同构

$$H_0(\widetilde{\mathscr{A}},\partial^{\mathrm{sing}}+\partial^{\mathrm{sy}})\cong H_0(\mathscr{A},\partial^{\mathrm{sy}})\cong\mathrm{LCH}_0^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K).\tag{A.7}$$

~[CELN17，定理 1.2] 断言，存在一个从 $H_0(\mathscr{A}, \partial^{\mathrm{sing}} + \partial^{\mathrm{sy}})$ 到 $H_0^{\mathrm{string}}(K)$ 的同构。它由 [CELN17，命题 6.12] 的链映射诱导。结合 (A.7)，我们得到一个同构

$$\tilde{\Psi}_K \colon \mathrm{LCH}_0^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K) \to H_0^{\mathrm{string}}(K),$$

再将其与商映射 $\mathcal{A}_0^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K) \to \mathrm{LCH}_0^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K)$ 复合，便得到

$$\tilde{\Psi}'_K \colon \mathcal{A}_0^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K) \to H_0^{\mathrm{string}}(K),$$

~它保持乘积结构。下面描述生成元 ~ ~在 $\mathcal{A}_0^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K)$ 下的像 Ψ'_K。首先，$\Psi'_K(\lambda)$ 和 $\Psi'_K(\mu)$ 是以 x_0 为基点、位于 $C_0(\tilde{\Sigma}_K^0)$ 中的环路，分别表示经线和子午线。其次，对每个满足 $|a| = 0$ 的 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_K)$ ~ ~ ~ 以及 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\Psi'_K(a)$ 由 $(\Psi'_{K,l}(a))_{l=0,1,\ldots} \in C_0(\Sigma_K)$ 表示，其中后者由下式给出

$$\tilde{\Psi}'_{K,l}(a) = \sum_{u \in \mathcal{M}_{L_K,l}(a)} \tilde{\mathbf{s}}^u \in C_0(\tilde{\Sigma}_K^l).$$

这里，~$\mathbf{s}^u = (\tilde{s}_1^u, \tilde{s}_2^u, \ldots, \tilde{s}_{2l+1}^u) \in \tilde{\Sigma}_K^l$ 对于 $u \in \mathcal{M}_{L_K,l}(a)$ 的确定方式如下：

- 对于每个 $i \in \{1, \ldots, l\}$，$u|_{\partial_{2i} D_{2l+1}}$ 都延拓为 $\mathbb{R}^3$ 中 $\partial_{2i} D_{2l+1}$ 上的一条曲线。将其与 $\partial_{2i} D_{2l+1}$ 的参数化复合后，便定义了 $\mathbb{R}^3$ 中的路径 $\tilde{s}_{2i}$。
- 对于每个 $i \in \{0, \ldots, l\}$，$u|_{\partial_{2i+1} D_{2l+1}} \colon \partial_{2i+1} D_{2l+1} \to L_K \cong N \setminus \partial N$ 都延拓为 N 中 $\partial_{2i} D_{2l+1}$ 上的一条曲线。当 $i \neq 0, l$ 时，将其与 $\partial_{2i+1} D_{2l+1}$ 的参数化复合后，便定义了 N 中的路径 $\tilde{s}_{2i+1}$。当 $i = 0$（分别为 $i = l$）时，我们还将其与 γ_a^1（分别为 $(\gamma_a^0)^{-1}$）连接起来，从而得到 $\tilde{s}_0$ 和 $\tilde{s}_{2l+1}$。

关于 $\tilde{s}_1^u, \ldots, \tilde{s}_{2l+1}^u$ 的参数化，参见 [CELN17 的命题 6.12] 的证明。特别地，在参数化意义下，$\tilde{s}_{2i}^u$ 与由 (4.6) 定义的 s_i^u 一致。

~回顾 (4.7) 中的映射 $\Psi'_K \colon \mathcal{A}_0(\Lambda_K) \to C_0(\Sigma_K)$。沿用相同记号，令 $\Psi'_K \colon \mathcal{A}_0(\Lambda_K) \to \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K)$ 表示与投影 $\bar{C}_0(\Sigma_K) \to \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K)$ 复合得到的映射。

引理 A.6。下图交换：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_0^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}'_K} & H_0^{\mathrm{string}}(K) & \xrightarrow[\cong]{(I_K^{\mathrm{nc}})^{-1}} & \mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K) \\ \downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle j_K} \\ \mathcal{A}_0(\Lambda_K) & \xrightarrow{\Psi'_K} & \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K) & \xleftarrow[\cong]{I_K} & \mathrm{Cord}(K), \end{array} \tag{A.8}$$

其中，左侧的竖直箭头是一个 $\mathbb{Z}_2$-代数映射，它将 λ 和 μ 映至 1，并将 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_K)$ 映至 a。

证明。根据前面对 (A.6) 中映射 $I_K \circ j_K \circ (I_K^{\mathrm{nc}})^{-1}$ 的观察，对于每个 $a \in \mathcal{R}(\Lambda_K)$，$I_K \circ j_K \circ (I_K^{\mathrm{nc}})^{-1} \circ \tilde{\Psi}'_K(a)$ 表示为 $(\mathbf{x}_l)_{l=0,1,\ldots} \in \bar{C}_0(\Sigma_K)$，其中

$$\mathbf{x}_l = \sum_{u \in \mathcal{M}_{L_K,l}(a)} (s_1^u, s_2^u, \ldots, s_l^u)$$

对于 $l \geq 1$（这里，我们使用 $\tilde{s}_{2i}^u$ 和 s_i^u 在参数化意义下的重合），且 $\mathbf{x}_0$ 等于 $\#_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{M}_{L_K,\,0}(a) \in \bar{C}_0(\Sigma_K^0) = \mathbb{Z}_2$ 因为

$$(I_K \circ j_K \circ (I_K^{\mathrm{nc}})^{-1}) \left(\sum_{u \in \mathcal{M}_{L_K,0}(a)} (\tilde{s}_1^u) \right) = \#_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{M}_{L_K,0}(a).$$

此外，$I_K \circ j_K \circ (I_K^{\mathrm{nc}})^{-1} \circ \tilde{\Psi}'_K$ 将 λ 和 μ 映射到 1。与第 4.3 节中 Ψ'_K 的定义比较，这些计算表明该图是交换的。 □

定理 *4.7* 的证明。 (A.8) 的左侧垂直映射将 $d_J^{\mathrm{nc}}(\mathcal{A}_1^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K))$ 映射到 $d_J(\mathcal{A}_1(\Lambda_K))$ 上。因此，图 (A.8) 的交换性意味着，对于任意 $y \in d_J(\mathcal{A}_1(\Lambda_K))$，都有 $\Psi'_K(y) = 0$ 。

现在，由 (A.8) 可得一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LCH}_0^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K) & \xrightarrow[\cong]{(I_K^{\mathrm{nc}})^{-1}\circ\tilde{\Psi}_K} & \mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_K} \\ \mathrm{LCH}_0(\Lambda_K) & \xrightarrow{\Psi_K} \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K) \xleftarrow[\cong]{I_K} & \mathrm{Cord}(K). \end{array}$$

左侧的垂直映射诱导出一个 $\mathbb{Z}_2$-代数同构 $\mathrm{LCH}_0^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K)|^{\#}_{\lambda=0,\mu=0} \to \mathrm{LCH}_0(\Lambda_K)$。（记号 $A|^{\#}_{\lambda=1,\mu=1}$ 来自 (A.5)。）此外，由于

$$(I_K^{\mathrm{nc}})^{-1} \circ \tilde{\Psi}_K \colon \mathrm{LCH}_0^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K) \to \mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K)$$

是一个 $\mathbb{Z}_2[\lambda^{\pm}, \mu^{\pm}]$-NC-代数同构，因此它诱导出一个 $\mathbb{Z}_2$-代数同构

$$\mathrm{LCH}_0^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K)|^{\#}_{\lambda=1,\mu=1} \to \mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K)|^{\#}_{\lambda=1,\mu=1}\,.$$

$\widehat{\ }$将此同构记作 Ψ_K。那么，下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LCH}_0^{\mathrm{nc}}(\Lambda_K)|^{\#}_{\lambda=1,\mu=1} & \xrightarrow[\cong]{\widehat{\Psi}_K} & \mathrm{Cord}^{\mathrm{nc}}(K)|^{\#}_{\lambda=1,\mu=1} \\ \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\ \mathrm{LCH}_0(\Lambda_K) & \xrightarrow{\Psi_K} \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K) \xleftarrow[\cong]{I_K} & \mathrm{Cord}(K). \end{array}$$

由此可知， $\Psi_K \colon \mathrm{LCH}_0(\Lambda_K) \to \bar{H}_0^{\mathrm{string}}(K)$ 是一个同构。 □

参考文献

[APS08] A. Abbondandolo、A. Portaluri 和 M. Schwarz。《路径空间的同调与具有余法向边界条件的 Floer 同调》。*J. Fixed Point TheoryAppl.*4.2（2008年），第263–293页。[Asp21] J. Asplund。《纤维Floer上同调与余法向停止点》。*J. Symplectic Geom.*19.4（2021），第777–864页。[BEHWZ03] F. Bourgeois、Y. Eliashberg、H. Hofer、K. Wysocki 和 E. Zehnder。《辛场论中的紧致性结果》。*Geom. Topol.* 7（2003），第799–888页。[Bud07] R. Budney。《小立方体与长结》。*Topology* 46.1（2007），第1–27页。[Bud08] R. Budney。《一个嵌入空间族》。载于：群、同伦与构形空间。第13卷。Geom. Topol. Monogr. Geom. Topol. Publ.，考文垂，2008年，第41–83页。[Bud10] R. Budney。《三维结空间的拓扑学》。*Proceedings of the LondonMathematical Society* 101.2（2010），第477–496页。[CG22] R. Casals 和 H. Gao。《无穷多个拉格朗日填充》。*Ann. of Math. (2)*195.1（2022），第207–249页。[CN21] R. Casals 和 L.L.Ng。《具有无限单值化的 Legendrian 接触微分分次代数中的辫环》。*Journal of Topology* 15（2021）。

[Cha10] B. Chantraine。《勒让德结的拉格朗日同调》。Algebr. Geom. Topol. 10.1（2010），第63–85页。[CEL10] K. Cieliebak、T. Ekholm 和 J. Latschev。《具有切换拉格朗日边界条件的全纯曲线的紧致性》。J. Symplectic Geom. 8.3（2010），第267–298页。[CELN17] K. Cieliebak、T. Ekholm、J. Latschev 和 L. Ng。《纽结接触同调、弦拓扑与弦代数》。J. ´Ec. polytech. Math. 4（2017），第661–780页。[Dim16a] G. Dimitroglou Rizell。《勒让德环境手术与 Legendrian 接触同调》。J. Symplectic Geom. 14.3（2016），第811–901页。[Dim16b] G. Dimitroglou Rizell。《将伪全纯多边形提升至 $P \times \mathbb{R}$ 的辛化及其应用》。Quantum Topol. 7.1（2016），第29–105页。[EES05] T. Ekholm、J. Etnyre 和 M. Sullivan。《$\mathbb{R}^{2n+1}$中 Legendrian 子流形的接触同调》。J. Differential Geom. 71.2（2005），第177–305页。[EES07] T. Ekholm、J. Etnyre 和 M. Sullivan。《$P \times \mathbb{R}$中的 Legendrian 接触同调》。Trans. Amer. Math. Soc. 359.7（2007），第3301–3335页。[EHK16] T. Ekholm、K. Honda 和 T. K´alm´an。《勒让德纽结与精确拉格朗日协边》。J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 18.11（2016），第2627–2689页。[EL23] T. Ekholm 和 Y. Lekili。《拉格朗日与 Legendrian 不变量之间的对偶性》。Geom. Topol. 27.6（2023），第2049–2179页。[ENS18] T. Ekholm、L. Ng 和 V. Shende。《由接触同调得到的一个完备结不变量》。Invent. Math. 211.3（2018），第1149–1200页。[ES19] T. Ekholm 和 V. Shende。《支架上的 skein》。arXiv 预印本 arXiv:1901.08027（2019）。[FMP20] E. Fern´andez、J. Mart´ınez-Aguinaga 和 F. Presas。《形式 Legendrian 嵌入空间与水平嵌入空间的基本群》。Algebr. Geom. Topol. 20.7（2020），第3219–3312页。[Gol22] R. Golovko。《关于球形自旋结存在无穷多个精确拉格朗日填充的一则注记》。Pacific J. Math. 317.1（2022），第143–152页。[Hat02] A. Hatcher。《结的拓扑模空间》。载于：2002年。URL：https://api.semanticscholar.org/CorpusID:8472234。[Hat83] A. E. Hatcher。《斯梅尔猜想的证明，$\mathrm{Diff}(S^3) \simeq O(4)$》。Annals of Mathematics 117.3（1983），第553–607页。[Kal04] T. Kalm´an。《接触同调与勒让德结的单参数族》。Geometry & Topology 9（2004），第2013–2078页。[Mar24] J. Mart´ınez-Aguinaga。《关于纽结参数族的勒让德实现》。arXiv 预印本 arXiv:2406.04293（2024）。[Ng05] L. Ng。《从接触同调得到的纽结与辫子不变量 II》。Geom. Topol. 9（2005）。附录由作者与 Siddhartha Gadgil 撰写，第1603–1637页。[Ng06] L. Ng。《平面曲线与接触几何》。载于：G ¨okova 几何拓扑会议 2005 论文集。G¨okova 几何/拓扑会议（GGT），G¨okov

a,

2006年，第165–174页。[Ng08] L. Ng.《带框结接触同调》。《杜克数学杂志》141卷第2期（2008年），第365–406页。[Oka25a] Y. Okamoto.《高维中非同位的勒让德单位余法丛》。《拓扑学杂志》18卷第3期（2025年），论文编号 e70039。

[Oka25b] Y. Okamoto.《迈向对单位余法丛的 Legendrian 接触同调的拓扑描述》。*Algebr. Geom. Topol.*25.2（2025年），第951–1027页。[SS16] J. M. Sabloff 和 M. G. Sullivan.《通过生成族构造 Legendrian 子流形族》。*Quantum Topol.* 7.4（2016年），第639–668页。[She19] V. Shende.《余法环面是一个完备的结不变量》。*Forum Math. Pi*7（2019年），e6，16页。Yukihiro Okamoto：东京都立大学数学科学系，南大泽，八王子，东京，192-0397，日本电子邮件地址：yukihiro@tmu.ac.jp Mari´an Poppr电子邮件地址：marianpoppr@centrum.cz